最小项

例1 $F(A,B,C,D)=AB\overline{C}+\overline{B}D+\overline{A}BCD$ 与或式（积之和）

与项

最大项

例2 $F(A,B,C,D)=(A+C)(\overline{A}+B+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})$

或与式（和之积）

或项

与或式（积之和）与最小项表达式

最小项表达式

例如：$z(a,b,c) = ab + \bar{a}c$ ⟵ 与或式

$$= ab(c+\bar{c}) + \bar{a}(b+\bar{b})c = abc + ab\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c$$

与或式：逻辑表达式为几个与项的和称为与或式，又称为积之和表达式。

最小项：在一个n个自变量的逻辑函数中，最小项是包含着n个变量的一个“与项”，在此“与项”中，每个变量以原变量或反变量的形式出现一次。

思考题：对于一个n个自变量的逻辑函数，最多 有多少“最小项”？

最小项表达式：当与或式中所有与项均为“最小项”时称为最小项表达式。

或与式（和之积表达式）和最大项表达式

例如：$z(a,b,c)=(\bar{a}+b+c)(\bar{a}+b+\bar{c})(a+b+c)(a+\bar{b}+c)$

最大项表达式

或与式： 逻辑表达式为几个或项的积称为**或与式**，又称为**和之积表达式**。

最大项： 在一个n个自变量的逻辑函数中，包含n个变量的或项，在此或项中，每个变量以原变量或反变量的形式出现一次，此或项称为**最大项**。

最大项表达式： 当或与式中所有或项为最大项时称为**最大项表达式**。

真值表和最小项、最大项的关系

逻辑函数的最小项表达式和最大项表达式是唯一的。

	行号	a	b	c	z	
	0	0	0	0	0	$\leftarrow a+b+c$
$\bar{a}\bar{b}c\rightarrow$	1	0	0	1	1	
	2	0	1	0	0	$\leftarrow a+\bar{b}+c$
$\bar{a}bc\rightarrow$	3	0	1	1	1	
	4	1	0	0	0	$\leftarrow \bar{a}+b+c$
	5	1	0	1	0	$\leftarrow \bar{a}+b+\bar{c}$
$ab\bar{c}\rightarrow$	6	1	1	0	1	
$abc\rightarrow$	7	1	1	1	1	

$$z=\bar{a}\bar{b}c+\bar{a}bc+ab\bar{c}+abc=m_1+m_3+m_6+m_7=\Sigma m(1,3,6,7)$$

$$z=(a+b+c)(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+b+c)(\bar{a}+b+\bar{c})$$

$$=M_0M_2M_4M_5=\Pi M(0,2,4,5)$$

最小项和最大项的含义：

最小项： n个变量最多可构成2^n个最小项，而在这2^n个最小项中，同时只能有一个最小项取值为1，即**值为1的“与项”个数最少。**

$$z(a,b,c)=abc+ab\bar{c}+\bar{a}bc+\bar{a}\bar{b}c$$

最小项和最大项的含义：

最大项： n个变量最多可构成2^n个最大项，而在这2^n个最大项中，同时只能有一个最大项取值为0，其余均为1，即**值为1的“或项”个数最多**。

$$z(a,b,c)=(\bar{a}+b+c)(\bar{a}+b+\bar{c})(a+b+c)(a+\bar{b}+c)$$

最小项与最大项的关系

- 所有最小项之和恒为1。 $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$
- 任意两个不同最小项之积恒为0。 $m_i m_j = 0 \quad i \neq j$
- 所有最大项之积恒为0。 $\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$
- 任意两个不同最大项之和恒为1。 $M_i + M_j = 1 \quad i \neq j$
- 标号相同的最大项和最小项互为反函数。 $\overline{m_i} = M_i$
- 任一含有n-k个变量的积（和）项均包含有2^k个最小（大）项

