第 5 节

1.（1） $[A\beta]=\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & 11\\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5\\ -1 & -9 & 0 & -1 & 17\\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & 11\\ 0 & -2 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 9 & -14 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

于是得阶梯形方程组：$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11,\\ -2x_2-x_3+x_4=3,\\ 9x_3-14x_4=7,\end{cases}$

取 x_4 为自由变量，可得方程组一般解为：

$X=\left[-\frac{3}{2}x_4,-\frac{17}{9}-\frac{5}{18}x_4,\frac{1}{9}(7+14x_4),x_4\right]^T$，

可得一个特解为：$\eta_0=\left[0,-\frac{17}{9},\frac{7}{9},0\right]^T$，

一个基础解系为：$\eta_1=\left[-\frac{3}{2},-\frac{5}{18},\frac{14}{9},1\right]^T$.

则方程组的通解为：$X=\eta_0+k_1\eta_1$，其中 k_1 为常数.

（2） $[A\beta]=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 3 & 3\\ 5 & -1 & 0 & -10 & 4\\ -3 & 2 & -1 & -2 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -5 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0\end{bmatrix}$,

于是得阶梯形方程组：$\begin{cases}-x_1+3x_2-2x_3+x_4=2,\\ 7x_2-5x_3+5x_4=7,\\ -15x_4=0,\end{cases}$

取 x_3 为自由变量，可得方程组一般解为：

$X=\left[1+\frac{1}{7}x_3,\ 1+\frac{5}{7}x_3,\ x_3,\ 0\right]^T$，

可得一个特解为：$\eta_0=\left[1,\ 1,\ 0,\ 0\right]^T$，

一个基础解系为：$\eta_1=\left[\frac{1}{7},\ \frac{5}{7}\ ,1,\ 0\right]^T$.

则方程组的通解为：$X=\eta_0+k_1\eta_1$，其中 k_1 为常数.

2. 解：自由变量的个数$=4-r(A)=2$,

$\eta_1=\alpha_2-\alpha_1=\left[1,\ 2,\ 0,\ 1\right]^T$，$\eta_2=\alpha_2-\alpha_3=\left[3,\ 3,\ 1,\ 2\right]^T$，

显然η_1和η_2线性无关，故齐次线性方程组的一个基础解系为η_1，η_2.

取特解$\eta_0=\alpha_1=\left[3,\ 0,\ 1,\ 1\right]^T$，则非齐次线性方程组的通解为

$$x=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$$

$$=\begin{bmatrix}3\\0\\1\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\3\\1\\2\end{bmatrix}.$$

3. 解：$\left[A\beta\right]=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\2&3&-2&5&\lambda\\1&2&0&2&\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&-1&\lambda\\0&0&0&0&\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$,

当$\lambda^2-\lambda=0$，即$\lambda=0$或$\lambda=1$时有解.

当$\lambda^2-\lambda\neq 0$，即$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 1$时无解.

若有解，得阶梯形方程组：$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\ x_2+2x_3-x_4=\lambda,\end{cases}$

取x_3，x_4为自由变量，则方程组一般解为：

$$X=\left[-\lambda+4x_3-4x_4,\lambda-2x_3+x_4,x_3,x_4\right]^T，$$

可得一个特解为：$\eta_0=\left[-\lambda,\lambda,0,0\right]^T$，

一个基础解系为：$\eta_1=\left[4,-2,1,0\right]^T$，$\eta_2=\left[-4,1,0,1\right]^T$.

则方程组的通解为：

$X=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中$k_1$，$k_2$为常数，$\lambda=0$或$\lambda=1$.

4. 证法 1：

单位矩阵E的每一列都是$AX=O$的解，故$A=AE=O$.

证法 2：

假设$A\neq O$，则$r(A)=r\neq 0$，所以$AX=O$只有$n-r$个线性无关的解，

显然矛盾.

第 4 章 第 1 节

1.（1）不是；（2）是，零元素是 1，a 的负元素是 $\frac{1}{a}$.

2.（1）是；（2）是；（3）否；（4）否.

第 2 节

1. 证：设 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=O$，则有

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3-k_4=0, \\ k_1-k_2+k_3+k_4=0, \\ k_1+k_2-k_3+k_4=0, \\ k_1-k_2-k_3-k_4=0, \end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，则 $r(A)=4$，

故 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，即 A_1,A_2,A_3,A_4 线性无关.

