第 2 章

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，

计算得 $2A-3B=\begin{bmatrix}-7 & 6\\ 1 & -8\end{bmatrix}$， $AB-BA=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 0 & -3\end{bmatrix}$， $A^2+B^2=\begin{bmatrix}16 & 0\\ 5 & 11\end{bmatrix}$.

2. $AB-BA=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 0\\ 4 & -4 & -2\end{bmatrix}$， $(AB)^T=\begin{bmatrix}6 & 6 & 8\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$， $A^TB^T=\begin{bmatrix}4 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

3. (1) $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -10\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & -7\\ 8 & 15\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=-2$;

(4) $\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11} & \lambda_1a_{12} & \lambda_1a_{13}\\ \lambda_2a_{21} & \lambda_2a_{22} & \lambda_2a_{23}\\ \lambda_3a_{31} & \lambda_3a_{32} & \lambda_3a_{33}\end{bmatrix}$;

(6) $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11} & \lambda_2a_{12} & \lambda_3a_{13}\\ \lambda_1a_{21} & \lambda_2a_{22} & \lambda_3a_{23}\\ \lambda_1a_{31} & \lambda_2a_{32} & \lambda_3a_{33}\\ \lambda_1a_{41} & \lambda_2a_{42} & \lambda_3a_{43}\end{bmatrix}$;

(7) $\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_1(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)$

$+x_2(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)+x_3(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)$.

4. 解：因为 A 与 B 可交换，所以 $AB=BA$，又因为 A 是对角矩阵，所以

可得 $\begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{bmatrix}$，其中主对角线元素都相等，对于非主对角元，应有 $(\lambda_i-\lambda_j)b_{ij}=0, i\neq j$ 又因为 $\lambda_i \neq \lambda_j$，所以只能有 $b_{ij}=0$，当 $i\neq j$ 时。即 B 也是对角矩阵。

5. (1) $f(A)=\begin{bmatrix} 15 & -16 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$;

(2) $f(A)=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 6 & -1 & 10 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $f(A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $(A+A^T)^T = A^T + A = A + A^T$,

$(A-A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T)$.

7. $(C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC$

8. 必要性. 若 AB 对称，则 $AB=(AB)^T=B^T A^T = BA$，即 AB 可交换.

充分性. 若 AB 可交换，即 $AB=BA$，则 $AB=BA=B^T A^T=(AB)^T$，

即 AB 对称.