复变函数开卷试题

2020 年 11 月-12 月

班级：软件 91
姓名：李金鹏
学号：2019013254
邮箱：lijp19@mails.tsinghua.edu.cn

1、(10 分) 设 z_1, z_2, z_3 是复平面上三个相异的点且不共线，用 z_1, z_2, z_3 表示出△$z_1z_2z_3$ 的外接圆圆心 z_0 的坐标，并证明：当$z_0=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$时, △$z_1z_2z_3$ 是正三角形且求出外接圆半径r。

解：根据外心的定义，有

$$|z_0-z_1|=|z_0-z_2|=|z_0-z_3|=r$$

将三个式子等式两边分别平方后可得：

$$|z_0-z_k|^2=r^2, k=1,2,3$$

结合$|z_0-z_k|^2=(z_0-z_k)\overline{(z_0-z_k)}$，将上式展开并整理可得

$$\begin{cases}\overline{z_1}z_0+z_1\overline{z_0}+(r^2-|z_0|^2)=|z_1|^2\\ \overline{z_2}z_0+z_2\overline{z_0}+(r^2-|z_0|^2)=|z_2|^2\\ \overline{z_3}z_0+z_3\overline{z_0}+(r^2-|z_0|^2)=|z_3|^2\end{cases}$$

将其看成关于$z_0, \overline{z_0}, (r^2-|z_0|^2)$的三元一次方程组，由于 z_1, z_2, z_3 互异且不共线，因而

$\begin{vmatrix}\overline{z_1} & z_1 & 1\\ \overline{z_2} & z_2 & 1\\ \overline{z_3} & z_3 & 1\end{vmatrix}\neq 0$，进而由 Cramer 法则可得外心的显示计算式如下：

$$z_0=\frac{\begin{vmatrix}|z_1|^2 & z_1 & 1\\ |z_2|^2 & z_2 & 1\\ |z_3|^2 & z_3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overline{z_1} & z_1 & 1\\ \overline{z_2} & z_2 & 1\\ \overline{z_3} & z_3 & 1\end{vmatrix}}$$

下面证明：当$z_0=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$时, △$z_1z_2z_3$ 是正三角形，并求出其外接圆半径 r。

先证明一个引理：对于$\boldsymbol{z_1, z_2, z}$，若，$\boldsymbol{2z-z_1-z_2}$ 与 $\boldsymbol{z_1-z_2}$垂直 $\boldsymbol{\Leftrightarrow |z-z_1|=|z-z_2|}$。

证明：$2z-z_1-z_2$与 z_1-z_2垂直$\Leftrightarrow$ $(2z-z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}+\overline{(2z-z_1-z_2)}(z_1-z_2)=0$

$\Leftrightarrow$ $z\overline{z_1}-z\overline{z_2}+\bar{z}z_1-\bar{z}z_2-|z_1|^2+|z_2|^2=0$ $\Leftrightarrow$ $(z-z_1)\overline{(z-z_1)}=(z-z_2)\overline{(z-z_2)}$

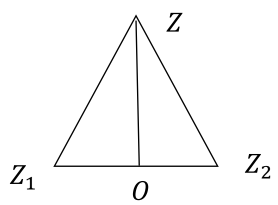
$\Leftrightarrow$ $|z-z_1|=|z-z_2|$，证毕

由外心定义可知，$|z_0-z_1|=|z_0-z_2|$，所以$2z_0-z_1-z_2$ 与 z_1-z_2垂直。又$z_0=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$

所以$2z_0-z_1-z_2=\frac{2z_3-z_1-z_2}{3}$, 故$2z_3-z_1-z_2$与$z_1-z_2$垂直，因而$|z_3-z_1|=|z_3-z_2|$，同理有$|z_2-z_1|=|z_2-z_3|, |z_1-z_3|=|z_1-z_2|$, 因此，△$z_1z_2z_3$ 三边相等，故为等边三角形。

此时，外接圆半径$r=|z_1-z_0|=\frac{|2z_1-z_2-z_3|}{3}$。

<u>**附：对所用引理的几何解释：**</u>



在三角形ZZ_1Z_2中，O是Z_1Z_2中点。$2Z-Z_1-Z_2$与线段ZO共线，Z_1-Z_2与线段Z_1Z_2共线。当ZO与Z_1Z_2垂直时，ZO为Z_1Z_2的垂直平分线，故$|ZZ_1|=|ZZ_2|$；另一方面，当$|ZZ_1|=|ZZ_2|$时，$\triangle ZZ_1O$与$\triangle ZZ_2O$全等（SSS），可得ZO垂直Z_1Z_2。

2、（10 分）用不同于（充分必要都不同于习题解答）的方法，证明:$f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$的 n 个根构成（圆内接）正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是$f_n(z)=z^n+c_n$。这里$|z_k|=r>0,k=1,2\ldots n,c_n\neq 0$。

解：由$|z_k|=r>0$可知该 n 边形外接圆以原点为圆心。

充分性（用边相等证）：方程$f_n(z)=z^n+c_n$的 n 个根为

$$z_k=|c_n|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{2k\pi-\arg(c_n)}{n}\right)+isin\left(\frac{2k\pi-\arg(c_n)}{n}\right)\right),k=0,1,\ldots,n-1$$

