中国科学技术大学

数理方程复习指导

学　　院：信息科学技术学院

专　　业：信息安全

姓　　名：高源

指导教师：谢如龙老师

目录

1 写给数理方程 08 班的同学们的一封信 …… 4
2 本书的使用说明 …… 5
2.1 本书的设计初衷 …… 5
2.2 本书的设计思想 …… 5
2.3 本书的使用方法 …… 6
3 课程综述 …… 8
3.1 课程主要内容 …… 8
3.2 课程学习目标 …… 8
3.3 课程学习方法 …… 9
3.4 课程学习中蕴含的转化思想 …… 9
3.5 定解问题求解方法的使用条件 …… 10
3.6 数理方程课程中的三步走战略 …… 11
4 第一章综合复习 …… 12
4.1 主要内容 …… 12
4.2 学习目标 …… 12
4.3 学习方法 …… 13
4.4 应用变量代换求解偏微分方程通解 …… 13
4.5 定解问题的书写 …… 14
4.6 行波法求解一维无界区域弦振动问题 …… 15
4.7 一维半无界区域的弦振动方程的处理之通解法和延拓法 …… 15
4.8 可以通过函数变换转化为一维无界区域波动方程问题 …… 19
4.9 通解法求解定解问题 …… 20
5 第二章综合复习 …… 22
5.1 主要内容 …… 22
5.2 学习目标 …… 22
5.3 学习方法 …… 23
5.4 明确齐次方程的基本概念 …… 23

5.5 对于不满足施刘定理的问题的处理 …… 24
5.6 根据自然语言描述的物理问题书写定解问题并求解 …… 26
5.7 验证固有值问题是否满足施刘定理使用条件 …… 27
5.8 非齐次方程的求解 …… 28
5.9 非齐次边界的处理 …… 31
6 第三章综合复习 …… 33
6.1 主要内容 …… 33
6.2 学习目标 …… 33
6.3 学习方法 …… 34
6.4 应用贝塞尔函数的母函数及其积分表示进行积分求解 …… 34
6.5 利用贝塞尔函数的递推关系进行积分求解 …… 35
6.6 给定函数的贝塞尔级数展开 …… 36
6.7 使用分离变量法结合贝塞尔函数求解定解问题 …… 36
6.8 应用勒让德多项式的性质和递推关系求解积分 …… 37
6.9 勒让德多项式的重要积分 …… 38
6.10 给定函数的勒让德级数展开 …… 39
6.11 利用分离变量法结合勒让德函数求解定解问题 …… 39
7 第四章综合复习 …… 41
7.1 主要内容 …… 41
7.2 学习目标 …… 41
7.3 学习方法 …… 41
7.4 利用傅里叶变换求解定解问题 …… 42
7.5 利用正余弦变换求解定解问题 …… 43
7.6 利用拉普拉斯变换求解定解问题 …… 44
7.7 利用傅里叶变换和拉普拉斯变换进行求解 …… 45
8 第五章综合复习 …… 48
8.1 主要内容 …… 48
8.2 学习目标 …… 48
8.3 学习方法 …… 49
8.4 关于 δ 函数的等式的证明 …… 49
8.5 δ 函数积分表示的应用 …… 49
8.6 利用镜像法求解格林函数 …… 50
8.7 利用分离变量法求解格林函数 …… 52
8.8 利用基本解方法求解定解问题 …… 53

9 综合复习课讲义 …… 55
9.1 定解问题的书写 …… 55
9.2 行波法求解定解问题（并和积分变换法作比较） …… 57
9.3 齐次化原理的应用 …… 59
9.4 分离变量法求解定解问题 …… 62
9.5 积分变换法求解定解问题 …… 67
9.6 δ 函数的性质 …… 68
9.7 基本解方法求解定解问题 …… 69
10 经典问题专题 …… 71
10.1 简介 …… 71
10.2 函数变换法的应用 …… 71
10.3 微元法分析书写定解问题 …… 73
10.4 阻尼振动问题 …… 75
10.5 勒让德多项式的递推公式推导 …… 77
10.6 一类重要的函数的傅里叶变换求解的特殊方法 …… 78
10.7 分离变量法求解基本解 …… 80
11 期末复习试卷 …… 82
12 期末模拟试卷 …… 89
13 期末模拟试卷参考答案 …… 95
14 总结 …… 103
15 致谢 …… 104

写给数理方程 08 班的同学们的一封信

亲爱的 2020 春数理方程 08 班的同学们，你们好:

这本《数理方程复习指导》在几个月的努力下终于和大家见面了。这学期是我第一次当助教，而且由于特殊情况我们的课堂教学、习题课讨论等过程只能在线上进行。考虑到各种原因，这一个学期在和大家的交流中我也在一直寻找合适的方法能够尽自己所能为大家提供帮助，最终能够和大家一起顺利完成这门课程的学习。

综合各种考虑，我决定制作这本《数理方程复习指导》，希望能够和大家分享学习数理方程的方法、经验，以及遇到的困难。衷心希望这本复习指导能够对大家有所帮助，也希望大家都能够圆满地完成这学期的学习。

遇到我们这个大家庭的每一个成员都让我感到幸运，衷心希望能够和大家一起变得更好。

本书的使用说明

2.1 本书的设计初衷

这本《数理方程复习指导》的设计初衷是，希望可以帮助大家复习。主要希望可以解决的问题有：

1. 没有建立课程的知识体系
2. 没有理解课程的重点
3. 不清楚目前自己会哪些内容，不会哪些内容
4. 不清楚考试会考哪些内容
5. 不清楚自己应该从哪些方面着手复习，重点是什么，按照自己的考试预期，至少应该掌握什么

2.2 本书的设计思想

首先，这本复习指导是在我的学习笔记以及参考大量学习指导、习题指导、习题集的基础上制作的，其中学习指导等部分重点参考姚端正老师编著的《数学物理方法学习指导》、吴崇试老师编著的《数学物理方法习题指导》以及经典的《数学物理方法习题集》。这本复习指导的制作是按照这样的流程进行的。

1. 首先我总结归纳课程主要内容、学习目标以及学习方法，综合比较各种求解方法的使用条件以及选择原则，并总结提出数理方程求解定解问题的三步走战略。
2. 接着，对应每一章的内容，分别进行归纳整理。站在大家复习备考的角度，我在总结每部分的主要内容和学习目标的时候，会用"了解"、"理解"、"掌握"、"熟练掌握"等词语来标识对应知识点对于考试来说的重要程度。具体分析请见"本书的使用方法"板块。
3. 对应于每一部分的知识点，对于本课程来说主要就是每一种求解方法，我会按照归纳整理出来的这一部分要掌握的重点内容设计例题，主要涉及参考各种学习指

导、习题集等并适当地改编，另外会适当添加解题过程部分的分析过程说明，以方便说明这类问题的分析思路以及解题原则。

4. 对应每一部分的题目，按照题目类型归纳简洁的说明作为例题的分类介绍。其中一道例题会代表一类问题。有些问题会以不同的形式呈现在不同章节中，比如教材上在讲述非齐次方程使用分离变量法求解的部分提到用拉普拉斯变换法求解常微分方程定值问题，这个也是建议掌握的内容，对应在这本复习指导中，我以综合运用傅里叶变换和拉普拉斯变换求解定解问题的形式呈现，其中拉普拉斯变仍然是应用于求解常微分方程，只不过在这里对应的是傅里叶变换后得到的像函数满足的常微分方程。

2.3 本书的使用方法

温馨提示：以本书作为辅助，配合课程回放、老师的板书、教材以及自己记录的课堂笔记，食用效果更好哦！

1. 首先本书主要是作为复习过程的指导建议，对于知识点部分只是做出归纳总结，但没有详细说明，具体内容仍要对应教材等。

2. 如果觉得自己的状态是“课程学习的时候有些地方就不太清晰”，那建议对照教材等资料，每章对应地复习。在复习时，可以首先看一下这一章的重点内容，然后回归教材，并对照笔记。如果有看不懂的地方，可以看看课程回放，反复听一听，或者和同学、助教讨论，如果觉得以上方法效果不好可以在合适的时间请教老师。

3. 如果觉得自己的状态是“学习的时候学每一部分都还好，大概都懂，做题不太顺利”，那建议对应做题不顺利的地方，在本书目录部分查找对应类型题目，然后进行查看。说明，本书的 pdf 版本提供书签，方便大家可选择性查看。

4. 如果觉得自己的状态是“学习理论部分还可以，做题虽然慢但是大体都还会做”，那建议从知识点出发进行复习，查看每章的总结部分，对应思考，这一个知识点是否还有印象，如果没有，对应的去看教材等。然后在复习完本章知识点后，查看目录，看对应每章的类型题总结，思考是否对某一类型题不熟练，如果是，可以查看相关例题。

5. 如果觉得自己的状态是“学习还算顺利”，那如果想使用本书进行复习，建议翻看每章的前面部分，对应每章的重点内容，浏览一下然后总结自己是否有还不熟练的知识点或者没注意到的重点。对应看教材、笔记等进行复习。

6. 如果觉得自己的状态是“学得挺好的，如果有点例题看看也不错”，那如果对本书感兴趣，可以看看总结归纳的例题。

7. 另外，建议使用本书的时候，复习每一部分和建立整体知识体系都要注意，并且注意例题并不是孤立地对应一章，有时候会有综合性的例题，可以看看这种类型题目是怎样考察的。

祝食用愉快！

课程综述

3.1 课程主要内容

- 偏微分方程的基本概念
- 常见偏微分方程的通解的求解
- 数理方程的建立过程
- 三类常见方程及其对应的定解问题的书写及对应的物理意义
- 行波法求解一维无界区域波动方程问题的基本操作
- 延拓法的基本思想和应用
- 通解法求解一类定解问题的基本操作
- 分离变量法求解有界区域问题的基本操作
- 应用特殊函数实现分离变量法在柱坐标和球坐标系下分离变量得到的固有值问题求解
- 傅里叶变换法求解无界区域问题的基本操作
- 正余弦变换的应用
- 拉普拉斯变换求解半无界区域问题的基本操作
- 基本解方法求解定解问题的基本操作

3.2 课程学习目标

- 掌握数理方程的基本概念
- 理解数理方程的建立过程
- 理解三类重要方程及其对应的定解问题中的元素的物理意义

- 熟练掌握根据自然语言描述的物理过程书写定解问题的方法
- 熟练掌握各种定解问题求解方法的适用范围
- 熟练掌握各种定解问题求解方法的具体操作

3.3 课程学习方法

- 熟练掌握基本概念，并且能够对定解问题进行分类，明确我们的分类是和不同求解方法的使用条件相对应的
- 熟练掌握定解问题的各个组成元素对应的物理意义
- 熟练掌握三类重要方程及其定解问题的书写
- 熟练掌握求解定解问题的方法的使用条件和具体操作

3.4 课程学习中蕴含的转化思想

转化思想是数学学习中的重要思想之一，其根本想法是把不熟悉的问题和熟悉的问题建立联系，进而实现求解。在这门课程中，主要学习几类偏微分方程的求解方法，其中蕴含着转化的思想，理解了这一点会有助于知识体系结构的建立和对于各种求解方法的理解。

- 借鉴
  - 行波法的转化思想体现在借鉴常微分方程的定值问题求解，首先求得泛定方程通解，进而根据定解条件得到解。但由于偏微分方程的通解我们只熟悉几类常见问题，其他问题求解难度较大，所以，我们要思考，其他的转化思路，以实现能够顺利求解三类重要方程对应的定解问题
- 转化为常微分方程
  - 分离变量法和积分变换法的转化思想体现在把偏微分方程的定解问题求解转化为常微分方程定值问题求解，其中分离变量法通过将解和定解条件在固有函数系上展开实现转化操作，积分变换法通过使用积分变换并利用积分变换的性质实现转化操作
- 转化为特殊定解问题
  - 基本解方法的转化思想体现在将一般的定解问题转化为特殊的定解问题，结合物理意义以及叠加原理，实现转化和求解

3.5 定解问题求解方法的使用条件

在这门课程的学习中，我们主要学习求解三类重要方程对应的定解问题的方法，每种方法都有其使用条件，因而明确每种方法的使用条件会有助于在遇到定解问题时选择合适的方法。

- 行波法
  - 行波法用于求解一维无界区域的波动方程问题（注意，应用延拓法可以实现将一维半无界区域波动方程的问题求解转化为一维无界区域波动方程问题求解，进而可以使用行波法；另外球对称问题可以通过对球坐标系下的方程进行函数变换转化为一维半无界区域的波动方程问题，进而再利用延拓法课可以转化为一维无界区域的波动方程问题，进而使用行波法求解）
- 分离变量法
  - 分离变量法用于求解有界区域的问题，其中有界是针对于形成固有函数系的变量来说的，所以对于球外空间，θ 的定义域是有界的，因而可以做分离变量操作。
  - 分离变量法的直接应用要求齐次方程和齐次边界。但我们可以通过固有函数系展开法、齐次化原理、特解法等方法将非齐次方程转化为齐次方程，可以用基于叠加原理的特解法将非齐次边界转化为齐次边界，进而可以利用分离变量法求解。
- 积分变换法
  - 傅里叶变换法用于求解无界区域的问题，一般用于坐标变量，并且要求对应的一系列函数值在无穷远点为零
  - 正余弦变换法用于求解半无界区域的问题，本质上仍属于傅里叶变换法，一般用于坐标变量，分别对应第一类和第二类边界条件。注意在正反变换的时候，建议严格按照定义进行求解。
  - 拉普拉斯变换法用于求解半无界区域的问题，一般用于时间变量，大多数情况下不能用于坐标变量，无法用于求解椭圆方程。
- 基本解方法
  - 基本解方法用于求解无界区域的问题，其中对于椭圆方程可以求解有界区域的问题。

3.6 数理方程课程中的三步走战略

- 行波法的三步走
  - 求解偏微分方程得到通解
  - 将定解条件代入通解中建立已知函数和未知函数关系，并用已知函数表达通解中未知函数
  - 带入通解得到原问题的解
- 分离变量法的三步走
  - 将解写成分离变量形式，选定合适变量，求解固有值问题得到固有值和固有函数系
  - 求解其他常微分方程得到形式解，即把解在定解条件上展开
  - 把定解条件代入形式解中确定形式解的系数，即把定解条件在固有函数系上展开
- 积分变换法的三步走
  - 选取合适积分变量，进行正变换，将偏微分方程转化为常微分方程
  - 求解像函数满足的常微分方程得到像函数
  - 对像函数反变换得到解
- 基本解方法的三步走
  - 根据原问题对应写出格林函数满足的定解问题
  - 应用镜像法、分离变量法、积分变换法等方法求解得到格林函数
  - 把格林函数带入解的积分表达式得到解

第一章综合复习

4.1 主要内容

- 偏微分方程的基本概念
- 常见偏微分方程的通解的求解
- 偏微分方程特解的求解
- 数理方程的建立过程
- 三类常见方程的书写及其对应的物理意义
- 定解条件的个数、物理意义
- 行波法求解一维无界区域波动方程问题
- 延拓法求解一维半无界区域波动方程问题
- 通解法求解定解问题
- 叠加原理及其应用
- 齐次化原理及其应用

4.2 学习目标

- 掌握基本概念，如方程的阶、线性方程、齐次方程等
- 理解对方程分类的标准和求解方程的方法的适用条件是对应的
- 掌握对于偏微分方程的分类，并且熟练掌握三类偏微分方程通解的求解方法
- 理解数理方程的建立过程，对于微元法要有基本的了解
- 熟练掌握三类方程的书写，以及方程中元素对应的物理意义

- 熟练掌握定解问题的构成原则，定解条件的个数确定方法，定解条件的物理意义
- 熟练掌握行波法的使用条件，以及应用于求解定解问题的具体操作
- 掌握延拓法在求解一维半无界区域波动方程问题中的应用，了解延拓法的思想以及奇、偶延拓的选择原因
- 了解通解法求解定解问题的步骤
- 理解叠加原理的意义及其应用
- 熟练掌握齐次化原理在求解非齐次发展方程中的应用

4.3 学习方法

- 熟练掌握基本概念，并且能够对定解问题进行分类
- 熟练掌握求解定解问题的方法及其使用条件
- 对比不同方法在求解问题时的求解过程，明确方法选择

4.4 应用变量代换求解偏微分方程通解

$$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0$$

解：利用变量代换将方程转化为可以直接积分求解的偏微分方程。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0$$

亦即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)=0$$

引入变量代换 $x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$, 使

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)A\\ \frac{\partial}{\partial\eta}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)B\end{aligned}$$

其中,A 、B 为任意常数。可令

$$\begin{cases}x=\xi+\eta\\ y=-\xi+3\eta\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \xi = \frac{3x-y}{4} \\ \eta = \frac{x+y}{4} \end{cases}$$

则方程变为

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u(\xi,\eta)=0$$

此时已经完成转化目标，直接积分即可得到方程的解

$$u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$$

其中，$f_1(\xi)$ 和 $f_2(\eta)$ 分别为 ξ 和 η 的任意函数。

4.5 定解问题的书写

在去年的期末考试试题中出现给出自然语言描述的物理问题，要求根据对于数理方程的理解，写出对应的定解问题。这类题目要求我们对数理方程的建立、三类典型方程的书写及其物理意义、定解条件的书写及物理意义都要有一定理解。

设有一厚壁圆筒, 其初始温度为 u_0, 并设它的内表面的温度增加与时间 t 成线性关系，外表面和温度为 u_1 的介质进行热交换, 试写出其温度分布满足的定解问题。

这类问题的求解首先要明确题目所述的物理问题属于哪类问题，尤其是对于温度分布类问题，要判断题目要求求解的是某一时间段的温度分布还是稳定时刻的温度分布。

解：

$$u_t=D\Delta u=D\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), u|_{t=0}=u_0$$

而内表面的温度为

$$u|_{r=r_1}=at+b$$

其中, a,b 为常数。由 $u|_{t=0}=u_0$ 可求得 $b=u_0$, 故有

$$u|_{r=r_1}=at+u_0$$

由题意知周围介质的温度为 u_1, 则由 Newton 冷却定律有

$$-ku_r|_{r=r_2}=H\left(u|_{r=r_2}-u_1\right)$$

即

$$(u+hu_r)|_{r=r_2}=u_1$$

其中, $h=\frac{k}{H}, k$ 和 H 分别为热传导系数和热交换系数.