又对任意一个 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，若 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=A$，

则可得 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3-k_4=a_{11}, \\ k_1-k_2+k_3+k_4=a_{12}, \\ k_1+k_2-k_3+k_4=a_{21}, \\ k_1-k_2-k_3-k_4=a_{22}, \end{cases}$

解得唯一的一组解为：$\begin{cases} k_1=\frac{1}{4}(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}), \\ k_2=\frac{1}{4}(a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22}), \\ k_3=\frac{1}{4}(a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}), \\ k_4=\frac{1}{4}(-a_{11}+a_{12}+a_{21}-a_{22}), \end{cases}$

即任意一个 A 都可以由这组矩阵线性表出，且表达式唯一，则 $\dim(R^{2\times 2})=4$，

且 A_1,A_2,A_3,A_4 构成 $R^{2\times 2}$ 的一组基.

2．解：令 $A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$，则由 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=O$ 可解得 $k_1=k_2=k_3=0$，即 A_1,A_2,A_3 线性无关．又对任意一个 $A\in V$，

$A=\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c\end{bmatrix}$，若 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=A$，可解得唯一一组解为：

$k_1=a,k_2=b,k_3=c$，即任意一个 A 都可以由 A_1,A_2,A_3 线性表出，且表达式唯一，则 $\dim(V)=3$，且 A_1,A_2,A_3 构成 V 的一组基.

3．解：过渡矩阵为：$C=\begin{bmatrix}2&0&5\\1&3&3\\-1&-1&-3\end{bmatrix}$，若有一非零向量 $w=[x,y,z]^T$，满足 $w=Cw$，

则可得方程组 $\begin{cases}x=2x+5z,\\y=x+3y+3z,\\z=-x-y-3z,\end{cases}$ 对系数矩阵经初等行变换后得阶梯形方程组

$\begin{cases}x+5z=0,\\y-z=0,\end{cases}$ 可解得一般解为：

$w=[-5c,c,c]$，c 为任一非零常数.

第 3 节

1．解：（1）$|\alpha_1|=\sqrt{7}$，$|\alpha_2|=\sqrt{15}$，$|\alpha_3|=\sqrt{10}$.

因为 $\cos\theta=\dfrac{(\alpha_2,\alpha_3)}{|\alpha_2||\alpha_3|}=-\dfrac{3\sqrt{6}}{10}$，故 $\theta=\arccos\left(-\dfrac{3\sqrt{6}}{10}\right)$.

（2）设与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量为 $\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)$，则可得

$\begin{cases}b_1+2b_2-b_3+b_4=0,\\2b_1+3b_2+b_3-b_4=0,\\-b_1-b_2-2b_3+3b_4=0,\end{cases}$ 经过初等行变换可得阶梯形矩阵：

$\begin{cases}b_1+2b_2-b_3+b_4=0,\\-b_2+3b_3-3b_4=0,\end{cases}$ 解得一般解为 $\beta=(-5b_3+5b_4,3b_3-3b_4,b_3,b_4)^T$，其中 b_3,b_4 为自由变量.

2. 解：$\beta_1=\alpha_1=\left(1,\ 0,\ 1,\ 1\right)^T$，$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\ 0,\ 1,\ 1\right)^T$.

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\gamma_1)\gamma_1=\left(-\dfrac{1}{3},\ 1,\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)^T$，$\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\left(-1,\ 3,\ 2,\ -1\right)^T$.

$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\gamma_1)\gamma_1-(\alpha_3,\gamma_2)\gamma_2=\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)^T$，

$\gamma_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\left(-3,\ -1,\ 1,\ 2\right)^T$.

3. 解：$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&2&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\0&-1&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

取 x_3，x_4 为自由变量，解得$x=\begin{bmatrix}-2x_4\\x_3+3x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$,

一个基础解系为$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$,　$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}$，将它们标准正交化，

$\beta_1=\alpha_1$，$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[0,\ 1,\ 1,\ 0\right]^T$,

$\beta_2=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$, $|\beta_2|=\sqrt{\dfrac{19}{2}}$,

$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{38}}\left[-4,\ 3,\ -3,\ 2\right]^T$.