为 n 个模长为$|c_n|^{\frac{1}{n}}$且辐角主值互不相同的n个互异的根。

而$|z_k-z_{k+1}|$

$$=|c_n|^{\frac{1}{n}}\sqrt{\left(\cos\left(\frac{2k\pi-\arg(c_n)}{n}\right)-\cos\left(\frac{2(k+1)\pi-\arg(c_n)}{n}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2k\pi-\arg(c_n)}{n}\right)-\sin\left(\frac{2(k+1)\pi-\arg(c_n)}{n}\right)\right)^2}$$

$$=|c_n|^{\frac{1}{n}}\sqrt{2-2\cos\left(\frac{2k\pi-\arg(c_n)}{n}-\frac{2(k+1)\pi-\arg(c_n)}{n}\right)}$$

$$=|c_n|^{\frac{1}{n}}\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$=2|c_n|^{\frac{1}{n}}\left|sin\frac{\pi}{n}\right|$$

由此可见，$|z_k-z_{k+1}|$的值与k无关，即以$z_k(k=0,1\ldots n-1)$终点为顶点的n边形任意相邻两条边长度均相等（这里不难看出z_n就是z_0）。故该 n 边形为以原点为中心的（圆内接）正n边形。

必要性：若$f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$ ，的n个根构成以原点为中心的（圆内接）正n边形的n个顶点，设这n个根为$z_k,k=0,1,\ldots,n-1$, 设n次单位根$\omega=e^{\frac{2\pi}{n}}$, 考虑$y_k=\omega z_k,k=0,1,\ldots,n-1$, 这$n$个复数是在原$n$个根的基础上逆时针旋转$\varphi=\frac{2\pi}{n}$角度后得到的，由于$z_k,k=0,1\ldots n-1$是以原点为圆心，相邻两个根之间相差$\varphi=\frac{2\pi}{n}$角度的$n$个复数，因而$y_k,k=0,1\ldots n-1$与$z_k,k=0,1\ldots n-1$ 对应相等（$y_k=z_{k+1}$, 这里不难看出z_n就是z_0）。设$y=\omega z$，由

$$z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0 \text{ ①}$$

可得

$$\left(\frac{y}{\omega}\right)^n + c_1\left(\frac{y}{\omega}\right)^{n-1} + c_2(\frac{y}{\omega})^{n-2} + \cdots + c_{n-1}(\frac{y}{\omega}) + c_n = 0$$

又$\omega^n = 1$, 上式可化为：

$$y^n + \omega c_1 y^{n-1} + \omega^2 c_2 y^{n-2} + \cdots + \omega^{n-1} c_{n-1} y + c_n = 0 \quad ②$$

又①式与②式所有解都相同，故它们的对应系数成比例，$\omega^k c_k = c_k, k = 1,2,\dots,n-1$。又$\omega^k \neq 1$，$k = 1,2,\dots,n-1$, 所以$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$。于是$f_n(z) = z^n + c_n$得证。

3、（20 分）设z_1, z_2, z_3, z_4是复平面上四个相异的点，定义其交比为$< z_1, z_2, z_3, z_4 >$为$< z_1, z_2, z_3, z_4 > = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} / \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}$。利用直线$l: z = z_0 + t\alpha, \alpha \neq 0, t \in R$和圆周$C_r: z = z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0,2\pi], r > 0$的参数方程，求证$z_1, z_2, z_3, z_4$共线或共圆的充要条件是$< z_1, z_2, z_3, z_4 > \in R$（并具体给出共线或者共圆的条件），由此得到 n（n≥4）个相异的点$z_1, z_2, \dots, z_n$（其中任意 3 个不共线）共圆的充要条件。

解：必要性：

当z_1, z_2, z_3, z_4共线时，有$z_k = z_0 + t_k\alpha, k = 1,2,3,4, t_k \in R$, 则

$$< z_1, z_2, z_3, z_4 > = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} = \frac{(t_4\alpha - t_1\alpha)(t_3\alpha - t_2\alpha)}{(t_4\alpha - t_2\alpha)(t_3\alpha - t_1\alpha)} = \frac{(t_4 - t_1)(t_3 - t_2)}{(t_4 - t_2)(t_3 - t_1)} \in R$$

当z_1, z_2, z_3, z_4共圆时，有$z_k = z_0 + re^{i\theta_k}, k = 1,2,3,4. r, \theta_k \in R$, 则

$$< z_1, z_2, z_3, z_4 > = \frac{\left(e^{i\theta_4} - e^{i\theta_1}\right)\left(e^{i\theta_3} - e^{i\theta_2}\right)}{\left(e^{i\theta_4} - e^{i\theta_2}\right)\left(e^{i\theta_3} - e^{i\theta_1}\right)} = \frac{\left(e^{i(\theta_4 - \theta_1)} - 1\right)\left(e^{i(\theta_3 - \theta_2)} - 1\right)}{\left(e^{i(\theta_4 - \theta_2)} - 1\right)\left(e^{i(\theta_3 - \theta_1)} - 1\right)}$$

注意到

$$e^{i\theta} - 1 = cos\theta - 1 + isin\theta = 2isin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}$$

于是有：

$$< z_1, z_2, z_3, z_4 > = \frac{2isin\frac{(\theta_4 - \theta_1)}{2}e^{i\frac{(\theta_4 - \theta_1)}{2}}2isin\frac{(\theta_3 - \theta_2)}{2}e^{i\frac{(\theta_3 - \theta_2)}{2}}}{2isin\frac{(\theta_4 - \theta_2)}{2}e^{i\frac{(\theta_4 - \theta_2)}{2}}2isin\frac{(\theta_3 - \theta_1)}{2}e^{i\frac{(\theta_3 - \theta_1)}{2}}}$$

$$= \frac{sin\frac{(\theta_4 - \theta_1)}{2}sin\frac{(\theta_3 - \theta_2)}{2}}{sin\frac{(\theta_4 - \theta_2)}{2}sin\frac{(\theta_3 - \theta_1)}{2}} \in R$$