4.6 行波法求解一维无界区域弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}(-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \phi(x)(-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

利用上述变量代换法可以求得一维齐次波动方程的通解为

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

由所给的初始条件，就有

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = -af'(x) + ag'(x) = \phi(x) \end{cases}$$

积分可得

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + c$$

联立上式，解得

$$\begin{array}{l} f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{c}{2} \\ g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{c}{2} \end{array}$$

于是，我们得到了

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(x - at) + g(x + at) \\ &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \phi(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

即为原问题的解。

4.7 一维半无界区域的弦振动方程的处理之通解法和延拓法

首先我们的想法很明确，即基于对行波法求解一维无界区域弦振动方程的理解，进行转化。有两类转化目标，即借鉴思想和直接转化为可处理的问题。这道例题的法一和法二分别是这两种思路的应用。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0(0 < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

解：法一
泛定方程的通解为
$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$
故有
$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$
进而可得
$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)$$
即
$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C$$
其中, $C = f_1(0) - f_2(0)$.
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \tfrac{C}{2} \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \tfrac{C}{2} \end{aligned}$$
以上二式均是在 $0 \le x < \infty$ 的前题下推得的. 因为 $x + at$ 总是大于, 等于零的, 故有
$$f_1(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{C}{2}$$
至于 $x - at$ 就不一定大于零了。
(1) 若 $x - at \ge 0$, 则有
$$f_2(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{C}{2}$$
(2) 若 $x - at < 0$, 则上式不能用。但将边界条件代入通解得
$$f_1'(at) + f_2'(-at) = 0$$
令 $x = at$, 并对上式从 0 到 x 积分得
$$f_1(x) - f_2(-x) = C$$
即
$$f_2(-x) = f_1(x) - C(x \ge 0)$$

故

$$\begin{aligned} f_2(x-at) =& f_2[-(at-x)](at-x\geq 0) \\ &= f_1(at-x)-C \\ &= \frac{1}{2}\varphi(at-x)+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi - C \end{aligned}$$

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ x-at\geq 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right. \\ \left.+\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right], x-at<0 \end{cases}$$

法二：

设想将半无限长的杆, 延拓 (拼接) 成无限长的杆，并将原定解问题的初始条件看成无限长杆的纵振动的初始条件在 $0\leq x<\infty$ 中的部分，即将原定解问题转化为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}(-\infty<x<\infty,t>0) \\ u(x,0)=\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),0\leq x<\infty \\ f(x),-\infty<x\leq 0\end{cases} \\ u_t(x,0)=\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),0\leq x<\infty \\ g(x),-\infty<x<0\end{cases} \\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

则由 d'Alembert 公式立即可写出定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

其中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是未知的。

延拓的目标是要用延拓后的解来得到原问题的解，因此要让延拓后的解在原问题的定义域处的部分和原问题解相同。所以利用原问题的边界条件可以求得的 $u(x,t)$ 在 $0\leq x<\infty$ 中的值即为原定解问题的解.

$$u_x(0,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi'(0+at)+\Phi'(0-at)\right]$$

$$+\frac{1}{2a}[\Psi(0+at)-\Psi(0-at)]=0$$

即

$$\frac{1}{2}\left[\Phi'(\xi)+\Phi'(-\xi)\right]+\frac{1}{2a}[\Psi(\xi)-\Psi(-\xi)]=0(\xi\geq 0)$$

由此有 $\Phi(\xi)=\Phi(-\xi),\Psi(\xi)=\Psi(-\xi)$，这说明满足边界条件的 Φ 和 Ψ, 均为偶函数。即

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),0\le x<\infty\\ \varphi(-x),-\infty<x<0\end{cases}$$
$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),0\le x<\infty\\ \psi(-x),-\infty<x<0\end{cases}$$

亦即

$$f(x)=\varphi(-x),g(x)=\psi(-x)$$

注意到 $x+at$ 总于大于等于零的, 于是有

$$\Phi(x+at)=\varphi(x+at)$$
$$\int_0^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

而 $x-at$ 有可能大于, 等于或小于零。

(1) 若 $x-at\ge 0$, 则

$$\Phi(x-at)=\varphi(x-at)$$
$$\int_{x-at}^0\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^0\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

(2) 若 $x-at<0$, 则

$$\Phi(x-at)=\varphi[-(x-at)]=\varphi(at-x)$$

$$\int_{x-at}^0\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^0\psi(-\xi)\mathrm{d}\xi\overset{\eta=-\xi}{=}-\int_{at-x}^0\psi(\eta)\mathrm{d}\eta$$

即

$$\int_{x-at}^0\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

最后得到：

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ x-at\ge 0\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right.\\ \left.+\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right],x-at<0\end{cases}$$

即为原问题的解。

4.8 可以通过函数变换转化为一维无界区域波动方程问题

求圆锥杆的纵振动问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

解：泛定方程为:

$$\left(1-\frac{x}{h}\right)u_{xx}-\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)u_{tt}-\frac{2}{h}u_x=0$$

我们发现这个方程并不是我们熟悉的方程，不能直接使用行波法求解。但考虑题目提示为杆的纵振动问题，并且是一维无界区域问题，所以考虑通过函数变换将方程转化为一维无界区域波动方程问题，进而可以使用行波法求解。（说明，对于这个问题，我们对方程进行分类后发现，也可以使用积分变换法或者基本解方法。只不过因为行波法求解比较简单，而且这个问题说明是一维无界区域的纵振动问题，所以考虑尝试一下通过转化来利用行波法求解。如果不想这样求解也可以直接进行积分变换等。）

考虑到各式的系数只是 x 的函数, 故可令

$$u(x,t)=w(x)v(x,t)$$

于是

$$u_x=w_xv+wv_x, u_{xx}=w_{xx}v+2w_xv_x+wv_{xx}$$
$$u_t=wv_t, u_{tt}=wv_{tt}$$

代入上式得

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x}{h}\right)wv_{tt}=&a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)wv_{xx}+\left[2a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)w_x-\frac{2a^2}{h}w\right]v_x\\&+\left[a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)w_{xx}-\frac{2a^2}{h}w_x\right]v\end{aligned}$$

令此式中

$$2a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)w_x-\frac{2a^2}{h}w=0$$

则

$$\frac{w_x}{w}=\frac{1}{h(1-x/h)}=\frac{1}{h-x}$$

即

$$\frac{dw}{w}=\frac{dx}{h-x}$$

两边积分，可得 w 的一个特解

$$w(x)=\frac{1}{(h-x)}$$

从而有

$$\begin{aligned} w_x &= \tfrac{1}{(h-x)^2} \\ w_{xx} &= \tfrac{2}{(h-x)^3} \end{aligned}$$

将 w 及其各阶导数代入作函数变换后的泛定方程中得到

$$v_n - a^2 v_n = 0$$

此方程的通解为

$$v(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

于是原问题的泛定方程的通解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x)v(x,t) \\ &= [f_1(x+at) + f_2(x-at)]\,/(h-x) \end{aligned}$$

将定解条件代入泛定方程通解得

$$f_1(x) + f_2(x) = (h-x)\varphi(x)$$

和

$$a\,[f_1(x) - f_2(x)]\,/(h-x) = \psi(x)$$

即

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C$$

联立上式得

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{(h-x)\varphi(x)}{2} + \tfrac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}(h-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \tfrac{C}{2} \\ f_2(x) &= \tfrac{(h-x)\varphi(x)}{2} - \tfrac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \tfrac{C}{2} \end{aligned}$$

所以，定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2(h-x)}\left[(h-x-at)\varphi(x+at) + (h-x+at)\varphi(x-at) + \int_{x-at}^{x+at}\frac{h-\xi}{a}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

4.9 通解法求解定解问题

可通过函数变换转化为可直接积分类型的偏微分方程求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,y) = \varphi(y), u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解：利用函数代换来求解泛定方程。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+u\right)=0$$

两边对 x 积分一次得

$$\frac{\partial u}{\partial y}+u=g(y)$$

其中, $g(y)$ 为任意函数, 故上述方程又可写为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^{y} u\right)=\mathrm{e}^{y} g(y)$$

两边对 y 积分得

$$\mathrm{e}^{y} u=\int \mathrm{e}^{y} g(y) \mathrm{d} y+h(x)$$

于是得泛定方程的通解为

$$u(x, y)=f(y)+\mathrm{e}^{-y} h(x)$$

其中, $f(y)$ 和 $h(x)$ 为任意函数. 将定解条件代入通解，构建已知函数和未知函数的联系

$$\left\{\begin{array}{l}
f(y)+\mathrm{e}^{-y} h(0)=\varphi(y) \\
f(0)+h(x)=\psi(x)
\end{array}\right.$$

故有

$$\begin{gathered}
h(x)=\psi(x)-f(0) \\
f(y)=\varphi(y)-\mathrm{e}^{-y} h(0)=\varphi(y)-\mathrm{e}^{-y}[\psi(0)-f(0)]
\end{gathered}$$

用已知函数表达未知函数并代入通解，得到定解问题的解为

$$u(x, y)=\varphi(y)+\mathrm{e}^{-y}[\psi(x)-\varphi(0)]$$

第二章综合复习

5.1 主要内容

- 分离变量法的基本概念以及想法来源
- 分离变量法的适用范围
- 分离变量法的具体操作
- 施刘方程的定义以及将一般二阶常微分方程转化为施刘方程的方法
- 施刘定理的成立条件
- 施刘定理的具体内容
- 非齐次方程的定解问题结合分离变量法求解
- 非齐次边界条件的定解问题结合分离变量法求解
- 非齐次方程和非齐次边界混合问题的求解

5.2 学习目标

- 理解分离变量法的想法来源，即转化思想
- 理解分离变量法的适用范围，有界区域，齐次方程，齐次边界
- 理解分离变量法的本质，把解和定解条件在固有函数系上展开
- 熟练掌握分离变量法的具体流程
- 熟练掌握固有值问题的书写以及求解，可以记忆不同边界条件对应的固有值问题的解
- 熟练掌握形式解的书写
- 熟练掌握利用正交性求解形式解中的系数的方法

- 了解施刘方程的定义以及一般二阶常微分方程转化为施刘方程的方法
- 了解施刘定理的成立条件
- 理解施刘定理的具体内容及其应用
- 熟练掌握非齐次问题的处理方法

5.3 学习方法

- 理解分离变量法所蕴含的转化思想，了解转化目标和方法
- 理解分离变量法的适用范围，以及具体操作
- 理解分离变量法的本质，把解和定解条件在固有函数系上展开
- 理解施刘定理的重要意义

5.4 明确齐次方程的基本概念

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} - \beta u = 0 (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

解：遇到定解问题我们要首先明确其类型，进而选择合适的方法进行求解。首先根据 x 的定义域是有界区域判断满足分离变量法的要求。进一步看方程和边界条件是否齐次。这个问题的方程看起来会有一点点迷惑性，但是要注意，这是齐次的方程，只不过有了原函数项。而边界条件是齐次的。因此，经过分析我们确定，可以采用分离变量法。按照分离变量法的三步走战略，求解过程如下：

(1) 写出分离变量形式。令

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入泛定方程得

$$X(x)T'(t) - DX''(x)T(t) - \beta X(x)T(t) = 0$$

两边除 DXT 得

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} - \frac{\beta}{D} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu$$

则得

$$\begin{cases} X'' - \mu X(x) = 0 \\ T'(t) - (\beta + \mu D)T = 0 \end{cases}$$

结合边界条件得

$$X(0) = 0, X(l) = 0$$

(2) 求解固有值问题得

$$\mu = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1, 2, \cdots$$

(3) 将 μ 代入关于 T 的常微分方程并求解

$$T_n'(t) + \left(Dn^2\pi^2/l^2 - \beta\right) T_n(t) = 0, T_n(t) = b_n \mathrm{e}^{\left(\beta - D^2\pi^2/l^2\right)t}$$

于是

$$u_n(x,t) = a_n \mathrm{e}^{\left(\beta - Dn^2\pi^2/l^2\right)t} \sin\frac{n\pi}{l}x u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\left(\beta - Dn^2\pi^2/l^2\right)t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

将初始条件代入得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x), a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha$$

将求得的 a_n 代入上式, 即得原定解问题的解。

5.5 对于不满足施刘定理的问题的处理

我们这门课研究的主要是二阶的线性方程，一般分离变量得到的固有值问题都是满足施刘定理的。但是如果遇到不满足施刘定理的情形，也要了解这类特殊问题的处理方法。

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0 \\ u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解: 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$。代入方程得

$$X(x)T''(t) = -a^2 X^{(4)}(x)T(t)$$

即

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}=-\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\lambda^2$$

进一步得到固有值问题和其他常微分方程

$$\begin{cases}X^{(4)}(x)-\lambda^2X(x)=0\\X(0)=X''(0)=0\\X(l)=X''(l)=0\\T''+a^2\lambda^2T(t)=0\end{cases}$$

下面求解固有值问题

1. 若 $\lambda=0$, 则

$$X(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3$$

将边界条件代入得 $C_1=C_3=0$, 所以

$$X(x)=C_2x+C_4x^3$$

$$\begin{cases}C_2+C_4l^2=0\\6C_4l=0\end{cases}$$

于是得 $C_4=0,C_2=0$, 即, 当 $\lambda=0$ 时 $X(x)\equiv 0$, 故 $\lambda\neq 0$
2. 若 $\lambda>0$, 则固有值问题的方程有通解

$$X(x)=C_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x+C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x+C_3\cos\sqrt{\lambda}x+C_4\sin\sqrt{\lambda}x$$

将边界条件代入有

$$\begin{cases}C_1+C_3=0\\C_1\lambda-C_3\lambda=0\end{cases}$$

解得 $C_1=0,C_3=0,$
所以

$$X(x)=C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x+C_4\sin\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件得

$$\begin{cases}C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}l+C_4\sin\sqrt{\lambda}l=0\\C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}l-C_4\sin\sqrt{\lambda}l=0\end{cases}$$

解得

$$C_2=0,C_4\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

所以

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \sqrt{\lambda}l = n\pi (n = 1, 2, \cdots)$$

所以固有值为为 $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, 固有函数为 $X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$ 。

将 λ 代入 T 的方程得

$$T_n''(t) + \frac{a^2n^4\pi^4}{l^2}T_n(t) = 0$$
$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t + B_n\sin\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t$$

从而有

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t + B_n\sin\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

将初始条件代入得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, B_n = \frac{2l}{n^2\pi^2 a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

3. 若 $\lambda < 0$, 类似上述讨论。

5.6 根据自然语言描述的物理问题书写定解问题并求解

长为 l 的杆, 侧面和 $x = 0$ 端绝热, 另一端 $x = l$ 与外界按 Newton 冷却定律交换热量 (设外界温度为 0), 初始时刻杆内温度为常数 u_0, 求杆内温度分布.

