# 个人选择理论

李林静
E-Mail: linjing.li@ia.ac.cn

中国科学院自动化研究所 (CASIA)
复杂系统管理与控制国家重点实验室 (SKLMCCS)
互联网大数据与安全信息学研究中心 (iBasic)

中国科学院大学人工智能学院

Version: April 13, 2021

# 1 基本设定

在微观经济学中，对个人的选择行为 (Choice behavior) 进行建模，通常是假定存在一个选择集合 (Choice set, the set of alternatives)：

$$X = \{x, y, z, \cdots\}$$

从手段上看，存在以下两种不同的方法：

- 基于偏好 (preference-based)，假设个人对选择集 $X$ 中的各选项存在偏好序关系。
- 基于选择 (choice-based)，即直接对观测到的选择行为进行建模。

# 2 偏好，Preference

基于偏好的方法，通常假设个人存在理性的 (Rational) 偏好关系，同时可以用效用函数 (Utility function) 来表示这个理性的偏好关系 (通常还需对选择集 $X$ 作进一步的假设，在选择集 $X$ 有限的情况下，理性的偏好关系总可以由一个效用函数来表示)。

## 2.1 偏好关系

偏好关系 (Preference relation)，$\succeq$，定义了选择集 $X$ 上的一种比较关系。$\forall x, y \in X$，$x \succeq y$ 表示选项 $x$ 至少跟选项 $y$ 一样好。两种派生关系：

- 严格偏好关系 (Strict preference relation)，$\succ$，$\forall x, y \in X$，$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y$，$y \not\succeq x$。
- 无差异关系 (Indifference)，$\sim$，$\forall x, y \in X$，$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y$，$y \succeq x$。

**称选择集 $X$ 上的偏好关系 $\succeq$ 为理性的，若其同时满足完全性和传递性：**

- 完全性 (Completeness)，$\forall x, y \in X$，$x \succeq y$ 和 $y \succeq x$ 至少一个成立。
- 传递性 (Transitivity)，$\forall x, y, z \in X$，若 $x \succeq y$ 且 $y \succeq z$，则 $x \succeq z$。

完全性和传递性都是对偏好关系施加的很强约束，现实中，个人的行为极有可能违背这两条假设。相关讨论可以参考行为经济学相关文献。

## 2.2 效用函数

现代意义上的效用函数，一般是指序数效用 (Ordinal)，即只有效用函数值的大小关系有意义。更一般的说，序数特性是指在严格单调增变换 (Strictly increasing transformation) 中保持不变的性质。在传统意义上的，基数效用 (Cardinal) 还跟具体的效用值相关。

称函数 $u : X \to \mathbb{R}$ 为表示 $X$ 上偏好关系 $\succeq$ 的效用函数，若 $\forall x, y \in X$

$$x \succeq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(y)$$

通常，表示同一个偏好关系的效用函数并不唯一。因为序数特性在增变换下保持不变，故若 $u$ 是一个效用函数，函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为严格单调增函数，则 $f \circ u$ 为效用函数，且跟效用函数 $u$ 表示同一个偏好关系。

**偏好关系能够被效用函数表示的必要条件是其为理性偏好**。在选择集有限的情况下，容易证明这就是充分必要条件 (构造一个效用函数)。

直观解释：假设 $u(\cdot)$ 表示 $X$ 上的偏好 $\succeq$。首先，因为 $u(\cdot)$ 在 $X$ 上定义，故 $\forall x, y \in X$，$u(x)$ 和 $u(y)$ 有定义，且为实数值。注意到，在实数集 $\mathbb{R}$ 上，$u(x) \geq u(y)$ 和 $u(y) \geq u(x)$ 必有一个成立，故有 $x \succeq y$ 或 $y \succeq x$，即完全性成立。其次，$\forall x, y, z \in X$，若 $x \succeq y$ 且 $y \succeq z$，因为 $u(\cdot)$ 表示 $\succeq$，故有 $u(x) \geq u(y)$ 且 $u(y) \geq u(z)$。而在实数集上，显然有 $u(x) \geq u(z)$，亦即 $x \succeq z$，故传递性成立。

