symbol ∴ ∵ ⊄ ∉ ⊂ ⊇ ⊃ ∀ ∃ ⋀⋁∧ ∨ ∈ ∉ ∪ ∩ ≠ ⩽⩾≈ ∅ × ≺ ↦ ∏ o ° → ↓ ↔ ├
┤ п ～ ╕┌ ■ ∫ ’ ぺ プ σ ΓΔ Φ τ ⇔ ⇒ ⇐ ∑ ⩽⩾ ┓⩽ ⩾ ≌ ⊕ α β γ δ ε ζ
θ η ρ σ τ υ ф χ ω

集合论

第一章 集合论发展史

一、十九世纪以前：

欧几里德：直线由点组成。

伽利略：全体不一定大于部分（无穷集合）。

二、十九世纪：

Cantor：古典集合论

1. 扩充了数学研究对象：无穷集合合法化
2. 为经典数学的各个分支提供了理论基础。

三、二十世纪

概括原则：给定性质 P，可构造集合 $\{x|P(x)\}$。

罗素悖论：$A=\{x|x\notin x\}$

问 $A\in A$ 是否成立?

$A\in A \Rightarrow$ A 不满足性质 $x\notin x \Rightarrow A\notin A$

$A\notin A \Rightarrow$ A 满足性质 $x\notin x \Rightarrow A\in A$

近代公理集合论：ZFC

第二章 集合及其运算

2.1 集合的基本概念

定义1 集合与元素：由确定的对象汇集在一起组成一个集合，集合中的对象称为元素。

1. 对象是否属于集合是确定的。
2. 重复的元素算一个。
3. 元素之间没有顺序。

例：$1\in\{1,2\}$，$4\notin\{1,2\}$

定义2 子集：$A\subseteq B$ iff $\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)$

例：$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$

定义3 相等：$A=B$ iff $A\subseteq B$ & $B\subseteq A$

例：$\{1,2\}=\{2,1\}$

定义4 真子集：$A\subset B$ iff $A\subseteq B$ & $A\neq B$

例：$\{1,2\}\subset\{1,2,3\}$

定义5 空集：不含任何元素的集合。记为∅。

定义6 全集：讨论中所涉及的所有元素组成的集合。记为 E。

集合的表示方法：

1. 穷举法：$\{1,2,3\}$　　　外延表示法
2. 描述法：$\{x|x$ 是自然数$\}$　　　内涵表示法

2.1 集合的基本运算

定义7 $A\cup B=\{x|x\in A$ or $x\in B\}$

定义8 $A\cap B=\{x|x\in A$ & $x\in B\}$

定义9 $A-B=\{x|x\in A$ & $x\notin B\}$

定义10 $\sim A=\{x|x\in E\ \&\ x\notin A\}=E-A$

定义11 环和：$A\oplus B=\{x|x\in A\cup B\ \&\ x\notin A\cap B\}$
$=A\cup B-A\cap B$

定义12 幂集：$\rho(A)=\{x|x\subseteq A\}$

例：$A=\{a,b\}$ $B=\{b,c,d\}$

文氏图可以表示集合之间的关系及运算。

定理1 若$|A|=n$，则$|\rho(A)|=2^n$。

定理2 ①$A\cap(A\cup B)=A$ 吸收律
②$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$ 摩根律
③$A\oplus B=\sim A\oplus\sim B$

证明：用外延性原则。

定理3 ①$A\cap B=B\cap A$ 交换律
②$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ 结合律
③$A\cap A=A\cup A=A$ 幂等律
③$\sim\sim A=A$ 否定律

2.3 集合的其它运算

定义13 广义并与广义交：设$I=\{m,n,p...\}$，若对I的每一个元素i，都有集合A_i与之对应，令$\prod=\{A_i|i\in I\}$

称$\cup\prod=\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\{x|\exists i(i\in I\ \&\ x\in A_i)\}$为广义并

称$\cap\prod=\bigcap\limits_{i\in I}A_i=\{x|\forall i(i\in I\Rightarrow x\in A_i)\}$为广义并