解: 其定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, [u + hu_x]_{x=l} = 0 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

令

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

则由方程和边界条件得

$$T'(t) - \mu a^2 T(t) = 0$$
$$X''(x) - \mu X(x) = 0$$
$$X'(0) = 0, X(l) + hX'(l) = 0$$

求解固有值问题得

$$\begin{cases} \text{固有值}\mu_n = -\frac{\lambda_n^2}{l^2} \\ \text{固有函数}X_n(x) = C_n' \cos\frac{\lambda_n}{l}x \end{cases} n = 1, 2, \cdots$$

其中，λ_n 由方程

$$\cot\lambda_n = \lambda_n h/l$$

给出。
解其他常微分方程得

$$T_n'(t) + \frac{\lambda_n^2 a^2}{l^2} T_n(t) = 0, T_n(t) = A_n' \mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2 a^2 l^2\right)_t}$$

进而得到形式解的第 n 项的表达式

$$u_n(x,t) = A_n \mathrm{e}^{-\left(\lambda^2 a^2/t^2\right)t} \cos\frac{\lambda_n}{l}x$$

叠加得到形式解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2 a^2\right)\left(t^2\right)t} \cos\frac{\lambda_n}{l}x$$

结合初始条件解得

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{u_0 l^2}{\lambda_n} \frac{1}{\sqrt{l^2 + \lambda_n^2 h^2}} / \frac{l}{2}\left[\frac{l^2 + \lambda_n^2 h^2 + hl}{l^2 + \lambda_n^2 h^2}\right] \\ &= \frac{2u_0}{\lambda_n} \frac{\sqrt{l^2 + \lambda_n^2 h^2}}{l^2 + \lambda_n^2 h^2 + hl} \end{aligned}$$

进而得到解

$$u(x,t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{l^2 + \lambda_n^2 h^2}}{l^2 + \lambda_n^2 h^2 + hl} \mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2 a^2/l^2\right)t} \cos\frac{\lambda_n x}{l}$$

即为原问题的解。

5.7 验证固有值问题是否满足施刘定理使用条件

将一般方程转化为施刘方程以验证固有值问题是否满足施刘定理条件。

注意，转化为施刘方程形式只是为了判断是否固有值问题满足施刘定理条件，而不是为了求解。求解的时候仍然按照求解常微分方程的一般方法求解原方程。

解固有值问题

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0(1 < x < \mathrm{e}) \\ y(1) = y(\mathrm{e}) = 0 \end{cases}$$

解：题中方程不是施-刘型的, 所以为了验证是否满足施刘定理条件，要先转化为施刘方程。按照教材公式

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{x^2}\exp\left\{\int \frac{x}{x^2}\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

把方程两端乘以 $\rho(x)$, 即化成施-刘型方程

$$\frac{d}{dx}\left(xy'\right) + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

系数 $k(x) = x, q(x) = 0, \rho(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 [1,e] 上满足施-刘定理的条件, 且两端的边界条件都是第一类, 故 $\lambda > 0$. 记 $\lambda = \mu^2(\mu > 0)$ 题中的方程为欧拉方程，作替换 $x = \mathrm{e}^t$ 或 $t = \ln x$, 即可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \mu^2 y(t) = 0$$

因而

$$\begin{aligned} y &= A\cos\mu t + B\sin\mu t \\ &= A\cos(\mu\ln x) + B\sin(\mu\ln x) \end{aligned}$$

由 $y(1) = 0$, 有 $A = 0$; 由 $y(\mathrm{e}) = 0$, 有 $B\sin\mu = 0$, 因 B 不能再为零,
于是

$$\mu_n = n\pi(n = 1, 2, \cdots)$$

故

$$\lambda_n = \mu_n^2 = n^2\pi^2(n = 1, 2, \cdots)$$

相应的固有函数为

$$y_n = \sin(n\pi\ln x)$$

注意一般方程转化为施刘方程形式的方法，以及目的。

5.8 非齐次方程的求解

三种常用方法分别是：固有函数展开法、齐次化原理、特解法。注意三种方法的适用条件和使用方法。

长为 l 两端固定的弦线在单位长度的横向力 $f(x,t)=g(x)\sin\omega t$ 的作用下振动, 已知弦的初始位移和速度分别为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 试求其振动规律。

解：定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=g(x)\sin\omega t(0<x<l,t>0) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

这是一般的非齐次问题，由线性叠加原理, 我们可以令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

其中 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \\ v(0,t)=v(l,t)=0 \\ v(x,0)=\varphi(x),v_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

而 $w(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=g(x)\sin\omega t \\ w(0,t)=w(l,t)=0 \\ w(x,0)=0,w_t(x,0)=0 \end{cases}$$

关于 v 的定解问题的解为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\Big)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

关于 w 的定解问题的方程是非齐次的，需要首先进行处理。

法一：固有函数展开法

令：

$$\begin{cases} w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}\cdot x \\ g(x)\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{cases}$$

代入定解问题得

$$\begin{cases} T_n''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=0,T_n'(0)=0 \end{cases}$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^1 g(x)\sin\omega t\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha$$

解关于 T 的方程得

$$
\begin{aligned}
T_n(t) &= \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{2}{n\pi a}\int_0^t\int_0^l g(\alpha)\sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{2}{n\pi a}\int_0^t\sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{2}{n\pi a}\cdot\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

于是得

$$
w(x,t)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{n\left[\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\right]}
$$

$$
\int_0^1 g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\sin\frac{n\pi}{l}x
$$

法二：齐次化原理

由于是非齐次发展方程，可以考虑齐次化原理。

$$
\begin{cases}
v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \\
v(0,t;\tau)=0, v(l,t;\tau)=0 \\
v(x,\tau)=0, v_t(x,\tau)=g(x)\sin\omega\tau
\end{cases}
$$

作时间变量偏移得到

$$
\begin{cases}
v_{TT}-a^2v_{xx}=0 \\
v(0,T)=v(l,T)=0 \\
v(x,0)=0, v_T(x,0)=g(x)\sin\omega\tau
\end{cases}
$$

解得

$v(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi a}\sin\omega\tau\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\right]\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$ 又

$$
\int_0^l\sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\mathrm{d}\tau=\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}
$$

利用齐次化原理的解的积分公式

$$
w(x,t)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\mathrm{d}\alpha\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}
$$

最后，叠加得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[&\frac{2}{n\pi a}\cdot\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{w^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\\
&+\frac{2}{l}\left(\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\right)\cos\frac{n\pi a}{l}t\\
&+\frac{2}{n\pi a}\left(\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\right)\sin\frac{n\pi a}{l}t\Bigg]\sin\frac{n\pi}{l}x
\end{aligned}
$$

即为原问题的解。

5.9 非齐次边界的处理

$$
\begin{cases}
u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x)(0<x<l,t>0)\\
u(0,t)=A,u(l,t)=B\\
u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)
\end{cases}
$$

解：由于分离变量法直接应用求解问题时要求边界条件是齐次的，如果边界条件非齐次，一定要先将边界条件齐次化。一般是利用基于叠加原理的特解法处理。

令

$$
u(x,t)=v(x,t)+w(x)
$$

$$
\begin{cases}
v_{tt}-a^2v_{xx}=a^2w''(x)+f(x)\\
v(0,t)=A-w(0),v(l,t)=B-w(l)
\end{cases}
$$

故为使 $v(x,t)$ 的方程和边界条件均为齐次, 应选 $w(x)$ 使之满足

$$
\begin{cases}
a^2w''(x)=-f(x)\\
w(0)=A,w(l)=B
\end{cases}
$$

对 x 积分得

$$
w(x)=\int_0^x\mathrm{d}\beta\int_0^\beta-\frac{1}{a^2}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha+C_1x+C_2
$$

将边界条件代入得

$$
\begin{cases}
w(0)=C_2=A\\
w(l)=\int_0^l\mathrm{d}\beta\int_0^\beta-\frac{1}{a^2}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha+C_1l+C_2=B
\end{cases}
$$

由此得

$$
C_2=A,C_1=\frac{1}{l}(B-A)+\frac{1}{a^2l}\int_0^l\mathrm{d}\beta\int_0^\beta f(\alpha)\mathrm{d}\alpha
$$

所以

$$w(x) = A + \frac{B-A}{l}x + \frac{1}{a^2 l}\int_0^l \mathrm{d}\beta \int_0^\beta f(\alpha)\mathrm{d}\alpha - \frac{1}{a^2}\int_0^x \mathrm{d}\beta \int_0^\beta f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

求解关于 $v(x,t)$ 的方程得

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l [\varphi(\alpha) - w(\alpha)]\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha \\ B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha \end{cases}$$

最后叠加即可得原问题的解 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$。

第三章综合复习

6.1 主要内容

- 贝塞尔方程的定义及其来源
- 贝塞尔方程的广义幂级数方法求解
- 贝塞尔函数的定义
- 贝塞尔函数的母函数、展开式
- 贝塞尔函数的性质、递推关系
- 应用贝塞尔函数求解柱坐标系下分离变量得到的固有值问题
- 勒让德方程的定义及其来源
- 勒让德多项式的定义
- 勒让德多项式的母函数、展开式
- 勒让德多项式的性质、递推关系
- 应用勒让德多项式求解球坐标系下分离变量得到的固有值问题

6.2 学习目标

- 理解贝塞尔函数和勒让德多项式的定义
- 掌握贝塞尔函数和勒让德多项式的母函数和展开式
- 熟练掌握给定函数的贝塞尔级数展开和勒让德级数展开
- 熟练掌握贝塞尔函数和勒让德多项式的性质、递推关系
- 熟练掌握利用贝塞尔函数和勒让德多项式进行积分求解
- 熟练掌握柱坐标系和球坐标系下分离变量得到的固有值问题的求解

6.3 学习方法

- 熟练掌握两类特殊函数的定义、性质、递推关系
- 理解本章的主要目的是通过对两类特殊函数的分析进而实现求解柱坐标、球坐标系下固有值问题
- 联系第二章所学分离变量法的知识以及施刘定理的理论支持，理解关于两类固有值问题的基本问题

6.4 应用贝塞尔函数的母函数及其积分表示进行积分求解

计算积分 $I=\int_0 \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x$, 这里 a,b 是实数且 $a>0$ 。并求拉普拉斯变换 $L\left[\mathrm{J}_0(t)\right], L\left[\mathrm{J}_1(t)\right]$

解: 把 $J_0(bx)$ 的积分表达式代入所给积分中, 并交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ibx\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\exp\{-ax+\mathrm{i}bx\sin\theta\}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因

$$\left|\int_0^{+\infty}\exp\{-ax+\mathrm{i}bx\sin\theta\}\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$$

无穷积分对 $-\pi\leq\theta\leq\pi$ 一致收敛，从而交换积分次序是合理的（本课程我们对于这部分内容并不特别要求，可以先默认成立）。于是

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-a+ib\sin\theta}\exp\{-ax+ibx\sin\theta\}\bigg|_{x=0}^{+\infty}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a+\mathrm{i}b\sin\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a^2+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

上面最后一个积分利用留数定理计算。（这个积分建议大家自己动手算一下）当

$Rep>0$ 时，由定义知

$$
\begin{aligned}
L\left[\mathrm{J}_0(t)\right] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{J}_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}
\end{aligned}
$$

又由分部积分法及 $\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x), \mathrm{J}_0(0) = 1$, 得

$$
\begin{aligned}
L\left[\mathrm{J}_1(t)\right] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{J}_1(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= -\left.\mathrm{J}_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\right|_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty} \mathrm{J}_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \\
&= \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}
\end{aligned}
$$

6.5 利用贝塞尔函数的递推关系进行积分求解

计算积分

$$
\int x^n J_{n+1}(x)\mathrm{d}x
$$

解：对于这类积分问题，首先明确积分的求解主要的思路有一般换元法、分部积分法以及基于分部积分构造积分递推公式进行求解。求解时主要应用贝塞尔函数的递推关系，要根据目标和求解方法明确采用哪个递推关系。

由题意知，我们需要通过分部积分对贝塞尔函数的阶数进行降阶，所以选择递推关系

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)\right] = -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)
$$

进而得

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\int x^n \mathrm{J}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = \int x^{2n}\left[x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= -x^n\mathrm{J}_n(x) + 2n\textstyle\int x^{n-1}\mathrm{J}_n(x)\mathrm{d}x \\
&= -x^n\mathrm{J}_n(x) - 2nx^{n-1}\mathrm{J}_{n-1}(x) + 2^2n(n-1)\textstyle\int x^{n-2}\mathrm{J}_{n-1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \cdots \\
&= -x^n\mathrm{J}_n(x) - 2nx^{n-1}\mathrm{J}_{n-1}(x) - 2^2n(n-1)x^{n-2}\mathrm{J}_{n-2}(x) - \cdots \\
&-2^{n-1}[n(n-1)\cdots 2]x\mathrm{J}_1(x) + 2^n n!\textstyle\int \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x \\
&= -\textstyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\mathrm{J}_{n-k}(x) + C
\end{aligned}
$$

其中 C 为积分常数。

6.6 给定函数的贝塞尔级数展开

设 $\omega_n(n=1,2,\cdots)$ 是方程 $\mathrm{J}_0(x)=0$ 的所有正根, 试将函数 $f(x)=1-x^2(0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $\mathrm{J}_0\left(\omega_n x\right)$ 的级数.

解：由题意知

$$1-x^2=\sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0\left(\omega_n x\right)$$

则

$$\begin{aligned}
C_n &=\frac{1}{N_{01}^2} \int_0^1\left(1-x^2\right) x J_0\left(\omega_n x\right) \mathrm{d} x \\
&=\frac{1}{N_{01}^2 \omega_n^2} \int_0^{\infty_n} t\left(1-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right) \mathrm{J}_0(t) \mathrm{d} t\left(\text{ 令} t=\omega_n x\right) \\
&=\frac{1}{N_{01}^2 \omega_n^2}\left[\left.\left(1-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right) t J_1(t)\right|_0^{\omega_n}+\frac{2}{\omega_n^2} \int_0^{\omega_n} t^2 \mathrm{J}_1(t) \mathrm{d} t\right] \\
&=\left.\frac{2}{\omega_n^2 \mathrm{J}_1^2\left(\omega_n\right)} \cdot \frac{2}{\omega_n^2} t^2 \mathrm{J}_2(t)\right|_0^{\omega_n} \\
&=\frac{4 \mathrm{J}_2\left(\omega_n\right)}{\omega_n^2 \mathrm{J}_1^2\left(\omega_n\right)}
\end{aligned}$$

又由递推关系 $\mathrm{J}_2(x)=\frac{2}{x} \mathrm{J}_1(x)-\mathrm{J}_0(x)$ 及 $\mathrm{J}_0\left(\omega_n\right)=0$, 得

$$\mathrm{J}_2\left(\omega_n\right)=\frac{2 \mathrm{J}_1\left(\omega_n\right)}{\omega_n}$$

因而

$$C_n=\frac{8}{\omega_n^3 \mathrm{J}_1\left(\omega_n\right)}$$

所以

$$1-x^2=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{\omega_n^3 \mathrm{J}_1\left(\omega_n\right)} \mathrm{J}_0\left(\omega_n x\right)$$

6.7 使用分离变量法结合贝塞尔函数求解定解问题

圆柱体底面半径为 a, 高为 h, 底面温度为 0，柱面上温度为 $Az\left(1-\frac{z}{h}\right)$。求解圆柱体内部的温度分布。

解：由题意写出定解问题

$$\begin{cases}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 & \\
\left.u\right|_{r=0} \text{ 有界}, & \left.u\right|_{r=a}=A z\left(1-\frac{z}{h}\right) \\
\left.u\right|_{z=0}=0, & \left.u\right|_{z=h}=0
\end{cases}$$

令 $u(r,z)=R(r)Z(z)$, 分离变量，得到

$$\begin{cases} Z''+\lambda Z=0 \\ Z(0)=0, Z(h)=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

$$\begin{cases} \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 & n=1,2,3,\cdots, \\ Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z \end{cases}$$

$$R_n(r)=\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right), n=1,2,3,\cdots$$

因此定解问题的形式解为

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\frac{n\pi}{h}z$$

这里已经应用了有界条件 $u|_{r=0}$ 有界。由柱面上的边界条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)\sin\frac{n\pi}{h}z=Az\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

利用正交性求解系数

$$c_n=\frac{2A}{h}\frac{1}{\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)}\int_0^h z\left(1-\frac{z}{h}\right)\sin\frac{n\pi}{h}z\mathrm{d}z=\frac{4Ah}{(n\pi)^2}\frac{1-(-1)^n}{\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)}$$

最后得到解

$$u(r,z)=\frac{8Ah}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{\mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{h}\pi r\right)}{\mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{h}\pi a\right)}\sin\frac{2n+1}{h}\pi z$$

6.8 应用勒让德多项式的性质和递推关系求解积分

计算积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x$

解：在处理对称区间积分的时候要注意被积函数奇偶性。基于对勒让德多项式的了解，当 $k+l$ 为奇数时积分一定为 0，故下面只需讨论 $k+l$ 为偶数的情形。又由于 k 和 l 的任意性，不妨假定 $k\geq l$. 因此

$$\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l'(x)\mathrm{d}x=P_k(x)P_l'(x)|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l''(x)dx$$

因为 $\mathrm{P}\,_l''(x)$ 是 $l-2$ 次多项式，次数低于 k, 因此积分

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l''(x)\mathrm{d}x=0$$

再代入勒让德多项式的函数值

$$P_k(1)=1,P_k(-1)=(-1)^k$$

同时在勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{dP}_l(x)}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)=0$$

中令 $x=\pm 1$ 又可得到

$$\mathrm{P}_l'(1)=\frac{1}{2}l(l+1),\mathrm{P}_l'(-1)=\frac{(-1)^{l-1}}{2}l(l+1)$$

并注意 $k+l$ 为偶数，因此最后就得到

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x=l(l+1),k+l=\text{ 偶数, 且}k\geq l$$

注意勒让德多项式的奇偶性在求解对称区间积分中的应用。

6.9 勒让德多项式的重要积分

这个积分在勒让德多项式积分求解题目中经常会用到，建议大家理解这个积分的求解，并且记住结论。

设 $m\geq 1,n\geq 1$. 试证明

$$(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x=m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

证明：由勒让德多项式的递推关系得

$$\begin{aligned}
n\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 x^m\left[xp_n'(x)-p_{n-1}'(x)\right]\mathrm{d}x\\
&=x^{n+1}p_n(x)\big|_0^1-\int_0^1(m+1)x^m p_n(x)\mathrm{d}x\\
&\quad-x^m p_{n-1}(x)\big|_0^1+\int_0^1 mx^{n-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x\\
&=-(m+1)\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x\\
&\quad+m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

把此等式左边的积分记作 $f(m,n)$, 再将等式变形，可得计算这个积分的递推关系

$$f(m,n)=\frac{m}{m+n+1}f(m-1,n-1)$$

6.10 给定函数的勒让德级数展开

将函数 $P_l'(x)$ 按勒让德多项式展开。

解：$P_l'(x)$ 是一个 $l-1$ 次多项式, 并且只含 $x^{l-1},x^{l-3},x^{l-5},\cdots$ 等项，因此

$$\mathrm{P}_l'(x)=\sum_{k=0}^{[(l-1)/2]}c_{l-2k-1}\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)$$

其中

$$c_{l-2k-1}=\frac{2l-4k-1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\mathrm{d}x$$

由于

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)|_{-1}^{1}-\textstyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在上式右端第一项中代入

$$\mathrm{P}_l(1)=1,\mathrm{P}_{l-2k-1}(1)=1$$

$$\mathrm{P}_l(-1)=(-1)^l,\mathrm{P}_{l-2k-1}(-1)=(-1)^{l-2k-1}$$

即可求得此项的数值为 2 。又因 $P_{l-2k-1}'(x)$ 是 $l-2k-2$ 次多项式, 所以它和 l 次勒让德多项式的乘积在对称区间上的积分为 0(这里用到了关于勒让德多项式的重要结论：当 $m<n$ 时 $\int_{-1}^{1}x^m p_n(x)=0$). 所以

$$\int_{-1}^{1}P_l'(x)P_{l-2k-1}(x)dx=2$$

因此，$c_{l-2k-1}=2l-4k-1$

$$\mathrm{P}_l'(x)=\sum_{k=0}^{[(l-1)/2]}(2l-4k-1)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)$$

