假设存在两个独立的伯努利离散无记忆信源（DMS）S_1 和 S_2，其参数分别为 $\delta_1 \leq 1/2$ 和 $\delta_2 \leq 1/2$ 。每次我们以无记忆的方式对其中一个离散无记忆信源进行采样，从而得到一个新的离散无记忆信源，记为 S 。设采样 S_1 的概率为 λ ，采样 S_2 的概率为 $1-\lambda$ 。在汉明失真下，S 的率失真函数是什么?

考虑一个离散无记忆信源 S，它在 $\mathcal{S}=\{1,\ldots,m\}$ 上服从均匀分布，再现字母表 $\hat{\mathcal{S}}=\mathcal{S}$ ，并采用汉明失真度量。计算率失真函数 $R(D)$ 。这也给出了一个范诺不等式（定理 3.9 ）取等号的例子。

在 4.1 节的问题设定中，不再假设失真度量 d 是从 $\mathcal{S}\times\hat{\mathcal{S}}$ 到 $[0,\infty)$ 的映射，而是将其视为一个根据条件概率分布 $P_{U|\mathcal{S},\hat{\mathcal{S}}}(u|s,\hat{s})$ 生成的随机变量 $U\in[0,\infty)$ 。对定理 4.1 进行推广，以处理这个扩展后的问题设定，并指出在逆定理和可达性证明中必要的修改之处。

我们对香农信源编码基本定理的陈述明确假定了失真度量 $d(s,\hat{s})$ 是有界的，即 $d_{\max}<\infty$ 。

a) 解释如果失真度量无界，即如果存在某些 $(s,\hat{s})\in\mathcal{S}\times\hat{\mathcal{S}}$ 使得 $d(s,\hat{s})=\infty$ ，那么该定理可达性部分的证明为何会失效。

b) 考虑存在 $\hat{s}^*\in\hat{\mathcal{S}}$ 使得对于所有 $s\in\mathcal{S}$ ，有 $d(s,\hat{s}^*)<\infty$ 的情况。证明在这种情况下，率失真函数 $R(D)$ 仍由定理 4.1 给出，即 $\min_{P_{\hat{S}|S}} I(S;\hat{S})$ ，约束条件为 $\mathbb{E}[d(S,\hat{S})]\leq D$ 。

c) 证明存在某些 $(\mathcal{S},\hat{\mathcal{S}},d(s,\hat{s}))$ 的情况，使得率失真函数必须大到 $\log|\mathcal{S}|$ ；也就是说，不可能有高效的表示，且 $R(D)$ 可能与 $R_I(D)$ 不同。

d) 计算以下设定下的率失真函数：$\mathcal{S}=\{0,1\}$ ，$\hat{\mathcal{S}}=\{0,1,e\}$ ，S 服从伯努利分布 $\mathrm{Bernoulli}(1/2)$ ，若 $\hat{s}=s$ ，则 $d(s,\hat{s})=0$ ；若 $\hat{s}=e$ ，则 $d(s,\hat{s})=1$ ；若 $\hat{s}\neq s$ 且 $\hat{s}\neq e$ ，则 $d(s,\hat{s})=\infty$ 。

对于在失真度量 $d(s,\hat{s})$ 下的离散无记忆信源 S ，给定参数 $a\geq 0$ ，定义一个新的失真度量 $\tilde{d}(s,\hat{s})$ ：若 $d(s,\hat{s})>a$ ，则 $\tilde{d}(s,\hat{s})=1$ ，否则 $\tilde{d}(s,\hat{s})=0$ 。描述在 $\tilde{d}$ 下，当 $D=0$ 时 S 的率失真函数。

在第二节中，我们研究了索引字符串为二进制时的精确无损压缩。若索引字符串为 q 进制（$q\geq 2$ ），通过推广第二节中的分析，推导期望索引字符串长度的上下界。

对于第二节中研究的精确无损压缩码，当 S 满足以下情况时，通过数值计算 $\bar{l}$ ：(a) 在 $\{1,2,\ldots,M\}$ 上服从均匀分布；(b) 服从参数为 ϵ 的几何分布 。将这些情况下 $\bar{l}$ 的精确值与第二节中得到的上下界进行比较。