（如何解释？）

最小项表达式与
最大项表达式的关系

已知：$z(a,b,c,d)=\Sigma m(0,1,2,3,7,8,9,10,11,14)$

有：$z(a,b,c,d)=\Pi M(4,5,6,12,13,15)$

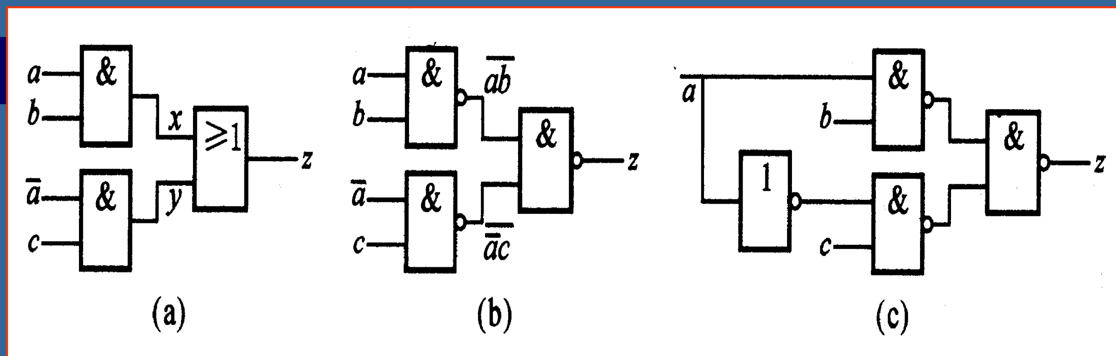
$$\overline{z}(a,b,c,d)=\Sigma m(4,5,6,12,13,15)$$

$$\overline{z}(a,b,c,d)=\Pi M(0,1,2,3,7,8,9,10,11,14)$$

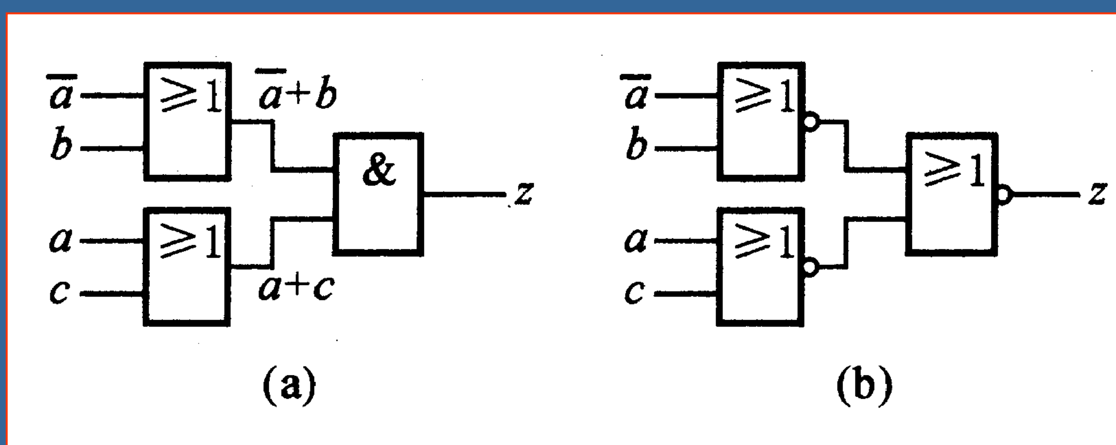
行号	a	b	c	d	z
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

逻辑图（由若干逻辑图形符号构成的电路图）

- **与或式对应的逻辑图** $z = ab + \bar{a}c = \overline{\overline{ab} \cdot \overline{\bar{a}c}}$



- **或与式对应的逻辑图** $z = (a+b)(\bar{a}+c) = \overline{\overline{(a+b)} + \overline{(\bar{a}+c)}}$

