--- PAGE 1 ---

无记忆高斯信源与信道

11

在本讲中，我们将利用上一讲中发展的连续随机变量的信息量知识，来研究无记忆高斯信源和信道。

11.1 无记忆高斯信源的率失真函数

我们考虑一个离散时间信息源，它发出独立同分布(i.i.d.)的信源符号，这些符号服从均值为零、方差为 σ2 的高斯分布。

我们设失真度量为平方误差，即 d(s,s^)=(s−s^)2。

第 4 讲第 4.1 节中描述的问题表述仍然适用，其核心是马尔可夫链 S↔W↔S。

尽管 S 和 S 现在通常是连续的，但索引 W 仍然是整数值的，取自有限集 {1,2,…,Mn}。因此，挑战在于用由信源编码器/解码器对的速率决定的有限分辨率来表示一个连续随机向量 S。

检查第 4.3 节中香农信源编码基本定理的反证部分的证明，我们看到，通过将 S 和 S^ 的熵替换为微分熵，整个证明可以逐字照搬。

因此，对于所考虑的无记忆高斯信源，其率失真函数 R(D) 满足

R(D)≥RI(D)=minfS∣SI(S;S^), s.t.

E[(S−S^)2]≤D

(11.1)

注意，这里我们通常需要对条件概率密度函数 fS^∣S 进行优化。

让我们最小化 (11.1) 中的 I(S;S^) 来评估 R1(D)。

首先，可以立即看出 (11.1) 仅在 D∈[0,σ2] 上是非平凡的：如果 D>σ2，我们只需以概率 1 设 S^=0，这导致 I(S;S^)=I(S;0)=0 和 E[(S−S^)2]=E[S2]=σ2<D.

11.1 无记忆高斯信源的率失真函数 121

11.2 无记忆高斯信道的容量-成本函数 123

11.3 波形高斯信道的启发式讨论 127

11.4 并行高斯信源或信道 129

- 作为再现，S^ 可以是连续的也可以是离散的。 正如将要显示的，对于本节中考虑的特定设置，实现率失真函数的最优 S~ 选择实际上是连续的。 然而，当信源 S 不是高斯分布时，相应的率失真函数可能在 S^ 是离散时实现。

--- PAGE 2 ---

那么，对于 D∈[0,σ2]，我们有

I(S;S^)=h(S)−h(S∣S^)

=(a)21log(2πeσ2)−h(S−S^∣S^)

Error: Missing \end{matrix}

Error: Missing \end{matrix}

=21logDσ2,

(11.2)

其中，(a) 是通过对每个 S=s 应用命题 10.3 的第一项得到的，(b) 是通过应用命题 10.2 得到的，即条件作用减少微分熵，而 (c) 是通过应用高斯分布是在方差约束下具有最大熵的概率密度函数这一事实得到的，即示例 10.6。+

剩下的工作是确定某个 fS^∣S 以达到 (11.2) 中的下界。

为此，只需设置 S^~N(0,σ2−D)，以及 Z~N(0,D) 独立于 S^，使得 S=S^+Z。这样，(11.2) 中的下界就达到了。

我们仍然需要检查可达性部分的证明。

浏览第 4.4 节中的证明步骤，我们发现我们只需考虑一个由独立同分布的 N(0,σ2−D) 随机变量组成的随机码本 C，

并且证明可以直接套用。

总结来说，对于一个受平方误差失真度量约束的离散时间无记忆高斯信源，我们有以下率失真函数：

R(D)=21logDσ2,

如果 0<D<σ2，否则为零。

(11.3)

备注 11.1 通过考虑 R(D) 的反函数，我们得到失真-率函数

D(R)=σ22−2R,

(11.4)