证明：一个码是唯一可译码，当且仅当对于任意整数 $n\geq 1$ ，以及任意 $\underline{s}\neq\underline{s}'\in\mathcal{S}^n$ ，有 $f(\underline{s})\neq f(\underline{s}')$ 。

我们可以将定理 5.1 中的克拉夫特不等式改写为：

$\sum_{\ell=1}^{\infty} A_\ell q^{-\ell} \leq 1$

其中 A_ℓ 表示长度为 ℓ 的索引字符串的数量，而不是（5.21）式。让我们使用这种形式的克拉夫特不等式来证明定理 5.1 的逆定理部分，即对于给定的满足克拉夫特不等式的集合 $\{A_\ell : \ell = 1, 2, \ldots\}$ ，我们可以构造一个相应的前缀码。从根节点开始，完成以下归纳证明：

a) 证明从根节点出发，在深度为 1 处至少有 A_1 个叶子节点，以容纳 A_1 个长度为 1 的索引字符串。

b) 假设我们已经容纳了所有长度从 1 到 $\ell - 1$ 的索引字符串。证明在深度为 ℓ 处至少有 A_ℓ 个未使用的叶子节点，以容纳 A_ℓ 个长度为 ℓ 的索引字符串。

如果对于任意 $s \neq s' \in \mathcal{S}$ ， $f(s)$ 都不是 $f(s')$ 的后缀，那么这个码被称为后缀无关码；如果一个码既是前缀无关码又是后缀无关码，那么它被称为固定无关码 。对于有限字母表 $|\mathcal{S}| < \infty$ 的离散无记忆信源 S ，当 $\sum_{s\in\mathcal{S}} q^{-\ell(s)} \leq 1/2$ 时，找到一种方法来构造一个码长为 $\{\ell(s) : s \in \mathcal{S}\}$ 的 q 进制固定无关码。

证明：对于字母表大小 $|S| = \infty$ 的离散无记忆信源 S ，前缀码仍然满足克拉夫特不等式；反之，对于任何满足克拉夫特不等式的索引字符串长度，都存在一个相应的前缀码。

推导在 $\{1, 2, \ldots, 10000\}$ 上均匀分布的离散无记忆信源 S 的二进制霍夫曼码，并将得到的期望索引字符串长度与熵界 $\log_2 10000$ 比特进行比较。

对于离散无记忆信源 S ，我们设计一个前缀码，使加权期望索引字符串长度 $\bar{l} = \sum_{s\in\mathcal{S}} P_S(s)c(s)\ell(s)$ 最小，其中 $c(s) > 0$ 是源消息 s 在每个索引位置的成本 。注意，当对于所有 $s \in \mathcal{S}$ ， $c(s) = 1$ 时，就回到了第四节研究的问题，该问题可通过那里的霍夫曼码解决。

a) 推导 $\bar{l}$ 的下界，并讨论何时能达到该下界。

b) 推广霍夫曼码，以得到使 $\bar{l}$ 最小的前缀码。

对于具有 K 个非零概率和一个零概率的离散无记忆信源 S ，即 $P_S(a_1) \geq P_S(a_2) \geq \cdots \geq P_S(a_K) > P_S(a_{K+1}) = 0$ ，我们既可以设计一个忽略零概率的霍夫曼码，也可以设计一个包含零概率的霍夫曼码 。找出这两种不同霍夫曼码的期望索引字符串长度之间的关系。

考虑具有（不一定相同的）有限字母表的独立离散无记忆信源 S_1 和 S_2 。分别将它们的二进制霍夫曼码记为 f_{S_1} 和 f_{S_2} 。现在将 (S_1, S_2) 视为一个单一的离散无记忆信源，并使用串联码 $[f_{S_1}, f_{S_2}]$ 作为 (S_1, S_2) 的码；例如，对于某些 (s_1, s_2) ，如果 $f_{S_1}(s_1) = 001$ 且 $f_{S_2}(s_2) = 101$ ，那么 $f_{S_1,S_2}(s_1, s_2) = 001101$ 。

a) 证明 f_{S_1,S_2} 是一个前缀码。

b) f_{S_1,S_2} 的克拉夫特不等式是否总是取等号?