充分性：

考察$\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$

若$\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\in R$，设$\alpha=z_3-z_1\neq 0,\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=m\neq 1$,则$z_3-z_2=m\alpha$。因此

$$\begin{cases} z_1=z_3-\alpha \\ z_2=z_3-m\alpha \\ z_3=z_3 \end{cases}$$

z_1,z_2,z_3均满足$z=z_3+t\alpha$, 故z_1,z_2,z_3共线。

又$<z_1,z_2,z_3,z_4>=\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{(z_4-z_2)(z_3-z_1)}\in R$

故$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\in R$，同理可证$z_1,z_2,z_4$共线。

因而z_1,z_2,z_3,z_4共线。

若$\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\notin R$，先证$z_1,z_2,z_3$三点不共线。不妨证其逆否命题，若$z_1,z_2,z_3$三点共线，结合$z_k=z_0+t_k\alpha,k=1,2,3,t_k\in R$，则$\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{t_3\alpha-t_2\alpha}{t_3\alpha-t_1\alpha}=\frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}\in R$，成立。故$z_1,z_2,z_3$三点不共线，则这三点可唯一确定一个外接圆，设该圆为$z=z_0+re^{i\theta}$，$z_k=z_0+re^{i\theta_k},k=1,2,3,$ 其中z_0为圆心，r为半径。设$p=|z_4-z_0|$, 则$z_4=z_0+pe^{i\theta_4}$。$\theta_k\in[0,2\pi),k=1,2,3,4$, 并控制$|\theta_1-\theta_2|\leq\pi$（取二者小于$\pi$的那个夹角）。下面只需证明$p=r$即可说明四点共圆。

$$<z_1,z_2,z_3,z_4>=\frac{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}\right)\left(re^{i\theta_3}-re^{i\theta_2}\right)}{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}\right)\left(re^{i\theta_3}-re^{i\theta_1}\right)}=\frac{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}\right)2isin\frac{(\theta_3-\theta_2)}{2}e^{i\frac{(\theta_3-\theta_2)}{2}}}{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}\right)2isin\frac{(\theta_3-\theta_1)}{2}e^{i\frac{(\theta_3-\theta_1)}{2}}}$$

$$=\frac{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}\right)sin\frac{(\theta_3-\theta_2)}{2}e^{i\frac{(\theta_3-\theta_2)}{2}}}{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}\right)sin\frac{(\theta_3-\theta_1)}{2}e^{i\frac{(\theta_3-\theta_1)}{2}}}\in R$$

$$=>\frac{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}\right)e^{i\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}}{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}\right)e^{i\frac{\theta_1-\theta_3}{2}}}=\frac{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}\right)}{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}\right)}e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\in R$$

这说明

$$arg\ \frac{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}\right)}{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}\right)}=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

又

$$\frac{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}\right)}{\left(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}\right)}=\frac{re^{i(\theta_1-\theta_4)}-p}{re^{i(\theta_2-\theta_4)}-p}$$

将复数形式展成三角形式，并分母实数化后得上式

$$=\frac{A_1+iA_2}{(rcos(\theta_2-\theta_4)-p)^2+r^2sin^2(\theta_2-\theta_4))}$$

其中

$$A_1=r^2\cos(\theta_1-\theta_2)-pr(\cos(\theta_1-\theta_4)+\cos(\theta_2-\theta_4))+p^2$$

$$A_2=r^2\sin(\theta_1-\theta_2)+pr(\sin(\theta_2-\theta_4)-\sin(\theta_1-\theta_4))$$

当$|\theta_1-\theta_2|<\pi$时，由于

$$\frac{A_2}{A_1}=tan\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{1+\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

将A_1,A_2代入移项整理得

$$r^2\sin(\theta_1-\theta_2)-p^2\sin(\theta_1-\theta_2)=0$$

由于$\theta_1\neq\theta_2$(否则z_1,z_2重合，矛盾)，故$p=r(p,r>0,p,r\in R)$.

当$|\theta_1-\theta_2|=\pi$时, 由于$arg\,\frac{(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_1})}{(pe^{i\theta_4}-re^{i\theta_2})}=\pm\frac{\pi}{2}$，故实部为 0，得

$$A_1=r^2\cos(\theta_1-\theta_2)-pr(\cos(\theta_1-\theta_4)+\cos(\theta_2-\theta_4))+p^2=0$$

代入$|\theta_1-\theta_2|=\pi\quad =>\ -r^2+p^2=0\ =>\ \ p=r(p,r>0,p,r\in R)$.

综上， $z_4=z_0+re^{i\theta_4}$. 所以z_1,z_2,z_3,z_4四点共圆，证毕。

总结可知：z_1,z_2,z_3,z_4共线的充要条件$\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\in R$且$<z_1,z_2,z_3,z_4>\in R$；$z_1,z_2,z_3,z_4$共圆的充要条件$\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\notin R$且$<z_1,z_2,z_3,z_4>\in R$。

由上述可知，n（n≥4）个相异的点$z_1,z_2,\dots,z_n$（其中任意 3 个不共线，=> $\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\notin R$）共圆的充要条件$<z_1,z_2,z_3,z_k>\in R$对任意$k=4,\dots,n$成立。

4.（20 分）$D_n=\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$是复平面上 n 个相异的点构成的点集并满足$|z_k|=r>0,k=1,2,\dots,n$, 令$f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n-\sigma_1z^{n-1}+\sigma_2z^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}z+(-1)^n\sigma_n$.

证明：当$n \geq 3$时，D_n构成正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件是$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0$. $m = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, n\text{为奇数} \\ \frac{n}{2}，n\text{为偶数} \end{cases}$。并证明：m 不能被更小的正整数所取代。

解：必要性：若D_n构成正 n 多边形的 n 个顶点，又因为这 n 个点模长相等，所以该多边形以原点为中心正 n 边形，根据第 2 题的等价关系，可知$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0$.

