单物品拍卖机制设计

李林静
E-Mail: linjing.li@ia.ac.cn

中国科学院自动化研究所 (CASIA)
复杂系统管理与控制国家重点实验室 (SKLMCCS)
互联网大数据与安全信息学研究中心 (iBasic)

中国科学院大学人工智能学院

Version: April 13, 2021

1 机制设计

1.1 背景

设某卖者 (Seller) 决定以拍卖的方式出售一不可分物品 (indivisible good)，且该物品对卖者的保留价值 (Reserve value) t_0 为共同知识 (Common Knowledge)。设有 N 个投标人参与竞价，其全体构成集合

$$\mathcal{N} = \{1, 2, \cdots, N\}$$

以下设投标人 i 对标的物的估价 (Value) 为私有信息 (Private Information)，亦即其类型 (Type)。在分析过程中令随机变量 T_i 表示投标人 i 的估价，且只有投标人 i 知道自己估价的真实取值 t_i。设随机变量 T_i 的取值范围为

$$\mathcal{T}_i = \left[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i\right]$$

其中，$\underline{\theta}_i$ 和 $\overline{\theta}_i$ 分别是可能的估价下界和上界，并记估价 T_i 的概率分布函数和概率密度函数分别为 $F_i(t_i)$ 和 $f_i(t_i)$。

为方便分析，以下将各投标人的类型合并为下述类型 (估价) 向量 (随机向量)

$$\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, \cdots, T_N)$$

其取值空间和一次具体实现值则分别记为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{T}} &= \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \cdots \times \mathcal{T}_N \\ \boldsymbol{t} &= (t_1, t_2, \cdots, t_N) \end{aligned}$$

按照不完全信息静态博弈的分析框架，以下假设联合概率分布 $F(\boldsymbol{t})$ 为共同知识，且记其概率密度函数为 $f(\boldsymbol{t})$。同时，根据博弈分析的习惯，定义下述符号

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_{-i} &\triangleq (t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_N) \\ \boldsymbol{T}_{-i} &\triangleq (T_1, T_2, \cdots, T_{i-1}, T_{i+1}, \cdots, T_N) \\ \boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i} &\triangleq \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \cdots \mathcal{T}_{i-1} \times \mathcal{T}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{T}_N \\ f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i}) &\triangleq f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_N) \end{aligned}$$

根据上述定义，可知符号 $\boldsymbol{t}_{-i}$，$\boldsymbol{T}_{-i}$，$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}$ 和 $f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})$ 分别表示投标人 i 所面对的投标人的类型值，类型随机向量，类型取值空间和类型的概率密度函数。且有 $(t_i, \boldsymbol{t}_{-i}) = \boldsymbol{t}$，$(T_i, \boldsymbol{T}_{-i}) = \boldsymbol{T}$，以及 $(\mathcal{T}_i, \boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}) = \boldsymbol{\mathcal{T}}$。

1.2 机制

为获得标的物，投标人需要提交自己的报价，在一般的机制 (Mechanism) 中则称其为消息 (Message)。令 $\mathcal{W}_i$ 表示投标人 i 的消息空间，其一个具体的消息则记为 w_i。同时，记机制的消息空间及一个具体的消息向量实现为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{W}} &= \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \cdots \times \mathcal{W}_N \\ \boldsymbol{w} &= (w_1, w_2, \cdots, w_N) \end{aligned}$$

当消息向量 $\boldsymbol{w}$ 提交后，需要据其确定标的物的分配方案和价格。对投标人 i，记其获得标的物的概率为 δ_i，则一个分配方案可以表示为

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N), \quad \forall i \in \mathcal{N},\ 0 \le \delta_i \le 1,\ \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_N \le 1$$

全体可能的分配方式则构成集合，

$$\boldsymbol{\Delta} = \{\Delta \mid \Delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N), \quad \forall i \in \mathcal{N},\ 0 \le \delta_i \le 1,\ \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_N \le 1\}$$

即集合 $\mathcal{N}$ 上的全体概率分布。注意到，当各分配概率之和小于 1 时，存在卖者不出售“标的物” 的可能性。为实现前述的根据消息向量来确定标的物的分配，需要预先指定一个从消息空间 $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ 到集合 $\boldsymbol{\Delta}$ 的映射

$$\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\mathcal{W}} \to \boldsymbol{\Delta} \tag{1}$$

并称其为分配规则 (Allocation Rule)。对任意消息向量 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$，$\pi_i(\boldsymbol{w})$ 表示投标人 i 获得标的物的概率。

同样，为实现前述的根据消息向量来确定价格，需要预先指定一个从消息空间 $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ 到价格空间 $\mathbb{R}^N$ 的映射

$$\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mathcal{W}} \to \mathbb{R}^N \tag{2}$$

并称其为定价规则 (Payment Rule)，对任意消息向量 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$，$\mu_i(\boldsymbol{w})$ 表示投标人 i 所要支付的期望价格。

利用上述符号，(拍卖) 机制 $\mathcal{M}$ 可描述为如下三元组

$$\mathcal{M} = (\boldsymbol{\mathcal{W}}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}) \tag{3}$$

同时机制 $\mathcal{M}$ 也定义了一个投标人之间的不完全信息静态博弈。在该博弈中，投标人 i 的纯策略是从其类型空间 $\mathcal{T}_i$ 到其消息空间 $\mathcal{W}_i$ 的映射

$$\beta_i : \mathcal{T}_i \to \mathcal{W}_i \tag{4}$$

而策略组合则可表示为下述函数向量

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N) = (\beta_i, \boldsymbol{\beta}_{-i})$$

其中，$\boldsymbol{\beta}_{-i}$ 为投标人 i 所面临的对手策略

$$\boldsymbol{\beta}_{-i} \triangleq (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \cdots, \beta_N)$$

