第 5 节

1. (1) $[A|E]=\begin{bmatrix}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-4r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{bmatrix}$,

所以$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$.

(2) $[A|E]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&-1&1&0&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&-1&0&1&0\\0&-1&-1&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-2&1&1&0\\0&0&-1&1&-2&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-2&1&1&0\\0&0&0&1&-4&2&1&1\end{bmatrix}$,

所以$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-2&1&1&0\\-4&2&1&1\end{bmatrix}$.

2. 解:因为 $AX = B + X$，则 $(A - E_3)X = B$， $X = (A - E_3)^{-1}B$，

$$\left[A - E_3 \vdots B\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

则 $X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

或者 $(A - E_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，所以

$$X = (A - E_3)^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

第 6 节

1. (1) $rank(A) = 2$,　　(2) $rank(A) = 3$

2. (1) 若 $AB = O$，则由推论 2.4 知 $rank(A) + rank(B) \le s$，又已知 $rank(B) = s$，则 $rank(A) \le 0$，则只能 $rank(A) = 0$，因此只能 $A = O$.

(2) 若 $AB=B$，则 $(A-E)B=O$，同上推出 $A-E=O$，故 $A=E$.

3. 必要性.若 $AB=O$，则由推论 2.4 知 $rank(A)+rank(B)\le n$，又因为 $B$ 为非零矩阵，则一定有 $rank(B)>0$，故 $rank(A)<n$.

充分性. 若 $rank(A)<n$，如果存在一个 $n\times m$ 矩阵 $B$，使得 $AB=O$，则有 $rank(A)+rank(B)\le n$，则一定 $rank(B)>0$，故 $B$ 为非零矩阵.

4. (1) 若 $rank(A)=n$，$|A|\neq 0$，则 $|A^*|\neq 0$，故 $rank(A^*)=n$；

若 $rank(A)=n-1$，由于 $AA^*=|A|E=0$，则 $rank(A)+rank(A^*)\le n$，故 $rank(A^*)\le n-rank(A)=n-(n-1)=1$.另一方面，$rank(A)=n-1$，则存在 $n-1$ 阶子式不为 $0$，则 $rank(A^*)\ge 1$，故 $rank(A^*)=1$.

若 $rank(A)<n-1$，则 $A$ 的所有 $n-1$ 阶子式都为 $0$，故 $rank(A^*)=0$.

5. 已知 $A(A-E)=O$，其中 $A$ 和 $A-E$ 都是 $n$ 方阵，则

由推论 2.4 知 $rank(A)+rank(A-E)\le n$.另一方面，

$rank(A)+rank(A-E)=rank(A)+rank(E-A)\ge rank(A+E-A)$

$=rank(E)=n$，则得到 $rank(A)+rank(A-E)=n$.

6. 已知 $(A+E)(A-E)=O$，其中 $A+E$ 和 $A-E$ 都是 $n$ 方阵，则

由推论 2.4 知 $rank(A+E)+rank(A-E)\le n$.另一方面，

$rank(A+E)+rank(A-E)=rank(A+E)+rank(E-A)\ge rank(A+E+E-A)$

$=rank(2E)=n$，则得到 $rank(A+E)+rank(A-E)=n$.