第 1 章

第一节

1\. (1) $\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}=3$；　　(2) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix}0 & a & 0\\b & 0 & c\\0 & d & 0\end{vmatrix}=0$；　　(4) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 0 & 2\\2 & 2 & 1\end{vmatrix}=4$；

(5) $\begin{vmatrix}x-1 & -1 & -1\\-1 & x-1 & -1\\-1 & -1 & x-1\end{vmatrix}=(x-3)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & x-1 & -1\\1 & -1 & x-1\end{vmatrix}=(x-3)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\0 & x & 0\\0 & 0 & x\end{vmatrix}$

$=x^2(x-3)$

2\. （1） $\sigma(31452)=4$，偶；　（2） $\sigma(34152)=5$，奇；

（3） $\sigma(1\ 3\ 5\ \cdots\ 2n-1\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ 2n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，

当 $n=4k,\ 4k+1$ 时，偶；当 $n=4k+2,\ 4k+3$ 时，奇；

（4） $\sigma(2\ 4\ 6\ \cdots\ 2n\ 1\ 3\ 5\ \cdots\ 2n-1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

当 $n=4k,\ 4k+3$ 时，偶；当 $n=4k+1,\ 4k+2$ 时，奇；

3\. $\sigma(132645)=3$，$\sigma(314256)=3$，符号为正.

4\. $\sigma(13254)=2$，为使符号为正，$\sigma(i4j31)$ 要为偶数，

因为 $\sigma(54231)=7$，$\sigma(24531)=6$，故 $i=2$，$j=5$.

5\. (1) $D=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & b & 0\\0 & c & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & d\end{vmatrix}=(-1)^{\sigma(1324)}abcd=-abcd$.

(2) $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\sigma(n\ 1\ 2\ \cdots\ n-1)}n!=(-1)^{n-1}n!$

(3) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

第二节

1. (1) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1(y_2-y_1) & x_1(y_3-y_1) & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & x_2(y_2-y_1) & x_2(y_3-y_1) & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & x_3(y_2-y_1) & x_3(y_3-y_1) & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & x_4(y_2-y_1) & x_4(y_3-y_1) & 1+x_4y_4 \end{vmatrix}=0$

(2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$

(3) $\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix}$

$$=b\begin{vmatrix} y & bz+ax & bx+ay \\ x & by+az & bz+ax \\ z & bx+ay & by+az \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} z & bz+ax & bx+ay \\ y & by+az & bz+ax \\ x & bx+ay & by+az \end{vmatrix}$$

$$=b^2\begin{vmatrix} y & z & bx+ay \\ x & y & bz+ax \\ z & x & by+az \end{vmatrix}+ba\begin{vmatrix} y & x & bx+ay \\ x & z & bz+ax \\ z & y & by+az \end{vmatrix}+ab\begin{vmatrix} z & z & bx+ay \\ y & y & bz+ax \\ x & x & by+az \end{vmatrix}+a^2\begin{vmatrix} z & x & bx+ay \\ y & z & bz+ax \\ x & y & by+az \end{vmatrix}$$

$$=b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^2a\begin{vmatrix} y & z & y \\ x & y & x \\ z & x & z \end{vmatrix}+b^2a\begin{vmatrix} y & x & x \\ x & z & z \\ z & y & y \end{vmatrix}+ba^2\begin{vmatrix} y & x & y \\ x & z & x \\ z & y & z \end{vmatrix}$$

$$+ab^2\begin{vmatrix} z & z & x \\ y & y & z \\ x & x & y \end{vmatrix}+a^2b\begin{vmatrix} z & z & y \\ y & y & x \\ x & x & z \end{vmatrix}+a^2b\begin{vmatrix} z & x & x \\ y & z & z \\ x & y & y \end{vmatrix}+a^3\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

2. 已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a,$

(1) $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}=3a;$ (2) $D_2=\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}=27a;$

(3) $D_3=\begin{vmatrix} 3a_{11} & a_{13}-2a_{11} & a_{12} \\ 3a_{21} & a_{23}-2a_{21} & a_{22} \\ 3a_{31} & a_{33}-2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-3a.$

$$(4)\ \begin{vmatrix} a-3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & a-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-3 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & a-3 & 0 & a-3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix} = (a-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-3 & -2 \\ -2 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$= (a-3)^2\,(a-1)(a-5)$$