# 3 选择，Choice

基于选择的方法最先由 Samuelson 提出，通过在选择集上定义选择结构 (Choice structure) 来描述观测到的个体选择行为。利用这一结构，可以定义显示偏好关系 (revealed preference relation)。通常，基于选择的方法要求的知识要少于基于偏好的方法，其只需要个人已观测到的选择行为。

## 3.1 选择结构与显示偏好

选择集 $X$ 上的选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$：

- 预算集族 $\mathcal{B}$，由 $X$ 的子集构成，$\forall B \in \mathcal{B}$ 称为预算集 (budget set)，$\mathcal{B}$ 不一定包含 $X$ 的全部子集。

- 选择规则 (对应，correpondence) $C(\cdot)$，Choice rule，$\forall B \in \mathcal{B}$，$C(B) \subset B$。即个体面临预算集 $B$ 时，$C(B)$ 表示其可能做出的选择。

给定选择集 $X$ 上的选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$，则可以诱导如下的显示偏好关系 (Revealed preference relation) $\succeq^\star$：

$$x \succeq^\star y \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \in \mathcal{B}, x, y \in B, x \in C(B)$$

即 $x$ 显示出至少跟 $y$ 一样好。称 $x$ 显示出偏好于 $y$，若 $\exists B \in \mathcal{B}, x, y \in B, x \in C(B)$，但 $y \notin C(B)$。

## 3.2 显示偏好弱公理

**称选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ 满足显示偏好弱公理 (Weak axiom of revealed preference)，若其具有如下特性：**

- 对某 (些) $B \in \mathcal{B}$，若 $x, y \in B$ 有 $x \in C(B)$；

- 则对 $\forall B' \in \mathcal{B}$，且 $x, y \in B'$，若 $y \in C(B')$，必有 $x \in C(B')$。

即当 $y$ 存在时，$x$ 被选择，则满足弱公理的选择结构不能存在包含 $x, y$ 的预算集，选择规则在其上包含 $y$ 而不包含 $x$。利用显示偏好关系，弱公理可以表述为：若 $x \succeq^\star y$ ($x$ 显示出至少跟 $y$ 一样的好)，则 $y$ 不能显示出偏好于 $x$。

弱公理也等价于以下表述，对 $B, B' \in \mathcal{B}$，$x, y \in B$，$x, y \in B'$，若 $x \in C(B)$，$y \in C(B')$，则必有 $\{x, y\} \subset C(B)$ 和 $\{x, y\} \subset C(B')$。进一步可得，$\forall B, B' \in \mathcal{B}$，若 $C(B) \cap B' \neq \emptyset$，且 $C(B') \cap B \neq \emptyset$，则有 $C(B) \cap B' \subset C(B')$ 和 $C(B') \cap B \subset C(B)$。若选择规则为单值，则有 $C(B') = C(B)$，而且条件 $C(B) \cap B' \neq \emptyset$，等价于 $C(B) \in B'$。$C(B') \cap B \neq \emptyset$，等价于 $C(B') \in B$。

# 4 偏好与选择间的关系

对于上述两种方法，一个疑问是他们是否等价？通常而言，二者是不等价的，基于选择的方法所要求的知识要少于基于偏好的方法。若选择结构的预算集族包含选择集的全体子集，则二者等价。

首先考虑由偏好关系生成的 (generate) 选择结构。设在选择集 $X$ 上有定义好的偏好关系 $\succeq$ 和预算集族 $\mathcal{B}$，则可以由 $\succeq$ 生成 $X$ 上的一个选择结构，记为 $(\mathcal{B}, C^\star(\cdot, \succeq))$，其选择规则定义为：

$$\forall B \in \mathcal{B},\ C^\star(B, \succeq) = \{x \in B \mid x \succeq y,\ \forall y \in B\}$$