香农 - 范诺码采用一种保守策略，将 $-\log_q P_S(s)$ 的所有非整数值向上取整 。或许可以明智地将 $-\log_q P_S(s)$ 的某些非整数值向下取整，从而得到一个期望索引字符串长度更短的前缀码。

a) 提出一种设计前缀码的算法，通过有选择地将 $-\log_q P_S(s)$ 的某些非整数值向下取整，使其性能可能优于香农 - 范诺码。

b) 找出一个例子，其中你设计的码明显比霍夫曼码差。

在第 4 讲有损信源表示的问题设定中，编码索引 $W \in \{1, 2, \cdots, M_n\}$ 也可看作是固定长度为 $\lceil \log_2 M_n \rceil$ 的二进制字符串 。现在，如果我们允许 W 为可变长度，从所有有限长度二进制字符串的集合 $\mathcal{W}^* = \{\emptyset, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \cdots\}$ 中选取。定义码率为 $R = \mathbb{E}[\ell(\underline{S})]/n$ ，其中 $\ell(\underline{S})$ 是对 $\underline{S}$ 进行编码的 W 的长度，n 是 $\underline{S}$ 的长度。修改第 4 讲中逆定理部分的证明，以表明可变长度编码仍无法超越率失真函数。

证明推论 6.1。

$$
\begin{aligned}
C_I(\Gamma) &= \max_{P_X} I(X;Y), \\
&\text{s.t. } \mathbb{E}[c(X)] \leq \Gamma.
\end{aligned}
$$

a) 对于容量 - 成本函数 $C_I(\Gamma)$ ，当 $\Gamma < \Gamma_{\min} := \min_{x \in \mathcal{X}} c(x)$ 时，优化问题 (1) 不可行，此时我们简单地令 $C_I(\Gamma) = 0$ 。

b) 存在一个阈值 $\Gamma_{\max}$ ，使得对于任意 $\Gamma \geq \Gamma_{\max}$ ，有 $C_I(\Gamma) = C_I(\infty)$ ，$C_I(\infty)$ 是无成本约束时的容量 。

c) 容量 - 成本函数 $C_I(\Gamma)$ 是关于 Γ 的非递减凹函数。

d) 若 $C_I(\infty) > 0$ ，则对于 $\Gamma \in [\Gamma_{\min}, \Gamma_{\max}]$ ，$C_I(\Gamma)$ 严格递增，并且在优化问题 (1) 中，不等式约束可以替换为等式约束。

计算以下离散无记忆信道（DMC）的容量 - 成本函数：

a) 二元对称信道（BSC），其中 $c(0)=0$ 且 $c(1)=1$；

b) 二元删除信道（BEC），其中 $c(0)=0$ 且 $c(1)=1$。

计算以下离散无记忆信道（DMC）的容量：

a) 具有 "无用" 输入的离散无记忆信道，其信道转移概率矩阵 $P_{Y|X}$ 为：

$$P_{Y|X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（提示：对称性很有用，但你需要解释为什么利用对称性进行简化不会损失最优性。）

b) 非对称二元删除信道（BEC），其信道转移概率矩阵 $P_{Y|X}$ 为：

$$P_{Y|X}=\begin{bmatrix}1-\alpha & \alpha & 0\\ 0 & \beta & 1-\beta\end{bmatrix}$$

c)

其信道转移概率矩阵 $P_{Y|X}$ 为：

$$P_{Y|X}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

定义对称离散无记忆信道（DMC）的方式有多种。其中一种定义如下：若离散无记忆信道 $P_{Y|X} = [p_{i,j}]_{i=1,...,|\mathcal{X}|, j=1,...,|\mathcal{Y}|}$ 的每一行都是其他行的一个排列，且每一列都是其他列的一个排列，则该信道是对称的。求这种对称离散无记忆信道的容量，并证明当输入服从均匀概率分布时可以达到该容量。

我们可以适当放宽上一题中对对称离散无记忆信道（DMC）的要求，将弱对称离散无记忆信道 $P_{Y|X} = [p_{i,j}]_{i=1,...,|\mathcal{X}|, j=1,...,|\mathcal{Y}|}$ 定义如下：矩阵 $P_{Y|X}$ 的列可以划分为若干子集，使得对于每个子集，由其对应列所构成的子矩阵满足上一题中的对称条件 。求这种弱对称离散无记忆信道的容量，并证明当输入服从均匀概率分布时可以达到该容量。