6.11 利用分离变量法结合勒让德函数求解定解问题

接地导体球半径为 a ，距离球心 b 处放一点电荷 q，求球内的电势分布。

解: 取球坐标系，原点位于球心，极轴 $(\theta=0)$ 指向点电荷，则球内静电势与 ϕ 无关

$$u(r,\theta)=u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta)$$

$u_1(r,\theta)$ 是点电荷 q 产生的静电势

$$u_1(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}$$

$u_2(r,\theta)$ 是球面上的感生电荷所产生的静电势满足定解问题

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\theta}\right)=0\\
u_2\big|_{\theta=0}\ \text{有界},\ u_2\big|_{\theta=\pi}\ \text{有界},\\
u_2\big|_{r=0}\ \text{有界},\ u_2\big|_{r=a}=-\left.u_1\right|_{r=a}
\end{array}$$

利用分离变量法求解，得到形式解

$$u_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

结合边界条件得

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}\\
&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)
\end{aligned}$$

利用固有函数系的正交性求解系数

$$A_l=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^{l+1}}\left(\frac{b}{a}\right)^l$$

因此

$$u_2(r,\theta)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^l\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

利用叠加原理即可得，球内的电势分布为

$$\begin{aligned}
u(r,\theta)=&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\\
&-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^l\left(\frac{r}{a}\right)^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)
\end{aligned}$$

第四章综合复习

7.1 主要内容

- 傅里叶变换、正余弦变换、拉普拉斯变换的基本概念
- 傅里叶变换、正余弦变换、拉普拉斯变换的性质
- 积分变换法求解定解问题的使用条件
- 积分变换法求解定解问题的具体操作

7.2 学习目标

- 熟练掌握傅里叶变换、正余弦变换、拉普拉斯变换的基本概念和性质
- 理解积分变换法求解定解问题所蕴含的转化思想
- 熟练掌握积分变换法求解定解问题的使用条件
- 熟练掌握积分变换法求解定解问题的具体操作
- 了解同时使用傅里叶变换和拉普拉斯变换进行求解的方法

7.3 学习方法

- 复习傅里叶变换和拉普拉斯变换相关知识
- 复习留数定理求解积分的方法
- 复习拉普拉斯反变换的方法，尤其是利用反演公式结合留数定理进行求解
- 熟练掌握积分变换法求解定解问题的使用条件
- 熟练掌握积分变换法求解定解问题的具体流程

7.4 利用傅里叶变换求解定解问题

请使用傅里叶变换法求解定解问题。

解：如果我们首先看定解问题，会发现这是一个一维无界区域的弦振动问题。我们知道，如果遇到一维无界区域弦振动问题，那最好使用行波法，因为操作起来很方便，只需要带入公式即可。但是，这个想法的正确性是有前提的，即，如果题目没用指定求解方法，我们可以根据需要，自己选择合适方法进行求解。但是，如果题目指定，则一定要按照题目要求，使用指定的方法。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0(t>0) \\ u|_{t=0} = u_0 \mathrm{e}^{-(x/a)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

令 $u(x,t)$ 的傅里叶换为 $U(k,t)$

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

附加上自然边界条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = -k^2\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

所以，原来的偏微分方程，经傅里叶变换后，变为常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(k,t)}{\mathrm{d}t^2} + k^2c^2U(k,t) = 0$$

初始条件也作相应的变换。因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x/a)^2}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}a\mathrm{e}^{-(ka/2)^2}$$

故 $U(k,t)$ 满足的初始条件为

$$U(k,0) = \frac{u_0 a}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-(ka/2)^2}, \left.\frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

由此可以求出

$$U(k,t) = \frac{u_0 a}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-(ka/2)^2}\cos kct$$

代入反演公式，就求得

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k \\
&= \frac{u_0 a}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ka/2)^2}\cos kct\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\
&= \frac{u_0 a}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ka/2)^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ct)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)}\right]\mathrm{d}k \\
&= \frac{u_0}{2}\left\{\mathrm{e}^{-[(x+ct)/a]^2}+\mathrm{e}^{-[(x-ct)/a]^2}\right\}
\end{aligned}$$

可以再使用行波法进行求解，比较两种方法的求解过程。我们会发现，行波法只能求解一维无界区域波动方程问题和可以转化为一维波动方程问题的类型，优点是求解非常简单，直接利用公式就可以求解，计算很便捷，节约大脑 CPU 开销，但是能够求解的问题比较有限。行波法可以求解的这类问题，都可以采用傅里叶变换求解，积分变换法的优点是适用范围比较广，但是在求解过程上和行波法比比较繁琐。

7.5 利用正余弦变换求解定解问题

请用余弦变换求解定解问题。

$$\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}(x>0,t>0) \\
u(0,x)=0, u_x(t,0)=Q(Q\text{ 为常数}) \\
u(t,+\infty)=u_x(t,+\infty)=0
\end{cases}$$

解：以 x 为积分变量, 作余弦变换, 即令

$$\bar{u}(t,\lambda)=\int_0^{+\infty} u(t,x)\cos\lambda x\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x &= \int_0^{+\infty} u_{xx}(t,x)\cos\lambda x\mathrm{d}x \\
&= u_x\cos\lambda x|_0^{+\infty}+\lambda\int_0^{+\infty} u_x\sin\lambda x\mathrm{d}x \\
&= -Q+\lambda u\sin\lambda x|_0^{+\infty}-\lambda^2\int_0^{+\infty} u\cos\lambda x\mathrm{d}x \\
&= -Q-\lambda^2\bar{u}
\end{aligned}$$

因而，原定解问题成为常微分方程的初始问题

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}+a^2\lambda^2\bar{u}=-a^2Q \\
\bar{u}(\lambda,0)=0
\end{cases}$$

易求得

$$\begin{aligned}\bar{u}(t,\lambda) &= \frac{Q}{\lambda^2}\left[\exp\left\{-a^2\lambda^2 t\right\}-1\right]\\ &= -a^2 Q\int_0^t \exp\left\{-a^2\lambda^2\tau\right\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

作反余弦变换, 得

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar{u}(t,\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda\\ &= -\frac{2a^2Q}{\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^{+\infty}\exp\left\{-a^2\lambda^2\tau\right\}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda\\ &= -\frac{2a^2Q}{\pi}\int_0^t \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right\}\mathrm{d}\tau\\ &= -\frac{aQ}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

令 $y=\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}$, 则

$$\tau = \frac{x^2}{4a^2y^2}$$

$$\mathrm{d}\tau = -\frac{x^2}{2a^2y^3}\mathrm{d}y$$

所以问题的解为

$$\begin{aligned}u(t,x) &= -\frac{aQ}{\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\left(-\frac{x}{ay^2}\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}y\\ &= -\frac{Qx}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

注意正弦变换和余弦变换，做正反变换的时候建议严格按照定义进行求解。

7.6 利用拉普拉斯变换求解定解问题

求解定解问题。

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0<x<l,t>0)\\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=A\sin\omega t\\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=0\end{cases}$$

这里 ,$\omega \neq \frac{2k-1}{2l} a\pi (k=1,2,3,\cdots)$
解：令 $U(p,x)=L[u(t,x)]$, 即得

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 \frac{\mathrm{d}^2 U(p,x)}{\mathrm{d}x^2}=p^2 U(p,x) \\ U(p,x)\big|_{x=0}=0, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\big|_{x=l}=A\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{array}\right.$$

方程的通解为

$$U=C_1 \operatorname{ch}\frac{px}{a}+C_2 \operatorname{sh}\frac{px}{a}$$

定出常数后，即得像函数

$$U(p,x)=\frac{Aa\omega \operatorname{sh}\frac{px}{a}}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}$$

分母 $p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\frac{pl}{a}$ 关于 p 的零点为

$$p=0, \pm\omega\mathrm{i}, \pm\frac{2k-1}{2l} a\pi\mathrm{i}(k=1,2,\cdots)$$

而且它们都是 1 级零点, 在这些点中, 除 $p=0$ 是 $U(p,x)$ 的可去奇点外, 其他的点都是 $U(p,x)$ 的 1 级极点。由拉普拉斯变换反演公式，结合留数定理，得所求解为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= L^{-1}[U(p,x)] \\ &= \sum \operatorname{Res}\left[\frac{Aa\omega \operatorname{sh}\frac{px}{a}}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\frac{pl}{a}} \mathrm{e}^{pt}\right] \end{aligned}$$

这里，和式 $\sum$ 对所有极点求和. 可以利用复变函数留数定理部分介绍的公式进行求解。最后得到解

$$u(t,x)=\frac{Aa}{\omega}\frac{1}{\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t+\frac{16a\omega Al^2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2k-1)a\pi t}{2l}}{(2k-1)\left[4l^2\omega^2-a^2(2k-1)^2\pi^2\right]}$$

注意在求解拉普拉斯反变换的时候，可能会用到反演公式。

7.7 利用傅里叶变换和拉普拉斯变换进行求解

联合使用拉普拉斯变换和傅里叶变换求解无界弦的横振动问题

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt}=a^2 u_{xx}(-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=\phi(x) \end{array}\right.$$

解: 先作傅里叶变换。令

$$U(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\Phi(k)&=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ \Psi(k)&=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{d}^2U(k,t)}{\mathrm{d}t^2}+k^2a^2U(k,t)=0\\ &U(k,0)=\Phi(k),\ \tfrac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\Psi(k)\end{aligned}$$

再作拉普拉斯变换,

$$\bar{U}(k,p)=\int_0^{\infty}U(k,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

则 $U(k,t)$ 满足的常微分方程初值问题转化为代数方程

$$p^2\bar{U}(k,p)+k^2a^2\bar{U}(k,p)=p\Phi(k)+\Psi(k)$$

所以,

$$\bar{U}(k,p)=\frac{p\Phi(k)+\Psi(k)}{p^2+k^2a^2}$$

然后，求两次反演，得

$$\begin{aligned}U(k,t)=&\Phi(k)\cos kat+\frac{1}{ka}\Psi(k)\sin kat\\ u(x,t)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(k)\cos kat+\frac{1}{ka}\Psi(k)\sin kat\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\cos kat\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\left[\int_0^t\cos ka\tau\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\ =&\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+at)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\right]\mathrm{d}k\\ &+\int_0^t\mathrm{d}\tau\left\{\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+a\tau)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-a\tau)}\right]\mathrm{d}k\right\}\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\phi(x)\\ &\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\psi(x)\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =&\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)] \\
&+\frac{1}{2}\int_0^t[\psi(x+a\tau)+\psi(x-a\tau)]\mathrm{d}\tau \\
=&\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

第五章综合复习

8.1 主要内容

- δ 函数的定义及性质
- δ 函数的傅里叶变换与反变换
- δ 的广义积分表达（经常用 δ 函数代换这类广义积分）
- 基本解方法的概念
- 基本解方法的适用范围
- 基本解方法的具体操作
- 格林函数的镜像法求解
- 格林函数的分离变量法和积分变换法求解
- 解的积分表达式

8.2 学习目标

- 掌握 δ 函数的基本概念和性质，尤其要明确其作为广义函数实质是定义了一种运算
- 理解基本解方法的思想
- 熟练掌握求解格林函数的镜像法
- 理解格林函数所满足的定解问题本质是定解问题，因此可以用各种求解定解问题的方法进行求解
- 熟练掌握解的积分表达式
- 熟练掌握基本解方法求解定解问题的具体操作

8.3 学习方法

- 熟练掌握基本概念
- 复习曲线积分和曲面积分
- 熟练掌握格林函数的求解
- 熟练掌握解的积分表达式

8.4 关于 δ 函数的等式的证明

这类问题的处理的时候要注意 δ 函数的本质是定义了一种运算，所以这类等式的证明要利用其定义的运算性质来进行处理。
试证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$。
证明：首先任取一检验函数 $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = -\left.(x\varphi(x))'\right|_{x=0} = -\varphi(x) - \left.x\varphi'(x)\right|_{x=0} = -\varphi(0)$$

而根据 δ 函数的运算性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx = -\left.\varphi(x)\right|_{x=0} = -\varphi(0)$$

比较得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx$$

所以得到

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

8.5 δ 函数积分表示的应用

设 $f(t)$ 是已知连续函数，计算积分

$$I = \frac{2a}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{0}^{t} f(\tau)\sin\lambda x \sin a\lambda(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

这里，a 为正常数, $at > x > 0$，并假定所给的累次积分可交换次序。
解：利用三角函数积化和差公式和 δ 函数的积分表达式，得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\sin a\lambda(t-\tau)\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\{\cos\lambda[x-a(t-\tau)]-\cos\lambda[x+a(t-\tau)]\}\mathrm{d}\lambda \\ &= \delta[x-a(t-\tau)]-\delta[x+a(t-\tau)] \\ &= \delta[x-a(t-\tau)]\end{aligned}$$

最后一个等号成立是由于 $x+a(t-\tau)>0$, 所以 $\delta[x+a(t-\tau)]=0$
于是，交换积分次序后得

$$I = a\int_0^t \delta[x-a(t-\tau)]f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

令 $s = x-a(t-\tau)$, 得

$$I = \int_{x-at}^{x}\delta(s)f\left[\frac{1}{a}(s-x+at)\right]\mathrm{d}s$$

因 $x-at<0, x>0$, 所以

$$\begin{aligned}I &= f\left[\frac{1}{a}(s-x+at)\right]\Big|_{s=0} \\ &= f\left(t-\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

注意 δ 函数的尺度变换性质。

8.6 利用镜像法求解格林函数

试求层状空间 $0<z<h$ 的格林函数

$$\begin{cases}\Delta_3 G = -\delta\left(M-M_0\right)(0<z<h) \\ G|_{z=0} = G|_{z=h} = 0\end{cases}$$

解: 利用镜像法，设在 $0<z<h$ 中的 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 点放置正电荷 ε_0 则为使 $G|_{z=0}=0$, 需在 M_0 关于 $z=0$ 的像点 $M_0'\left(x_0,y_0,-z_0\right)$ 置一相反的电荷 $-\varepsilon_0$, 此时在 $0<z<h$ 中任一点 $M(x,y,z)$ 处的电势为

$$g_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0'}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}r_0 &= \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2} \\ r_0' &= \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z+z_0\right)^2}\end{aligned}$$

且 $g_0|_{z=0}=0$, 满足边界条件, 但 $g_0|_{z=h}\neq 0$, 不满足边界条件。
为使电势在 $z=h$ 上满足边界条件，我们相对于 $z=h$ 分别取 M_0 和 M_0' 的像点 $M_1'(x_0,y_0,2h-z_0)$ 和 $M_1(x_0,y_0,2h+z_0)$ 并在 M_1' 和 M_1 上分别放置点电荷 $-\varepsilon_0$ 和 $+\varepsilon_0$, 则此时 M 处的电势为

$$g_1=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0'}\right)+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)\right]$$

其中

$$r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2h+z_0)]^2}$$

$$r_1'=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2h-z_0)]^2}$$

且 $g_1|_{z=h}=0$ 满足边界条件, 但 $g_1|_{z=0}\neq 0$ 又不满足边界条件. 于是, 再相对于 $z=0$ 分别取 M_0,M_1' 和 M_1 的像点 ,M_0'，$M_{-1}(x_0,y_0,-2h+z_0)$ 和 $M_{-1}'(x_0,y_0,-2h-z_0)$ 并在 M_{-1} 和 M_{-1}' 分别放置点电荷 $+\varepsilon_0$ 和 $-\varepsilon_0$, 得电势

$$g_{-1}=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0'}\right)+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)+\left(\frac{1}{r_{-1}}-\frac{1}{r_{-1}'}\right)\right]$$

其中

$$r_{-1}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(-2h+z_0)]^2}$$
$$r_{-1}'=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(-2h-z_0)]^2}$$

类似地继续下去得 M 点电势为 $g_2,g_{-2},\cdots$, 于是满足定解条件的格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}\right)$$

其中

$$r_n=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2nh+z_0)]^2}$$
$$r_n'=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2nh-z_0)]^2}$$

又

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left|\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}\right|\approx\left|\frac{1}{2nh+z_0}-\frac{1}{2nh-z_0}\right|$$
$$=\frac{z_0}{2n^2h^2}=\frac{z_0}{2h^2}\cdot\frac{1}{n^2}\to 0$$

说明级数收敛，即解有意义。所以上述所得即为格林函数。

8.7 利用分离变量法求解格林函数

求矩形域 $D: 0<x<a, 0<y<b$ 内狄氏问题的格林函数，即解定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G=-\delta(x-\xi, y-\eta)((x, y) \in D,(\xi, \eta) \in D) \\ \left.G\right|_{x=0}=\left.G\right|_{x=a}=\left.G\right|_{y=0}=\left.G\right|_{y=b}=0 \end{cases}$$

解：考虑定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 \varphi+\lambda \varphi=0 \\ \varphi(0, y)=\varphi(a, y)=0 \\ \varphi(x, 0)=\varphi(x, b)=0 \end{cases}$$

令 $\varphi=X(x) Y(y)$, 经分离变量后得到固有值问题

$$\begin{cases} X''+\mu X=0 \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y''+\nu Y=0 \\ Y(0)=Y(b)=0 \end{cases}$$