充分性：$f_n(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} z + (-1)^n \sigma_n$, 由多项式根与系数的关系可知

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_k}, k = 1,2,\ldots,n$$

又由$|z_k|^2 = z_k \overline{z_k} = r^2$，可知

$$\sigma_{n-k} = \frac{z_1 z_2 \ldots z_n}{r^{2k}} \overline{\sigma_k}$$

当n为奇数时，$\sigma_k = 0, \sigma_{n-k} = \frac{z_1 z_2 \ldots z_n}{r^{2k}} \overline{\sigma_k} = 0, k = 1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$,故$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0$.

当n为偶数时，$\sigma_k = 0, \sigma_{n-k} = \frac{z_1 z_2 \ldots z_n}{r^{2k}} \overline{\sigma_k} = 0, k = 1,2,\ldots,\frac{n}{2}$，故$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0$.

由第 2 题的等价条件可知，D_n构成正 n 多边形的 n 个顶点，且以原点为中心。

下面证明m不能被更小的整数取代。

说明：要证m不能被更小的整数取代，只需证m不能被$m-1$取代即可，因为m的值若更小，为$m-k, k \geq 2$, 只需令$\sigma_{m-k} = \cdots = \sigma_{m-1} = 0$即可转化为$m-1$的情况。

证明：当n为偶数时，令m减小 1，则$f_n(z) = z^n - (1+i) z^{\frac{n}{2}} + i = \left(z^{\frac{n}{2}} - 1\right)\left(z^{\frac{n}{2}} - i\right)$满足$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0$. 而$f_n^{(1)}(z) = n z^{\frac{n}{2}} \left(z^{\frac{n}{2}-1} - \frac{1+i}{2}\right)$与$f_n(z)$互素，（无次数大于 0 的公因式），因此$f_n(z) = 0$无重根，又$|z_k| = 1 > 0, k = 1,2,\ldots,n$, 满足条件，但根据第 2 题的等价条件可知$D_n$不能构成正 n 多边形的 n 个顶点。

当n为奇数时，令m减小 1，则$f_n(z) = z^n - e^i z^{\frac{n+1}{2}} - z^{\frac{n-1}{2}} + e^i = \left(z^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)\left(z^{\frac{n-1}{2}} - e^i\right)$

满足$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0$.分别令两个因式为 0，则$f_n(z)$的 n 个根为$e^{i\varphi}$，$\varphi$的集合为：

$$\left\{\frac{2}{n-1},\frac{2(2\pi+1)}{n-1},\dots,\frac{2\big((n-3)\pi+1\big)}{n-1}\right\}\cup\left\{0,\frac{4\pi}{n+1},\dots,\frac{4(n-1)\pi}{n+1}\right\}$$

经观察不难发现这两个集合之间没有相等的元素。故$f_n(z)$的没有重根，且根的模长均为1，满足条件，但根据第 2 题的等价条件可知D_n不能构成正n多边形的n个顶点。

综上可知，$\boldsymbol{m}$不能被更小的整数取代。

<u>**附：构造思路：**</u>选取两个没有重边的边数更少的正多边形（可以通过其中一个小正多边形旋转一个小角度来构造另一个）拼成一个大的 n 边形，这个 n 边形满足本题条件，但不为正多边形。

5.（10 分）$D_n=\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$是复平面上 n 个相异的点构成的点集，$f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$.给出$D_n$构成某一正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件并给予证明，同时求出外接圆圆心及半径$r(>0)$。

解：此充要条件为：$\boldsymbol{c_k=C_n^k(\frac{c_1}{n})^k,k=1,2,\dots,n-1}$。

证明：该n边形的重心$z_0=\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}$。由于平移变换不改变图形形状，故可以平移该正多边形使其重心与原点重合，令$y_k=z_k-z_0,k=1,2\dots n$为平移后的n个相异点。再根据第 2 题的等价关系，可知，D_n构成某一正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件是对于多项式

$$\begin{aligned}g_n(y)&=\prod_{k=1}^{n}(y-y_k)\\&=(y+z_0)^n+c_1(y+z_0)^{n-1}+c_2(y+z_0)^{n-2}+\cdots+c_{n-1}(y+z_0)+c_n.\end{aligned}$$

除了常数项以及最高次项以外，其他项系数均为 0.

由$f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$.根与系数的关系可知，

$z_1+z_2+\cdots+z_n=-c_1$, 所以$z_0=\frac{-c_1}{n}$。

因此

$$g_n(z)=\left(y-\frac{c_1}{n}\right)^n+c_1\left(y-\frac{c_1}{n}\right)^{n-1}+c_2\left(y-\frac{c_1}{n}\right)^{n-2}+\cdots+c_{n-1}\left(y-\frac{c_1}{n}\right)+c_n$$

根据$g_n(y)$除了常数项以及最高次项以外，其他项系数均为 0，有

$c_1-\frac{C_n^1c_1}{n}=0$得出$c_1=C_n^1\frac{c_1}{n}$；同理$c_2-c_1C_{n-1}^1\frac{c_1}{n}+C_n^2(\frac{c_1}{n})^2=0$得出$c_2=C_n^2(\frac{c_1}{n})^2$

由此猜想$c_k=C_n^k(\frac{c_1}{n})^k$

下面证明此猜想正确：当$c_k=C_n^k(\frac{c_1}{n})^k, k=1,2\ldots,n-1$时，只需证明$g_n(y)$除了常数项以及最高次项以外，其他项系数均为 0。