按照定义，策略组合 $\boldsymbol{\beta}$ 构成为博弈 (或机制) $\mathcal{M}$ 的 Bayesian Nash 均衡 (Bayesian Nash Equilibrium，BNE)，若 $\forall i \in \mathcal{N}$，如果除 i 之外的投标人使用策略 $\boldsymbol{\beta}_{-i}$，则采用 β_i 是投标人 i 的最优策略。

1.3 直接机制与显示原理

在设计机制的时候，可选择的消息类型可以无限多，这为求解制造了障碍，特别是在求解最优机制的时候。若一机制的消息空间跟投标人的类型空间完全相同，即 $\forall i \in \mathcal{N}$, $\mathcal{W}_i = \mathcal{T}_i$，则称其为直接机制 (Direct Mechanism)，并可用如下二元组表示

$$\mathcal{D} = (\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}) \tag{5}$$

此时，分配规则 $\boldsymbol{\pi}$ 和定价规则 $\boldsymbol{\mu}$ 定义在类型空间 $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ 上

$$\boldsymbol{\pi} \ : \ \boldsymbol{\mathcal{T}} \to \boldsymbol{\Delta} \tag{6}$$
$$\boldsymbol{\mu} \ : \ \boldsymbol{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}^N \tag{7}$$

对一个直接机制 $\mathcal{D}$，如果说实话构成一个 BNE ($\forall i,\ \forall t_i \in \mathcal{T}_i,\ \beta_i(t_i) = t_i$) ，则称该直接机制是说实话的 (Truthful)。

显示原理 (Revelation Principle) **对任意机制 $\mathcal{M}$，若其存在均衡 $\boldsymbol{\beta}$，则在该均衡上的配置结果 (分配和价格)，可以通过一说实话的直接机制来实现。**

对任意机制 $\mathcal{M} = (\boldsymbol{\mathcal{W}}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu})$ 及其均衡 $\boldsymbol{\beta}$，能实现上述功能的直接机制 $\mathcal{D}^{\mathcal{M}} = (\boldsymbol{\pi}^{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\mu}^{\mathcal{M}})$ 可取为 $(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\mu})$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的复合

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^{\mathcal{M}} &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\pi} \circ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\mu}^{\mathcal{M}} &= \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

注意到，当投标人说实话时，将类型 (估价) $\boldsymbol{t}$ 带入直接机制 $\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$，的确可得到跟原机制 $\mathcal{M} = (\boldsymbol{\mathcal{W}}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu})$ 在均衡 $\boldsymbol{\beta}$ 上相同的配置。故只需要证明说实话是机制 $\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ 的均衡。为此，假设除 i 之外的投标人均说实话，而投标人 i 的报价 $s_i \neq t_i$，其期望收益为

$$\begin{aligned} \pi_i^{\mathcal{M}}(s_i, \boldsymbol{t}_{-i})t_i - \mu_i^{\mathcal{M}}(s_i, \boldsymbol{t}_{-i}) &= \pi_i(\boldsymbol{\beta}(s_i, \boldsymbol{t}_{-i}))t_i - \mu_i(\boldsymbol{\beta}(s_i, \boldsymbol{t}_{-i})) \\ &= \pi_i(\beta(s_i), \boldsymbol{\beta}_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i}))t_i - \mu_i(\beta(s_i), \boldsymbol{\beta}_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})) \\ &\leq \pi_i(\beta(t_i), \boldsymbol{\beta}_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i}))t_i - \mu_i(\beta(t_i), \boldsymbol{\beta}_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})) \\ &= \pi_i(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t}))t_i - \mu_i(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t})) \\ &= \pi_i^{\mathcal{M}}(\boldsymbol{t})t_i - \mu_i^{\mathcal{M}}(\boldsymbol{t}) \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\beta}$ 是均衡，故不等号成立。由上述各式可知当对手使用说实话策略时，任意投标人 i 的最佳策略也是说实话，故说实话是直接机制 $\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ 的均衡。

根据显示原理，在设计机制的时候，可以直接将投标人的消息空间 $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ 取为对应的类型空间 $\boldsymbol{\mathcal{T}}$，从而降低设计的复杂度。

1.4 激励兼容与收益等价

对直接机制 $\mathcal{D} = (\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu})$，若投标人 i 报价 s_i，而其对手均采用说实话策略，则投标人 i 能获得“标的物”的期望概率和需要支付的期望价格分别为

$$\delta_i(s_i) = \mathbb{E}[\pi_i(s_i, \boldsymbol{T}_{-i})] = \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \pi_i(s_i, \boldsymbol{t}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i}) \ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i} \tag{8}$$
$$m_i(s_i) = \mathbb{E}[\mu_i(s_i, \boldsymbol{T}_{-i})] = \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \mu_i(s_i, \boldsymbol{t}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i}) \ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i} \tag{9}$$

注意上述概率和价格只跟投标人 i 的报价相关联，而与其真实估价无关。当投标人 i 的真实估价为 t_i 时，其能获得的期望收益为

$$\begin{aligned} u_i(t_i, s_i) &= \mathbb{E}[\pi_i(s_i, \boldsymbol{T}_{-i})t_i - \mu_i(s_i, \boldsymbol{T}_{-i})] = \mathbb{E}[\pi_i(s_i, \boldsymbol{T}_{-i})]t_i - \mathbb{E}[\mu_i(s_i, \boldsymbol{T}_{-i})] \\ &= \delta_i(s_i)t_i - m_i(s_i) \end{aligned} \tag{10}$$

称直接机制 $\mathcal{D}$ 为激励兼容的 (Incentive Compatible，IC)，若 $\forall i\in\mathcal{N}$, $\forall t_i\neq s_i\in\mathcal{T}_i$，下述关于期望收益的不等式成立

$$U_i(t_i)\triangleq u_i(t_i,t_i)=\delta_i(t_i)t_i-m_i(t_i)\geq\delta_i(s_i)t_i-m_i(s_i)=u_i(t_i,s_i) \tag{11}$$