**选择集 $X$ 上的偏好关系 $\succeq$ 是理性的，则其生成的选择结构 $(\mathcal{B}, C^\star(\cdot, \succeq))$ 满足弱公理。**

直观解释：若 $\exists B \in \mathcal{B}, x, y \in B, x \in C^\star(B, \succeq)$，则按照生成规则的定义有 $x \succeq y$。现假设 $\exists B' \in \mathcal{B}, x, y \in B', y \in C^\star(B', \succeq)$，为说明生成的选择结构满足弱公理，还需要证明 $x \in C^\star(B', \succeq)$。注意到，按生成规则可得 $\forall z \in B', y \succeq z$，前面已经得到 $x \succeq y$，故由传递性 (理性偏好) 可得 $\forall z \in B', x \succeq z$，即 $x \in C^\star(B', \succeq)$。

另一方面，考虑选择结构的理性化。给定选择集 $X$ 上的选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ 和理性偏好 $\succeq$，称 $\succeq$ 是选择规则 $C(\cdot)$ 相对于预算集族 $\mathcal{B}$ 的理性化 ($\succeq$ 在预算集族 $\mathcal{B}$ 上理性化选择规则 $C(\cdot)$)，若 $\succeq$ 生成选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$，即

$$\forall B \in \mathcal{B},\ C(B) = C^\star(B, \succeq)$$

因为理性偏好生成的选择结构满足弱公理，故一个选择结构可理性化的必要条件就是其必须满足弱公理。但这并不充分，选择结构能否理性化还依赖于其预算集族。

**若选择集 $X$ 上的选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ 满足弱公理，且 $\mathcal{B}$ 包含 $X$ 的所有不超过三个元素的子集，则其可被唯一的理性偏好关系理性化，且这一偏好关系就是选择结构诱导的显示偏好关系 $\succeq^\star$。**

直观解释：首先说明唯一性，因为 $\mathcal{B}$ 包含所有的二元子集，故理性化偏好若存在的话必定唯一，否则将会跟 $C(\cdot)$ 在二元子集上的行为矛盾。

其次，说明显示偏好 $\succeq$ 生成选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$，利用证明集合相等的方法。$\forall B \in \mathcal{B}$，若 $x \in C(B)$，则 $\forall y \in B$，根据显示偏好关系的定义，可得 $x \succeq^\star y$。根据生成规则，可得 $x \in C^\star(B, \succeq^\star)$，从而有 $C(B) \subset C^\star(B, \succeq^\star)$。若有 $x \in C^\star(B, \succeq^\star)$，则根据生成规则，可得 $\forall y \in B, x \succeq^\star y$，从而 $x \in C(B)$，即 $C^\star(B, \succeq^\star) \subset C(B)$。

最后，说明显示偏好关系 $\succeq$ 是理性的。因为 $\mathcal{B}$ 包含所有的二元子集，故 $\forall \{x, y\} \in \mathcal{B}$，要么 $x \in C(\{x, y\})$，要么 $y \in C(\{x, y\})$，或者 $x, y \in C(\{x, y\})$。所以，要么 $x \succeq^\star y$，要么 $y \succeq^\star x$，或者 $x \sim y$，即显示偏好关系满足完全性，以下说明其满足传递性。假设有 $x \succeq^\star y$，$y \succeq^\star z$，需要证明 $x \succeq^\star z$。注意到预算集族包含所有三元子集，故 $\{x, y, z\} \in \mathcal{B}$。若 $x \in C(\{x, y, z\})$，则有 $x \succeq^\star z$。若 $y \in C(\{x, y, z\})$，因为 $x \succeq^\star y$，弱公理保证 $x \in C(\{x, y, z\})$，从而 $x \succeq^\star z$。若 $z \in C(\{x, y, z\})$，因为 $y \succeq^\star z$，弱公理保证 $y \in C(\{x, y, z\})$，从而由上面的推理同样可得 $x \succeq^\star z$。