考虑y^{n-k}项的系数d_{n-k}。

当k为奇数时，

$$d_{n-k}=-C_n^k(\frac{c_1}{n})^k+c_1C_{n-1}^{k-1}(\frac{c_1}{n})^{k-1}-c_2C_{n-2}^{k-2}(\frac{c_1}{n})^{k-2}+\cdots+(-1)^ic_iC_{n-i}^{k-i}(\frac{c_1}{n})^{k-i}+\cdots+c_k$$

$$=-C_n^k(\frac{c_1}{n})^k+C_n^1C_{n-1}^{k-1}(\frac{c_1}{n})^k-C_n^2C_{n-2}^{k-2}(\frac{c_1}{n})^k+\cdots+(-1)^iC_n^iC_{n-i}^{k-i}(\frac{c_1}{n})^k+\cdots+C_n^k(\frac{c_1}{n})^k$$

$$=(\frac{c_1}{n})^k(-C_n^k+C_n^1C_{n-1}^{k-1}-C_n^2C_{n-2}^{k-2}+\cdots+(-1)^iC_n^iC_{n-i}^{k-i}+\cdots+C_n^k)$$

由于$C_n^iC_{n-i}^{k-i}=\frac{n!}{(n-k)!}\frac{C_k^i}{k!}$，结合$C_k^i-C_k^{k-i}=0$

上式$=(\frac{c_1}{n})^k\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\sum_{i=0}^k(-1)^{i+1}C_k^i\right)=0$

当k为偶数时，结合二项式展开

$$d_{n-k}=(\frac{c_1}{n})^k\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\sum_{i=0}^k(-1)^i\,C_k^i\right)$$

$$=(\frac{c_1}{n})^k\frac{n!}{(n-k)!\,k!}(1-1)^k=0$$

综上，猜想$c_k=C_n^k(\frac{c_1}{n})^k$成立。

由上述可知，$c_k=C_n^k(\frac{c_1}{n})^k, k=1,2,\ldots,n-1$均成立是$D_n$构成某一正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件。

此时

$$f_n(z)=z^n+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k(\frac{c_1}{n})^k z^{n-k}+c_n=\left(z+\frac{c_1}{n}\right)^n+c_n-(\frac{c_1}{n})^n.$$

依此可以看出，外接圆圆心为$z_0=\frac{-c_1}{n}$，半径$r=|c_n-(\frac{c_1}{n})^n|^{\frac{1}{n}}$.

6.（10+10+10=30 分）利用$sinz=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),cosz=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$,证明：

（1）$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}-\frac{\zeta(2n-2)}{3!\pi^{2n-2}}+\frac{\zeta(2n-4)}{5!\pi^{2n-4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2)}{(2n-1)!\pi^2}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0,n\geq 2.$

（2）$\frac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}}\zeta(2n)-\frac{2^{2n-2}-1}{2!\pi^{2n-2}}\zeta(2n-2)+\frac{2^{2n-4}-1}{4!\pi^{2n-4}}\zeta(2n-4)+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2^2-1)}{(2n-2)!\pi^2}\zeta(2)+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0,n=1,2,3\ldots$

（3）令$a_n=\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}},n=1,2,3\ldots$证明：$\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}a_k,n\geq 2,a_1=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$, 并求出$a_1,a_2\ldots a_6$的分数表达式。

解：（1）在$sinz=z\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$ 等号两边同时取对数得

$$\ln|sinz|=\ln|z|+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left|1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right|$$

两侧同时求导得

$$cotz=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

两边同时乘以z, 下面只考虑$|z|$在 0 附近下式的性质，不妨设$|z|<\pi$, 则：

$$zcotz=1+2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{z^2}{z^2-m^2\pi^2}$$

$$=1-2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\frac{z^2}{m^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}}$$

由公比小于 1 的等比级数求和公式，可知上式

$$=1-2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right)^n$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right)^n$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n}$$

两边同乘$\frac{sinz}{z}$, 利用$sinz,cosz$在 0 处展开的泰勒级数得到

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}(1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}(1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

考虑两侧z^{2n}的系数应该相等，得到

$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\zeta(2k)}{(2n+1-2k)!\,\pi^{2k}}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

移项并化简得到了

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\zeta(2k)}{(2n+1-2k)!\,\pi^{2k}}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0$$

也就是

$$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}-\frac{\zeta(2n-2)}{3!\,\pi^{2n-2}}+\frac{\zeta(2n-4)}{5!\,\pi^{2n-4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2)}{(2n-1)!\,\pi^2}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0$$

得证。

（2）在$cosz=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$两边取对数得到

$$\ln|cosz|=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left|\left(1-\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)\right|$$

两边同时求导得到

$$tanz=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2z}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2}$$

两边同时乘z并作如下转化，下面只考虑$|z|$在 0 附近下式的性质，不妨设$|z|<\frac{\pi}{2}$, 则：

$$ztanz=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2z^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2}$$

也就是

$$=2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\frac{z^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}}$$

$$=2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right)^2$$

$$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right)^2$$

$$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^{2n}}$$

$$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}z^{2n}}{\pi^{2n}}(\zeta(2n)-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m)^{2n}})$$

$$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}z^{2n}}{\pi^{2n}}(\zeta(2n)-\frac{1}{2^{2n}}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^{2n}})$$

$$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}z^{2n}}{\pi^{2n}}(\zeta(2n)-\frac{1}{2^{2n}}\zeta(2n))$$

$$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2^{2n}-1)z^{2n}}{\pi^{2n}}\zeta(2n)$$

两边同时乘以$cosz$, 并代入$sinz, cosz$在 0 处的泰勒级数，

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2^{2n}-1)z^{2n}}{\pi^{2n}}\zeta(2n)=z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

考虑到等式两侧z^{2n}的系数应相等，有

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{(2^{2k}-1)\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2^{2k}-1)\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0$$