由上述定义可知，若机制 $\mathcal{D}$ 为激励兼容的，则所有投标人使用说实话策略将构成机制的一个均衡 (BNE)。故激励兼容也可如下定义

$$U_i(t_i)\triangleq\max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \{\delta_i(s_i)t_i-m_i(s_i)\},\qquad\forall i\in\mathcal{N},\ \forall t_i\in\mathcal{T}_i \tag{12}$$

注意到在上述定义中，二元函数 $u_i(x,y)$ 的第一变元 x 表示投标人 i 的类型，第二变元 y 为其报价，$u_i(x,y)$ 等于投标人 i 能获得的期望收益。函数 $U_i(\cdot)$ 则等于投标人 i 说实话时能获得的期望收益，也称为均衡收益函数 (Equilibrium Payoff Function，因为说实话构成 BNE)。以下分析激励兼容的直接机制所具有的特性。

(1)　对激励兼容的直接机制 $\mathcal{D}$，$\forall i\in\mathcal{N}$，均衡收益函数 $U_i(\cdot)$ 为凸函数。

因为对 $\forall t_i^1\neq t_i^2\in\mathcal{T}_i$，$\forall\lambda_1,\lambda_2\geq 0,\lambda_1+\lambda_2=1$，成立

$$\begin{aligned}
U_i\left(\lambda_1t_i^1+\lambda_2t_i^2\right) &= \max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \left\{\delta_i(s_i)\left(\lambda_1t_i^1+\lambda_2t_i^2\right)-m_i(s_i)\right\}\\
&= \max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \left\{\lambda_1\delta_i(s_i)t_i^1+\lambda_2\delta_i(s_i)t_i^2-(\lambda_1+\lambda_2)m_i(s_i)\right\}\\
&= \max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \left\{\lambda_1\left(\delta_i(s_i)t_i^1-m_i(s_i)\right)+\lambda_2\left(\delta_i(s_i)t_i^2-m_i(s_i)\right)\right\}\\
&\leq \max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \left\{\lambda_1\left(\delta_i(s_i)t_i^1-m_i(s_i)\right)\right\}+\max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \left\{\lambda_2\left(\delta_i(s_i)t_i^2-m_i(s_i)\right)\right\}\\
&= \lambda_1\max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \left\{\delta_i(s_i)t_i^1-m_i(s_i)\right\}+\lambda_2\max_{s_i\in\mathcal{T}_i}\ \left\{\delta_i(s_i)t_i^2-m_i(s_i)\right\}\\
&= \lambda_1U_i\left(t_i^1\right)+\lambda_2U_i\left(t_i^2\right)
\end{aligned}$$

式中不等号成立，因为任意两个函数之和的最大值不可能超过两个函数的最大值之和，即有 $\max\{f+g\}\leq\max\ f+\max\ g$。按凸函数的定义，可得均衡收益函数 $U_i(\cdot)$ 为凸函数 (注意到函数 $U_i(\cdot)$ 定义在区间 $\mathcal{T}_i$ 上，而区间 $\mathcal{T}_i$ 为凸集)。因为凸函数均为绝对连续函数，故 $U_i(\cdot)$ 在定义域内部几乎处处可导。

(2)　对激励兼容的直接机制 $\mathcal{D}$，均衡收益函数 $U_i(\cdot)$ 在定义域内部几乎处处可导，且在可微点上有 $U_i'(t_i)=\delta_i(t_i)$。

注意到，对 $\forall t_i\neq s_i\in\mathcal{T}_i$，以下不等式组成立

$$\begin{aligned}
U_i(t_i) &\geq u_i(t_i,s_i)=\delta_i(s_i)t_i-m_i(s_i)\\
&= \delta_i(s_i)s_i-m_i(s_i)+\delta_i(s_i)t_i-\delta_i(s_i)s_i\\
&= U_i(s_i)+\delta_i(s_i)(t_i-s_i)\\
U_i(s_i) &\geq u_i(s_i,t_i)=\delta_i(t_i)s_i-m_i(t_i)\\
&= \delta_i(t_i)t_i-m_i(t_i)+\delta_i(t_i)s_i-\delta_i(t_i)t_i\\
&= U_i(t_i)+\delta_i(t_i)(s_i-t_i)
\end{aligned}$$

若有 $t_i>s_i$，则由上述不等式组可得

$$\begin{aligned}
\delta_i(s_i) &\leq \frac{U_i(t_i)-U_i(s_i)}{t_i-s_i}\\
\delta_i(t_i) &\geq \frac{U_i(t_i)-U_i(s_i)}{t_i-s_i}
\end{aligned}$$

由 $\delta_i(\cdot)$ 的定义式 (8) 可知其为连续函数，联合极限的保序性可得

$$\begin{aligned}\delta_i(t_i) = \lim_{s_i \to t_i^-} \delta_i(s_i) &\leq \lim_{s_i \to t_i^-} \frac{U_i(t_i) - U_i(s_i)}{t_i - s_i} = U_i'(t_i^-) \\ \delta_i(t_i) &\geq \lim_{s_i \to t_i^-} \frac{U_i(t_i) - U_i(s_i)}{t_i - s_i} = U_i'(t_i^-)\end{aligned}$$

联合上述不等式组可得

$$U_i'(t_i^-) \leq \delta_i(t_i) \leq U_i'(t_i^-)$$

若有 $t_i < s_i$，则类似的分析可得

$$U_i'(t_i^+) \leq \delta_i(t_i) \leq U_i'(t_i^+)$$

在函数的可微点上，其左导数跟右导数相等，故均衡收益函数 $U_i(\cdot)$ 的可微点上有 $U_i'(t_i) = \delta_i(t_i)$。对于几乎处处可导，前面已经由其绝对连续性说明。于是均衡收益函数 $U_i(\cdot)$ 可以表示为下述积分形式

$$U_i(t_i) = U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x \tag{13}$$

(3) 对直接机制 $\mathcal{D}$，激励兼容性等价于概率函数 $\delta_i(\cdot)$ 单调不减，$\forall i \in \mathcal{N}$。