其中 R 的单位是比特/信源符号。

这表示在给定码率下的最小失真。

当 R = 1 比特/信源符号时，最小失真为 σ2/4，每增加一个比特可以使失真再减少 4 倍（即大约 6dB）。

- 事实上，示例 10.6 假设所考虑的随机变量均值为零，但这里没有施加这样的约束。 因此，请读者稍微修改示例 10.6 的解法，以建立这里需要的结果。

--- PAGE 3 ---

备注 11.2 关于 R(D) 有一个几何观点，这个观点在启发上很有见地。

考虑将每个码字 S^ 视为 Rn 中的一个点。如果我们让所有与 S^ 的欧几里得距离在 nD 之内的信源向量 S 都由 S, 再现，那么产生的失真将以 D 为上界。

由于 S~N(0,σ2), 根据弱大数定律(WLLN)，对于任何 ϵ>0，当 n→∞ 时，S 以高概率位于两个球壳之间：O(o,n(σ2−ϵ)) 和 O(o,n(σ2+ϵ))。

这里我们用 O(o,r) 表示一个以原点为中心、半径为 r 的球体。

所以我们至少需要

$\frac{|\mathcal{O}(o,\sqrt{n(o^{2}+\epsilon))|-|\mathcal{O}(o,\sqrt{n(o^{2}-\epsilon))|}}{|\mathcal{O}(o,\sqrt{nD})|}$

$=Dn/2(\sigma 2+\epsilon)n/2-(\sigma 2-\epsilon)n/2$

(11.5)

个码字来“覆盖”S 出现的区域，且概率很高。

这个比率可以进一步写成

$(D\sigma 2+\epsilon)n/2\cdot[1-(\sigma 2+\epsilon\sigma 2-\epsilon)n/2]$

$=(D\sigma 2+\epsilon)n/2(1+o(1)),$

(11.6)

其中当 $n\to\infty$ 时，$o(1)\to 0$。因此，这转化为码率为

$n1\log(D\sigma 2+\epsilon)n/2(1+o(1))=21\log D\sigma 2+\epsilon+o(1/n),$

当 $\epsilon\to 0$ 和 $n\to\infty$ 时，该值趋近于 $R(D)$。

11.2 无记忆高斯信道的容量-成本函数

(11.7)

我们考虑一个离散时间信道，它对其输入符号加上独立同分布（i.i.d.）的高斯随机变量（即“噪声”）；也就是说，信道的输入-输出关系是

$Yi=Xi+Zi,$

(11.8)

其中 $Zi\sim N(0,\sigma 2)$ 且 $L1,L2,\ldots,Ln$ 相互独立，并且独立于 $X1,X2,\ldots,Xn$。这个信道模型被称为加性高斯白噪声（AWGN）信道。

--- PAGE 4 ---

在实际系统中，XI 的幅度通常对应于信号强度，例如电流或电压，因此对 $X1,X2,\ldots,Xn$ 施加平均功率约束是合理的，即

$n1\sum i=1nXi2\leq P$.

(11.9)

当然，也可能存在其他形式的约束；例如，可能要求 Xi 的最大幅度不大于一个峰值约束，这对应于对 X 支撑集的约束，字母表 X 不再是整个 R，而是它的一个有界子集。

由此产生的信道容量通常很难评估，在本讲中我们只关注平均功率约束。

第 6 讲第 6.1 节中描述的问题设定仍然适用，其核心是马尔可夫链 $W\leftrightarrow X\leftrightarrow Y\leftrightarrow W\hat{}$，其中 W 和 W^ 仍然是取自有限集合 $\{1,2,\ldots,Mn\}$ 的整数值。

检查第 6.3 节中香农信道编码基本定理的反证部分的证明，我们发现，通过将 X 和 Y 的熵替换为微分熵，整个证明可以逐字照搬。

因此，对于所考虑的无记忆高斯信道，其容量-成本函数 $C(P)$ 满足

$C(P)\leq CI(P)=\max fXI(X;Y)$, s.t.