也就是

$$\frac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}}\zeta(2n)-\frac{2^{2n-2}-1}{2!\,\pi^{2n-2}}\zeta(2n-2)+\frac{2^{2n-4}-1}{4!\,\pi^{2n-4}}\zeta(2n-4)+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}(2^2-1)}{(2n-2)!\,\pi^2}\zeta(2)+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0$$

得证。

（3）由（1）得

$$zcotz=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n}=\frac{1-zcotz}{2}$$

也就是

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^{2n}=\frac{1-zcotz}{2}$$

由$\left(\frac{3z-3z^2cotz-z^3}{12}\right)'=\left(\frac{1-zcotz}{2}\right)^2$

且$\frac{3z-3z^2cotz-z^3}{12}=-\frac{z}{4}(zcotz)+\frac{z}{4}-\frac{z^3}{12}=-\frac{z}{4}\left(1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n}\right)+\frac{z}{4}-\frac{z^3}{12}$

结合$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, 有

$$\left(\frac{1-zcotz}{2}\right)^2=\left(-\frac{z}{4}\left(1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n}\right)+\frac{z}{4}-\frac{z^3}{12}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}}z^{2n}-\frac{z^2}{4}$$
$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}}z^{2n}$$

又

$$\left(\frac{1-zcotz}{2}\right)^2=(\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^{2n})(\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^{2n})$$

所以

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}}z^{2n}=(\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^{2n})(\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^{2n})$$

对比两侧z^{2n}的系数，有

$$\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}}=\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{n-k}$$

又

$$\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$$

所以

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{n-k}$$

得证。

由此计算$a_1,a_2\ldots a_6$的分数表达式

$$a_1=\frac{1}{6},a_2=\frac{1}{90},a_3=\frac{1}{945},a_4=\frac{1}{9450},a_5=\frac{1}{93555},a_6=\frac{691}{638512875}$$

7.（10 分）证明：

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)}=ln\frac{2\pi}{e}$

（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)2^{2n}}=ln\frac{\pi}{e}$

解：（1）由第六题（1）可知：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n}=\frac{1-zcotz}{2}$$

等号两侧同时除以z并求不定积分可得：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}n}z^{2n}=\ln|z|-\ln|sinz|$$

等号两侧同时求 0 到π的定积分，可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\pi ln\pi-\pi-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln{(sinz)}dz$$

设$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln{(sinz)}dz$, 则有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(sinz)\,dz+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\,(sinz)dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(sinz)\,dz+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(cosz)\,dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}lnsin(2z)dz-\frac{\pi}{4}ln2=\frac{I}{2}--\frac{\pi}{4}ln2$$

故$I=-\frac{\pi}{2}ln2$，所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\pi ln\pi-\pi+\pi ln2=\pi\ln\frac{2\pi}{e}$$

故

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\ln\frac{2\pi}{e}$$

得证。

（2）由（1）可知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}n}z^{2n}=\ln|z|-\ln|sinz|$$

等号两侧同时求 0 到$\frac{\pi}{2}$的定积分，可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\zeta(2n)}{2^{2n+1}n(2n+1)}=\frac{\pi}{2}ln\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\,(sinz)dz$$

由（1）知$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\,(sinz)dz=-\frac{\pi}{2}ln2$

代入得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\zeta(2n)}{2^{2n+1}n(2n+1)}=\frac{\pi}{2}ln\frac{\pi}{e}$$

即

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{2^{2n}n(2n+1)}=ln\frac{\pi}{e}$$

得证。

8.（10 分）设$f(z)$在$|z|<1$内处处可导，在$|z|\le 1$内连续，若$f\left(e^{i\theta}\right)\in R,\theta\in[0,2\pi)$, 证明：$f(z)\equiv f(0)\in R,\forall z,|z|<1.$

解： 由于$f(z)$在$|z|<1$内处处可导，因此在$|z|<1$内解析，而e^{iz}在整个复平面内解析，于是复合函数$g(z)=e^{if(z)}$在$|z|<1$内解析。由最大模原理，$|g(z)|$在$|z|=1$上取得最大值，不妨设$z_0=e^{i\theta_0}$处取得。由于$f\left(e^{i\theta}\right)\in R$,有$|g(z)|\le|g(z_0)|=|e^{if(e^{i\theta_0})}|$=1。同理，对$\frac{1}{g(z)}=e^{-if(z)}$, 有$\left|\frac{1}{g(z)}\right|\le 1$。综上，$|g(z)|\equiv 1$。又$g(z)=e^{if(z)}$，这说明$f(z)\in R$对$|z|\le 1$恒成立。设$f(z)=u+iv$, 则$v\equiv 0$, 结合 Cauchy-Riemann 方程，有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

又$f(z)$在$|z|\le 1$上连续，因而$f(z)$为$|z|\le 1$上的常函数，$f(z)\equiv f(0)\in R,\forall z,|z|<1.$恒成立，得证。

<u>**补充：**</u>

①**最大模原理**：$f(z)$在闭区域D解析，若$f(z)$在闭区域$\bar{D}$内部取最大模，那么$f(z)$为常函数；若$f(z)$不为常函数，则其只能在∂D取最大值。

前半句证明（后半句是前半句的逆否形式）：

若$f(z)$在$z_0\in\bar{D}\cap\overline{\partial D}$取最大模，由平均值公式

$$|f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|d\theta=|f(z_0)|$$

故$|f(z_0)|=\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|$，通过有限个相交小圆盘将闭区域$\bar{D}$覆盖，可知，$f(z)$在闭区域$\bar{D}$模为常数，因此，由第二章习题 10（3）可知，$f(z)$为常函数。

②**导数为 0 的函数为常函数**：教材 p44 例 3.