首先，在前一段分析中已经得到，若机制 $\mathcal{D}$ 激励兼容，则当 $t_i > s_i$ 时，成立

$$\delta_i(s_i) \leq \frac{U_i(t_i) - U_i(s_i)}{t_i - s_i} \leq \delta_i(t_i)$$

即由机制的激励兼容性可以得到概率函数 $\delta_i(\cdot)$ 单调不减。反之，若概率函数 $\delta_i(\cdot)$ 单调不减。则对 $\forall t_i \neq s_i \in \mathcal{T}_i$，由均衡收益函数 $U_i(\cdot)$ 的积分表示 (13) 可得

$$\begin{aligned}U_i(t_i) - U_i(s_i) &= \int_{s_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x \geq \delta_i(s_i)(t_i - s_i) \\ &\Downarrow \\ U_i(t_i) &\geq U_i(s_i) + \delta_i(s_i)(t_i - s_i) \\ &= \delta_i(s_i)s_i - m_i(s_i) + \delta_i(s_i)(t_i - s_i) \\ &= \delta_i(s_i)t_i - m_i(s_i) \\ &= u_i(t_i, s_i)\end{aligned}$$

概率函数 $\delta_i(\cdot)$ 的单调不减性保证式中不等号成立。因为利用积分中值定理，可得

$$\int_{s_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \delta_i(\xi)(t_i - s_i), & s_i \leq \xi \leq t_i, \text{ if } t_i > s_i \\ \delta_i(\xi)(t_i - s_i), & t_i \leq \xi \leq s_i, \text{ if } t_i < s_i \end{cases}$$

对 $t_i > s_i$ 的情况，由函数 $\delta_i(\cdot)$ 单调不减，可得 $\delta_i(\xi) \geq \delta_i(s_i)$，从而不等号成立，即

$$\int_{s_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x = \delta_i(\xi)(t_i - s_i) \geq \delta_i(s_i)(t_i - s_i)$$

对 $t_i < s_i$ 的情况，由函数 $\delta_i(\cdot)$ 单调不减，可得 $\delta_i(\xi) \leq \delta_i(s_i)$，因为 $t_i - s_i$ 为负，故

$$\delta_i(\xi)(t_i - s_i) \geq \delta_i(s_i)(t_i - s_i)$$

即前述不等式依然成立。

(4) 收益等价定理 (Revenue Equivalence Theorem，RET)。

联合式 (8) 和 (13) 可得

$$\begin{aligned} U_i(t_i) &= U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x \\ &= U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i}\mathrm{d}x \\ &= U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\, \mathrm{d}x \right) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\, \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i} \end{aligned} \tag{14}$$

注意到式中的积分项只依赖于机制的分配规则和投标人的类型分布。因此，若两个激励兼容的直接机制采用相同的分配规则，则投标人 i 在这两个机制下的均衡收益在相差常数的意义下等价，且该常数为投标人 i 在类型为 $\underline{\theta}_i$ 时的均衡收益 $U_i(\underline{\theta}_i)$。如果上述最低均衡收益相等，则投标人 i 在这两种机制下的均衡收益相等。利用均衡收益和期望价格间的关系 (11) 可得均衡时投标人 i 的期望价格为

$$\begin{aligned} m_i(t_i) &= \delta_i(t_i)t_i - U_i(t_i) \\ &= -U_i(\underline{\theta}_i) + \delta_i(t_i)t_i - \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x \\ &= m_i(\underline{\theta}_i) + \delta_i(t_i)t_i - \delta_i(\underline{\theta}_i)\underline{\theta}_i - \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

注意到对最低估价 $\underline{\theta}_i$，均衡收益为

$$U_i(\underline{\theta}_i) = \delta_i(\underline{\theta}_i)\underline{\theta}_i - m_i(\underline{\theta}_i)$$

故也可以说若两个激励兼容的直接机制采用相同的分配规则，则投标人 i 在这两个机制下的期望价格在相差常数的意义下等价，且该常数为投标人 i 在类型为 $\underline{\theta}_i$ 时的期望价格 $m_i(\underline{\theta}_i)$，若上述最低期望价格相同，则 i 在两种机制下的期望价格相等。

对卖者而言，其期望收益则可表示为

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \left[t_0 \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{N}} \pi_i(\boldsymbol{t}) \right) + \sum_{i \in \mathcal{N}} \mu_i(\boldsymbol{t}) \right] f(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t} \\ &= t_0 - t_0 \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\mathcal{T}_i} \delta_i(t_i) f_i(t_i)\mathrm{d}t_i + \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\mathcal{T}_i} m_i(t_i) f_i(t_i)\mathrm{d}t_i \\ &= t_0 + \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\mathcal{T}_i} \left(-t_0\delta_i(t_i) - U_i(\underline{\theta}_i) + \delta_i(t_i)t_i - \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x \right) f_i(t_i)\mathrm{d}t_i \\ &= t_0 + \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\mathcal{T}_i} \left(\delta_i(t_i)(t_i - t_0) - \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \delta_i(x)\mathrm{d}x \right) f_i(t_i)\mathrm{d}t_i - \sum_{i \in \mathcal{N}} U_i(\underline{\theta}_i) \end{aligned}$$

注意到上式中只有最后的求和项依赖于机制的定价规则。因此，若两个激励兼容的直接机制采用相同的分配规则，则卖者在这两个机制下的期望收益在相差常数的意义下等价，且该常数为各投标人在类型为 $\underline{\theta}_i$ 时的期望价格之和 $\sum_{i\in\mathcal{N}} U_i(\underline{\theta}_i)$。

1.5 个体理性

卖者不可能强迫投标人来买其提供的 "标的物"，故当购得 "标的物" 时，投标人要能够获得正的收益，即要求直接机制 $\mathcal{D}=(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\mu})$ 是个体理性的 (Individual Rational，IR)，亦即满足下述条件

$$U_i(t_i)\geq 0,\quad \forall i\in\mathcal{N},\ \ t_i\in\mathcal{T}_i \tag{15}$$