例 1：$\prod=\{A_1,A_2,A_3\}$，$I=\{1,2,3\}$，$A_i=\{i+2\}$。

例 2：$I=\{x|x\in R\ \&\ x>1\}$ $A_x=[0,x]$
$\prod=\{A_x|x\in I\}$ 则$\cap\prod=[0,1]$

定理4 $I=\{m,n,p...\}$，对I的每一个元素i，都有集合A_i与之对应，G为任意集合，则

①$G\cap(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(G\cap A_i)$

②$G\cup(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(G\cup A_i)$

③$\sim\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\bigcap\limits_{i\in I}\sim A_i$

④$\sim\bigcap\limits_{i\in I}A_i=\bigcup\limits_{i\in I}\sim A_i$

第三章 映射

3.1 序偶与迪卡尔积

定义14 序偶：$\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$

$\langle x_1,x_2,x_3\rangle=\langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle$

$\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle=\langle\langle x_1,x_2,...x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$

例：$\langle 1,2\rangle\neq\langle 2,1\rangle$

定理5 ①$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$ iff $x=u\ \&\ y=v$
②$\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle=\langle y_1,y_2,...,y_n\rangle$ iff
$x_i=y_i$ $i=1,2,...,n$

定义15 迪卡尔积：$A\mathsf{X}B=\{\langle x,y\rangle|x\in A\ \&\ y\in B\}$

$A\mathsf{X}A$ 常记为 A^2

$A_1\mathsf{X}A_2\mathsf{X}...\mathsf{X}A_n$
$=\{\langle x_1,x_2,...,x_n\rangle|x_i\in A_i,i=1,2,...n\}$

例：$A=\{1,2\}$ $B=\{a,b\}$? ?

定理6 ①$A\mathsf{X}(B\cup C)=(A\mathsf{X}B)\cup(A\mathsf{X}C)$

①$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

3.2 关系与映射

定义16 关系：$A\times B$ 的子集称为 A 到 B 的一个(二元)关系。A^2 的子集称为 A 上的一个关系。

$A_1\times A_2\times...\times A_n$ 的子集称为 n 元关系。

定义17 空关系：$\varnothing$

全关系：$A\times B$ 称为 A 到 B 的全关系。

恒等关系：$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$ 称为 A 上的恒等关系。

? ?

定义18 前域：$R\subseteq A\times B$，$Dom(R)=\{x\mid \langle x,y\rangle\in R\}$

陪域：$R\subseteq A\times B$，$Ran(R)=\{y\mid \langle x,y\rangle\in R\}$

关系的三种表示法

第五章 关系

5.1 关系的运算与性质

关系的交并补差

定义19 复合：$R\subseteq A\times B, S\subseteq B\times C$, R 与 S 的复合关系 $R\circ S=\{\langle x,y\rangle \mid \exists z\in B(\langle x,z\rangle\in R \& \langle z,y\rangle\in S)\}$

例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$ $S=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

若 $R\subseteq A^2$，则 $I_A\circ R=R\circ I_A=R$

定理7 $R\subseteq A\times B, S\subseteq B\times C, T\subseteq C\times D$, 则

$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

定理8 $R\subseteq A\times B, S\subseteq B\times C, T\subseteq C\times D, V\subseteq B\times C$, 则

①$R\circ(S\cup V)=R\circ S\cup R\circ V$

①$(S\cup V)\circ T=S\circ T\cup V\circ T$

定义20 关系的幂：$R\subseteq A\times A$, n 为自然数，Rn 定义为①$R^0=I_A$ ②$R^{n+1}=R^n\circ R$

定理9 $R\subseteq A\times A$, n, m 为自然数，则

①$R^m\circ R^n=R^{m+n}$ ②$(R^m)^n=R^{mn}$

定义21 关系的逆：$R\subseteq A\times A$, $R^{-1}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in R\}$