E[X2]≤P (11.10)

注意，这里我们通常需要对概率密度函数 fX 进行优化。

让我们最大化 (11.10) 中的 I(X;Y) 来评估 C1(P)。

我们从

I(X;Y)=h(Y)−h(Y∣X)

h(Y)−h(X+Z∣X)

h(Y)−h(Z∣X)

h(Y)−h(Z)

=h(Y)−21log(2πe σ2) , (11.11)

开始，其中 (a) 来自信道定律 Y=X+Z，(b) 是通过对每个 X=x 应用第 10 讲命题 10.3 的第一项得到的，(c) 是因为 X 和 Z 是独立的。

此时，注意到 Y=X+Z 有一个二阶矩约束

--- PAGE 5 ---

为

11.2 无记忆高斯信道的容量-成本函数 125

Error: Misplaced &

=E[X2]+2E[X]E[Z]+E[Z2]

=E[X2]+E[Z2]

≤P+σ2.

(11.12)

因此，当 Y∼N(0,P+σ2) 时，h(Y) 被最大化，这遵循了推导 (11.2) 的相同论证，基于示例 10.6，从而得出

I(X;Y)=h(Y)−21log(2πeσ2)

≤21log(2πe(P+σ2))−21log(2πe σ2)

=21log(1+σ2P)

此外，如果 X∼N(0,P)，则 (11.13) 中的等式成立。

(11.13)

我们仍然需要检查可达性部分的证明。

仔细阅读第6.4节的证明步骤，我们发现我们只需要考虑一个随机码本C，其元素是独立同分布的 N(0,P) 随机变量，

证明可以直接套用。

总结一下，对于受平均功率约束的离散时间无记忆信道，我们有以下容量-成本函数：

C(P)=21log(1+σ2P)

(11.14)

接下来我们简要讨论噪声非高斯的情况。

仔细检查我们求解 (11.10) 的界定步骤，我们看到，如果 Z 不一定是高斯分布，我们仍然可以得出

$I(X;Y)=h(X+Z)-h(Z)$.

(11.15)

现在，对于任何具有微分熵 h(X) 的 X，我们可以应用熵功率不等式（EPI）（定理 10.2）来得到

$e2h(X+Z) \geq e2h(X)+e2h(Z)$,

(11.16)

因此，

$I(X;Y) \geq 21\ln(1+e2(h(X)-h(Z)))$

(11.17)

如果 Z 的均值为零，方差为 σ2，那么 $h(Z) \leq 21\ln(2\pi e\sigma 2)$ 奈特，

--- PAGE 6 ---

下界 (11.17) 变为

$I(X;Y) \geq 21\ln(1+\sigma 2N(X))$.

(11.18)

其中 N(X) 是 X 的熵功率。如果我们让 X 是方差为 P 的高斯分布，那么我们进一步得到

$I(X;Y) \geq 21\ln(1+\sigma 2P)$.

(11.19)

也就是说，通过将加性噪声从高斯分布偏离到任何具有相同噪声功率的非高斯分布，信道容量不会降低。

换句话说，在噪声功率约束下，高斯噪声是最坏情况的噪声。

备注 11.3 与信源表示中的 R(D) 相对应，对于 C(P) 也存在一个几何观点。

考虑将长度为n的向量视为 Rn 中的点。AWGN 信道产生 Y=C(w)+Z, 对于 w∈{1,2,...,Mn}。

根据弱大数定律（WLLN），AWGN 噪声向量 Z 的“长度”为

$\sum i=1nZi2=nn1\sum i=1nZi2$

$=n\sigma 2+o(1)$

(11.20)