注意到当机制 $\mathcal{D}$ 激励兼容时，由式 (13) 和 $\delta_i(\cdot)$ 的非负性可得 IR 条件等价于

$$U_i(\underline{\theta}_i)\geq 0,\quad \forall i\in\mathcal{N}$$

2 最优机制

称同时满足 IC 和 IR 两个条件，且能最大化卖者收益的直接机制 $\mathcal{D}^\star=(\boldsymbol{\pi}^\star,\boldsymbol{\mu}^\star)$ 为最优机制 (OPT)。以下讨论一般意义下最优机制的求解问题，分析中假定 $f_i(t)>0$，$\forall t\in\mathcal{T}_i$，且各投标人的类型 (估价) 分布独立，即有

$$f(\boldsymbol{t})=\prod_{i\in\mathcal{N}} f_i(t_i) \tag{16}$$

2.1 最优机制求解

利用分步积分法，可得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{T}_i}\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i}\delta_i(x)\mathrm{d}x f_i(t_i)\mathrm{d}t_i &= \int_{\mathcal{T}_i}\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i}\delta_i(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}F_i(t_i)\\
&= F_i(t_i)\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i}\delta_i(x)\mathrm{d}x\Big|_{\underline{\theta}_i}^{\bar{\theta}_i}-\int_{\mathcal{T}_i}F_i(t_i)\delta_i(t_i)\mathrm{d}t_i\\
&= \int_{\mathcal{T}_i}\delta_i(t_i)\mathrm{d}t_i-\int_{\mathcal{T}_i}F_i(t_i)\delta_i(t_i)\mathrm{d}t_i\\
&= \int_{\mathcal{T}_i}\left(1-F_i(t_i)\right)\delta_i(t_i)\mathrm{d}t_i
\end{aligned}$$

故卖者的期望收益可表示为

$$\begin{aligned}
U_0 &= \sum_{i\in\mathcal{N}}\int_{\mathcal{T}_i}\left(t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}-t_0\right)\delta_i(t_i)f_i(t_i)\mathrm{d}t_i+t_0-\sum_{i\in\mathcal{N}}U_i(\underline{\theta}_i)\\
&= \sum_{i\in\mathcal{N}}\int_{\mathcal{T}_i}\left(t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}-t_0\right)\int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}}\pi_i(t_i,\boldsymbol{t}_{-i})f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i}f_i(t_i)\mathrm{d}t_i+t_0-\sum_{i\in\mathcal{N}}U_i(\underline{\theta}_i)\\
&= \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\left[\sum_{i\in\mathcal{N}}\left(t_i-\frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}-t_0\right)\pi_i(\boldsymbol{t})\right]f(\boldsymbol{t})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}+t_0-\sum_{i\in\mathcal{N}}U_i(\underline{\theta}_i)
\end{aligned} \tag{17}$$

为最大化上式，应当使得积分项最大化，同时使最后的求和项最小化。注意到积分项中的决策变量只包括分配规则，故最优机制 $\mathcal{D}^\star$ 的分配规则 $\boldsymbol{\pi}^\star$ 满足条件

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^\star = \arg\max_{\boldsymbol{\pi}} \quad & \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \left[\sum_{i\in\mathcal{N}} \left(t_i - \frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)} - t_0 \right) \pi_i(\boldsymbol{t}) \right] f(\boldsymbol{t})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_i(\boldsymbol{t}) \le 1 \\ & \pi_i(\boldsymbol{t}) \ge 0, \quad \forall i\in\mathcal{N} \end{aligned} \tag{18}$$

得到最优分配规则后，再选择定价规则使得求和项最小。注意到满足 IC 和 IR 条件的机制，其 $U_i(\underline{\theta}_i) \ge 0$，故应当选择定价规则，使得

$$U_i(\underline{\theta}_i) = 0, \qquad \forall i \in \mathcal{N}$$

由式 (14) 可得

$$\begin{aligned} U_i(\underline{\theta}_i) &= U_i(t_i) - \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}x \right) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i} \\ &= \delta_i(t_i)t_i - m_i(t_i) - \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}x \right) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i} \\ &= \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} t_i \pi_i(t_i, \boldsymbol{t}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i} - m_i(t_i) - \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}x \right) f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i} \end{aligned}$$

令 $U_i(\underline{\theta}_i) = 0$ 可得到

$$m_i(t_i) = \int_{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-i}} \left[t_i \pi_i(\boldsymbol{t}) - \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}x \right] f_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_{-i}$$

再由 $m_i(t_i)$ 的定义式 (9) 可得最优机制中的定价规则为

$$\mu_i^\star(\boldsymbol{t}) = t_i \pi_i(\boldsymbol{t}) - \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}x, \qquad \forall i \in \mathcal{N} \tag{19}$$

2.2 正规最优机制

定义投标人 i 的实质估价 (virtual valuation) 为

$$\psi_i(t_i) = t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} = t_i - \frac{1}{\lambda_i(t_i)} \tag{20}$$

式中，$\lambda_i(\cdot)$ 为失效率 (Hazard Rate)。称最优机制设计问题为**正规的 (Regular)**，若全体投标人的实质估价函数均单调不减。

正规条件下的最优机制

(1) 若 $\forall i \in \mathcal{N}$，$\psi_i(t_i) < t_0$，则卖者保留“标的物”；

(2) 若 $\exists i \in \mathcal{N}$，使得 $\psi_i(t_i) \geq t_0$，则将“标的物”分配给实质估价最高的投标人，若有多个投标人的实质估价相同，则以相同的概率随机分配“标的物”；