且 $\lambda=\mu+\nu$. 解上述两个方程, 得固有值及相应的固有函数分别为

$$\begin{aligned} &\mu_m=\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2(m=1,2, \cdots) \\ &X_m(x)=\sin \frac{m \pi x}{a}(m=1,2, \cdots) \\ &\nu_n=\left(\frac{n \pi}{b}\right)^2(n=1,2, \cdots) \\ &Y_n(y)=\sin \frac{n \pi y}{b}(n=1,2, \cdots) \end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned} &\lambda_{mn}=\mu_m+\nu_n=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \\ &\varphi_{mn}=\sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \end{aligned}$$

令

$$G=\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} \varphi_{mn}$$

代入方程得到

$$\begin{aligned}\Delta_2 G &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}\Delta_2\varphi_{mn}\\ &= -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}\lambda_{mn}\varphi_{mn}\\ &= -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}a_{mn} &= \frac{1}{\lambda_{mn}\left\|\varphi_{nm}\right\|^2}\int_0^a\int_0^b \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{4ab}{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\end{aligned}$$

所以

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4ab}{\pi^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2b^2+n^2a^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\varphi_{mn}$$

即为格林函数。

8.8 利用基本解方法求解定解问题

求解定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}-2u(t>0,-\infty<x<+\infty,a>0)\\ u|_{t=0}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

解：首先判断定解问题的类型。无界区域问题，不能采用分离变量法；不是一维无界区域弦振动问题的标准形式，不能直接用行波法；由于没有说明无穷远点的函数值情况，不能用傅里叶变换法。问题满足基本解方法的使用条件，因此选择用基本解方法进行求解。以上只是分析过程，不需要在试卷上详细说明。

首先先求出基本解，即求解定解问题

$$\begin{cases}U_{tt}=a^2U_{xx}-2U_t-2U\\ U|_{t=0}=0,U_t|_{t=0}=\delta(x)\end{cases}$$

对 x 进行傅里叶变换

$$\begin{cases}\frac{d^2\bar{U}}{dt^2}+2\frac{d\bar{U}}{dt}=-\left(\lambda^2a^2+2\right)\bar{U}\\ \bar{U}\big|_{t=0}=0,\left.\frac{d\bar{U}}{dt}\right|_{t=0}=1\end{cases}$$

解得

$$\bar{U} = e^{-t}\frac{\sin\sqrt{\lambda^2a^2+1}t}{\sqrt{\lambda^2a^2+1}}$$

反变换得

$$U = \frac{e^{-t}}{2a}J_0\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right)h(at-|x|)$$

所以定解问题的解为

$$u = U(t,x)*\psi(x) = \frac{e^{-t}}{2a}\int_{-at}^{at}J_0\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2-\xi^2}\right)\psi(x-\xi)d\xi$$

综合复习课讲义

9.1 定解问题的书写

一均匀杆的原长为 l, 一端固定，另一端沿杆的轴线方向拉长 b 而静止，放手任其振动，试写出对应的定解问题。

解：首先按照题意建立合适的坐标系。

由题意知，取杆所在直线为 x 轴，固定端为原点 $x=0$，另一端对应 $x=l$。以 $\bar{u}(x,t)$ 表示小段的质心位移, 设 S 为杆的横截面积, ρ 为杆的质量密度, $p(x,t)$ 是小段端点处所受的力. 由牛顿第二定律，有

$$[p(x+\Delta x,t)-p(x,t)]S=\rho S\Delta x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时 ,$\bar{u}\to u$, $\frac{p(x+\Delta x,t)-p(x,t)}{\Delta x}\to\frac{\partial p}{\partial x}$, 又因为 $p=E\frac{\partial u}{\partial x}$, 故有

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial p}{\partial x}=E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令 $a^2=\frac{E}{\rho}$, 可得振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

由题意知，放手时即是振动的初始时刻，此时杆振动的速度为零，则

$$u_t|_{t=0}=0$$

而 $x=l$ 端拉离平衡位置使整个杆伸长了 b, 故初始位移为

$$u|_{t=0}=\frac{b}{l}x$$

再看边界条件，一端固定即该端位移保持为 0，即

$$u|_{x=0}=0$$

另一端未受外力，于是有

$$u_x|_{x=l} = 0$$

所以定解问题可以写作

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \frac{b}{l}x, u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

总结：首先要选取合适的坐标系

具体操作：选择一微元利用物理定律进行分析，整理得到泛定方程，结合物理意义写出定解条件。

下面通过两道在自然语言描述上比较类似的问题说明如何进行合适的微元分析。

题一：

长为 l 的柔软均匀绳，一端固定在以角速度 ω 匀速转动的竖直轴上，由于惯性离心力的作用，这根绳的平衡位置应是水平线，试推导此绳相对于水平线的横振动方程。

解：由小量近似，$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \cos\alpha \approx 1$, 因而从 x 到 $x + \mathrm{d}x$ 这段绳满足

$$T_2 u_x|_{x+dx} - T_1 u_x|_x = \rho \mathrm{d}x \cdot u_{tt}$$

即

$$(Tu_x)|_{x+dx} - (Tu_x)|_x = \rho \mathrm{d}x \cdot u_{tt}$$

为了求出在 x 处的张力 $T(x)$, 需考虑从 x 到 l 的一段绳上的惯性离心力的作用, 设在 x 处的张力为 $T(x)$, 则

$$T(x) = \int_x^l \omega^2 x \rho \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho\omega^2 \left(l^2 - x^2\right)$$

因此，

$$\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2 \left(l^2 - x^2\right)\right] u_x\Big|_{x+dx} - \left[\frac{1}{2}\rho\omega^2 \left(l^2 - x^2\right)\right] u_x\Big|_x = u_{tt}\rho dx$$

即

$$\rho u_{tt} = \frac{\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)u_x\right]\Big|_{x+\mathrm{d}x} - \left[\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)u_x\right]\Big|_x}{\mathrm{d}x}$$
$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2-\omega^2\right)u_x\right]$$

整理得

$$u_{tt} - \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2-\omega^2\right)u_x\right] = 0$$

题二：

长为 l 的柔软均匀的重绳，上端固定在以角速度 ω 匀速转动的竖直轴上，由于重力的作用，绳的平衡位置应是竖直线。试推导此绳相对于竖直线的横振动方程。

解：在小振动的情况下，$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \cos\alpha \approx 1, \mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x$, 取从 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 一段绳，满足

$$T_2 u_x|_{x+dx} - T_1 u_x|_x + F = \rho\mathrm{d}x \cdot u_{tt}$$

其中 F 是 dx 段上所受的惯性离心力，$F = \rho\mathrm{d}xu\omega^2$, 在 x 端还受重力的作用, 张力 $T = \int_x^l \rho g\mathrm{d}x$. 代入上式得

$$[(l-x)\rho g u_x]|_{x+dx} - [(l-x)\rho g u_x]|_x + u\omega^2\rho\mathrm{d}x = u_{tt}\rho\mathrm{d}x$$

即

$$u_{tt} = \frac{[(l-x)gu_x]|_{x+dx} - [(l-x)gu_x]|_x}{\mathrm{d}x} + u\omega^2$$

亦即

$$u_{tt} = g\frac{\partial}{\partial x}[(l-x)u_x] = u\omega^2$$

整理得到

$$u_{tt} - g\frac{\partial}{\partial x}[(l-x)u_x] - u\omega^2 = 0$$

9.2 行波法求解定解问题（并和积分变换法作比较）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u, (t>0, r>0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界} \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \left(1+r^2\right)^{-2} \end{cases}$$

解：

法一：使用行波法求解。观察问题为三维球对称的波动方程问题，可以通过函数变换转化为一维半无界区域问题，接着使用延拓法转化为一维无界区域的波动方程问题进而使用行波法求解。

使用球坐标表达泛定方程

$$u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)$$

通过待定函数变换过程确定函数变换因子，令 $v=ru$, 则变为半无界弦振动定解问题:

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{rr},(t>0,r>0)\\ v|_{r=0}=0\\ v|_{t=0}=0,\, v_t|_{t=0}=\frac{r}{(1+r^2)^2}\end{cases}$$

进一步，使用延拓法

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx},(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ w|_{t=0}=0,\, w_t|_{t=0}=\frac{x}{(1+x^2)^2}\end{cases}$$

利用达朗贝尔公式

$$\begin{aligned} w(t,x)&=\tfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tfrac{\xi}{(1+\xi^2)^2}d\xi=-\tfrac{1}{4a}\tfrac{1}{(1+\xi^2)}\Big|_{x-at}^{x+at}\\ &=\tfrac{1}{4a}\tfrac{1}{(1+(x-at)^2)}-\tfrac{1}{4a}\tfrac{1}{(1+(x+at)^2)}=\tfrac{xt}{[1+(x-at)^2][1+(x+at)^2]}\end{aligned}$$

取 $x>0$ 部分（对应原问题的 $r>0$），得到半无界弦振动定解问题的解为

$$v(t,r)=\frac{rt}{[1+(r-at)^2)]\,[1+(r+at)^2]}$$

相应地，此三维波动方程定解问题的解为

$$u(t,r)=\frac{t}{[1+(r-at)^2]\,[1+(r+at)^2]}$$

法二：使用拉普拉斯变换法求解。对于一般的发展方程问题，时间变量 $t>0$ 为半无界区域，且初始条件往往满足拉普拉斯变换法使用条件。特别地，可以使用拉普拉斯变换法可以求解这一问题。

$$L\left[u_{tt}\right]=p^2U-pU(0,r)-u_t(0,r)=p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}$$

那么方程变为

$$p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}=a^2\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2a^2}{r}\frac{dU}{dr}$$

求解常微分方程, 再作 Laplace 逆变换，最后得到

$$u=\frac{t}{[1+(r-at)^2]\,[1+(r+at)^2]}$$

比较：可以发现，行波法和积分变换法都可以应用于求解这一问题。行波法求解这一问题主要步骤为：选取合适的坐标系表达定解问题，待定函数变换寻找合适的函数变换因子，变换后的问题利用延拓法转化为可以直接使用行波法求解的问题，利用达朗贝尔公式直接得到解。拉普拉斯变换法求解这一问题的主要步骤为：选取合适的坐标系表达定解问题，选取合适的积分变量作正变换，求解像函数满足的常微分方程，对像函数作反变换得到解。一般来讲，如果需要作函数变换才可以使用行波法发问题，需要考虑题目是否提供关于函数变换因子的提示，如果没有需要考虑是否掌握待定函数变换法。而对于拉普拉斯变换法，则要考虑像函数的求解以及反变换的过程。一般的原则是能够使用行波法求解的问题尽量使用行波法。

9.3 齐次化原理的应用

应用齐次化原理求解非齐次发展方程问题。

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t(0<x<l,t>0) \\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

解：非齐次发展方程，可以应用齐次化原理进行转化，进而使用分离变量法求解。
记

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0(0<x<l,t>\tau) \\ v_x(0,t)=v_x(l,t)=0 \\ v(x,t;\tau)|_{t=\tau}=0,\, v_t(x,t;\tau)|_{t=\tau}=A\cos\frac{\pi}{l}x\sin\omega\tau \end{cases}$$

的解 $v(x,t;\tau)$, 而

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

为了求解这个定解问题，我们要进行时间变量偏移。令

$$v(x,t;\tau)=X(x)T(t-\tau)$$

$$T''-\mu a^2T=0$$
$$X''-\mu X=0$$
$$X'(0)=0,X'(l)=0$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数系

$$\begin{cases} \text{固有值: } \mu_0 = 0, \mu_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, n = 1, 2, \cdots \\ \text{固有函数: } X_0(x) = 1, X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

将固有值代入关于时间变量 t 的常微分方程并求解得到

$$\begin{cases} T_0(t-\tau) = a_0(t-\tau) + b_0 \\ T_n(t-\tau) = A_n \cos\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) \end{cases}$$

进而得到

$$v_n(x,t;\tau) = \left[A_n \cos\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

则形式解

$$\begin{aligned} v(x,t;\tau) =& a_0(t-\tau) + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) + \right. \\ & \left. B_n \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\cos\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

代入初始条件

$$\begin{cases} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{l}x = 0 \\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \cos\frac{n\pi}{l}x = A\cos\frac{n\pi}{l}x \sin\omega t\tau \end{cases}$$

比较等式两边对应项系数得

$$b_0 = 0, A_n = 0$$
$$a_0 = 0, B_1\tfrac{\pi a}{l} = A\sin\omega\tau, B_n = 0 (n \neq 1)$$

即

$$a_0 = b_0 = A_n = 0, B_n = 0(n \neq 1), B_1 = \frac{Al}{\pi a}\sin\omega\tau$$

代入形式解

$$\begin{aligned} v(x,t;\tau) &= B_1 \sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{\pi}{l}x \\ &= \frac{Al}{\pi a}\sin\omega\tau \sin\frac{\pi a}{l}(t-\tau) \cdot \cos\frac{\pi}{l}x \end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_0^t \sin\omega\tau \sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{Al}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2 - \frac{\pi^2 a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t - \frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi}{l}x \end{aligned}$$

另外，这个问题属于有界区域的齐次边界非齐次方程问题，还可以使用固有函数展开法进行求解。可以在阅读时尝试利用固有函数展开法进行求解，并比较两种方法的特点。这里简单叙述固有函数展开法的操作过程。

相应的齐次问题分离变量后所得的固有值问题为

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

求解得到固有函数系

$$X_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi}{l} x, n = 0, 1, \cdots$$

进而把非齐次项在固有函数系上展开

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \\ A \cos \frac{\pi x}{l} \sin \omega t = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \end{cases}$$

并得到展开式系数

$$f_1(t) = A \sin wt, f_n(t) = 0 (n \neq 1)$$

进而得到关于 t 的常微分方程

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} T_1''(t) + \frac{\pi a}{l} T_1(t) = A \sin \omega t \\ T_1(0) = 0, T_1'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, n \neq 1 \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

求解得到

$$T_1(t) = \frac{Al}{\pi a} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \frac{\pi^2 a^2}{l^2}} \left(\omega \sin \frac{\pi a}{l} t - \frac{\pi a}{l} \sin \omega t \right)$$

和

$$T_n(t) \equiv 0, n \neq 1$$

所以定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{Al}{\pi a} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \frac{\pi^2 a^2}{l^2}} \left(\omega \sin \frac{\pi a}{l} t - \frac{\pi a}{l} \sin \omega t \right) \cos \frac{\pi}{l} x$$

9.4 分离变量法求解定解问题

1. 坐标系的选取

在环形域 $a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b(0<a<b)$ 内求解定解问题

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12\left(x^2-y^2\right), a<\sqrt{x^2+y^2}<b \\ \left.u\right|_{\sqrt{x^2+y^2}=a}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sqrt{x^2+y^2}=b}=0\end{array}\right.$$

解：由于求解区域是环形区域，所以我们选用极坐标系，利用直角坐标系与极坐标系之间的关系

$$\left\{\begin{array}{l}x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta\end{array}\right.$$

可将上述定解问题用极坐标 ρ, θ 表示

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=12 \rho^2 \cos 2 \theta, a<\rho<b \\ \left.u\right|_{\rho=a}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b}=0\end{array}\right.$$

这是一个非齐次方程齐次边界条件的定解问题. 使用固有函数展开法，并注意到圆域内 Laplace 方程所对应的固有函数为 $\Phi_n(\varphi)=A_n \cos n \varphi+B_n \sin n \varphi, n=0,1,2, \cdots$

进而可得形式解

$$u(\rho, \theta)=\sum_{n=0}\left[A_n(\rho) \cos n \theta+B_n(\rho) \sin n \theta\right]$$

代入泛定方程并整理得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[A_n''(\rho)+\frac{1}{\rho} A_n'(\rho)-\frac{n^2}{\rho^2} A_n(\rho)\right] \cos n \theta+\left[B_n''(\rho)+\frac{1}{\rho} B_n'(\rho)-\frac{n^2}{\rho^2} B_n(\rho)\right] \sin n \theta\right\} \\ =12 \rho^2 \cos 2 \theta$$

比较两端关于 $\mathrm{cosn}\,\theta, \sin n\theta$ 的系数，可得

$$\begin{array}{l}A_2''(\rho)+\frac{1}{\rho} A_2'(\rho)-\frac{4}{\rho^2} A_2(\rho)=12 \rho^2 \\ A_n''(\rho)+\frac{1}{\rho} \Lambda_n'(\rho)-\frac{n^2}{\rho^2} A_n(\rho)=0(n \neq 2) \\ B_n''(\rho)+\frac{1}{\rho} B_n'(\rho)-\frac{n^2}{\rho^2} B_n(\rho)=0\end{array}$$

再由边界条件得

$$A_n(a)=A_n'(b)=0$$
$$B_n(a)=B_n'(b)=0$$

系数递推公式的通解为

$$A_n(\rho) = c_n\rho^n + d_n\rho^{-n}$$
$$B_n(\rho) = c'_n\rho^n + d'_n\rho^{-n}$$

其中 c_n, d_n, c'_n, d'_n 都是任意常数. 由系数满足的条件得

$$A_n(\rho) \equiv 0 (n \neq 2)$$
$$B_n(\rho) \equiv 0$$

下面的任务就是要确定 $A_2(\rho)$

其满足非齐次的欧拉方程，利用待定系数法可求得它的一个特解

$$A_2^*(\rho) = \rho^4$$

所以，它的通解为

$$A_2(\rho) = C_1\rho^2 + C_2\rho^{-2} + \rho^4$$

由条件 (6) 确定 C_1, C_2, 得

$$C_1 = -\tfrac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}$$
$$C_2 = -\tfrac{a^4b^4\left(a^2-2b^2\right)}{a^4+b^4}$$

因此

$$A_2(\rho) = -\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}\rho^2 - \frac{a^{+}b^4\left(a^2-2b^2\right)}{a^4+b^4}\rho^{-2} + \rho^4$$