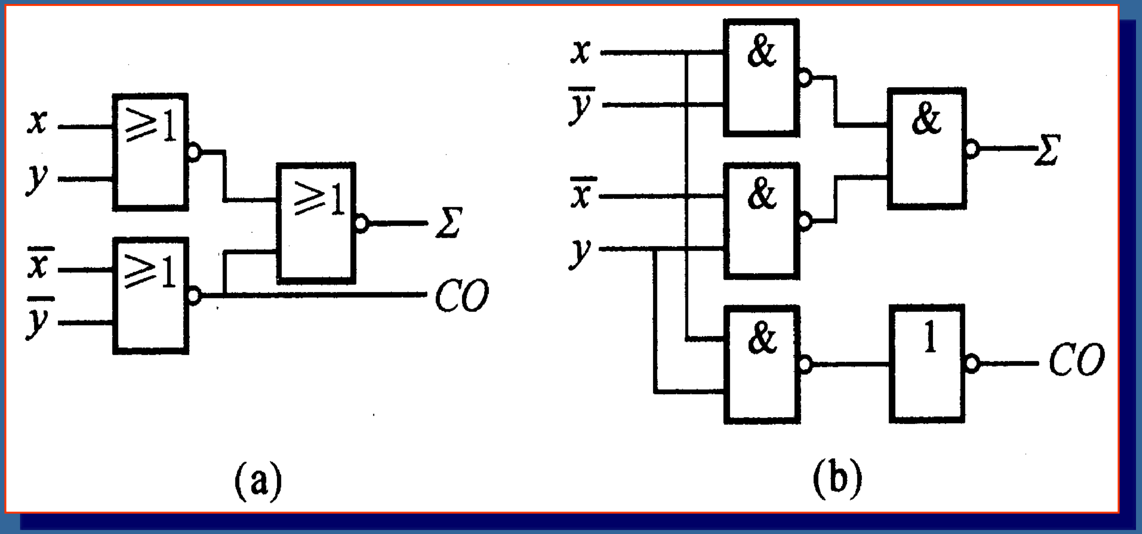


例1 半加器（HA）的逻辑图

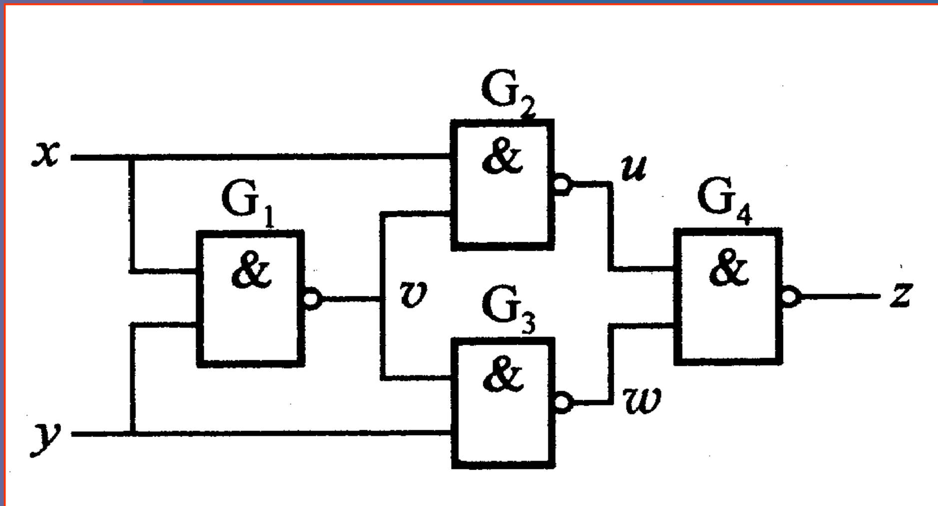
$$\sum(x,y)=\prod M(0,3)=(x+y)(\bar{x}+\bar{y})=\sum m(1,2)=\bar{x}y+x\bar{y}$$

$$CO(x,y)=xy=\overline{\bar{x}+\bar{y}}$$

x	y	co	Σ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



例2　分析电路



$$v=\overline{xy}=\bar{x}+\bar{y}$$

$$u=\overline{vx}$$

$$w=\overline{vy}$$

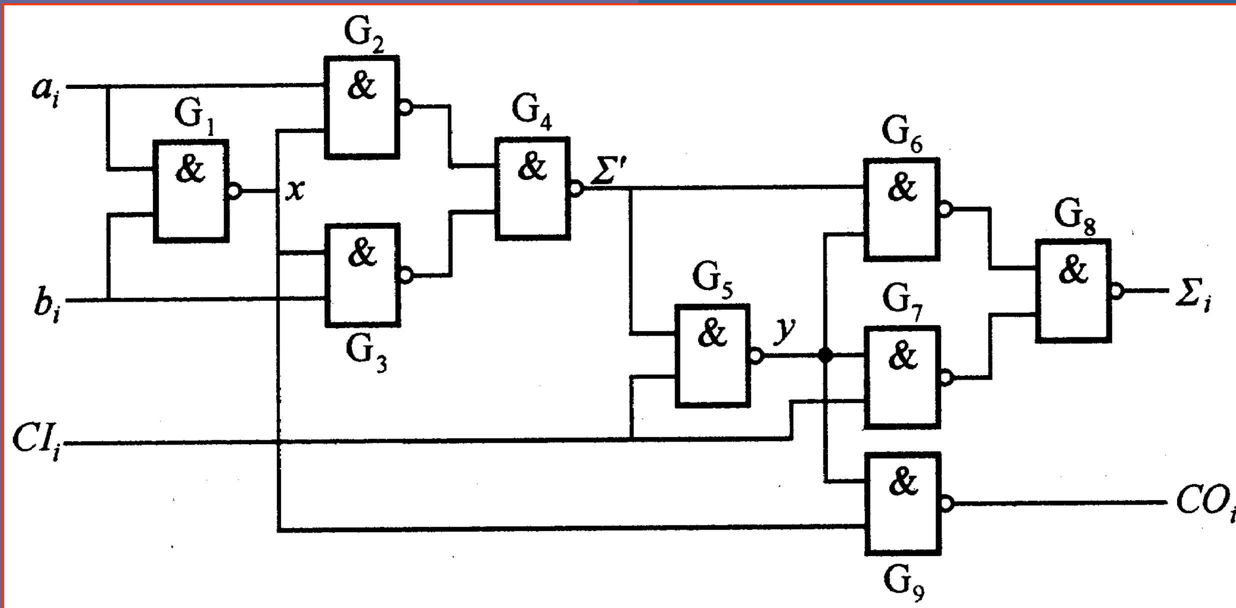
$$z=\overline{uw}=\overline{\overline{vx}\cdot\overline{vy}}=vx+vy$$