(3) 定价规则按式 (19) 计算。

首先,上面给出的机制最大化卖者的收益,并满足 IR 条件,以下说明其满足 IC 条件。注意到 IC 条件等价于 $\delta_i(\cdot)$ 单调不减。$\forall s_i < t_i$，当实质估价单调不减时，$\psi_i(s_i) < \psi_i(t_i)$，故 $\pi_i(s_i, \boldsymbol{t}_{-i}) < \pi_i(t_i, \boldsymbol{t}_{-i})$，由 $\delta_i(\cdot)$ 的定义式知 $\delta_i(s_i) < \delta_i(t_i)$，故有 $\delta_i(\cdot)$ 单调不减。

为方便求解价格，定义

$$z_i(\boldsymbol{t}_{-i}) \triangleq \inf\{x \,|\psi_i(x) \geq t_0,\ \psi_i(x) \geq \psi_j(t_j),\ \forall j \neq i\} \tag{21}$$

即 $z_i(\boldsymbol{t}_{-i})$ 是当对手类型为 $\boldsymbol{t}_{-i}$ 时,投标人 i 能赢得“标的物”的最低报价。利用 $z_i(\boldsymbol{t}_{-i})$ 可得分配规则的取值为

$$\pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i}) = \begin{cases} 1, & x > z_i(\boldsymbol{t}_{-i}) \\ 0, & x < z_i(\boldsymbol{t}_{-i}) \end{cases}$$

同时可得到

$$\int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{z_i(\boldsymbol{t}_{-i})}^{t_i} 1\ \mathrm{d}x = t_i - z_i(\boldsymbol{t}_{-i}), & t_i > z_i(\boldsymbol{t}_{-i}) \\ 0, & t_i < z_i(\boldsymbol{t}_{-i}) \end{cases}$$

从而得到最优的定价规则

$$\mu_i^\star(\boldsymbol{t}) = t_i\pi_i(\boldsymbol{t}) - \int_{\underline{\theta}_i}^{t_i} \pi_i(x, \boldsymbol{t}_{-i})\ \mathrm{d}x = \begin{cases} z_i(\boldsymbol{t}_{-i}), & \pi_i(\boldsymbol{t}) = 1 \\ 0, & \pi_i(\boldsymbol{t}) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

于是正规条件下的最优机制可描述为

$$\begin{aligned} \pi_i^\star(\boldsymbol{t}) &= \begin{cases} 1, & \psi_i(t_i) \geq t_0,\ \psi_i(t_i) > \psi_j(t_j),\ \forall j \neq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \mu_i^\star(\boldsymbol{t}) &= \begin{cases} z_i(\boldsymbol{t}_{-i}), & \pi_i(\boldsymbol{t}) = 1 \\ 0, & \pi_i(\boldsymbol{t}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

在对称情况下，各投标人具有相同的分布和实质估价函数，记为 $\psi(\cdot)$，可得

$$\begin{aligned} z_i(\boldsymbol{t}_{-i}) &= \inf\{x \,|\psi(x) \geq t_0,\ \psi(x) \geq \psi(t_j),\ \forall j \neq i\} \\ &= \inf\{x \,|\psi(x) \geq t_0,\ x \geq t_j,\ \forall j \neq i\} \\ &= \max\left\{\psi^{-1}(t_0),\ \max_{j \neq i}\{t_j\}\right\} \end{aligned}$$

即对称情况下的最优机制为附带保留价 (Reserve Price) $r^\star = \psi^{-1}(t_0)$ 的二价机制。

2.3 经济学含义

设买者的估价分布为 $F(t)$，若卖者给出价格 p，则买者购买的概率为 $1 - F(p)$，即估价高于 p 的概率。若将这一概率视为买者的需求函数 (Demand Function)，则有

$$q(p) = 1 - F(p)$$

反之有逆需求函数 (Inverse Demand Fucntion)

$$p = F^{-1}(1-q)$$

则卖者的期望收益为

$$R(q) = pq = F^{-1}(1-q)q$$

对上式微分，得到边际收益

$$\begin{aligned} MR &= \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q} = F^{-1}(1-q) - \frac{q}{f(p)|_{p=F^{-1}(1-q)}} \\ &= p - \frac{1-F(p)}{f(p)} \end{aligned}$$

即实质估价为价格为 p 时卖者的边际收益，而最优机制则按照各投标人为卖者提供的边际收益大小分配“标的物”，价格则确定为该投标人能获得“标的物”的最低报价。

对于得到“标的物”的投标人，由实质估价 $\psi_i(\cdot)$ 和 $z_i(\boldsymbol{t}_{-i})$ 的定义可知，其支付的价格不超过自己的估价，故其能获得的交易剩余 (Surplus) 为 $t_i - z_i(\boldsymbol{t}_{-i})$。对卖者而言，投标人的期望交易剩余

$$E\left[T_i - z_i(\boldsymbol{T}_{-i})\right]$$

则是其要付出的信息租金 (Information Rent)。因为只有投标人 i 知道其真实估价，故要让其报出真实估价，必须要为其提供一定的剩余，否则 i 将没有激励参与竞购。这也说明在不完全信息下，卖者不可能通过最优机制榨取全部的交易剩余。

3 效率机制

直观上说，机制的效率关心的是物品是否分配到最能实现其价值的参与者手中，即是否将物品分配给对其估计最高的投标人。

3.1 机制的效率

称分配规则 $\boldsymbol{\pi}^e : \mathcal{T} \to \boldsymbol{\Delta}$ 是有效率的 (简称为效率分配规则，Efficient，E)，若其最大化社会福利 (Social Welfare)，形式上即对 $\forall \boldsymbol{t} \in \mathcal{T}$ 均有

$$\boldsymbol{\pi}^e(\boldsymbol{t}) \in \arg\max_{\boldsymbol{\pi}} \sum_{i \in \mathcal{N}} \pi_i t_i \tag{23}$$

同时，称采用效率分配规则的机制为效率机制。给定效率分配规则 $\boldsymbol{\pi}^e$，定义

$$W(\boldsymbol{t}) \triangleq \sum_{i \in \mathcal{N}} \pi_i^e(\boldsymbol{t}) t_i \tag{24}$$

$$W_{-i}(\boldsymbol{t}) \triangleq \sum_{j \neq i} \pi_j^e(\boldsymbol{t}) t_j \tag{25}$$

