4. 证：（1）$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TEB=B^TB=E$.

（2）A 正交，则$|A|=\pm 1$， $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\pm A^*$，

则$(A^*)^TA^*=(A^{-1})^TA^{-1}=(AA^T)^{-1}=E^{-1}=E$.

5. 解：$Q=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}7a & -3 & 2\\ 7b & 7c & -3\\ -3 & 2 & -6\end{bmatrix}$，通过$Q^TQ=E$ 得

$$\begin{cases}-21a+49bc-6=0,\\ 14a-21b+18=0,\\ -6-21c-12=0,\end{cases}\qquad \text{解得 } a=-\frac{6}{7},b=\frac{2}{7},c=-\frac{6}{7}.$$

6. 证：因为$Q^TQ=E$，故对任意 $X\in R^n$，有

$|QX|^2=(QX,QX)=(QX)^T(QX)=X^TQ^TQX=X^TX=|X|^2$，则一定有

$|QX|=|X|$.

第 4 节

1. 解：（1）$\mathscr{A}\varepsilon_1=(1,1,0)^T=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，

$\mathscr{A}\varepsilon_2=(1,-1,0)^T=\varepsilon_1-\varepsilon_2$，

$\mathscr{A}\varepsilon_3=(0,0,1)^T=\varepsilon_3$，

所求矩阵为：$D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(2) $\mathscr{A}\eta_1=(1,1,0)^T=\eta_2$，

$\mathscr{A}\eta_2=(2,0,0)^T=2\eta_1$，

$\mathscr{A}\eta_3=(2,0,1)^T=2\eta_1-\eta_2+\eta_3$，

故所求的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 解：（1）$\mathscr{A}\varepsilon_1=(2,3,5)^T=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3$,

$$\mathscr{A}\varepsilon_2=\mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\mathscr{A}\varepsilon_1=(-1,-3,-5)^T=-\varepsilon_1-3\varepsilon_2-5\varepsilon_3,$$

$$\mathscr{A}\varepsilon_3=\mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\mathscr{A}\varepsilon_2-\mathscr{A}\varepsilon_1=(-1,1,-1)^T=-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,$$

故所求的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

（2）已知$\alpha=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3$，则

$$y=AX=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

第 5 章 第 1 节

1. （1）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$，所以$A$的特征值为

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=1$（二重）. 对$\lambda_1=3$，解方程组

$$(3E-A)X=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[0,1,1]^T$，则$X=k_1\xi_1=k_1[0,1,1]^T\ (k_1\neq 0)$是$A$的属于$\lambda_1=3$的全部特征向量. 对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-4&2\\2&-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[2,1,0\right]^T,\xi_3=\left[-1,0,1\right]^T$，则

$X=k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_2\left[2,1,0\right]^T+k_3\left[-1,0,1\right]^T\ (k_2,k_3\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_2=1$ 的全部特征向量.

（2）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-1\\-2&\lambda&-1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$（二重）. 对 $\lambda_1=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\-2&1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[0,1,1\right]^T$，则 $X=k_1\xi_1=k_1\left[0,1,1\right]^T\ (k_1\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量. 对于 $\lambda_2=2$，解方程组

$$\left(2E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-2&2&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[1,1,0\right]^T,$，则

$X=k_2\xi_2=k_2\left[1,1,0\right]^T\ (k_2\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量.

（3）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&5&-2\\-5&\lambda+7&-3\\-6&9&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda^2$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=0$（二重）. 对 $\lambda_1=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-3&5&-2\\-5&8&-3\\-6&9&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[1,1,1]^T$，则 $X=k_1\xi_1=k_1[1,1,1]^T$ $(k_1\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量. 对于 $\lambda_2=0$，解方程组

$$(-A)X=\begin{bmatrix}-4&5&-2\\-5&7&-3\\-6&9&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right]^T$，则

$X=k_2\xi_2=k_2\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right]^T$ $(k_2\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_2=0$ 的全部特征向量.

2．解：B 的特征值为 $-4,-6,-12$.

因为 $A-5E$ 的特征值为 $-4,-6,-3$，则 $|A-5E|=(-4)(-6)(-3)=-72$.

3．解：$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7&-4&1\\-4&\lambda-7&1\\4&4&\lambda-x\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2-r_1}}\begin{vmatrix}\lambda-7&-4&1\\3-\lambda&\lambda-3&0\\4&4&\lambda-x\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_2+c_1}}\begin{vmatrix}\lambda-7&\lambda-11&1\\3-\lambda&0&0\\4&8&\lambda-x\end{vmatrix}=(\lambda-3)\left[(\lambda-11)(\lambda-x)-8\right],$$

由于 $\lambda_1=3$ 是 A 的一个二重特征值，则 $\lambda_1=3$ 一定是 $(\lambda-11)(\lambda-x)-8=0$ 的一个根，代入解得 $x=4$，则 $(\lambda-3)\left[(\lambda-11)(\lambda-x)-8\right]=(\lambda-3)^2(\lambda-12)$，即另一个特征值为 $\lambda_2=12$. 对于 $\lambda_1=3$，解方程组

$$(3E-A)X=\begin{bmatrix}-4&-4&1\\-4&-4&1\\4&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得 $\xi_1=[1,0,4]^T,\xi_2=[0,1,4]^T$ 是 $\lambda_1=3$ 对应的特征子空间 V_{λ_1} 的基. 对于 $\lambda_2=12$，解方程组

$$(12E-A)X=\begin{bmatrix}5&-4&1\\-4&5&1\\4&4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得$\xi_3=\left[-1,-1,1\right]^T$是$\lambda_2=12$对应的特征子空间$V_{\lambda_2}$的基.

4．证:（1）设λ_i是A的任一特征根，则λ_i^n是A^n的特征根，因为$A^n=O$，有$\lambda_i^n=0$，则一定有$\lambda_i=0$，即A的特征根全为0.

（2）类似的，知$\lambda_i^2-\lambda_i$是A^2-A的特征根，因为$A^2-A=O$，有$\lambda_i^2-\lambda_i=0$，则一定有$\lambda_i=0$，或者$\lambda_i=1$，即A的特征根为0或1.

（3）类似的，知λ_i^2-1是A^2-E的特征根，因为$A^2-E=O$，有$\lambda_i^2-1=0$，则一定有$\lambda_i=-1$，或者$\lambda_i=1$，即A的特征根为-1或1.

第 2 节

1．证：若A可逆，则$BA=E_nBA=(A^{-1}A)BA=A^{-1}(AB)A$，即$AB\sim BA$.

2．由条件知$A_1=C_1^{-1}B_1C_1$，$A_2=C_2^{-1}B_2C_2$，C_1,C_2可逆.

于是$\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1^{-1}&0\\0&C_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix},$$

则$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix}$.