$$=(\bar{x}+\bar{y})(x+y)=\bar{x}y+x\bar{y}$$

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

逻辑功能：异或门

例3 分析电路



ci_i	x_i	y_i	co_i	Σ_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$\Sigma' = a_i \oplus b_i$$

$$\Sigma_i = \Sigma' \oplus CI_i = a_i \oplus b_i \oplus CI_i = a_i \overline{b_i}\,\overline{CI_i} + \overline{a_i} b_i \overline{CI_i} + \overline{a_i}\,\overline{b_i} CI_i + a_i b_i CI_i$$

$$CO_i = \overline{x \cdot y} = \overline{\overline{a_i b_i}\;\overline{\Sigma' CI_i}} = a_i b_i + \Sigma' CI_i = a_i b_i + (a_i \oplus b_i) CI_i$$

$$= a_i b_i + (\overline{a_i} b_i + a_i \overline{b_i}) CI_i = a_i b_i + \overline{a_i} b_i CI_i + a_i \overline{b_i} CI_i = a_i b_i + a_i CI_i + b_i CI_i$$

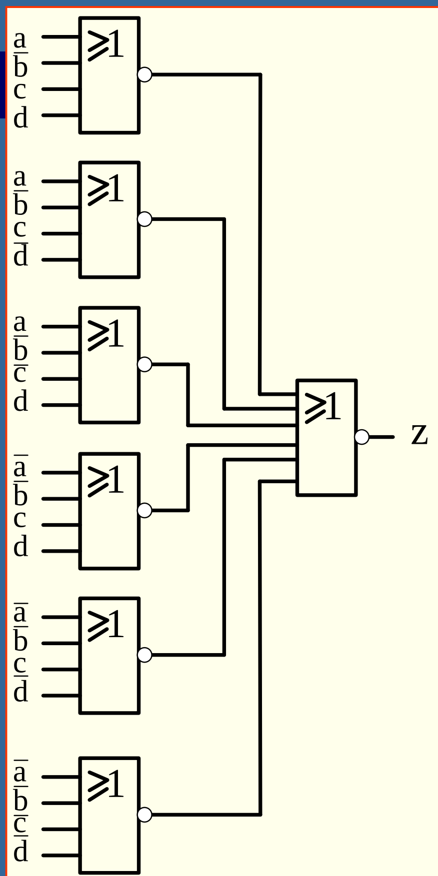
逻辑功能：全加器

为什么？

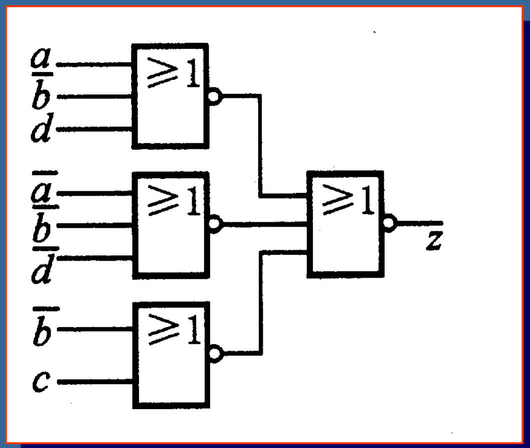
逻辑化简

逻辑化简的目的：节省原器件，提高可靠性

例：



化简



电路的价格：11

电路的价格（门电路输入端的个数）：30

逻辑化简的方法：

- **公式法：** 凭经验及对布尔代数公式的灵活运用
- **图解法：** 用卡诺图，适用于变量数少于6个的情况。
- **计算机辅助化简：** 如用EWB仿真软件。