分别表示参与人类型为 $\boldsymbol{t}$ 时的总社会福利和除参与人 i 外其他参与人的总福利。

3.2 VCG 机制

由效率的定义可知机制的效率从本质上说取决于其采用的分配规则，但效率分配规则通常并不唯一，同时并非所有的效率分配规则都能实现，VCG (Vickrey-Clarke-Groves) 机制 $(\boldsymbol{\pi}^e, \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{V}})$ 给出了效率分配规则的一种说实话实现，其定价规则取为某参与人的有效出现带给其他人的总福利损失 (外部性)，即对 $\forall i \in \mathcal{N}$ 有

$$\mu_i^{\mathrm{V}} \triangleq W(\underline{\theta}_i, \boldsymbol{t}_{-i}) - W_{-i}(\boldsymbol{t}) \tag{26}$$

注意到，在单物品拍卖的情景下，上述的 VCG 机制就是经典的二价 (SP) 机制。

VCG 机制的激励兼容性 考虑参与人 i，假设其余参与人均采用实话实说策略，则参与人 i 报价 s_i 的收益为

$$\begin{aligned}
\pi_i^e(s_i, \boldsymbol{t}_{-i})t_i - \mu_i^{\mathrm{V}}(s_i, \boldsymbol{t}_{-i}) &= \pi_i^e(s_i, \boldsymbol{t}_{-i})t_i + W_{-i}(s_i, \boldsymbol{t}_{-i}) - W(\underline{\theta}_i, \boldsymbol{t}_{-i}) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} \pi_j^e(s_i, \boldsymbol{t}_{-i})t_j - W(\underline{\theta}_i, \boldsymbol{t}_{-i}) \\
&\leq W(\boldsymbol{t}) - W(\underline{\theta}_i, \boldsymbol{t}_{-i})
\end{aligned}$$

注意到社会福利的定义，最后的不等号成立，由此可知 VCG 机制是激励兼容的。

VCG 机制的个体理性 由 VCG 机制的激励兼容性，根据上面的期望收益表达式，可得参与人 i 的均衡收益函数为

$$\begin{aligned}
U_i^{\mathrm{V}}(t_i) &= \mathbb{E}[W(t_i, \boldsymbol{t}_{-i}) - W(\underline{\theta}_i, \boldsymbol{t}_{-i})] \\
&= \mathbb{E}[W(t_i, \boldsymbol{t}_{-i})] - c_i^{\mathrm{V}}
\end{aligned} \tag{27}$$

且其为单调递增的凸函数，同时注意到 $U_i^{\mathrm{V}}(\underline{\theta}_i) = 0$，从而有 $U_i^{\mathrm{V}}(t_i) \geq 0$，故 VCG 机制也是个体理性 IR 的。

VCG 机制的收益特性 在单物品拍卖的场景下，VCG 机制是所有满足 IC 和 IR 条件的效率机制中，使得拍卖人的期望收益最大 (也即让参与人的期望花费最高) 的机制。

注意到，IC 条件使得收益等价原理可应用于这些机制，对任一个这样的机制，参与人 i 的均衡收益函数 U_i 跟 U_i^{V} 只差一个常数，记为 $U_i - U_i^{\mathrm{V}} = c_i$。于是有 $U_i(\underline{\theta}_i) = c_i + U_i^{\mathrm{V}}(\underline{\theta}_i) = c_i$，进一步由 IR 条件可知 $c_i \geq 0$，从而参与人 i 的均衡收益将不低于在 VCG 机制下，故在此设定下 VCG 机制最大化拍卖人的期望收益。

VCG 机制的唯一性 (GLH 定理)

4 预算平衡

称机制 $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}\}$ 能够平衡预算，若其对 $\forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$ 均有

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \mu_i(\boldsymbol{t}) = 0 \tag{28}$$

4.1 AGV 机制

Arrow-d'Aspremont-Gérard-Varet (AGV) 机制 $(\pi^e, \mu^{\mathrm{A}})$ 保证预算的平衡，其分配规则采用效率分配规则，定价规则如下

$$\mu_i^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-j}}[W_{-j}(t_j, \boldsymbol{t}_{-j})] - \mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-i}}[W_{-i}(t_i, \boldsymbol{t}_{-i})] \tag{29}$$

注意到，在上述定价规则下，

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{N}}\mu_i^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{t}) &= \frac{1}{N-1}\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-j}}[W_{-j}(t_j,\boldsymbol{t}_{-j})]-\sum_{i\in\mathcal{N}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-i}}[W_{-i}(t_i,\boldsymbol{t}_{-i})]\\ &= \frac{\mathrm{sum}}{N-1}\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{E}[W_{-2}(t_2,\boldsymbol{t}_{-2})] & \cdots & \mathbb{E}[W_{-N}(t_N,\boldsymbol{t}_{-N})]\\ \mathbb{E}[W_{-1}(t_1,\boldsymbol{t}_{-1})] & 0 & \cdots & \mathbb{E}[W_{-N}(t_N,\boldsymbol{t}_{-N})]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbb{E}[W_{-1}(t_1,\boldsymbol{t}_{-1})] & \mathbb{E}[W_{-2}(t_2,\boldsymbol{t}_{-2})] & \cdots & 0\end{bmatrix}\right)\\ &\quad -\sum_{i\in\mathcal{N}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-i}}[W_{-i}(t_i,\boldsymbol{t}_{-i})]\\ &= 0\end{aligned}$$

式中，$\mathrm{sum}(\cdot)$ 为矩阵元素求和函数，由上述运算可知 AGV 机制是预算平衡的。注意到，VCG 机制下的价格等于参与人给其他人造成的福利损失，而在 AGV 机制下，价格的确定更加复杂，直观上价格等于其他人的平均期望福利与自己的期望福利之差。