的概率很高，其中当 n→∞ 时，o(1)→0。

换句话说，对于任何 ϵ>0, 当 n→∞ 时，向量 Z 以高概率位于半径为 n(σ2+ϵ) 的球体内。

让解码器将接收到的任何在球体 O(C(zv), n(σ2+ϵ)) 内的信号解码为 w 是合理的。

事实上，当传输码字 C(w) 时，接收到的信号 Y 以高概率包含在两个球壳之间：O(C(w), n(σ2+ϵ)) 和 O(C(πv), n(σ2−ϵ))。

如果所有的球体 O(C(w), n(σ2+ϵ)), iv∈{1,2,…,Mn} 互不相交，这样的解码器将产生可靠的解码结果。

另一方面，由于对 X 的平均功率约束，接收到的信号 Y 将以高概率包含在一个以原点为中心、半径为 n(P+σ2) 的球体内。情况就如同在一个半径为 n(P+σ2) 的信号球体内填充半径为 n(σ2+ϵ) 的噪声球体。

我们不解决计算可以填充的球体确切数量这个极其困难的问题，而是提供其上界的一个简单估计：

$\frac{|O(o,\sqrt{n(P+\sigma^{2})})|}{|O(o,\sqrt{n(\sigma^{2}+\epsilon)})|}=(1+\frac{P-\epsilon}{\sigma^{2}+\epsilon})^{n/2}$

(11.21)

--- PAGE 7 ---

这直接对应于可达码率的一个上界，即

当 ϵ→0 时，其值恰好是 C(P)。

(11.22)

n1log(1+σ2+ϵP−ϵ)n/2=21log(1+σ2+ϵP−ϵ)

这种球堆砌论证可以通过精细的几何分析变得严谨，从而得出 AWGN 信道容量-成本函数的可达性和反证证明；

参见，例如，[38]。

11.3 波形高斯信道的启发式讨论

在上一节中，我们研究了离散时间无记忆高斯信道。

但实际上，通信是在连续时间环境中进行的。

因此，离散时间无记忆高斯信道模型与波形信道有何关系，这个问题仍有待回答。

我们在本节中的讨论很大程度上是启发式的，数学上不严谨。

考虑一个波形信道，

Y(t)=X(t)+Z(t),

(11.23)

其中 Z(t) 是一个功率谱密度为 N0/2 瓦特/赫兹 的白噪声过程，这可以理解为布朗运动的“导数”，因此在任意两个时间点 t1 和 t2，Z(t1) 和 Z(t2) 是独立的，且 Z(t) 的自相关函数是一个脉冲函数。

这样的过程当然是病态的且物理上无法实现，但它可以用作描述一个在非常宽的带宽上具有几乎平坦功率谱的噪声过程的近似。

信道输入过程 X(t) 有两个约束：首先，它的平均功率不大于 P 瓦特；其次，它的带宽不大于 W 赫兹。

根据惠特克-奈奎斯特-科捷利尼科夫-香农采样定理，一个带宽限制在 W 赫兹的信号可以通过每 2W1 秒采样一次信号来完全重构。

因此，在一个时间间隔 [0, T] 内，将 Y(t) 的带宽限制在 W 赫兹后，我们可以将 Y(t)=X(t)+Z(t) 近似为 2WT 个离散时间无记忆高斯信道，它们的噪声是相互独立的高斯噪声。

备注 11.4 一个微妙的问题是，由于一个信号不能同时在时间和频率上都受限，一个带宽为 W 赫兹的信号必须“泄漏”到有限时间间隔 [0, T] 之外，反之亦然。

--- PAGE 8 ---

带宽为 W 赫兹的信号必须“泄漏”到有限时间间隔 [0, T] 之外，反之亦然。

严谨的处理方法是仔细定义一个近似的时间受限或带宽受限的信号，并使用比前面采样定理论证中使用的 sinc 函数更复杂的基函数。

数学上，大约有 2WT 个正交基函数 {ϕ1(t),ϕ2(t),…,ϕ2WT(t)}，它们具有近似的时间跨度 T 秒和频率跨度 W 赫兹，使得任何 X(t) 都可以近似地写为 X(t)≈Σi=12WTXiϕi(t)，其中 Xi=∫0Tϕi(t)X(t)dt，并且对应于 Xi 的噪声是 Zi=∫0Tϕi(t)Z(t)dt，它是高斯的，并且独立于任何其他 Zj,j\=i。当 T 变大时，这个近似趋于准确，并且可以在 T→∞ 的极限下变得严谨 [39] [40]。

