姓名：…………　学号：…………　班级：…………　试卷序号：…………

装　订　线

防灾科技学院

2012~2013 年 第一学期期末考试概率论与数理统计试卷（B）

参考答案与评分标准　使用班级本科 48 学时班　答题时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总分	阅卷教师
得分						

阅卷教师	
得　分	

一 、填空题（本大题共 7 小题，每题 3 分，共 21 分）

1、已知事件 A，B 有概率 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，条件概率 $P(B|A)=0.5$，则 $P(A\cup B)=$ <u>0.55</u>；

2、10 张彩票中有 5 张是有奖彩票。从中每次取一张，作不放回抽样，前 3 次都中奖的概率为 $\frac{1}{12}$；

3、随机变量 X 的分布函数是 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.3, & -1\le x<1\\ 0.7, & 1\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$，则 $P(-1<X\le 3)=$ <u>0.7</u>；

4、假设某潜在震源区年地震发生数 X 服从参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布，则未来一年该震源区发生至少一次地震的概率为 $1-e^{-2}$；

5、对两台仪器进行独立测试，已知第一台仪器发生故障的概率为 p_1，第二台仪器发生故障的概率为 p_2．令 X 表示测试中发生故障的仪器数，则 $E(X)=p_1+p_2$

6、设 A、B 是两事件，如果满足等式 P(AB)=P(A)P(B),则称事件 A、B <u>相互独立</u>；

7、设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$Y=X_1{}^2+C(X_2+X_3)^2$，若 Y 服从自由度为 2 的 χ^2 分布，则 $C=$ <u>1/2</u>.

阅卷教师	
得　分	

二、单项选择题（本大题共 7 小题，每题 3 分，共 21 分）

1、 一学生接连参加同一资格证的两次考试。第一次及格的概率为 1/2.如果第一次及格那么他第二次考试及格的概率也为 1/2。如果第一次不及格那么他第二次及格的概率为 1/4.如果两次中至少有一次及格他就能取得该资格证，则他取得该资格证的概率为　(C)

(A)　1/8 ；　(B) 3/8；　(C)　5/8；　(D) 7/8.

2、设 A、B 为两个互不相容的随机事件，且 $P(B)>0$，则下列选项必然正确的是（B）

(A) $P(A)=1-P(B)$；　(B) $P(A|B)=0$；　(C) $P(A|B)=1$；　(D) $P(\overline{AB})=0$.

3、设 X 在 1,2,3,4 中等可能取值，Y 再从$1,\cdots,X$ 中等可能取一整数，则 $P(Y=4)=$（ A ）;

(A)　1/16 ；　(B) 7/48；　(C)　13/48；　(D) 25/48.

4、设 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$Y=aX+b$，其中 a、b 为常数，且 $a\ne 0$，则 $Y\sim$（C）

(A) $N(a\mu-b,\ \ a^2\sigma^2+b^2)$；　(B) $N(a\mu+b,\ \ a^2\sigma^2-b^2)$；

(C) $N(a\mu+b,\ \ a^2\sigma^2)$；　(D) $N(a\mu-b,\ \ a^2\sigma^2)$.

5、已知随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布 B(n,p),且 E(X)=2.4,D(X)=1.44,则参数 n,p 的值是（B）.

A. n=4,p=0.6　B. n=6,p=0.4　C. n=8,p=0.3　D. n=24,p=0.1

6、设 $\rho_{X,Y}$ 为随机变量(X,Y)的相关系数，则"$\rho_{X,Y}=0$"是"X,Y 相互独立"的（A）

(A).必要条件，但非充分条件；　(B).充分条件，但非必要条件；

(C).充分必要条件；　(D).既非充分条件，也非必要条件.

7、设总体 X 服从参数 $\lambda=10$ 的泊松（Poisson）分布，现从该总体中随机选出容量为 20 一个样本，则该样本的样本均值的方差为（ B ）

(A). 1；　(B). 0.5；　(C). 5；　(D). 50.

阅卷教师	
得　分	

三、（本大题共 6 小题，每题 7 分，共 42 分。）

1、小乌龟的主人外出出差，委托朋友替乌龟换水，如果不换水，乌龟死去的概率为 80%，若换水，则乌龟死去的概率为 10%。主人相信朋友有 90%可能会记得换水。

问：（1）主人出差归来乌龟还活着的概率？（2）若主人归来乌龟已死，则是朋友忘记换水的概率为多大？

解：设 A=“朋友记得换水”，B=“乌龟还活着”，则　　　………（1 分）

$P(A)=0.9$，$P(\bar{A})=0.1$，$P(B|A)=1-0.10=0.90$，$P(\bar{B}|A)=0.10$，$P(B|\bar{A})=0.2$，

$P(\bar{B}|\bar{A})=0.8$，　　　…………………（2 分）

（1）由全概率公式 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

=0.9×0.9+0.1×0.2=0.83；　　………………（2 分）

（2）由条件概率公式 $P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B})}=\dfrac{0.1\times 0.8}{1-0.83}\approx 0.47$　　……（2 分）