考虑一个离散无记忆信道（DMC），其信道转移概率矩阵为 $P_{Y|X} = [p_{i,j}]_{i=1,...,|\mathcal{X}|, j=1,...,|\mathcal{Y}|}$ 。

a) 除了 $\mathcal{Y}$ 中的输出外，增加一个额外的删除输出 e ，具体如下：对于任意输入 $x \in \mathcal{X}$ ，信道以概率 α 输出 e ，否则根据 $P_{Y|X}$ 输出 $y \in \{1, \ldots, |\mathcal{Y}|\}$ 。证明这样一个信道的容量为 $(1-\alpha)C$ ，其中 C 是原始离散无记忆信道 $P_{Y|X}$ 的容量 。

b) 换一种方式，除了 $\mathcal{Y}$ 中的输出外，增加一个额外的删除输出 e ，具体如下：首先将输入 $x \in \mathcal{X}$ 通过 $P_{Y|X}$ 得到输出 $y \in \mathcal{Y}$ ，然后以概率 α 将这个输出变为 e 。这样一个信道的容量是多少?

若一个离散无记忆信道（DMC）是交叉概率 $\delta < 1/2$ 的二元对称信道（BSC），在不考虑输入成本的情况下，当 P_X 达到信道容量 C 时，描述译码规则（6.45）、（6.46）和（6.50），并找出它们的差异。对二元删除信道（BEC）重复此练习。

考虑一个删除概率 $\alpha > 0$ 且具有无噪声无延迟反馈的二元删除信道（BEC）。设计一种分组编码方法（即所有信道码字长度均为 n ，且 n 不依赖于反馈），使其在 n 趋于无穷时，能达到信道容量 $(1-\alpha)$ 比特 / 信道使用 。所设计的方法应是明确的，而非像 6.4 节可达性证明中使用的随机码本。

不考虑渐近趋近于零的错误概率准则，而是考虑严格的零错误信道传输 。将零错误可达速率定义为：存在某个码字长度的码，使得错误概率严格为零的码率；将零错误容量定义为所有零错误可达速率的上确界。

a) 证明对于二元对称信道（BSC），只要交叉概率 $\delta > 0$ ，零错误容量就为零。

b) 求含 26 个字母的有噪打字机信道的零错误容量 。有噪打字机信道定义如下：$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{a, b, c, \ldots, z\}$ ，

$P_{Y|X}(a|a) = P_{Y|X}(b|b) = \cdots = P_{Y|X}(y|y) = P_{Y|X}(z|z) = 1/2$ ，且

$P_{Y|X}(b|a) = P_{Y|X}(c|b) = \cdots = P_{Y|X}(z|y) = P_{Y|X}(a|z) = 1/2$ 。

c) 证明对于 $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{a, b, c, d, e\}$ 的有噪打字机信道，零错误速率 $\frac{1}{2}\log_2 5$ 比特 / 信道使用 是可达的。

我们可以将多个离散无记忆信道（DMC）组合成一个和信道（sum DMC）。将离散无记忆信道 $P_{Y|X}$ 写成矩阵形式，其第 i 行第 j 列元素为 $P_{Y|X}(j|i)$。给定输入字母表为 $\mathcal{X}_k$、输出字母表为 $\mathcal{Y}_k$ 的离散无记忆信道 $P_{Y|X,k}$ （$k=1,\ldots,K$），和信道 $P_{Y|X,sum}$ 的矩阵为 $P_{Y|X,sum}=\mathrm{diag}\{P_{Y|X,1},\ldots,P_{Y|X,K}\}$，即一个块对角矩阵，其对角子矩阵为 $P_{Y|X,1},\ldots,P_{Y|X,K}$。计算 $P_{Y|X,sum}$ 的容量，并根据各组成离散无记忆信道的容量可达输入分布，描述和信道的容量可达输入分布。

考虑联合信源信道编码的未编码传输方案。

a) 验证在例 6.3 中，恒等映射能达到最优性能。

b) 在例 6.3 中，将离散无记忆信道（DMC）改为二元删除信道（BEC）。我们仍令 f 为恒等映射，并将 g 修改为:

$$\begin{aligned} g(y) &= y,\ \text{如果 } y \neq e \\ &= U \sim \text{伯努利}(1/2),\ \text{否则} \end{aligned}$$

计算由此可达到的性能，并将其与信源 - 信道分离所达到的最优性能进行比较。