在 2WT 个分解的离散时间无记忆高斯信道 {Yi=Xi+Zi}i=1,…,2WT 中，每个信道的噪声都服从 N(0,N0/2)，并且所有信道的噪声相互独立。

另一方面，每个分解信道的平均输入功率为 (PT)/(2WT)=P/(2W)。

因此，根据上一节的内容，每个这样的分解离散时间无记忆高斯信道的容量-成本函数为

21log(1+N0/2P/(2W))=21log(1+N0WP) .

(11.24)

现在将所有 2WT 个分解的离散时间高斯信道放在一起，并按时间间隔长度 T 进行归一化，该波形信道的容量-成本函数为

T2WT21log(1+N0WP)=W log(1+N0WP) 比特/秒(11.25)

备注 11.5 从 (11.25) 中，我们可以粗略地将一个波形信道的操作分为两种模式。

当 P/N0≫W 时，

W log(1+N0WP)≈W logN0WP≈W logN0P 比特/秒 (11.26)

它随 W 线性增长。因此，带宽是性能的瓶颈，这被称为带宽受限区域。

当 W≫P/N0 时，

W log(1+N0WP)≈N0P log2e 比特/秒，

(11.27)

它随 P 线性增长，但对 W 的任何进一步增加不敏感。这被称为功率受限区域。

--- PAGE 9 ---

11.4 并行高斯信源或信道

在本节中，我们研究并行高斯信源或信道；

也就是说，一组相互独立的高斯信源或信道。

考虑一个 k 维并行高斯信源 S, 其中每个分量都是高斯的，并且所有分量都相互独立。

因此 S 是一个均值为零、协方差矩阵为对角阵的高斯随机向量：

κS=[σ12⋯⋯σk2]. (11.28)

我们假设 KS 的所有对角元素都严格为正。

我们采用以下平方误差失真度量：

d(s,s)=∣∣s−s∣∣2=∑i=1k(si−s^i)2.

可以证明，率失真函数由下式给出

(11.29)

R(D)=minf^∣≤I(S;S^). , s.t.

∑i=1kE[(Si−S^i)2]≤D. (11.30)

当 D≥Σi=1kσi2 时，R(D)=0，因此我们只需关注 D<Σi=1kσi2 的区域，在该区域失真约束是一个等式，Σi=1kE[(Si−S^i)2]=D。与第 11.1 节的推导类似，我们有

I(S;S^)=h(S)−h(S∣S^)

=21∑i=1kln(2πeσi2)−h(S−S^∣S^)

≥21∑i=1kln(2πeσi2)−h(S−S^)

≥21∑i=1kln(2πeσi2)−h(N(0,KS−S^)) , (11.31)

其中 KS−S^ 表示 S−S 的协方差矩阵，最后一个不等式是由于第 10 讲的练习 4，即向量高斯分布是在协方差约束下具有最大熵的密度，这是第 10 讲示例 10.6 的推广。

--- PAGE 10 ---

然后，

I(S;S^)≥21∑i=1kln(σi2)−21ln∣KS−S^∣

≥21∑i=1kln(σi2)−21∑i=1kln(E[(Si−S^i)2]). (11.32)

其中我们使用了哈达玛不等式（第 10 讲练习 4），

∣KS−S^∣≤∏i=1kKS−S^,ii=∏i=1kE[(Si−S^i)2].