卡诺图

行号	a	b	c	d	z
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

52年，E.W.Veitch（维奇）提出

方框内是因变量z的值

ab \ cd	00	01	10	11
00	1	1	1	1
01	0	0	0	1
10	1	1	1	1
11	0	0	1	0

Z(a,b,c,d)

53年，M.Karnaugh（卡诺）将方框外二进制码排列改格雷码，从而使相邻两格之间只有一个变量不同

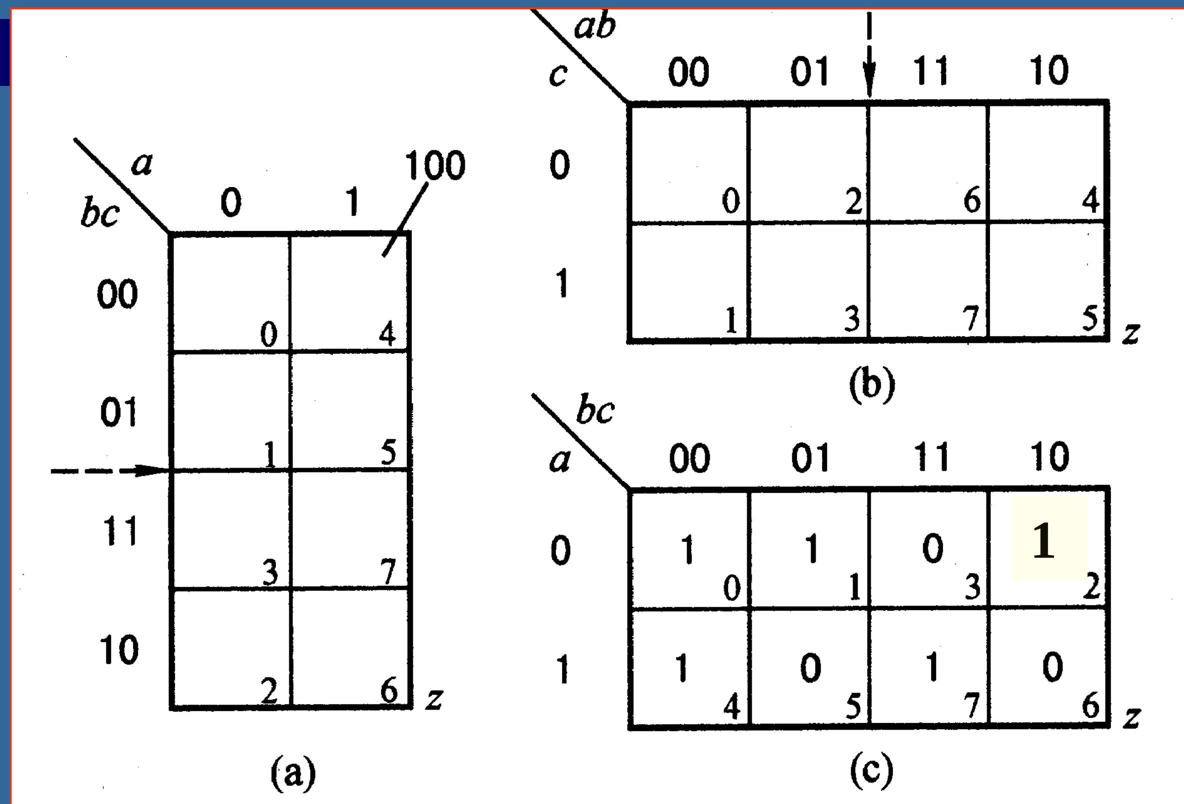
ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	1	0
11	0	0	0	1
10	1	1	1	1

Z(a,b,c,d)

真值表与卡诺图

三变量情况：

a	b	c	z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



例1 $z(a,b,c,d)=\Sigma m(1,2,3,4,8,9,10,11,12)$

a \ bcd	000	001	011	010	110	111	101	100
0	0_{0}	1_{1}	1_{3}	1_{2}	0_{6}	0_{7}	0_{5}	1_{4}
1	1_{8}	1_{9}	1_{11}	1_{10}	0_{14}	0_{15}	0_{13}	1_{12}

z

(b)

例2 $y(a,b,c,d,e)=\Pi M(0,1,2,6,8,9,16,17,18,22,24,25)$

+

bc \ de	00	01	11	10
00	0 (16)	0 (17)	1 (19)	0 (18)
01	1 (20)	1 (21)	1 (23)	0 (22)
11	1 (28)	1 (29)	1 (31)	1 (30)
10	0 (24)	0 (25)	1 (27)	1 (26)

y

$a=1$