第四章部分习题解答及提示

4，5，7，9，10，11，（1，2，6），12（1，23），16（1，3，5）

其中第7题改为：

7. 设$c_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in R, n \geq 0$. 若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径是$R$, 级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$的收敛半径是$R_1$, 级数$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$的收敛半径是$R_2$, 证明$R = \min\{R_1, R_2\}$.

另外，原题中的提示$<$应改为$\leq$.

第8题改为：

设$r > 0$, 若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$收敛，而$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n = +\infty$, 证明级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径是$r$.

第7题的证明：

不妨设$R_1 \leq R_2$, 则$\min\{R_1, R_2\} = R_1$. 若$|z| < R_1$, 则$|z| < R_2$, 由收敛半径的定义知，级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 和级数$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ 绝对收敛，即$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < +\infty$ 和$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| < +\infty$, 这意味着

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| < +\infty,$$

即级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，再由收敛半径的定义知$R \geq R_1 = \min\{R_1, R_2\}$.

若$|z| < R$, 由收敛半径的定义知级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，而即$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| < +\infty$. 但$|a_n| \leq |c_n|$, 故$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < +\infty$, 这意味着$R_1 \geq R$, 即$\min\{R_1, R_2\} \geq R$.

综上所述，$R = \min\{R_1, R_2\}$. 本题得证。

第9题的证明：

设级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径为$R$. 因级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$收敛，由Abel定理知当$|z| < r$时，级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，再由收敛半径的定义知$R \geq r$. 若$R > r$, 则由收敛半径的定义知级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$绝对收敛, 即$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n < +\infty$, 这与已知矛盾, 故$R \leq r$. 综上所述，得$R = r$. 本题得证。

第10题的证明：

因级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$绝对收敛，知$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z_0^n| = M_0 < +\infty$, 因而当$|z| \leq |z_0| = R$时，有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z_0^n| = M_0 < +\infty,$$

即级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，本题得证。