例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

于是，$\langle x,y\rangle\in R$ iff $\langle y,x\rangle\in R^{-1}$

定理10 $R\subseteq A\times B, S\subseteq B\times C$, 则

①$(R^{-1})^{-1}=R$

②$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

定理11 $R\subseteq A\times B, S\subseteq A\times B$, 则

①$R\subseteq S \Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

②$R=S \Rightarrow R^{-1}=S^{-1}$

③$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

④$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

⑤$(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$

⑥$(R\oplus S)^{-1}=R^{-1}\oplus S^{-1}$

定义22 $R\subseteq A\times A$，

自反性：R[ref] iff

$\forall x(x\in A \Rightarrow \langle x,x\rangle\in R)$

反自反性：R[irref] iff

$\forall x(x\in A \Rightarrow \langle x,x\rangle\notin R)$

对称性：R[sym] iff

$\forall x\forall y(\langle x,y\rangle\in R \Rightarrow \langle y,x\rangle\in R)$

反对称性：R[asym] iff

$\forall x \forall y (\langle x,y\rangle \in R \ \&\ x \neq y \Rightarrow \langle y,x\rangle \notin R)$

传递性：R[tra] iff

$\forall x \forall y \forall z (\langle x,y\rangle \in R \& \langle y,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$

拟反对称性：R[imasym] iff

$\forall x \forall y (\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \notin R)$

定理12 $R \subseteq A \times A$，则

①R[ref] iff $I_A \subseteq R$

②R[irref] iff $I_A \cap R = \varnothing$

③R[sym] iff $R^{-1} = R$

④R[asym] iff $R^{-1} \cap R \subseteq I_A$

⑤R[tra] iff $R^2 \subseteq R$

⑥R[imasym] iff $R^{-1} \cap R = \varnothing$

定理13 $R \subseteq A \times A$，则

①R[ref] iff R^{-1}[ref]

②R[irref] iff R^{-1}[irref]

③R[sym] iff R^{-1}[sym]

④R[asym] iff R^{-1}[asym]

⑤R[tra] iff R^{-1}[tra]

⑥R[imasym] iff R^{-1}[imasym]

5.2 关系的闭包运算

定义23 $R \subseteq A \times A$，若 R*满足

①$R \subseteq R^*$

②R*[ref]

③$\forall S \subseteq A \times A (R \subseteq S \ \&\ S[ref] \Rightarrow R^* \subseteq S)$

称 R*是 R 的**自反闭包**，记 r(R)。

相应可定义**对称闭包** s(R)和**传递闭包** t(R)。

例：A={1，2，3} R={<1,2>}

定理14 $R \subseteq A \times A$，则

①$r(R) = R \cup I_A$

②$s(R) = R \cup R^{-1}$

③$t(R) = \bigcap_{i=1}^{\infty} R^i$

定理15 $R \subseteq A \times A$，$|A| = n$，则 $t(R) = \bigcap_{i=1}^{n} R^i$

定理16 $R \subseteq A \times A$，则

①R[ref] $\Leftrightarrow$ r(R)=R

②R[sym] $\Leftrightarrow$ s(R)=R

③R[tra] $\Leftrightarrow$ t(R)=R

定理17 $R \subseteq A \times A$，则

①R[ref] $\Rightarrow$ s(R)[ref]&t(R)[ref]

②R[sym] $\Rightarrow$ r(R)[sym]&t(R)[sym]

③R[tra] $\Rightarrow$ r(R)[tra]

定理18 $R \subseteq S \subseteq A \times A$,则

①$r(R) \subseteq r(S)$

①$s(R) \subseteq s(S)$

③$t(R) \subseteq t(S)$

定理19 $R \subseteq A \times A$，则

①rs(R)=sr(R)

②$rt(R)=tr(R)$

③$st(R)\subseteq ts(R)$

5.3 等价关系

定义24 $R\subseteq A\times A$，若 $R[ref]\&R[sym]\&R[tra]$，则称 R 是 A 上的一个等价关系，记$\langle R\rangle_A$。

若$\langle R\rangle_A$且 $a\in A$，称$[x]_R=\{y|\langle x,y\rangle\in R\}$为 x 关于 R 的等价类。称 $A/R=\{[x]_R|x\in A\}$为 A 关于 R 的商集。

例 1：$A=\{1,2,3\}$ $R=I_A\cup\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