原定解问题的解为

$$u(\rho,\theta) = -\frac{1}{a^4+b^4}\left[\left(a^6+2b^6\right)\rho^2 + a^4b^4\left(a^2-2b^2\right)\rho^{-2} - \left(a^4+b^4\right)\rho^4\right]\cos 2\theta$$

2. 高维问题

求解高维分离变量问题

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2\nabla^2 u = k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c, t > 0 \\ u(0,y,z,t) = u(a,y,z,t) = 0, u(x,0,z,t) = u(x,b,z,t) = 0 \\ u(x,y,0,t) = u(x,y,c,t) = 0 \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z), u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z) \end{cases}$$

解：令 $u(x,y,z,t) = v(x,y,z)T(t)$, 代入方程得

$$T'' + \lambda k^2 T = 0$$

及

$$\nabla^2 v + \lambda v = 0$$

设 $v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$，代入 $v(x,y,z)$ 得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = 0$$

令 $X''(x) = \mu X(x), Y''(y) = \nu Y(y)$, 代入上式得

$$Z'' + (\lambda + \mu + \nu)Z = 0$$

由于关于 x 的边界条件是齐次的, 令 $\mu = -\alpha^2$, 得

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

及

$$X_l(x) = B_l \sin\frac{l\pi x}{a}, l = 1, 2, 3, \cdots$$

同样, 令 $\nu = -\beta^2$, 得

$$Y(y) = C\cos\beta y + D\sin\beta y$$

及

$$Y_m(y) = D_m \sin\frac{m\pi y}{b}, m = 1, 2, 3, \cdots$$

令 $q^2 = \lambda + \mu +_\nu = \lambda - a^2 - \beta^2$, 得到 $Z(z) = E\cos qz + F\sin qz$. 再利用关于 z 的齐次边界条件，可得

$$Z_n(z) = F_m \sin\frac{n\pi z}{c}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

将固有值代入关于 t 的常微分方程得

$$T_{lmn} = G_{lmn}\cos\sqrt{\lambda_{lmn}}kt + H_{lmn}\sin\sqrt{\lambda_{lmn}}kt$$

进而可得形式解

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) = &\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{lmn}\cos\sqrt{\lambda_{lmn}}kt + b_{lmn}\sin\sqrt{\lambda_{lmn}}kt\right) \\ &\times \sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c} \end{aligned}$$

其中 a_{lmn}, b_{lmn} 为任意常数。由 $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$, 得

$$f(x,y,z)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{lmn}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}$$

右端即为 $f(x,y,z)$ 的三重 *Fourier* 级数，其中

$$a_{lmn}=\frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由 $u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z)$, 有

$$b_{lmn}=\frac{8}{\sqrt{\lambda_{lmn}}kabc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c g(x,y,z)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中

$$\lambda_{lmn}=\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2$$

3. 非齐次边界问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0\\ u|_{x=0}=0, & u|_{x=l}=\sin\omega t\\ u|_{t=0}=0, & u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

解：对于非齐次边界问题，一般的处理方法是基于叠加原理的特解法。其核心在于特解的选取。这道题目通过不同的特解选取展示相应的求解过程，说明选取合适特解的重要性及一些关于选取原则的建议。

法一：令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, 取

$$w(x,t)=\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{l}x+\mu_1(t)=\frac{x}{l}\sin\omega t$$

则定解问题转化为

$$\begin{cases}v_{ut}-a^2v_{xx}=\frac{\omega^2}{l}x\sin\omega t\\ v(0,t)=v(l,t)=0\\ v(x,0)=0, v_t(x,0)=-\frac{\omega}{l}x\end{cases}$$

进而求解这一非齐次方程齐次边界问题即可得到结果。

法二：令

$$v(t,x)=X(x)\sin\omega t$$

由边界条件，可知 $X(0)=0, X(l)=1$. 把 $v(t,x)$ 代入泛定方程消去 $\sin\omega t$, 得

$$X''+\frac{\omega^2}{a^2}X=0$$

所以

$$X(x)=C_1\cos\frac{\omega x}{a}+C_2\sin\frac{\omega x}{a}$$

由 $X(0)=0$, 得 $C_1=0$; 再由 $X(l)=1$, 得

$$C_2=\frac{1}{\sin\frac{\omega l}{a}}$$

于是

$$X(x)=\frac{1}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}$$

从而

$$v(t,x)=\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t$$

再令

$$u=w(t,x)+v(t,x)$$

代入原定解问题, 就得到关于 w 的定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ w(t,0)=w(t,l)=0\\ w(0,x)=0, w_t(0,x)=-\omega\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\end{cases}$$

利用分离变量法处理这一齐次方程齐次边界问题得到解

$$w(t,x)=2\omega al\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

最后，把 $v(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 加起来, 就得到原定解问题的解。

4. 将一般方程化为施刘方程标准型

将方程化为施刘方程的标准形式.

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$$

解：

$$y''+\frac{1-x}{x}y'+\frac{\lambda}{x}y=0$$

于是 $p(x)=\frac{1-x}{x}$, 故

$$k(x)=\exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right]=\exp\left[\int\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x\right]=x\mathrm{e}^{-x}$$

对照施刘方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-g(x)y+\lambda\rho(x)y=0$$

可知该方程对应的施刘方程标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda\mathrm{e}^{-x}y=0$$

注意：这里首先求解 $k(x)$，本质上和教材方法是一样的。

9.5 积分变换法求解定解问题

求解有界弦的振动问题。

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},t>0,0<x<l\\u(t,0)=0,u_x(t,l)=A\sin\omega t,\omega\neq\frac{2k-1}{2l}\pi a,k=1,2,\cdots\\u(0,x)=u_t(0,x)=0\end{cases}$$

解：由题意知，可以采用拉普拉斯变换法求解。
记 $\bar{u}(p,x)=L[u(t,x)]$, 定解问题作拉普拉斯变换得到

$$\begin{cases}p^2\bar{u}=a^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2},0<x<l\\\bar{u}|_{x=0}=0,\,\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=l}=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\end{cases}$$

常微分方程的通解

$$\bar{u}=C\operatorname{ch}\frac{p}{a}x+D\operatorname{sh}\frac{p}{a}x$$

由边界条件定出特解

$$\bar{u}=\frac{Aa\omega}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p}\operatorname{sh}\frac{x}{a}p$$

利用拉普拉斯变换反演公式和留数定理

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\sum\operatorname{Res}\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]$$

这里, $\sum$ 是对 $\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}$ 的所有孤立奇点的留数求和. 由于 $\bar{u}(p,x)$ 在 p 平面上有可去奇点 $p=0$，一级极点 $p=\pm\mathrm{i}\omega$ 和 $p=\pm\mathrm{i}\omega_k$, 其中, $\omega_k=\frac{(2k-1)\pi a}{2l}(k=1,2,3,\cdots)$ 。所以可得

$$\begin{aligned}u_0(t,x)&=\left(\operatorname*{Res}_{p=i\omega}+\operatorname*{Res}_{p=-i\omega}\right)\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]=2\operatorname{Re}\left\{\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]\right\}\\&=2\operatorname{Re}\left[\frac{Aaw\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}p\right)\mathrm{e}^{pt}}{p(p+\mathrm{i}\omega)\operatorname{ch}\left(\frac{l}{a}p\right)}\right]_{p=\mathrm{i}\omega}=\frac{Aa}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}v(t,x)&=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\operatorname*{Res}_{p=i\omega_k}+\operatorname*{Res}_{p=-i\omega_k}\right)\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}2\operatorname{Re}\left\{\operatorname*{Res}_{p=i\omega_k}\left[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\right]\right\}\\&=2\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{Re}\left[\frac{Aaw\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}p\right)\mathrm{e}^{pt}}{p\left(p^2+\omega^2\right)\frac{l}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{l}{a}p\right)}\right]_{p=\mathrm{i}\omega_k}\\&=16Aawl^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{(2k-1)\pi\left[4l^2\omega^2-(2k-1)^2\pi^2a^2\right]}\end{aligned}$$

所以定解问题的解为：$u(t,x)=u_0(t,x)+v(t,x)$

注意反演公式在使用拉普拉斯变换法的反变换步骤中的重要应用。

9.6 δ 函数的性质

试证明 $x\delta'(x)=-\delta(x)$

证明：对于这类关于 δ 函数的等式的证明问题，要利用 δ 函数最根本的性质，即筛选性质，进行证明。

首先任选一检验函数 $\varphi(x)$，并得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\delta'(x)\varphi(x)dx=-\left.(x\varphi(x))'\right|_{x=0}=-\varphi(x)-\left.x\varphi'(x)\right|_{x=0}=-\varphi(0)$$

而根据 δ 函数的筛选性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}-\delta(x)\varphi(x)dx=-\left.\varphi(x)\right|_{x=0}=-\varphi(0)$$

比较得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\delta'(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}-\delta(x)\varphi(x)dx$$

因此有：

$$x\delta'(x)=-\delta(x)$$

9.7 基本解方法求解定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0(x>0,y>0)\\ u(0,y)=f(y)\\ u(x,0)=0\end{cases}$$

解：格林函数满足的定解问题为

$$\begin{cases}\Delta G=\delta\left(x-x_0,y-y_0\right)(x>0,y>0)\\ \left.G\right|_{x=0}=\left.G\right|_{y=0}=0\end{cases}$$

利用镜像法可得格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left[\left(x+x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2\right]}{\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]\left[\left(x+x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2\right]}$$

积分公式为

$$\begin{aligned}&u(M)=-\textstyle\int_l f\left(M_0\right)\frac{\partial}{\partial n_0}G\left(M,M_0\right)\mathrm{d}l_0\\&=-\textstyle\int_0^{\infty}f\left(y_0\right)\frac{\partial G}{\partial\left(-x_0\right)}\mathrm{d}y_0+0=\int_0^{\infty}f\left(y_0\right)\frac{\partial G}{\partial x_0}\mathrm{d}y_0\end{aligned}$$

计算方向导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_l=&\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2\left(x+x_0\right)}{\left(x+x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}+\frac{2\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}\right.\\&\left.-\frac{2\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{2\left(x+x_0\right)}{\left(x+x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}\right]_{x=0}\\=&\frac{1}{4\pi}\left[\frac{4x_0}{x_0^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{4x_0}{x_0^2+\left(y+y_0\right)^2}\right]\\=&\frac{x_0}{\pi}\left[\frac{1}{x_0^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{1}{x_0^2+\left(y+y_0\right)^2}\right]\end{aligned}$$

进而得到解

$$u(x,y)=\frac{x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{x^{2}+\left(y_{0}-y\right)^{2}}-\frac{1}{x^{2}+\left(y_{0}+y\right)^{2}}\right]f\left(y_{0}\right)\mathrm{d}y_{0}$$

经典问题专题

10.1 简介

这一部分以专题形式整理一些数理方程课程中涉及的经典问题，主要来自于平时答疑的整理。其中每一个专题均以一道例题的形式呈现，首先对这一类问题进行分析，进而提出一道例题并进行分析求解。通过这种形式，相对清晰地描述这些经典问题及其背后蕴含的学科思想。

10.2 函数变换法的应用

数理方程课程主要研究线性偏微分方程和定解条件所组成的定解问题的求解，课程的核心思想是转化的思想，其中通解法是一种借鉴常微分方程定值问题的求解思路转化而来的求解方法。通解法的求解步骤为：求解偏微分方程的通解，代入定解条件构建已知函数和未知函数之间的联系，用已知函数表达未知函数代入形式通解得到定解问题的解。其中重要步骤为，求解偏微分方程的通解。虽然这种方法思路很清晰，但往往偏微分方程的通解求解是比较复杂的。我们常见的求解类型主要分为三种，分别是可直接积分求解类型，可通过变量代换化为可直接积分求解类型，可通过函数变换化为可直接积分求解类型。这一专题通过分析一道作业题目来阐述函数变换法的求解思路。这一道题目虽然实际上变成求解常微分方程的通解，但其中函数变换法的思想是一致的，这里函数变换法是将一般的二阶常微分方程转化为二阶常系数微分方程求解。

在球坐标系下，求方程 $\Delta_3 u + k^2 u = 0$(k 为正常数) 的形如 $u = u(r)$ 的解.
提示: $\Delta_3 u$ 在球坐标系下的形式为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

解：由题意知，需要求得形如 $u=u(r)$ 的解。则设 $u=u(r)$，并代入方程整理得到

$$\Delta_3 u+k^2u=\frac{2}{r}\frac{\partial u}{dr}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+k^2u=0$$

可以发现，这个方程不是二阶常系数线性微分方程，并且直观上不容易看出一个解，所以采用函数变换法，通过构造函数变换将其转化为我们熟悉的类型，即二阶常系数线性微分方程。(对比偏微分方程通解法中，通过函数变换将一般的偏微分方程转化为可以直接积分求解的偏微分方程，进而实现求解) 设 $u(r)=v(r)w(r)$，并代入方程得

$$v''w+2v'w'+vw''+\frac{2}{r}\left(v'w+vw'\right)+k^2vw=0$$

进一步整理得到关于 $w(r)$ 的微分方程

$$w''+\frac{2v'+\frac{2}{r}v}{v}w'+\frac{v''+\frac{2}{r}v'+k^2v}{v}w=0$$

考虑到我们的目标是将其转化为二阶常系数线性微分方程，即要求 w 及其各阶导数的系数为常数，即

$$\frac{2v'+\frac{2}{r}v}{v}=C_1'\frac{v''+\frac{2}{r}v'+k^2v}{v}=C_2'$$

亦即

$$\frac{v'+\frac{1}{r}v}{v}=C_1\frac{v''+\frac{2}{r}v'}{v}=C_2$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。
则我们只需要求解上述常微分方程组的一个解即可 (往往我们希望这个解尽可能简单)。注意到第一个方程是一阶方程而第二个是二阶方程，则我们首先要求解第一个方程，然后代入第二个方程验证即可 (要注意我们使用函数变换法是要解决一般的非常系数二阶线性常微分方程的求解，这种类型方程不易直接求解，所以我们选择通过函数变换法将其转化为容易求解的类型，即二阶常系数线性常微分方程。第二个方程也属于这种类型，同样不易直接求解。而第一个方程是一阶方程，一般一阶方程求解相对容易，所以我们的一般做法是，先求解转化得到的一阶方程得到通解，代入二阶方程验证)。
另外注意到 C_1,C_2 为任意常数，即我们只需要找到一组合适的 C_1,C_2 使得方程组有解即可。
第一个方程属于可分离变量类型，分离变量得到

$$\frac{dv}{v}=\left(C_1-\frac{1}{r}\right)dr$$

解得

$$v = C_3 \frac{e^{C_1 r}}{r}$$

将 v 代入第二个方程得

$$C_1^2 C_3 \frac{e^{C_1 r}}{r} = C_2 C_3 \frac{e^{C_1 r}}{r}$$

则当 $C_2 = C_1^2$ 时上述方程组有解。考虑到使得解尽可能简单，我们取 $C_1 = 0, C_3 = 1$. 则得到解

$$v = \frac{1}{r}$$

代入关于 w 的方程得

$$w'' + k^2 w = 0$$

对于这一二阶常系数线性常微分方程，可以直接通过特征根法求解。

$$w = A\cos kr + B\sin kr$$

进而由 $u(r) = v(r)w(r)$ 得方程的解为

$$u = vw = \frac{1}{r}(A\cos kr + B\sin kr)$$

其中 A, B 为任意常数。

总结：转化思想是这门课程中的核心思想，通过转化我们可以将不熟悉的问题变成熟悉的问题进而实现求解。转化思想应用时首先要考虑的问题是转化的目标和转化的方法，并且要在求解过程中时刻记得。这个专题通过一道作业题目的分析过程展示转化的一个具体手段——函数变换法，在求解一般的二阶非常系数线性常微分方程中的应用。而在这门课程中，除了需要掌握这一应用，还需要掌握函数变换法在求解偏微分方程通解中的应用。这一问题在习题课和总结材料中有所阐述，另外建议读者通过比较函数变换法在这两个场景中的应用，思考函数变换法的核心思想，并通过和这门课程中所讲述的各种求解定解问题的方法中蕴含的转化思想作比较，体会转化思想的精神。

10.3 微元法分析书写定解问题

数理方程主要研究由物理问题抽象得到的数学模型，其中一个重要问题在于建模的过程。一般来讲，在这门课程的考核过程中，对于这一考点，主要是考察对于数理方程的基本概念的理解以及对于三类重要方程的掌握，即大多数情况下，掌握三类重要方程的书写及其物理意义即可。但是从根本上讲，建模的过程涉及微元法的应用，其具体操作可以概况为：选择合适的坐标系，选取微元结合物理学定律进行分析，结合小量近似

方法构造方程，结合物理意义书写定解条件。这里通过一道例题说明其中微元法分析的过程。

试推导均匀弹性杆的微小纵振动方程，设杆的杨氏模量为 E，密度为 ρ, 作用于单位长度杆上的外力为 $F(x,t)$ 。

解：**首先选取合适的坐标系**

一维问题，取 x 轴沿杆的轴线方向，以 $u(x,t)$ 表示 x 点, t 时刻的纵向位移。

选取合适的微元，利用物理学定律进行分析，建立等式

考虑杆上的一小段 $[x,x+\Delta x]$ 的运动情况. 以 $\sigma(x,t)$ 记杆上 x 点、t 时刻的应力 (杆在伸缩过程中各点相互之间单位截面上的作用力）, 其方向沿 x 轴，现在求杆上 x 点,t 时刻的应变 (相对伸长)。

