3.求以下行列式的值.

(1) $$D=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&2&2\\2&2&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2&2\\2&2&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&2&\cdots&2&2\\0&2&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&2&\cdots&n-1&2\\0&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2&2\\2&3&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2&2\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-3&0\\0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

(2)(3)教材例题.

(4) $$D=\begin{vmatrix}a_1+x_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix},\text{ 其中 } x_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

解：$$D=\begin{vmatrix}a_1+x_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^n a_i+x_1&a_2&\cdots&a_n\\\sum_{i=1}^n a_i+x_2&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sum_{i=1}^n a_i+x_n&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&a_2&\cdots&a_n\\x_2&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x_2 - x_1 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\prod_{i=2}^{n} x_i + \left(x_1 - \sum_{i=2}^{n}\frac{x_i - x_1}{x_i}a_i\right)\cdot\prod_{i=2}^{n} x_i$$

$$=\prod_{i=2}^{n} x_i \cdot\left(x_1 + a_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{x_1}{x_i}a_i\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot\left(1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{x_i}\right)$$

第三节

1. (1) $$D=\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ b & & & & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ & & & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

(2) $$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$$

$$
=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ b & & & & & a & 0 \\ 0 & & & & & 0 & a \end{vmatrix}+b(-1)^{2n+1}\begin{vmatrix} 0 & & & & & 0 & b \\ a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ b & & & & & a & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=a^2D_{2n-2}+b^2(-1)^{2n+1}(-1)^{2n-1+1}D_{2n-2}
$$

$$
=\left(a^2-b^2\right)D_{2n-2}=\cdots\left(a^2-b^2\right)^{n-1}D_2
$$

又因为$D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2$, $\Rightarrow D_{2n}=\left(a^2-b^2\right)^n$

(3) $$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \ldots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$
=\prod_{1\le j<i\le n+1}\left(x_i-x_j\right)=(-1)^n n!(-1)^{n-1}(n-1)!\cdots(-1)1!
$$

$$
=n!(n-1)!\cdots1!(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}
$$

$$
=\prod_{i=0}^{n-1}(n-i)!(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}
$$

(4) $$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n\\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n & n & n & \cdots & n\\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2\end{vmatrix}=0,\ 当\ n\geq 3.$$

当$n=2$时, $D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2$;

当$n=1$时, $D=1$.

(5) $$D_k=\begin{vmatrix}x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & x & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & x & -1\\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}$$

解：按第一列展开：

$$\begin{aligned}D_k &= x\cdot D_{k-1}+a_k(-1)^{k+1}(-1)^{k-1}=xD_{k-1}+a_k\\ &= x\left(xD_{k-2}+a_{k-1}\right)+a_k=x^2D_{k-2}+xa_{k-1}+a_k=\cdots=\\ &= x^{k-2}D_2+x^{k-3}a_3+\cdots+xa_{k-1}+a_k\\ &= x^k+\sum_{i=1}^{k}a_ix^{k-i},\ \left(k\geq 2\right)\end{aligned}$$

其中$D_2=\begin{vmatrix}x & -1\\ a_2 & x+a_1\end{vmatrix}=x^2+xa_1+a_2$.

(6) $$D=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & x & 1+x^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & x \\ & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$D_n=(1+x^2)D_{n-1}-x^2D_{n-2},$$

$$\Rightarrow\ D_n-D_{n-1}=x^2(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=x^{2(n-3)}(D_3-D_2),$$

$$其中D_3=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \\ x & 1+x^2 & x \\ & x & 1+x^2 \end{vmatrix}=(1+x^2)^3-2x^2(1+x^2),$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix}=(1+x^2)^2-x^2,$$

$$\Rightarrow\ D_n-D_{n-1}=x^{2n},$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow D_n&=D_{n-1}+x^{2n}=D_{n-2}+x^{2n-2}+x^{2n}\\ &=\cdots=x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^6+D_2\\ &=\sum_{k=0}^{n}x^{2k}.\ \ (n\geq 2)\end{aligned}$$

2. 证明略.

第四节

1. (1)例题.

(2) $$\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=a, \\ bcx+cay+abz=a^2, \end{cases}\qquad a,b,c互不相同.$$

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ca&ab\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0,$

故由Cramer法则存在唯一解，则

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&ca&ab\end{vmatrix}=a(b-c)(b+c-2a),\ \Rightarrow\ x=\frac{a(2a-b-c)}{(c-a)(b-a)},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a&c\\bc&a^2&ab\end{vmatrix}=(a-c)(a^2-bc),\ \Rightarrow\ y=\frac{bc-a^2}{(c-b)(b-a)},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&a\\bc&ca&a^2\end{vmatrix}=(b-a)(a^2-bc),\ \Rightarrow\ z=\frac{a^2-bc}{(c-a)(c-b)}.$$

2. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+ax_4=0,\\x_1+2x_2+x_3+ax_4=0,\\x_1+x_2-3x_3+x_4=0,\\x_1+x_2+ax_3+bx_4=0,\end{cases}$

解：当系数行列式$D\neq 0$时，只有全零解.

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\1&2&1&a\\1&1&-3&1\\1&1&a&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\0&1&0&0\\0&0&-4&1-a\\0&0&a-1&b-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&1-a\\a-1&b-a\end{vmatrix}$$

$=(a-1)^2-4(b-a)$

$=(a+1)^2-4b\neq 0.$

第五节

1．（1）无解.

（2）$x_1=-8,\ x_2=3,\ x_3=6,\ x_4=0.$

（3）选取x_3和x_4为自由变量，则

$$x_3=a,\ x_4=b,\ x_1=\frac{1}{14}(-13a+b),\ x_2=\frac{1}{14}(5a+5b).$$

（4）选取x_3和x_4为自由变量，则

$$x_3=a,\ x_4=b,\ x_2=3a+3b-2,\ x_1=-2a-2b+3.$$

2．当$a=0$，$b=2$时，线性方程组有解，转化为：

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \end{cases}$ 取$x_3=a$，$x_4=b$，$x_5=c$为自由变量，

解得$x_3=a$，$x_4=b$，$x_5=c$，

$$x_2=3-2a-2b-6c,\quad x_1=a+b+5c-2.$$

3．当$\lambda\neq 0$和1时，无解.

当$\lambda=0$或1时，有解.

取$x_3=a$，$x_4=b$，则$x_2=\lambda+b-2a$，$x_1=4a-4b-\lambda$.