(11.33)

记 Di=E[(Si−S^i)2], i=1,...,k 并令 (Si,S^i) 联合分布，使得 Si=Si+Zi，其中 Zi 独立于 S^i 且为均值为零、方差为 Di 的高斯分布，则在整个前面的推导过程中，所有的不等式都取等号。

因此，我们有以下优化问题来求解 R(D)：

minD21∑i=1klnDiσi2,

服从约束

∑i=1kDi=D,0<Di≤σi2,

∀i=1,..., (11.34)

这是一个标准的凸优化问题，我们可以从拉格朗日函数开始寻找其解：

I(Drλ,μ)=21∑i=1klnDiσi2+λ∑i=1kDi+∑i=1kμi(Di−σi2). (11.35)

令 ∂//∂Di=0，我们得到 λ+μi=2Di1 如果 Di<σi2；令 ∂J/∂μi=0，我们得到 Di=σi2 如果 μi>0。因此，我们有 Di=2λ1 如果 2λ1<σi2，否则 Di=σi2；

也就是说，

i=1,...,k,

(11.36)

其中 A 的选择需满足

Di=min{2λ1,σi2}

∑i=1kmin{2λ1,σi2}=D.

(11.37)

这是实现率失真函数 R(D) 的最优解。

检查这个最优解，我们发现它对应一个总预算为 D 的资源分配方案：对于那些方差较小的信源分量，我们不需要花费资源（即率）来表示它们；

对于那些方差较大的信源分量，我们花费资源来表示它们，留下

--- PAGE 11 ---

在它们之间留下相同数量的“残余误差”(由 Di=2λ1) 量化)。

这种方案被称为“反向注水”。

以类似的方式，我们考虑一个 k 维并行高斯信道 fY∣X, 其第 i 个分量由 Yi=Xi+Zi 给出，其中 Zi∼N(0,σi2) 并且所有 {Zi}i=1,...,k 相互独立。

我们假设所有噪声方差都严格为正。

平均功率约束 P 适用于这 k 个分量信道。

可以证明，容量-成本函数由下式给出：

C(P)=maxfXI(X;Y),

服从约束

∑i=1kE[Xi2]≤P.

(11.38)

我们把它作为一个练习来推导，实现容量-成本函数 C(P) 的最优解具有以下形式：X 是一个均值为零、协方差矩阵为

κX=[P1⋯Pk].

的高斯随机向量，其中 P 由下式给出

$P_i=\max\{2\lambda 1-\sigma i2,0\}$

并且 A 的选择需满足

$i=1,\ldots,k,$

$\sum i=1k\max\{2\lambda 1-\sigma i2,0\}=P.$

(11.39)

(11.40)

(11.41)

这个最优解也对应一个资源分配方案，总预算为 P：对于那些噪声强的信道分量，我们简单地将发射功率 $P_i=0$ 设置为零，从而放弃在它们上面传输信息；

对于那些噪声弱的信道分量，我们为它们分配功率，使得这些信道分量的接收功率达到相同的水平 $2\lambda 1$。

这种方案被称为“注水”。

笔记

高斯信源和高斯信道一直是信息论中典型的连续信源和信道模型。

无记忆高斯信源的率失真函数是香农在他关于率失真理论的原始论文[16]中建立的。

无记忆高斯信道的容量-成本函数

--- PAGE 12 ---

信道容量是香农在他 1948 年的原始文章 [1] 中确立的。

在他后续的工作 [41] 中，从几何角度研究了容量-成本函数，并将其扩展到波形高斯信道，其严谨的处理后来出现在，例如 [40] [39] 中。

并行高斯信道的注水解法也是由香农在 [41] 中研究的，而并行高斯信源的反向注水解法最初是在 [42] 中推导出来的。

练习

1. 考虑一个带有加性指数噪声的信道，$Y=X+Z$，其中噪声 Z 服从均值为 λ 的指数分布，独立于 X，并且输入 X 的支撑集为 $[0,\infty)$，均值约束为 $EX\le\mu$。计算该信道的信息容量-成本函数 $CI(\mu)$。
2. 证明对于通过加性噪声信道观测到的高斯信号，当噪声也是高斯分布时，估计质量最差。 设信号为 $X\sim N(0,P)$，噪声 Z 独立于 X，均值为零，方差为 N。证明以下不等式：