如图所示，$A'B'$ 表示 AB 段 (平衡位置) 在 t 时刻所处的位置，则 AB 段的相对伸长是

$$\frac{A'B'-AB}{AB}=\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}$$

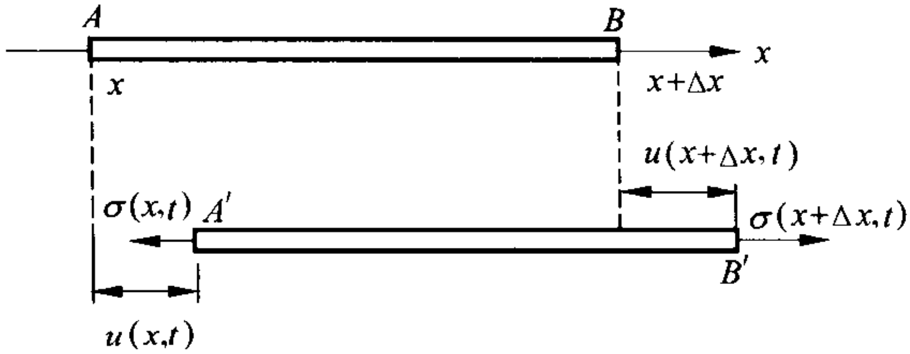

图 10.1: 微元法分析

而 x 点的应变则是

$$\lim_{ax-0}\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

由于振动是微小的 (不超过杆的弹性限度)，由 $Hooke$ 定律有

$$\sigma(x,t)=E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

整理等式建立方程

设杆的横截面面积为 S(设为常数)，则由 $Newton$ 第二定律可知, $[x,x+\Delta x]$ 段的运动

方程是

$$\begin{aligned}\rho S\Delta x\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial^2 t}\bigg|_{\xi=x+\theta_1\Delta x} &= \sigma(x+\Delta x,t)S-\sigma(x,t)S+F\left(x+\theta_2\Delta x,t\right)S\Delta x\\ &= ES\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x+\Delta x}-ES\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\varepsilon=x}+F\left(x+\theta_2\Delta x,t\right)S\Delta x\\ &\approx ES\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2}\bigg|_{\xi=x}\Delta x+F\left(x+\theta_2\Delta x,t\right)S\Delta x\end{aligned}$$

其中常数 θ_1,θ_2 满足 $0\le\theta_i\le 1(i=1,2)$. 这里利用了 Hooke 定律式，而且将函数 $\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial\xi}\Big|_{\xi=x+\Delta x}$ 在 $\xi=x$ 处展开为泰勒级数并取了前两项. 以 $S\Delta x$ 除上式的两端后，令 $\Delta x\to 0$ 取极限，得到

$$\rho u_{tt}(x,t)=Eu_{xx}(x,t)+F(x,t)$$

记

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}},f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}$$

整理得到方程

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t)$$

10.4 阻尼振动问题

阻尼问题是弦振动问题中的一种特殊情形，其中阻尼项的加入会导致无法直接使用行波法处理。对于阻尼问题，有一种有效的转化方法是基于物理意义，引入阻尼因子进行函数变换。以这道题为例说明这一类问题的处理思路。

试求解一维无界区域上阻尼振动问题。

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}+2\varepsilon v_t+\varepsilon^2 v=0(-\infty<x<\infty,t>0)\\ v(x,0)=\varphi(x),v_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

解：首先我们发现，问题描述的是一维无界区域的波动方程问题，从这一点上看是满足行波法的。然后我们继续观察，这个定解问题不同于一般的一维无界区域弦振动问题，其中不同在于这里多了一个阻尼项，这就导致无法直接使用行波法。这时候，有两种思路：转化为可以使用行波法的类型；使用积分变换法等其他方法。
我们遵循一个原则，在题目没有指定方法的前提下，如果能使用行波法，就不考虑使用积分变换法等方法处理。理由呢就是，如果满足行波法使用条件，那用行波法来求解是最简洁的。因此如果存在转化方法，且转化方法不是很复杂的话，我们希望能够通过转化并利用行波法求解。

考虑到这种特殊问题可以通过转化方法求解，那么我们这里说明如何将问题转化为可以使用行波法求解的问题。

令

$$v(x,t)=\mathrm{e}^{-\beta t}u(x,t)(\beta>0)$$

其中 $\mathrm{e}^{-\beta t}$ 为衰减因子，且使得 $u(x,t)$ 满足一维无界区域波动方程基本型。

由上述表达式可得

$$\begin{aligned}
&v_t=\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\beta u\right)\\
&v_{tt}=\mathrm{e}^{-\beta t}\left(u_{tt}-2\beta u_t+\beta^2 u\right)\\
&v_{xx}=\mathrm{e}^{-\beta t}u_{xx}
\end{aligned}$$

代入泛定方程得

$$u_{tt}-a^2u_{xx}+2(\varepsilon-\beta)u_t+\left(\varepsilon^2-2\varepsilon\beta+\beta^2\right)u=0$$

对照一维无界区域波动方程基本型可得，取 $\beta=\varepsilon$ 即可得

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

对于定解条件有

$$\begin{aligned}
v(x,0)&=\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot 0}u(x,0)=\varphi(x)\\
v_t(x,0)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\epsilon t}u(x,t)\right]_{t=0}=\psi(x)
\end{aligned}$$

进而得

$$\begin{aligned}
u(x,0)&=v(x,0)=\varphi(x)\\
u_t(x,0)&=\psi(x)+\varepsilon\varphi(x)
\end{aligned}$$

则由行波法可得

$$\begin{aligned}
u(x,t)=&\frac{1}{2\mathrm{e}^{\varepsilon t}}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]\\
&+\frac{1}{2a\mathrm{e}^{\beta t}}\int_{x-at}^{x+at}[\psi(\xi)+\varepsilon\varphi(\xi)]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

总结：

对于一维无界区域波动方程问题标准型，满足行波法使用要求，则直接使用行波法。

如果是半无界问题可以考虑使用延拓法转化为一维无界区域问题，进而使用行波法。

对于三维球对称问题，可以使用球坐标表达，利用函数变换，转化为一维半无界区域问题，延拓后使用行波法。

对于阻尼问题，可以考虑使用指数函数形式的阻尼因子项进行函数变换，进而转化为一维无界区域问题，使用行波法。

10.5 勒让德多项式的递推公式推导

在求解关于特殊函数的积分时，经常会用递推公式。对于勒让德多项式的递推公式来讲，其推导思路主要是分别看作变量 x 和变量 t 的函数并进行求导，比较级数表达的对应项系数，进而得到最基本的递推公式，然后基于此进行恒等变形，得到其他需要的递推公式。那么，一个自然的问题是，我们需要什么样子的递推公式。要回答这个问题，我们就要思考，我们用递推公式来做什么。我们知道，我们利用递推公式来求解含有特殊函数的积分，而求解积分的方法一般包括：换元法，分部积分法。特别地，有时候我们会利用分部积分法构造积分递推公式得到积分表达式的值。那么，自然地，我们知道，我们需要思考在求解积分的时候需要什么样子的递推公式来方便我们求解。例如对于换元法来说，我们可能需要凑出某函数的导函数形式，那么我们可能需要用导函数表达原函数的递推公式。这一专题主要分析递推公式推导过程。

基于勒让德多项式母函数和级数表达形式推导递推公式。

$$w(t,x)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n(x)t^n$$

解：将 $w(t,x)$ 看作 t 的函数进行求导，得到式一

$$(n+1)p_{n+1}(x)-(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x)=0$$

将 $w(t,x)$ 看作 x 的函数进行求导，得到式二

$$p'_{n+1}(x)+p'_{n-1}(x)=2xp'_n(x)+p_n(x)$$

式一对 x 求导，得到式三

$$(n+1)p'_{n+1}(x)-(2n+1)p'_n\left(x_1\right)+np'_{n-1}(x)=0$$

式二乘以 $(n+1)$ 与式三做差，得到式四

$$p'_{n-1}(x)=xp'_n(x)-np_n(x)$$

式二与式四做差得

$$p'_{n+1}(x)=xp'_n(x)+(n+1)p_n(x)$$

整理上述等式得

$$
\begin{aligned}
&(n+1)p_{n+1}(x)-x(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x)=0\\
&p'_{n-1}(x)=xp'_n(x)-np_n(x)\\
&p'_{n+1}(x)=xp'_n(x)+(n+1)p_n(x)
\end{aligned}
$$

考虑到我们在使用换元法求解积分时需要用导函数表达原函数的递推公式，所以从初始的递推式中的两项进行作差，得到

$$
p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)=(2n+1)p_n(x)
$$

综上所述，可以得到勒让德多项式的递推公式

$$
\begin{aligned}
&(n+1)p_{n+1}(x)-x(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x)=0\\
&np_n(x)-xp'_n(x)+p'_{n-1}(x)=0\\
&np_{n-1}(x)-p'_n(x)+xp'_{n-1}(x)=0\\
&p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)=(2n+1)p_n(x)
\end{aligned}
$$

总结：特殊函数的递推公式在处理这门课程中的一些题目时有着重要的作用，其中主要用于处理特殊函数的积分运算。从直观上看，递推公式数量比较多，而且看着规律性并不明显，从而给记忆带来一定困难。虽然在参考公式中可能会提供递推公式，但是掌握重要的递推公式是有必要的。那么，我们应该如何记住这些公式呢。一个自然的想法是，我们考虑这些公式是如何推导出来的。上述推导过程以一种相对清晰的思路展示了推导的过程。而要注意的一点是，其实这一思路的核心在于，我们要明确我们的目标是什么。在明确了我们要利用递推公式求解积分表达式，以及在求解积分表达式的常用方法中如何应用递推公式之后，我们就知道我们需要什么形式的递推公式。进而，根据分别对 t 和 x 求导得到的最基本的递推公式，按照我们的目标对这些基本的递推公式进行变形，进而可以得到我们需要的递推公式。

10.6 一类重要的函数的傅里叶变换求解的特殊方法

积分变换是一种常用的求解数理方程的方法，其核心思想是通过积分变换将偏微分方程转化为常微分方程从而求解。积分变换法的流程可以总结为：利用积分变换的性质将偏微分方程转化为常微分方程，求解像函数满足的常微分方程得到像函数，反变换得到原问题的解。其中变换过程可能会涉及复杂的运算，一般情况下，对于傅里叶变换和拉普拉斯变换，可能会需要用到留数定理求解积分。留数定理虽然有着强大的能力，但是有时候围道的构造是有一定难度的。对于本文提到的这类重要的函数，在教材上有介绍如何构造围道。这里介绍一种相对简单的想法，更容易理解和记忆这一重要的傅里叶变换对。

求解 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的傅里叶变换。
解：记 $f(x)$ 的傅里叶变换为

$$F[f(x)]=F(\lambda)$$

对 $f(x)$ 求导可得

$$f'(x)=-x\cdot f(x)$$

由傅里叶变换的性质可知

$$F\left[f'(x)\right]=i\lambda F(\lambda)$$

$$F[-xf(x)]=-iF'(\lambda)$$

代入上式可得

$$i\lambda F(\lambda)=-iF'(\lambda)$$

整理可得

$$\begin{cases} F'(\lambda)+\lambda F(\lambda)=0 \\ f'(x)+xf(x)=0 \end{cases}$$

由 $f'(x)+xf(x)=0$ 有解 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 可知，$F(\lambda)$ 有形如

$$F(\lambda)=k\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

的解. 又由

$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\sqrt{2\pi}$$

可知，$k=\sqrt{2\pi}$. 所以

$$F(\lambda)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

一般地，对于

$$g(x)=e^{-ax^2}=e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}}(a>0)$$

有傅里叶变换公式

$$F\left[e^{-ax^2}\right]=\sqrt{2\pi}\frac{e^{-\frac{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2a}}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2a}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}$$

一般地，使用留数定理求解积分时，围道的构造没有固定的方法，需要根据问题进行分析，往往难度较大。对于这类特殊的函数，存在这样一种简洁的方法进行拉普拉斯变换求解。这类函数也是一类重要的函数，在使用积分变换法的时候可能会用到，所以以专题形式特别分享这样一种求解思路。

10.7 分离变量法求解基本解

基本解方法是一种基于转化思想的数理方程求解方法。其本质想法为，将一般的定解问题转化为（特殊的）基本解满足的定解问题，通过求解基本解满足的定解问题得到基本解，进而利用积分公式得到原定解问题的解。所以，总的来讲，基本解方法求解定解问题的流程为：根据定解问题的类型写出基本解满足的定解问题，求解得到基本解，利用积分公式得到原定解问题的解。其中，由定解问题得到基本解满足的定解问题和由基本解得到元定金问题的解这两个步骤是转化的过程，有着固定的方法。而求解基本解满足的定解问题，本质上是求解定解问题，所以，仍然可以使用所学的求解定解问题的方法求解。除此以外，由于问题的特殊性，经常会选择使用镜像法求解。但同时也要注意，有些时候会需要使用例如分离变量法求解。

求解半条形区域 $D: 0 < x < a, y > 0$ 内 $Poisson$ 方程第一边值问题的格林函数。

解：由题意知，要求解定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta)(0 < x, \xi < a, y, \eta > 0) \\ G|_{x=0} = G|_{x=a} = G|_{y=0} = 0 \\ G|_{y\to+\infty} \text{ 有界} \end{cases}$$

分析定解问题的类型知道，可以选择分离变量法求解。由于是非齐次方程，采用利用固有函数展开法求解。首先求解齐次方程得到固有值和固有函数系。对于这类问题，即求解拉普拉斯算子的固有值问题，对应的定解问题可写为

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0(0 < x < a, y > 0) \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = 0 \\ v|_{y\to+\infty} \text{ 有界} \end{cases}$$

令 $v = X(x)Y(y)$, 得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0(0 < x < a) \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0(y > 0) \\ Y(0) = 0, Y(+\infty) \text{ 有界} \end{cases}$$

其中, $\mu+\nu=\lambda$. 分别解得

$$\mu_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x, n=1,2,\cdots$$
$$\nu=\omega^2, Y(y,\omega)=\sin\omega y, \omega>0$$

进而得到原定解问题对应的固有值和固有函数

$$\lambda_{n\omega}=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2, v_n(x,y,\omega)=\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\omega y$$

将非齐次项在固有函数系上展开

记 $G=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\sin\omega y\mathrm{d}\omega\sin\frac{n\pi}{a}x$, 代入 G 的方程, 得

$$\begin{aligned}-\Delta_2 G&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]\sin\omega y\mathrm{d}\omega\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x\\&=\delta(x-\xi,y-\eta)\end{aligned}$$

这是 $\delta(x-\xi,y-\eta)$ 关于 $\left\{\sin\frac{n\pi}{a}x\right\}$ 的正弦展开, 展开系数

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]\sin\omega y\mathrm{d}\omega&=\frac{2}{a}\int_0^a\delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta(y-\eta)\end{aligned}$$

此式又可看成是 $C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]$ 的正弦变换, 由反变换公式求出

$$\begin{aligned}C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\omega^2\right]&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta(y-\eta)\right]\sin\omega y\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{a\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta\end{aligned}$$

故

$$C_n(\omega)=\frac{4a}{\pi\left[(n\pi)^2+(a\omega)^2\right]}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta$$

所以, 格林函数

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\eta\sin\omega y}{(n\pi)^2+(a\omega)^2}\mathrm{d}\omega\right]\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{n\pi}{a}x$$

期末复习试卷

中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 **B** 期末复习试卷

数理方程 **08** 班制作，仅供学习交流使用

特别说明：这份复习试卷的题目选自作业题目中的易错问题，答案详见每周公布的作业参考答案。

一、求解下列 Cauchy 问题。

（1）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u \\ u|_{t=0} = \varphi(r) \\ u_t|_{t=0} = \phi(r) \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x)(-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

其中 $a \neq 0$，且 a 为常数。

二、求解下列固有值问题

（1）

$$\begin{cases} y'' - 2ay' + \lambda y = 0(0 < x < 1, a \text{ 为常数}) \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} (r^2R')' + \lambda r^2 R = 0(0 < r < a) \\ |R(0)| < +\infty, R(a) = 0 \end{cases}$$

提示：令 $y = rR.$

三、求解圆内狄氏问题的解

（1）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(r < a) \\ u|_{r=a} = A\sin^2\theta + B\cos^2\theta \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(r < a) \\ u_r(a,\theta) - hu(a,\theta) = f(\theta)(h > 0) \end{cases}$$

四、利用分离变量法求解定解问题

（1）

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, x) = x(l - x), u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \\ u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, l) = 0 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 (a < r < b) \\ u(a, \theta) = u_1, \frac{\partial u(b, \theta)}{\partial n} = u_2 \end{cases}$$

（3）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \operatorname{sh} x (0 < x < l, t > 0) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

五、设圆柱的半径为 R, 高为 h, 侧面在温度为零的空气中自由冷却，下底温度恒为零，上底温度为 $f(r)$, 求柱内温度分布。

六、特殊函数的性质应用

（1）计算积分

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^{2}\right)\left[p_{n}^{\prime}(x)\right]^{2} \mathrm{d} x$$

（2）把函数 $f(x)=|x|$ 按勒让德函数系展开

七、利用积分变换法求解定解问题

（1）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(-\infty < x < +\infty, y > 0) \\ u(x,0) = f(x) \\ \text{当} x^2 + y^2 \to +\infty \text{ 时}, u(x,y) \to 0 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, x > 0, y > 0 \\ u|_{y=0} = f(x), u_x|_{x=0} = 0, u(x,y) \text{ 有界}. \end{cases}$$

提示：利用余弦变换。

八、利用拉普拉斯方程的基本解求解下列方程的基本解

（1）

$$u_{xx} + \beta^2 u_{yy} = 0(\beta > 0, \beta \text{ 为常数})$$

（2）

$$\Delta_2 \Delta_2 u = 0$$

参 考 公 式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

2. Legendre 方程: $[(1-x^2)\,y']'+\lambda y=0$; n 阶 Legendre 多项式：

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Legendre 多项式的母函数: $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$
Legendre 多项式满足的递推公式 ($n\geq 1$)

$$\begin{aligned}&(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\\ &nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0\\ &nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0\\ &P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)\end{aligned}$$