9、（10 分）设$f(z)$在$|z|\le 1$内处处可导，且$f(z)$不是常数，若$|f(z_0)|=\max|f(z)|$，证明：（1）$|z_0|=1$；（2）$f'(z_0)\neq 0.$

证明：（1）$f(z)$在$D=\{z||z|\le 1\}$区域内解析且不为常函数，由最大模原理可知（最大模原理证明见上题），$f(z)$在∂D上取最大模，故$|z_0|=1$。

（2）由$f(z)$在$D=\{z||z|\le 1\}$区域内解析，故$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$，$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$.

由$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$左右两端对$x$求导，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$左右两端对$x$求导，结合$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

因而$f'(z)$在$D=\{z||z|\le 1\}$区域内解析.（预感会用到导函数解析，但后边没思路了）

10、（10 分）（利用$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)$.）$|z|<1$，令$f_k(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(n\theta)}{n^k}$,

$g_k(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin(n\theta)}{n^k}$. 这里$r\in(0,1]$. $\theta\in[0,2\pi)$, 给出$k=1,2,3$时，$f_k(r,\theta), g_k(r,\theta)$的积分或有限形式。再令$r\to 1^-$, 求出$f_k(1,\theta), g_k(1,\theta)$的积分或有限形式的最简形式。

解：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(rz)^n}{n}=-\ln(1-rz)=-\ln(1-rcos\theta-irsin\theta)$

$$=-\frac{1}{2}\ln(1-2rcos\theta+r^2)+iarctan\frac{rsin\theta}{1-rcos\theta}.$$

又

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(rz)^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(n\theta)}{n}+i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin(n\theta)}{n}$$

故

当$\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$时，$f_1(r,\theta)=-\frac{1}{2}\ln(1-2rcos\theta+r^2)$, $g_1(r,\theta)=arctan\frac{rsin\theta}{1-rcos\theta}$.

当$\boldsymbol{k}=\mathbf{2}$时，$g'(\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(n\theta)}{n}=-\frac{1}{2}\ln(1-2rcos\theta+r^2)$,

故$g_2(r,\theta)=g(0)+\int_0^\theta-\ln(1-2rcost+r^2)\,dt=\int_0^\theta-\ln(1-2rcost+r^2)\,dt$.

$f'(\theta)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin(n\theta)}{n}=-arctan\frac{rsin\theta}{1-rcos\theta}$,

故$f_2(r,\theta)=f(0)-\int_0^\theta arctan\frac{rsint}{1-rcost}dt=\frac{\pi^2}{6}-\int_0^\theta arctan\frac{rsint}{1-rcost}dt$

当$\boldsymbol{k=3}$时，$g'(\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(n\theta)}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\int_0^\theta arctan\frac{rsint}{1-rcost}dt$

故$g_3(r,\theta)=g(0)+\int_0^\theta(\frac{\pi^2}{6}-\int_0^x arctan\frac{rsint}{1-rcost}dt)\,dx=\frac{\pi^2\theta}{6}-\int_0^\theta(\int_0^x arctan\frac{rsint}{1-rcost}dt)\,dx$

$f'(\theta)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin(n\theta)}{n^2}=\int_0^\theta \ln(1-2rcost+r^2)\,dt,$

故$f_3(r,\theta)=f(0)+\int_0^\theta(\int_0^x \ln(1-2rcost+r^2)\,dt)dx=\zeta(3)+\int_0^\theta(\int_0^x \ln(1-2\mathrm{rcost}+\mathrm{r}^2)\,\mathrm{dt})\mathrm{dx}.$

下面令$\boldsymbol{r\to 1^-}$，得：

当$\boldsymbol{k=1}$时，$f_1(1,\theta)=-ln2sin\frac{\theta}{2},g_1(1,\theta)=\frac{\pi-\theta}{2}$;

当$\boldsymbol{k=2}$时，$f_2(1,\theta)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\theta(2\pi-\theta)}{4},g_2(1,\theta)=-\theta ln2-\int_0^\theta lnsin\frac{t}{2}dt;$

当$\boldsymbol{k=3}$时，$f_3(1,\theta)=\zeta(3)+\frac{\theta^2}{2}ln2+\int_0^\theta\left(\int_0^x lnsin\frac{t}{2}dt\right)\mathrm{dx};g_3(1,\theta)=\frac{\pi^2\theta}{6}-\frac{\pi\theta^2}{4}+\frac{\theta^3}{12}.$

11、（10 分）求$I_{r,m,n}=\oint\frac{z^me^{\frac{1}{z}}}{(r+z)^n}dz$, 这里$r\neq 0,m,n\in N,|z|=R>|r|.$

解：

$$I_{r,m,n}=\oint\frac{z^me^{\frac{1}{z}}}{(r+z)^n}dz=-\oint\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^m e^t}{\left(r+\frac{1}{t}\right)^n}d\frac{1}{t}=\oint\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^m e^t}{\left(r+\frac{1}{t}\right)^n t^2}dt$$
$$=\oint\frac{e^t}{(tr+1)^n t^{2+m-n}}dt,|t|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{R}<\frac{1}{|r|},|tr|<1$$

若$\boldsymbol{2+m-n\le 0}$, 则$\frac{e^t}{(tr+1)^n t^{2+m-n}}$解析，因而$I_{r,m,n}=0.$

若$\boldsymbol{2+m-n\ge 1}$，令$f(t)=\frac{e^t}{(tr+1)^n}$，则

$$I_{r,m,n}=\oint\frac{f(t)}{t^{2+m-n}}dt=\frac{2\pi i}{(m+1-n)!}f^{(m+1-n)}(0).$$