AGV 机制的激励兼容性 考虑参与人 i，假设其余参与人均采用实话是说策略，则参与人 i 报价 s_i 的期望收益为

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-i}}[\pi_i^e(s_i,\boldsymbol{t}_{-i})t_i+W_{-i}(t_i,\boldsymbol{t}_{-i})]]-\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-i}}[\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-j}}[W_{-j}(t_j,\boldsymbol{t}_{-j})]]$$

注意到上式中，第一个期望项在 $s_i=t_i$ 时达到最大，第二项为常数，记为 c_i^{A}，故说实话也是参与人 i 的最佳策略。可知 AGV 机制是激励兼容的，但一般不能保证其同时也是 IR 的。同时可得到 AGV 机制下，参与人 i 的均衡收益函数为

$$U_i^{\mathrm{A}}(t_i)=\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}_{-i}}[W(t_i,\boldsymbol{t}_{-i})]-c_i^{\mathrm{A}} \tag{30}$$

4.2 E + IC + IR + BB

一般不能保证 VCG 机制的预算平衡性和 AGV 机制的 IR 特性,但是可以联合 VCG 和 AGV 机制，得到能同时满足效率、激励兼容、个体理性和预算平衡四个特性的机制。其前提是 VCG 机制有正的期望盈余。

这一要求是必要的。因为在所有满足 IC 和 IR 条件的效率机制中，VCG 机制的期望收益最高，故若 VCG 不能平衡预算，则其他满足这三个条件的机制均不能平衡预算。充分性则可以通过构造出具体的机制来证明，设 VCG 机制有期望的盈余，而 AGV 机制是预算平衡的，故有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i\in\mathcal{N}}\mu_i^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{t})\right]\geq\mathbb{E}\left[\sum_{i\in\mathcal{N}}\mu_i^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{t})\right]=0$$

注意到两种机制均采用效率分配规则，而上述不等式说明在期望支付上 VCG 机制又大于 AGV 机制，故在均衡收益函数上，VCG 机制必须小于 AGV 机制。联合式 (27) 和 (30) 可得

$$\sum_i c_i^{\mathrm{V}}\geq\sum_i c_i^{\mathrm{A}},\quad\Rightarrow\sum_i\left(c_i^{\mathrm{V}}-c_i^{\mathrm{A}}\right)\geq 0,\quad\Rightarrow\sum_{i>2}\left(c_i^{\mathrm{V}}-c_i^{\mathrm{A}}\right)\geq c_1^{\mathrm{A}}-c_1^{\mathrm{V}}$$

据此构造机制 $\mathcal{D}^4 = (\pi^e, \mu^{\mathrm{B}})$，其采用效率分配规则，定价规则为

$$\mu_i^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{t}) = \mu_i^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{t}) + d_i \tag{31}$$

式中，$d_i = c_i^{\mathrm{A}} - c_i^{\mathrm{V}}$，$\forall i > 1, d_1 = -\sum_{i=2}^{N} d_i = \sum_{i>2}\left(c_i^{\mathrm{V}} - c_i^{\mathrm{A}}\right) \geq c_1^{\mathrm{A}} - c_1^{\mathrm{V}}$。

首先，机制 $\mathcal{D}^4$ 显然是效率机制，因为其采用效率分配规则；其次，$\mathcal{D}^4$ 平衡预算，这由 d_i 的定义和 AGV 机制平衡预算可得；第三，$\mathcal{D}^4$ 的定价规则跟 AGV 只差常数，故其必然也是激励兼容的; 最后，$\mathcal{D}^4$ 下的均衡收益函数也跟 AGV 机制下的均衡收益函数只差常数，即对 $\forall i > 1$ 则有

$$U_i^{\mathrm{B}}(t_i) = U_i^{\mathrm{A}} + d_i = U_i^{\mathrm{A}} + c_i^{\mathrm{A}} - c_i^{\mathrm{V}} = U_i^{\mathrm{V}}(t_i)$$

即是 VCG 机制的均衡收益函数。而对 $i = 1$ 则有

$$U_1^{\mathrm{B}}(t_1) = U_1^{\mathrm{A}} + d_1 \geq U_1^{\mathrm{A}} + c_1^{\mathrm{A}} - c_1^{\mathrm{V}} = U_1^{\mathrm{V}}(t_1)$$

综上，可得机制 $\mathcal{D}^4$ 也是个体理性 IR 的。

5 总结

由前面讨论可知，除 VCG 机制外，其余机制均依赖与具体的应用环境，特别是最优机制和 AGV 机制依赖于参与人的类型分布。下表总结了上述各种机制的特性，由表可知机制一般只能具有 5 个特性中的 3 个。注意到，能同时具有 E + IC + IR + BB 4 个特性的机制并不普遍存在，其依赖于 VCG 机制在特定应用场景下是否存在期望盈余，同时其设计实际上联合了 VCG 和 AGV 两种机制。另外，在所有满足 E + IC + IR 的机制中，VCG 机制最大化拍卖人的期望收益，但这一最大期望收益不高于 OPT 机制下的期望收益，因为 OPT 机制一般不是效率机制。

从设计实现上说，VCG 机制不依赖于参与人分布，只需按照实现的报价，根据最大化社会福利的原则分配物品，并按指定的规则计算价格。对于 AGV 机制，给定参与人分布就能按照既定的方法得到相应的机制。OPT 机制和同时具有四种特性的机制则不同，还需要参与人的分布满足一定的条件，比如 OPT 机制要求的正规条件，同时具有四种特性的机制则要求 VCG 存在期望盈余。注意，实际上在非正规条件下同样可以设计出 OPT 机制，因此也可以说给定参与人分布就能设计出 OPT 机制，另外在一般的应用环境中，正规条件一般都是满足的。

Table 1: 各种机制及其特性

	E	IC	IR	BB	RM
OPT		✓	✓		✓
VCG	✓	✓	✓		
AGV	✓	✓		✓	