3。3. ν 阶 Bessel 方程: $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=0$;$\nu$ 阶 Bessel 函数: $J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
Bessel 函数的的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方分别为

$$\begin{aligned}N_{\nu 1n}^2&=\tfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right)\\ N_{\nu 2n}^2&=\tfrac{1}{2}\left[a^2-\tfrac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right)\\ N_{\nu 3n}^2&=\tfrac{1}{2}\left[a^2-\tfrac{\nu^2}{\omega_{3n}^2}+\tfrac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)\end{aligned}$$

Bessel 函数满足的微分关系和递推公式:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)\\ &\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\tfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}\end{aligned}$$

4. 傅里叶变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$; 傅里叶逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}\lambda;\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t, p=\sigma+is$

$$L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}; L\left[t^{\alpha}\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的基本解：
二维, $U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7. Green 第一公式: $\iint_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V u\Delta v\mathrm{d}V+\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}V$
Green 第二公式: $\iint_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint_V(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V$

期末模拟试卷

中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 B 期末模拟试卷

数理方程 08 班制作，仅供学习交流使用

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评阅人								

一、（本题 10 分）求一维弦振动问题的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, -x) = \varphi(x) \\ u(x, x) = \psi(x) \end{cases}$$

二、（本题 10 分）求右行单波方程初值问题的解。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

三、（本题 20 分）求解热传导问题的解。已知定解问题描述的是一个长为 l 的均匀杆的温度变化问题，请说明定解条件所表达的物理意义。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) - h u_x(0,t) = u_1, u(l,t) + h u_x(l,t) = u_2 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

四、（本题 15 分）求高维波动方程的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u (0 < x, y, z < 1, t > 0) \\ u(x, y, z; 0) = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z \\ u_t(x, y, z; 0) = 0 \\ u(0, y, z; t) = u(1, y, z; t) = 0 \\ u(x, 0, z; t) = u(x, 1, z; t) = 0 \\ u(x, y, 0; t) = u(x, y, 1; t) = 0 \end{cases}$$

五、（本题 15 分）有一个内径为 a，外径为 $2a$ 的均匀球壳，其内、外表面温度分别为 0 和 u_0。试求球壳内的温度分布。

六、（本题 15 分）求解定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_3 u (t > 0, r > 0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = (1 + r^2)^{-2} \end{cases}$$

七、（本题 15 分）请写出定解问题对应的格林函数，并利用基本解方法求解定解问题。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t(0 < x < l, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

参 考 公 式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

2.Legendre 方程: $\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'+\lambda y=0; n$ 阶 Legendre 多项式
$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$
Legendre 多项式的母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1;$
Legendre 多项式的模平方: $\left\|P_n(x)\right\|^2=\frac{2}{2n+1}$

3. ν 阶 Bessel 方程 : $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0; \nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$; Bessel 函数的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方: $N_{\nu 1n}^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right), N_{\nu 2n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right), N_{\nu 3n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)$

4. 傅里叶变换和逆变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x; \mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$
$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t, p=\sigma+is; L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}$
$L\left[t^\alpha\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, L[\sin t]=\frac{1}{p^2+1}, L[\cos t]=\frac{p}{p^2+1}, L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的基本解:
二维, $U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

7. 设 $G\left(M;M_0\right)$ 是三维 Poisson 方程第一边值问题

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta_3 u=-f(M),(M=(x,y,z)\in V)\\ u|s=\varphi(M)\end{array}\right.$$

对应的格林函数, 则
$u\left(M_0\right)=-\iint_S\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}\left(M;M_0\right)dS+\iiint_V f(M)G\left(M;M_0\right)dM\cdot\left(\text{其中}M_0=(\xi,\eta,\zeta)\right)$

8. 积分公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\omega}$$

期末模拟试卷参考答案

中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 **B** 期末模拟试卷参考答案

数理方程 08 班制作, 仅供学习交流使用

一、（本题 10 分）求一维弦振动问题的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, -x) = \varphi(x) \\ u(x, x) = \psi(x) \end{cases}$$

解：泛定方程的通解为

$$u(x, t) = f_1(x + t) + f_2(x - t)$$

由定解条件可知

$$\begin{aligned} f_1(0) + f_2(2x) &= \varphi(x) \\ f_1(2x) + f_2(0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

……………………… (5 分)

令 $2x = y$, 则上式变为

$$\begin{cases} f_1(0) + f_2(y) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right) \\ f_1(y) + f_2(0) = \psi\left(\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

其中，- $\infty < y < \infty$，上述方程可化为

$$\begin{cases} f_1(y) = \psi\left(\frac{y}{2}\right) - f_2(0) \\ f_2(y) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right) - f_1(0) \end{cases}$$

所以

$$f_1(x+t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)-f_1(0), f_2(x-t)=\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-f_2(0)$$

因此

$$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-[f_1(0)+f_2(0)]$$

在上述解得关于 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 的等式中令 $y=0$ 可得

$$f_1(0)+f_2(0)=\frac{1}{2}[\varphi(0)+\psi(0)]$$

所以，此定解问题的解为

$$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)+\frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2}$$

........................(10 分)

二、（本题 10 分）求右行单波方程初值问题的解。

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0(-\infty<x<\infty,t>0)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

解：将泛定方程两边分别对 t 和 x 求导，得

$$\begin{aligned}u_{tt}+au_{xt}=0\\ u_{tx}+au_{xx}=0\end{aligned}$$

整理两个等式得一维波动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

方程的通解为

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

........................(5 分)

将通解代入原泛定方程中，得

$$af_1'(x+at)-af_2'(x-at)+af_1'(x+at)+af_2'(x-at)=0$$

即

$$2af_1'(x+at)=0$$

由此可得

$$f_1(x+at)=C$$

将定解条件代入通解，得

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)$$

即

$$f_2(x)=\varphi(x)-f_1(x)$$

因此可得

$$f_2(x-at)=\varphi(x-at)-C$$

将 $f_1(x+at)=C$ 和 $f_2(x-at)=\varphi(x-at)-C$ 代入方程通解得

$$u(x,t)=\varphi(x-at)$$

........................(10 分)

三、（本题 20 分）求解热传导问题的解。已知定解问题描述的是一个长为 l 的均匀杆的温度变化问题，请说明定解条件所表达的物理意义。

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0(0<x<l,t>0) \\ u(0,t)-hu_x(0,t)=u_1, u(l,t)+hu_x(l,t)=u_2 \\ u(x,0)=u_0 \end{cases}$$

解：首先求解定解问题。根据定解问题可知，利用分离变量法求解。由于边界条件非齐次，所以先将边界条件齐次化
令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

其中

$$w(x,t)=\tfrac{u_2-u_1}{l+2h}(h+x)+u_2$$

........................(5 分)

则，$v(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) - h v_x(0,t) = 0 \\ v(l,t) + h v_x(l,t) = 0 \\ v(x,0) = u_0 - u_2 + \frac{u_1 - u_2}{l+2h}(h+x) \end{cases}$$

分离变量得固有值问题和关于 t 的常微分方程

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - hX'(0) = 0, X(l) + hX'(l) = 0 \\ T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

........................(10 分)

由施刘定理可知，有可数个非负固有值 λ 满足

$$\tan\sqrt{\lambda} l = \frac{2h\sqrt{\lambda}}{h^2\lambda - 1}$$

进一步得固有函数

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x$$

将固有值代入关于 t 的常微分方程并解之得

$$T_n(t) = a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}$$

整理得形式解

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$$

........................(15 分)

将定解条件在固有函数系上展开，并比较对应项系数得

$$a_n = \frac{1}{N_n^2}\left\{\left[(u_0 - u_2) + \frac{(u_1-u_2)h}{l+2h}\right]\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{u_1-u_2}{l+2h}\frac{l}{\sqrt{\lambda_n}}\right\} = \frac{2u_0+u_1-3u_2}{N_n^2\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4u_0+2u_1-6u_2}{\sqrt{\lambda_n}[l(h^2\lambda_n+1)+2h]}$$

代入形式解，得到关于 $v(x,t)$ 的解。将求得的 $v(x,t)$ 与 $w(x,t)$ 相加，得定解问题的解

$$u(x,t) = u_2 + \frac{u_2-u_1}{l+2h}(h+x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4u_0+2u_1-6u_2}{\sqrt{\lambda_n}[l(h^2\lambda_n+1)+2h]}\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}\cdot(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$$

........................(18 分)

由题意知，定解问题描述长为 l 的均匀杆的温度变化问题，由定解条件可知，表达的物理意义为：杆的初始温度为 u_0, 杆的侧面绝热，两端分别与温度为 u_1 和 u_2 的介质进行热交换。

························(20 分)

四、（本题 15 分）求高维波动方程的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(0 < x, y, z < 1, t > 0) \\ u(x, y, z; 0) = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z \\ u_t(x, y, z; 0) = 0 \\ u(0, y, z; t) = u(1, y, z; t) = 0 \\ u(x, 0, z; t) = u(x, 1, z; t) = 0 \\ u(x, y, 0; t) = u(x, y, 1; t) = 0 \end{cases}$$

解：由题知，利用分离变量法求解。令

$$u(x, y, z; t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

代入方程整理得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}$$

进一步，得

$$\begin{cases} T''(t) - a^2\mu T(t) = 0 \\ X''(x) - \alpha X(x) = 0 \\ Y''(y) - \beta Y(y) = 0 \\ Z''(z) - \gamma Z(z) = 0 \end{cases}$$

························(5 分)

解关于 x、y、z 的固有值问题得

$$\alpha = -m^2\pi^2, X_m(x) = a_m \sin m\pi x, m = 1, 2, \cdots$$
$$\beta = -n^2\pi^2, Y_n(y) = b_n \sin n\pi y, n = 1, 2, \cdots$$
$$\gamma = -l^2\pi^2, Z_l(z) = c_l \sin l\pi z, l = 1, 2, \cdots$$

将 $\mu = \alpha + \beta + \gamma = -(m^2 + n^2 + l^2)\pi^2$ 带入关于 T 的常微分方程得

$$T'' + a^2 (n^2 + m^2 + l^2) T = 0$$

记

$$a^2 (m^2 + n^2 + l^2) \pi^2 = \omega^2$$

于是得

$$T_{m,n,l}(t)=A'_{mnl}\cos\omega t+B'_{mnl}\sin\omega t$$

因此，方程的形式解为

$$u(x,y,z;t)=\textstyle\sum_{m,n,l=1}^{\infty}\left(A_{mnl}\cos\omega t+B_{mnl}\sin\omega t\right)\cdot\sin m\pi x\sin n\pi y\sin l\pi z$$

························(10 分)

将定解条件在固有函数系上展开，比较对应项系数，得

$$A_{111}=1, A_{mnl}=0(m,n,l\neq 1), B_{mnl}=0$$

因此，定解问题的解为

$$u(x,y,z;t)=\cos\sqrt{3}\pi at\sin\pi x\sin\pi y\sin\pi z$$

························(15 分)

五、（本题 15 分）有一个内径为 a，外径为 $2a$ 的均匀球壳，其内、外表面温度分别为 0 和 u_0。试求球壳内的温度分布。

解：首先根据问题描述写出定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, a<r<2a\\ u|_{r=a}=0, u|_{r=2a}=u_0\end{cases}$$

························(5 分)

由题意知：u 只和 r 有关，所以，定解问题可以转化为

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)=0\\ u|_{r=a}=0, u|_{r=2a}=u_0\end{cases}$$

························(10 分)

进而得到方程解为

$$u(r,\theta)=u(r)=2u_0\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

························(15 分)

说明：由于问题具有对称性，因此可以直接转化为关于 r 的常微分方程求解，而不需要分离变量利用特殊函数进行求解，这一点值得注意。

六、（本题 15 分）求解定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_3 u (t > 0, r > 0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ u|_{t-0} = 0, u_t|_{t-0} = (1 + r^2)^{-2} \end{cases}$$

解：由于定解问题具有对称性，只和 r 相关，所以定解问题可以写作

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) u (t > 0, r > 0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ u|_{t-0} = 0, u_t|_{t-0} = (1 + r^2)^{-2} \end{cases}$$

........................(3 分)

对 t 做拉普拉斯变换得

$$L[u_{tt}] = p^2 U - pU(0, r) - u_t(0, r) = p^2 U - (1 + r^2)^{-2}$$

得到常微分方程

$$p^2 U - (1 + r^2)^{-2} = a^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2a^2}{r} \frac{dU}{dr}$$

........................(7 分)

利用常数变易法求解常微分方程，并作反变换得

$$u = \frac{t}{[1 + (r - at)^2][1 + (r + at)^2]}$$

........................(15 分)

七、（本题 15 分）请写出定解问题对应的格林函数，并利用基本解方法求解定解问题。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A \sin \omega t (0 < x < l, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：由题意知，格林函数满足固有值问题

$$\begin{cases} G_t - a^2 G_{xx} = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) \\ G_x|_{x=0} = 0, G_x|_{x=l} = 0 \\ G|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

........................(3 分)

利用固有函数展开法, 令

$$G(x,t;x_0,t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $T_n(t)$ 满足

$$\begin{cases}T_n'(t)+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=\delta(t-t_0)\frac{2}{l}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\\ T_n(0)=0\end{cases}$$

解得

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{2}{l}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-t_0)}, & t\geq t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}$$

进而得到格林函数为

$$G(x,t;x_0,t_0)=\begin{cases}\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-t_0)}, & t\geq t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}$$

........................(10 分)

由定解问题形式知，解的积分表达式为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l A\sin\omega t_0 G(x,t;x_0,t_0)\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}t_0$$

所以，定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\int_0^l A\sin\omega t_0\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n x u}{l}\right)^2(t-t_0)}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}t_0\\ &=\frac{2A}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{m\pi a}{l}\right)^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^t\mathrm{e}^{\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t_0}\sin\omega t_0\mathrm{d}t_0\int_0^l\cos\frac{n\pi x_0}{l}\mathrm{d}x_0\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1\cos\frac{n\pi x_0}{l}\mathrm{d}x_0=\begin{cases}l, n=0\\ 0, n\neq 0\end{cases}$$

所以，解为

$$u(x,t)=\frac{2A}{l}\int_0^t\sin\omega t_0\mathrm{d}t_0\cdot l=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

........................(15 分)

总结

- 数理方程是一门关于基于物理问题抽象而来的数学方程模型的求解方法的课程，主要内容是关于三类重要数理方程的求解。学习一门课程最重要的是根据课程特点找到合适的学习方法，基于对课程特点的分析，我们可以总结出一种相对有效的学习方法。掌握数理方程的基本概念进而可以能够对题目所给出的问题进行分类，掌握每种方法的适用范围进而能够面对给定的问题选择合适的方法，掌握每种方法的具体操作进而能够实现求解。
- 在学习这门课程的过程中，一个重要的思想是转化的思想，这种思想也是数学思想中重要的一种。转化的思想本质是希望利用已知来求解未知。具体的操作是：首先选择合适的转化目标，进而研究转化方法，之后求解转化后的问题，最后根据转化后的问题和原问题的关系得到原问题的解。这门课程主要研究偏微分方程的求解，因而一个直观的想法是，利用以往所学关于常微分方程的知识来求解偏微分方程问题。有了这样的认识，对于课程中要学习的几类方法会有更深入的理解。

致谢

- 首先要感谢教授我这门课程的谢老师。谢老师在专业方面有着深厚的功底，在教学方面善于引导我们以更加轻松的方式来理解问题，并且注重向我们传授数学思想和理念，引导我们建立良好的知识体系结构。在课堂上，谢老师以清晰的讲述让我们能够清楚地把握每一部分知识中的重点，并理解当前所述知识点的具体内容。在课下，谢老师会非常耐心地为我们答疑，帮助我们解决理解上遇到的误区和学习中遇到的困难。正是因为有了谢老师的专业讲授和耐心指导，我能够相对清晰地理解这门课程的知识体系以及细节知识点，顺利地完成这门课程的学习。

- 衷心地感谢一路走来遇到的每一位老师。感谢有你们的教授和指导，让我能够用丰富的知识来充实自己，并且能够找到适合自己的学习方法和知识体系建构的方法；感谢有你们的鼓励和支持，让我有勇气和信心去面对学习和生活中遇到的各种困难。

- 感谢爱我的每一位亲人和朋友，是你们给予我爱与被爱的力量，教会我热爱生活，张开怀抱去拥抱阳光。

- 作为课程助教，我要感谢这学期数理方程 08 班的另一位助教张舒博，我们互相配合，尽自己所能为班级同学们解决遇到的困难。衷心地感谢数理方程 08 班的每一位同学的支持和认可。第一次的助教经历，初见时充满了期待，也充满了紧张。期待这次全新的体验，也为自己是否能够胜任这份工作而紧张。在经历了几次习题课以及日常和同学们的交流后，经验在逐渐丰富，也始终在努力希望能够做得更好。感谢班级的每一位同学一直以来的鼓励和支持，也希望我们都能够继续努力下去，成为更好的自己。

- 在这份《数理方程复习指导》的编写过程中，主要参考了在谢老师班的课堂笔记、严镇军老师编著的《数学物理方法》、姚端正老师编著的《数学物理方法学习指导》和吴崇试老师编著的《数学物理方法习题指导》等资料。在此，郑重地向谢如龙老师、严镇军老师、姚端正老师、吴崇试老师表示衷心地感谢。

- 最后，再次感谢谢老师一直以来的帮助和支持，感谢所有老师、亲人、朋友的支持和鼓励，感谢助教张舒博的帮助和配合，感谢 2020 春数理方程 08 班的每一位同学的鼓励和支持以及所付出的努力。