又

$$f(t)=\frac{e^t}{(tr+1)^n}=\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{t^j}{j!}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}C_{n+k-1}^{n-1}(-tr)^k\right)=\left(\sum_{j=0}^{+\infty}a_jt^j\right)\left(\sum_{h=0}^{+\infty}b_ht^h\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kt^k$$

其中：

$$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},a_j=\frac{1}{j!},b_h=\begin{cases}1,h=0\\C_{n+h-1}^{n-1}(-r)^h,h\ge 1\end{cases}$$

所以：

$$c_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(k-j)!}C_{n+j-1}^{n-1}(-r)^j$$

故$I_{r,m,n}=\frac{2\pi i}{(m+1-n)!}f^{(m+1-n)}(0)=2\pi i c_{m+1-n}=2\pi i\sum_{j=0}^{m+1-n}\frac{1}{(m+1-n-j)!}C_{n+j-1}^{n-1}(-r)^j.$

综上，$I_{r,m,n}=\begin{cases}0,2+m-n\le 0\\ 2\pi i\sum_{j=0}^{m+1-n}\frac{1}{(m+1-n-j)!}C_{n+j-1}^{n-1}(-r)^j,2+m-n\ge 1\end{cases}$.

12、（10 分）设$\Delta z_1z_2z_3$的面积为 S，$S=\frac{1}{2}|I_m(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3)|$, 这里，$I_m(z)=y$,若$z=x+iy,x,y\in R.$

解：由向量外积的几何意义可知三角形面积为$\overrightarrow{z_1z_3}$, $\overrightarrow{z_1z_2}$外积的模的一半。

设$z_k=x_k+iy_k,k=1,2,3$，则有

$$\overrightarrow{z_1z_3}=\big((x_3-x_1),(y_3-y_1)\big),\overrightarrow{z_1z_2}=\big((x_2-x_1),(y_2-y_1)\big)$$

因此，

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{z_1z_3}\times\overrightarrow{z_1z_2}|$

$=\frac{1}{2}|(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)|$

$=\frac{1}{2}|x_3y_2-x_1y_2-x_3y_1+x_1y_1-x_2y_3+x_1y_3+x_2y_1-x_1y_1|$

$=\frac{1}{2}|x_2y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_3y_1-x_2y_3+x_3y_2|$

又：

$\frac{1}{2}|I_m(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3)|$

$=\frac{1}{2}|I_m[(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)+(x_1+iy_1)(x_3-iy_3)+(x_2-iy_2)(x_3+iy_3)]|$

$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1+x_3y_1-x_1y_3+x_2y_3-x_3y_2|$

所以：

$S=\frac{1}{2}|I_m(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3)|$。

得证。

13、（10 分）$\Delta z_1z_2z_3$构成正三角形的充要条件为${z_1}^2+{z_2}^z+{z_3}^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$.

解：必要性：由复数除法与减法的几何意义可知，复数$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}$、$\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$的辐角主值分别对应$\Delta z_1z_2z_3$的两个外角，又$\Delta z_1z_2z_3$构成正三角形，所以$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}$、$\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$的辐角主值相等，且

$|z_3-z_2|=|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$，即$|\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}|=|\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}|$，

因而

$$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$$

交叉相乘得${z_1}^2+{z_2}^z+{z_3}^2-z_1z_2-z_1z_3-z_2z_3=0$，

即

$${z_1}^2+{z_2}^z+{z_3}^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3.$$

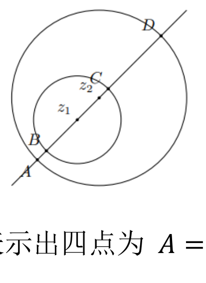
充分性：若${z_1}^2+{z_2}^z+{z_3}^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$.可以推出

$$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}$$

而$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}$、$\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$、$\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}$的辐角主值分别与$\Delta z_1z_2z_3$的三个外角相等，因此$\Delta z_1z_2z_3$的三个外角都相等，故$\Delta z_1z_2z_3$构成正三角形。

20、（20 分）求出一个将同心圆环域$D_1=\{z\big||z-z_1|>r_1,|z-z_2|<r_2,\big|z_1-z_2\big|<r_2-r_1\}$映成同心圆$D_2=\{z|0<r<|z|<1\}$的一个分式线性映射$w=\frac{az+b}{cz+d},a,b,c,d\in C,ad-bc\neq 0$, 并求出 r。

解：设穿过两圆圆心z_1,z_2的直线沿z_1到z_2的方向与两圆分别交于A,B,C,D



则直线倾角为$\theta_0=\arg(z_2-z_1)$，可表示出四点为 $A=z_2-r_2e^{i\theta_0},B=z_1-r_1e^{i\theta_0},C=z_1+r_1e^{i\theta_0},D=z_2+r_2e^{i\theta_0}$, 同时 $z_2-z_1=|z_1-z_2|e^{i\theta_0}$

解得$\begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{(r_2+|z_1-z_2|)^2-{r_1}^2}{(r_2-|z_1-z_2|)^2-{r_1}^2}} \\ r = \dfrac{{r_1}^2+{r_2}^2-|z_1-z_2|^2-\sqrt{({r_1}^2+{r_2}^2+|z_1-z_2|^2)^2-4{r_1}^2{r_2}^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$

于是所求分式线性映射：

$$w(z) = {w_2}^{-1}\left(w_3\big(w_1(z)\big)\right) = \frac{kw_1(z)-1}{1+kw_1(z)}$$

$$= \frac{|z_1-z_2|(k+1)z-|z_1-z_2|(k+1)z_2+(k-1)r_2(z_2-z_1)}{|z_1-z_2|(k-1)z-|z_1-z_2|(k-1)z_2+(k+1)r_2(z_2-z_1)}$$

其中k如上，r也已求出。