例 2：$A/R=\{\{a,b\},\{c\}\}$，求 R。

定理20 $\langle R\rangle_A$，则

①$y\in[x]_R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle\in R$

②$x\in A \Leftrightarrow x\in[x]_R$

③$y\in[x]_R \;\&\; z\in[x]_R \Rightarrow\langle y,z\rangle\in R$

④$y\in[x]_R \;\&\; \langle y,z\rangle\in R \Rightarrow z\in[x]_R$

⑤$y\in[x]_R \Leftrightarrow [x]_R=[y]_R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R$

⑥$y\notin[x]_R \Leftrightarrow [x]_R\cap[y]_R=\varnothing \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\notin R$

定义25 $A\neq\varnothing$，若$\prod$满足

①$\prod\subseteq\rho(A)$

②$\varnothing\notin\prod$

③$\cup\prod=A$

④$\forall B\forall C(B\in\prod\&C\in\prod\&B\neq C\Rightarrow B\cap C=\varnothing)$

称$\prod$是 A 的一个划分，记$\prod parA$。

定理21 若$\langle R\rangle_A$，则 A/R par A。

定理22 若$\prod parA$，则存在$\langle R\rangle_A$，使 $A/R=\prod$。

5.4 次序关系

定义26 $R\subseteq A\times A$，若 $R[ref]\&R[asym]\&R[tra]$，则称 R 是 A 上的一个偏序，记$\langle A,\leqslant\rangle$。

定义27 若 R 是 A 上的偏序，$a\in A,b\in A$，且满足

①$a\leqslant b$ ②$a\neq b$

③$\neg\exists c(a\neq c\&c\neq b\&a\leqslant c\&c\leqslant b)$

称 b 盖住 a。

Hase 图：表示偏序关系的简化关系图。

只保留盖住关系的线，若 b 盖往 a，则将 b 画在 a 的上方且画一根线。

例 1：$\langle\{2,4,6\},\rangle$

例 2：$\langle\{2,4,6\},|\rangle$

例 3：$\langle\rho(\{2,4\}),\subseteq\rangle$

由 Hase 图求偏序关系。

定义28 $\langle A,\leqslant\rangle$是偏序，$B\subseteq A$，$b\in B$

①$\forall x(x\in B\Rightarrow b\leqslant x)$，称 b 是 B 的最小元，记 $l_B(b)$。

②$\forall x(x\in B\Rightarrow x\leqslant b)$，称 b 是 B 的最大元，记 $g_B(b)$。

③$\forall x(x\in B\&x\leqslant b\Rightarrow b=x)$，称 b 是 B 的极小元，记 $mi_B(b)$。

④$\forall x(x\in B\&b\leqslant x\Rightarrow b=x)$，称 b 是 B 的极大元，记 $ma_B(b)$。

定理23 $\langle A,\leqslant\rangle$是偏序，$B\subseteq A$，$b\in B,c\in B$

①$l_B(b)\&l_B(c)\Rightarrow b=c$

②$g_B(b)\&g_B(c)\Rightarrow b=c$

③$l_B(b)\Rightarrow mi_B(b)$

④$g_B(b)\Rightarrow ma_B(b)$

定义29 $\langle A,\leqslant\rangle$是偏序，$B\subseteq A$，$a\in A$

①$\forall x(x\in B\Rightarrow a\leqslant x)$，称 a 是 B 的下界，记 $lb_B(a)$。

②$\forall x(x\in B\Rightarrow x\leqslant a)$，称 a 是 B 的上界，记 $ub_B(a)$。

③$lb_B(a)\&\forall x(lb_B(x)\Rightarrow x\leqslant a)$，称 a 是 B 的下确界(最大下界)，记 $glb_B(a)$。

③$ub_B(a)\&\forall x(ub_B(x)\Rightarrow a\leqslant x)$，称 a 是 B 的上确界(最不上界)，记 $lub_B(a)$。

定理24 $\langle A,\leqslant\rangle$是偏序，$B\subseteq A$，$b\in A, c\in A$

①$g_B(b)\Rightarrow ub_B(b)$

②$ub_B(b)\&b\in B\Rightarrow g_B(b)$

③$lub_B(b)\&lub_B(c)\Rightarrow b=c$

④$glb_B(b)\&glb_B(c)\Rightarrow b=c$

定义30 若 R 是 A 上的偏序，且满足

$\forall x\forall y(x\in A\&y\in A\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R \text{ or } \langle y,x\rangle\in R)$，

