第 3 章

1. $\gamma = 3\alpha - 4\beta = (30, -10, -20, -16)$.

第 2 节

1. （1）能，唯一一种表示：$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$.

   （2）不能.

2. 唯一表达式为：$\beta = (b_1 - b_2)\alpha_1 + (b_2 - b_3)\alpha_2 + (b_3 - b_4)\alpha_3 + b_4\alpha_4$.

3. （1）线性无关.

   （2）线性相关.

   （3）线性相关，因为 4 个向量，每个向量维数 3 维.

   （4）若 a，b，c 均不相等，线性无关，否则线性相关.

4. （1）线性无关（2）线性相关.

5. 解：设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 + \alpha_1) = 0$，

   整理可得 $(k_1 + k_4)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 + (k_3 + k_4)\alpha_4 = 0$，因为已知

   $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性无关的，故有 $\begin{cases} k_1 + k_4 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \\ k_3 + k_4 = 0, \end{cases}$

   系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $r(A) = 3$.

   故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 是线性相关的.

6. 证：因为任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关，存在不全为零的 $n+1$ 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n + k_{n+1}\beta = 0$.

   若 $k_{n+1} = 0$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，矛盾. 所以 $k_{n+1} \neq 0$，β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出. 表达式唯一，类似于定理 3.5 的证明.

7. 证：（反证法即得）. 假设 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为零，其中某个为零，其他的不为零. 不妨假设 $k_1=0$ ，则 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$ ，其中 k_2,k_3,k_4 均不为零，则可推出 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性相关的，这与已知任意三个向量都线性无关矛盾，故假设不成立. 由假设的任意性可知 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$ ，其中 k_1,k_2,k_3,k_4 全不为零.

第 3 节

1. （1） $A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&1&3\\2&2&6\\0&3&0\\0&4&0\end{bmatrix}\\ \alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\end{array}\to\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$,

故一个极大线性无关组是 α_1, α_2.

(2) $A=\begin{bmatrix}2&1&3&5\\1&2&0&1\\-3&-1&-5&-8\\1&4&-2&-1\\4&4&5&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-3&3&3\\0&5&-5&-5\\0&2&-2&-2\\0&-4&5&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，一个极大线性无关组是 α_1，α_2，α_3.

2. 证：由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关，故一定存在 k_1,k_2,k_3 不全为零,

使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4=0$, 则一定有 $k_3\neq 0$, 设 $\alpha_4=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$,

类似的， $\alpha_4=b_1\alpha_1+b_2\alpha_3$， $\alpha_4=c_1\alpha_2+c_2\alpha_3$,

由这几个等式可推出所以系数均为 0，故 $\alpha_4=0$.

3. 证：因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r_1，则其有一个极大线性无关组，设为 $c_1,c_2,\cdots,c_{r_1}$. 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩为 r_2，则其有一个极大线性无关组，设

为$d_1,d_2,\cdots,d_{r_2}$. 则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可以由$c_1,c_2,\cdots,c_{r_1}$和$d_1,d_2,\cdots,d_{r_2}$线性表出，故$r_3\le r\left(c_1,c_2,\cdots,c_{r_1},d_1,d_2,\cdots,d_{r_2}\right)\le r_1+r_2$.

4. （例题）$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，且$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为其中$r$个线性无关的向量. 设$\alpha_k$是向量组中任意一个向量，则$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_k$线性相关，否则向量组的秩会大于$r$. 所以，由定理 3.5，$\alpha_k$可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出，故$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为向量组的一个极大线性无关组.

第 4 节

1. (1) $A=\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 于是得阶梯形方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+5x_3-x_4=0,\\ 2x_2-7x_3+4x_4=0,\end{cases}$$

方程组的一般解为: $X=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}x_3-x_4\\ \frac{7}{2}x_3-2x_4\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$.

可得方程组的一个基础解系为：

$\eta_1=\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0\right]^T$，$\eta_2=[-1,-2,0,1]^T$.

通解为$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2$，k_1，k_2为常数.

(2) $A=\begin{bmatrix}-3&9&-3&6&3\\1&-3&1&-2&-1\\2&-6&2&-4&-2\\5&-15&5&-10&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-2&-1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,

于是得阶梯形方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - x_5 = 0, \end{cases}$$

方程组的一般解为: $X = \begin{bmatrix} 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$,.

可得方程组的一个基础解系为：

$\eta_1 = \begin{bmatrix} 3, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$，$\eta_2 = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$，$\eta_3 = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}^T$

通解为 $X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$，$k_1$，$k_2$，$k_3$ 为常数.

2. 证：先证 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 线性无关. 设存在 k_1, k_2, k_3，使得

$k_1(\eta_1 + \eta_2) + k_2(\eta_2 + \eta_3) + k_3(\eta_3 + \eta_1) = 0$，即

$(k_1 + k_3)\eta_1 + (k_1 + k_2)\eta_2 + (k_2 + k_3)\eta_3 = 0$，又因为 η_1, η_2, η_3 线性无关，

则 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \end{cases}$ 可得唯一解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，

即 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 线性无关.

由于 $X = k_1(\eta_1 + \eta_2) + k_2(\eta_2 + \eta_3) + k_3(\eta_3 + \eta_1)$

$= (k_1 + k_3)\eta_1 + (k_1 + k_2)\eta_2 + (k_2 + k_3)\eta_3$，

可知任意一个向量都可由 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 线性表出，

即 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 也是 $AX = O$ 的一个基础解系.