第一章习题解答

5. 即$z^2 = z\overline{z}$, 这等价于$z(z-\overline{z})=0$, 这又等价于$z=\overline{z}$, 即$z\in R$.

6. 令$h(a)=\max_{|z|\le 1}|z^n+a|$. 当$a=0$时，显然有$h(a)=1$. 设$a\ne 0$, 则由

$$|z^n+a| \le |z^n|+|a| = |z|^n+|a| \le 1+|a|, \tag{0.1}$$

知$h(a)\le 1+|a|$.

且当（1）的两个不等式同时取等号时等号成立。而（1）的第一个等号成立当且仅当z^n与a同向，即存在正数$k>0$, 使

$$z^n = ka, \tag{0.2}$$

而（1）的第二个等号成立当且仅当

$$|z|=1, \tag{0.3}$$

将（3）代入（2），得$1=k|a|$, 即$k=\frac{1}{|a|}$. 将此代入（2），得

$$z^n = \frac{a}{|a|} = \frac{|a|e^{i\arg a}}{|a|} = e^{i\arg a},$$

由此可得

$$z = z_k = e^{i\frac{\arg a + 2(k-1)\pi}{n}}, \qquad k=1,2,\cdots,n.$$

由上面的讨论可知，当$a=0$时，$\max_{|z|\le 1}|z^n+a|=1$, 这时$z=e^{i\theta}$, $\quad\theta\in[0,2\pi)$. 当$a\ne 0$时，$\max_{|z|\le 1}|z^n+a|=1+|a|$, 这时$z=z_k=e^{i\frac{\arg a+2(k-1)\pi}{n}}$, $\qquad k=1,2,\cdots,n$.

11. 证明：

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$$

$$=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$$

$$=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$$

$$=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$$

$$=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

几何意义：平行四边形四边长度的平方和等于其对角线长度的平方和。

19. 此题可推广到$|z_k|=r>0, k=1,2,3.$ 因$z_1+z_2+z_3=0$, 得$|z_1+z_2|=|-z_3|=|z_3|=r$, 代入到11题，得$|z_1-z_2|^2=2(r^2+r^2)-r^2=3r^2$, 类似可得$|z_1-z_3|^2=|z_2-z_3|^2=3r^2$. 即$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=\sqrt{3}r$. 因而三角形是等边三角形。

另一种证法课上讲。

23. 因平面上任一直线均可写成$Ax+By+C=0$, 这里$A,B,C\in R$且不全为零。由$x=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$, 代入上式，得

$\frac{A-Bi}{2}z+\frac{A+Bi}{2}\overline{z}+C=0$, 令$a=\frac{A+Bi}{2}, c=C$即得$a\overline{z}+\overline{a}z+c=0$.

24. 因圆的方程可写为$x^2+y^2+Ax+By+C=0$, 由$x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}$和23题，可得$x^2+y^2+Ax+By+C=z\overline{z}+a\overline{z}+\overline{a}z+c=0$.

29. 因$f(z_0)\neq 0$, 令$|f(z_0)|=2\epsilon$, 则$\epsilon>0$. 因$f(z)$在z_0连续，知存在$\delta>0$, 使$|z-z_0|<\delta$时，有

$||f(z)|-|f(z_0)||\leq|f(z)-f(z_0)|<\epsilon=\frac{|f(z_0)|}{2}$, 这等价于当$|z-z_0|<\delta$时，有$0<\frac{|f(z_0)|}{2}<|f(z)|<\frac{3|f(z_0|}{2}$.

30. 因$A\in C$, 知$|A|<+\infty$, 又因$\lim_{z\to z_0}f(z)=A$, 知存在$\delta>0$,当$0<|z-z_0|<\delta$时有$||f(z)|-|A||\leq|f(z)-A|<1$, 这意味着当$0<|z-z_0|<\delta$时有$|f(z)|<|A|+1$, 令$M=|A|+1$即可。

附录

命题： 设$f(z)=z^n+\sum_{k=1}^{n}c_kz^{n-k}$。证明：$f(z)$为分圆多项式的充要条件是$f(z)$的$n$个零点为圆内接正$n$边形的$n$个顶点。

证明：必要性。设$f(z)$是分圆多项式，则有$f(z)=z^n+c_n$。这时$f(z)=0$当且仅当$z^n=-c_n$，即

$$z=z_k=|c_n|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

由此可得

$$|z_k|=|c_n|^{\frac{1}{n}},\qquad \arg z_{k+1}-\arg z_k=\arg\frac{z_{k+1}}{z_k}=\frac{2\pi}{n},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

即点$z_1,z_2,\cdots,z_n$构成圆内接正n边形的n个顶点。必要性得证。

充分性。设$f(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$的$n$个零点$z_1,z_2,\cdots,z_n$构成圆内接正$n$边形的$n$个顶点，则$z_k=re^{i\theta_k}$，这里$\theta_k=\frac{\phi_0+2(k-1)\pi}{n}$，$k=1,2,\cdots,n$ 且ϕ_0是实常数。再令$g(z)=z^n+(-1)^n\prod_{k=1}^{n}z_k$. 则有

$$\begin{aligned}
g(z_k)&=z_k^n+(-1)^nr^ne^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k}\\
&=z_k^n+(-1)^nr^ne^{i(n\phi_0+\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1))}\\
&=z_k^n+(-1)^nr^ne^{i(n\phi_0+(n-1)\pi)}\\
&=z_k^n+(-1)^nr^n(-1)^{n-1}e^{i(n\phi_0)}\\
&=z_k^n-r^ne^{i(n\phi_0)}\\
&=r^ne^{i(n\theta_k)}-r^ne^{i(n\phi_0)}\\
&=r^ne^{i(n\phi_0+2(k-1)\pi)}-r^ne^{i(n\phi_0)}\\
&=r^ne^{i(n\phi_0)}-r^ne^{i(n\phi_0)}\\
&=0.
\end{aligned}$$

即$g(z_k)=0$，$k=1,2,\cdots,n$. 由于$f(z)$和$g(z)$均是n次多项式，且z^n的系数均为1(首一多项式)，因而有$f(z)\equiv g(z)$. 充分性得证。

命题得证。□