$E[(X - E[X|X + Z])^2] \le$

PN

P+N'

其中当 $Z\sim N(0,N)$ 时等号成立。

(11.42)

1. 对于一个均值为零、方差为 $\sigma 2$ 的连续随机变量 S，考虑其在平方误差失真度量 $d(s,s\text{^})=(s-s\text{^})2$ 下的信息率失真函数， a) 证明当 $D\geq\sigma 2$ 时，$RI(D)=0$。 b) 证明当 $D<\sigma 2$ 时，$\lambda I(D)\geq h(S)-21\log(2\pi eD)$。 c) 证明当 $D<\sigma 2$ 时，$RI(D)\leq 21\log D\sigma 2$。
2. 我们已经看到，计算率失真函数的一个有用技巧是从 s^ 到 S 构建合适的测试信道。但是在求解率失真函数的优化问题中，我们需要刻画从 S 到 S^ 的前向信道。

a) 在汉明失真下，伯努利信源的前向信道 PS^∣S 是什么?

b) 在平方误差失真下，高斯信源的前向信道 fS^∣S 是什么?

c) 计算拉普拉斯信源在绝对误差失真下的信息率失真函数，即 $fS(s)=2b1e-|s|/b$，且 $d(s,s\text{^})=|s-s\text{^}|$。

5. 考虑一个无记忆加性噪声信道 Y=X+7，其中 X 的支撑集为 [-1/2, 1/2]，噪声 Z 在 [-1, 1] 上均匀分布

--- PAGE 13 ---

11.4 并行高斯信源或信道 133

在 [-1, 1] 上均匀分布，与 X 独立。计算信道的信息容量，$CI=\max fXI(X;Y)$。

1. 考虑一个无记忆高斯信道 Y=X+Z, 其中 X 有一个平均功率约束 P，噪声是 $Z\sim N(0,\sigma Z2)$. 假设，除了 Y，解码器还观察到 Z 的一个带噪版本，V=Z+W，其中 $W\sim N(0,\sigma W2)$ 独立于 Z 和 X。这个信道模型的信息容量-成本函数是什么?
2. 考虑独立高斯随机变量 $X\sim N(0,\sigma X2)$ 和 $Z\sim N(0,\sigma Z2)$。如果存在另一个随机变量 V，它只与 X 不相关，满足 $E[XV]=0$ 和 $E[V2]\leq\sigma Z2$，证明 $I(X;X+V)\geq I(X;X+Z)$ 并讨论等号成立的条件。
3. 考虑第 11.4 节中的并行高斯信道模型。

a) 推导注水最优解。

b) 证明当 $P\to\infty$ 时，由于使用均匀功率分配 $Pi=P/k, i=1,\ldots,k$ 而不是注水最优解所导致的速率损失渐近消失。

9. 考虑一个具有两个输入 (X1,X2) 和两个输出 (Y1,Y2) 的信道，遵循以下信道定律:

Y1=X1+Z1

Y2=h(X1)+X2+Z2

(11.43)

(11.44)

其中 h(·) 是一个给定函数，(Z1,Z2) 是独立噪声。

一种解码方案如下：首先从 Y1 解码 X1，然后从 Y2−h(X1) 解码 X2。

使用基于互信息分析的推理来论证这种解码方案通常是次优的。

10. 考虑一个联合信源信道编码设置，其中信源是一个均值为零、方差为 Q 的无记忆高斯信源，信道是一个高斯噪声均值为零、方差为 $\sigma 2$ 的无记忆高斯信道。设信源与信道的转换比为 r=1。考虑信源再现的平均平方误差失真 D 和信道传输的平均输入功率约束 P。

a) 确定 D 和 P 之间的基本性能极限。

b) 证明可以设计简单的符号级映射来实现基本性能极限。

c) 验证第 6.5 节中的“双重匹配”条件对于设计的符号级映射成立。