2、随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=Ae^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$$

求（1）常数 A；　（2）$P\{0<X<1\}$；　（3）X 的分布函数 $F(x)$。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2A\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\left[-2Ae^{-x}\right]_0^{+\infty}=2A$，

∴ $A=\dfrac{1}{2}$　　　………………………………（2 分）

（2）$P\{0<X<1\}=\int_0^1\frac{1}{2}e^{-x}dx=\dfrac{1-e^{-1}}{2}$.……………………（2 分）

（3）当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$，当 $x\geq 0$ 时，

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{t}\right]_{-\infty}^{0}+\left[-\frac{1}{2}e^{-t}\right]_0^x=1-\frac{1}{2}e^{-x}$，

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$　　…………………………………（3 分）

3、设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

解：设随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$、$F_Y(y)$，先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$。

由于 $Y=X^2\geq 0$，故当 $y\leq 0$ 时，$F_Y(y)=0$　……………………（2 分）

当 $y>0$ 时，有

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$，

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导数，即得 Y 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})], & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$…………（4 分）

4、二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0.1	0.1	0.2
1	0.2	0.3	0.1

（1）求 X,Y 的边缘分布律；（2）求 $P(X+Y=1)$；（3）X,Y 是否相互独立。

解：（1）$P(X=-1)=0.1+0.2=0.3$，$P\{X=0\}=0.3+0.1=0.4$，

$P\{X=1\}=0.2+0.1=0.3$，　$P\{Y=0\}=0.1+0.1+0.2=0.4$，

$P\{Y=1\}=0.2+0.3+0.1=0.6$。……………………………………（3 分）

（2）$P(X+Y=1)=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0.5$ ……………（2 分）

（3）因为 $P\{X=0,Y=0\}=0.1\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，$X,Y$ 不相互独立。

………………（2 分）

5、设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2, 0\leq y\leq x\leq 1.\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$

试求边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 和条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$。

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 12y^2dy, 0<x<1,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}4x^3, 0<x<1,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$…………（2 分）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 12y^2dx, 0<y<1,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}12y^2(1-y), 0<y<1,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$ ……（2 分）

对 $0<x<1$，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, 0<y<x,\\ 0 \quad\quad ,\text{其它}\end{cases}$ …………（3 分）

6、设随机变量 X 和 Y 相互独立，概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0,\\ 0, x\le 0.\end{cases}$ 和 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0,\\ 0, y\le 0.\end{cases}$ 分别求（1）$U=\max\{X,Y\}$ ；（2）$V=\min\{X,Y\}$ 的概率密度。

解：X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, x>0,\\ 0, x\le 0.\end{cases}$ 和 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-2y}, y>0,\\ 0, y\le 0.\end{cases}$ ……（3 分）

（1） $U=\max\{X,Y\}$，其分布函数为 $F_{\max}(z)=\begin{cases}(1-e^{-z})(1-e^{-2z}), z>0,\\ 0, z\le 0.\end{cases}$，

所以概率密度为 $f_{\max}(z)=\begin{cases}e^{-z}+2e^{-2z}-3e^{-3z}, z>0,\\ 0, z\le 0.\end{cases}$ ……………………………………（2 分）

（2） $V=\min\{X,Y\}$，其分布函数为 $F_{\min}(z)=\begin{cases}1-e^{-3z}, z>0,\\ 0, z\le 0.\end{cases}$，

所以概率密度为 $f_{\min}(z)=\begin{cases}3e^{-3z}, z>0,\\ 0, z\le 0.\end{cases}$ ……………………………………………………（2 分）

阅卷教师	
得　　分	

四、（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1、二维随机变量 (X,Y) 的具有联合概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<y<x, 0<x<1\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$，求 $E(X),D(X),E(Y),Cov(X,Y)$.

解：$E(X)=\int_0^1 2xdx\int_0^x dy=\dfrac{2}{3}$ ……………（2 分）

$D(X)=\int_0^1 2x^2dx\int_0^x dy-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{18}$ ……………（2 分）

$E(Y)=\int_0^1 2dx\int_0^x ydy=\dfrac{1}{3}$ ……………（2 分）

$E(XY)=\int_0^1 2xdx\int_0^x ydy=\dfrac{1}{4}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{36}$ ……………（2 分）

2、设随机变量 X 的密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 0<x<1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的样本。求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

解：先求矩估计：因为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 0<x<1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$ 所以

$$\mu_1=EX=\int_0^1\theta x^\theta dx=\frac{\theta}{\theta+1}, \quad \therefore \quad \theta=\frac{\mu_1}{1-\mu_1}$$

故 θ 的矩估计为 $\theta=\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$ 。 ……………………………（3 分）

再求极大似然估计：

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值，故似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^n\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(x_1\cdots x_n)^{\theta-1}$$ ，………………（2 分）

而 $\ln(L(\theta))=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$，$\dfrac{d\ln(L(\theta))}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$ …………（2 分）

所以 θ 的极大似然估计为

$$\theta=-\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i}$$. ……………………………（1 分）