称 R 是 A 上的一个全序（线序）。

$R\subseteq A\times A$，若 R[irref]&R[asym]&R[tra]，则称 R 是 A 上的一个严格偏序，记$\langle A,\leqslant\rangle$。

若 R 是 A 上的严格偏序，且满足

$\forall x\forall y(x\in A\&y\in A\&x\neq y\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R \text{ or } \langle y,x\rangle\in R)$，称 R 是 A 上的一个严格全序。

第三章 映射

3.2 关系与映射

定义31 $f\subseteq A\times B$，若 f 满足

①$Dom(f)=A$

②$\forall x\forall y\forall z(\langle x,y\rangle\in f\&\langle x,z\rangle\in f\Rightarrow y=z)$

称 f 是 A 到 B 的映射，记 $f:A\to B$。

$\langle x,y\rangle\in f$ 也记为 $f(x)=y$。

定义32 $f:A\to B$，若 f 满足

$\forall x\forall y(x\in A\&y\in A\&f(x)=f(y)\Rightarrow x=y))$

则称 f 是 A 到 B 的单射。记 $f[inj]:A\to B$

定义33 $f:A\to B$，若 f 满足

$\forall y(y\in B\Rightarrow\exists x(x\in A\&f(x)=y))$

则称 f 是 A 到 B 的满射。记 $f[surj]:A\to B$

若 f 既是 A 到 B 的单射又是 A 到 B 满射，则称 f 是 A 到 B 的双射，记 $f[bij]:A\to B$

3.3 复合映射与映射

定理25 $f:A\to B, g:B\to C$，令

$gof=\{\langle x,z\rangle|\exists y(f(x)=y \ \& \ g(y)=z)\}$

则 $gof:A\to C$。

定义34 $f:A\to B, g:B\to C$，

称 $gof=\{\langle x,z\rangle|\exists y(f(x)=y \ \& \ g(y)=z)\}$为 f 和 g 的复合映射。

于是，$foI_A=I_Aof=f$ 称 I_A为恒等映射。

定理26 $f:A\to B, g,h:B\to A$，若 $gof=I_A$ $foh=I_B$ 则 $g=h$。

定义35 $f:A\to B, g:B\to A$，

①若 $gof=I_A$ 称 g 是 f 的左逆，f 是左可逆的。

②若 $fog=I_B$ 称 g 是 f 的右逆，f 是右可逆的。

③若 f 既有左逆又有右逆，称 f 是双侧可逆的，其左逆（或右逆，左右逆必相等）称为 f 的逆，记 f^{-1}。

定理27 $f:A\to B$

①f 有左逆 iff f 是单射

②f 有右逆 iff f 是满射

③f 有逆 iff f 是双射

定理28 （作业）$f:A\to B, g:B\to C$

①f, g 都是单射$\Rightarrow$gof 是单射

②f, g 都是满射$\Rightarrow$gof 是满射

③f, g 都是双射$\Rightarrow$gof 是双射

定理29 （作业）$f:A\to B, g:B\to C$

①gof 是单射⇒f 是单射
②gof 是满射⇒g 是满射
③gof 是双射⇒f 是单射,g 是满射

定理30 f[bij]:A→B,g[bij]:B→C
①f 有逆 f^{-1} 且 f^{-1}[bij]：B→A
②$(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$

3.4 等势与映射的集合

定义36 B^A={f|f:A→B}
例：A={1,2},B={a,b}
定理31 若|A|=m,|B|=p,则$|B^A|=p^m$。
定义37 若存在 A 到 B 的双射，则称 A 与 B 等势，记 A～B。
例 1：I～2I　I 是整数集。
例 2：R～R^+　R 是实数集，R^+是正实数集。
例 3：R～（0，1）
定理32 C={0，1} 则 C^A～ρ(A)。
定理33 (0,1)与实数集 R 不等势。
定理34 A 与ρ（A）不等势。

作业
第二章 集合及其运算

第三章 映射

第五章 关系