一、命题逻辑推理规则：

1. $A_1, A_2 \ldots A_n \vdash A_i \ (i=1,2,\ldots,n)$ （∈）（包含律）
2. 如果 Γ ⊢Δ(Δ≠∅)且Δ ⊢A，则 Γ ⊢ A （τ）（传递律）
3. 如果 Γ ⊢A，则 Γ，Δ ⊢ A （τ_0）（增加前提律）
4. **如果 Γ，¬ A ⊢B，¬ B，则 Γ ⊢ A （¬ ）（反证律）**
5. A→B，A ⊢B （→−）（→消去律）
6. **如果 Γ，A ⊢ B，则 Γ ⊢ A→B （→+）（→引入律）**
7. A∧B ⊢A，B （∧−）（∧消去律）
8. A，B ⊢A∧B （∧+）（∧引入律）
9. **如果 Γ,A ⊢ C 且 Γ,B ⊢C，则 Γ,A∨B ⊢C （∨−）（∨消去律）**
10. A ⊢A∨B，B∨A （∨+）（∨引入律）
11. A↔B，A ⊢B 以及 A↔B，B ⊢A （↔−）（↔消去律）
12. 如果 Γ，A ⊢B 且 Γ，B ⊢A，则 Γ ⊢A↔B （↔+）（↔引入律）

二、谓词逻辑推理规则：

13. ∀xA(x) ⊢ A(a) （∀−）（∀消去律）
14. **如果 Γ ⊢ A(a) 且 a 不在 Γ 中出现，则 Γ ⊢ ∀xA(x) （∀+）（∀引入律）**
15. **Γ,A(a) ⊢ B 且 a 不在 Γ 和 B 中出现，则 Γ,∃xA(x) ⊢ B （∃−）（∀消去律）**
16. A(a) ⊢ ∃xA(x),A(x)是由 A(a)中 a 的部分出现替换为 x 而得 （∃+）

三、斜形证明：

1. A1 （前提或假设）
2. A2 （前提或假设）
3. A3 （前提或假设）
4. B1 （A1,A2,A3 ⊢ B1）
5. B2 （A1,A2,A3 ⊢ B2）
6. B3 （A1,A2 ⊢ B3）
7. B4 （A1,A2 ⊢ B4）
8. B5 （A1 ⊢ B5）

四、命题逻辑的定理：

1. A ⊢ A
2. **A ⊢ B→A （肯定后件律）**
3. A→B，B→C ⊢ A→C （→传递律）
4. A→（B→C），A→B ⊢ A→C
5. **A，¬ A ⊢ B （矛盾推出一切）**
6. **¬ A ⊢ A→B （否定前件律）**
7. **A ⊢ ¬ A→B**
8. ¬ ¬ A ⊢⊣ A
9. 如果 Γ，A ⊢ B，¬ B，则 Γ ⊢ ¬ A （¬ +）（归缪律）
10. A→B，¬ B ⊢ ¬ A

11. A→B ⊢ ¬ B→¬ A （逆否命题）
12. ¬ A→¬ B，B ⊢A
13. ¬ A→¬ B ⊢ B→A
14. A→¬ B，B ⊢ ¬ A
15. A→¬ B ⊢ B→¬ A
16. ¬ A→B，¬ B ⊢A
17. ¬ A→B ⊢ ¬ B→A
18. ¬ A→A ⊢A
19. A→¬ A ⊢ ¬ A
20. A→B，A→¬ B ⊢ ¬ A
21. A→B，¬ A→B ⊢ B
22. ¬ (A→B) ⊢ A，¬ B
23. 如果Γ，A ⊢ C 且Γ，B ⊢ C，则Γ，A∨B ⊢ C （∨-）
24. A∧B ⊣⊢ B∧A
25. (A∧B)∧C ⊢A∧(B∧C)
26. A∧B ⊣⊢ ¬ (A→¬ B)
27. ¬ (A∧B) ⊣⊢ A→¬ B
28. A→B ⊣⊢ ¬ (A∧¬ B)
29. ¬ (A→B) ⊣⊢ A∧¬ B
30. ⊢ ¬ (A∧¬ A)
31. A∨B ⊣⊢ B∨A
32. (A∨B)∨C ⊣⊢ A∨(B∨C)
33. A∨B ⊣⊢ ¬ A→B
34. A→B ⊣⊢ ¬ A∨B
35. ⊢ ¬ A∨A
36. ¬ (A∧B) ⊣⊢ ¬ A∨¬ B 摩根律
37. ¬ (A∨B) ⊣⊢ ¬ A∧¬ B
38. A∨(B∧C) ⊣⊢ (A∨B)∧(A∨C)
39. (A∧B)∨C ⊣⊢ (A∨C)∧(B∨C)
40. A∧(B∨C) ⊣⊢ (A∧B)∨(A∧C)
41. (A∨B)∧C ⊣⊢ (A∧C)∨(B∧C)
42. A→B∧C ⊣⊢ (A→B)∧(A→C)
43. A→B∨C ⊣⊢ (A→B)∨(A→C)
44. A∧B→C ⊣⊢ (A→C)∨(B→C)
45. A∨B→C ⊣⊢ (A→C)∧(B→C)
46. A↔B ⊣⊢ (A→B)∧(B→A)
47. A↔¬ A ⊢ B
48. A↔B，B↔C ⊢ A↔C
49. A↔B ⊣⊢ ¬ A↔¬ B
50. A↔¬ B ⊣⊢ ¬ A↔B
51. A↔¬ B ⊣⊢ ¬ (A↔B)
52. A↔B ⊣⊢ (¬ A∨B)∧(A∨¬ B)
53. A↔B ⊣⊢ (A∧B)∨(¬ A∧¬ B)
54. (A↔B)↔C ⊣⊢ A↔(B↔C)
55. ⊢(A↔B)∨(A↔¬ B)
56. A ⊢ A∧B↔B
57. A→(B→C) ⊢B↔(B∧(A↔A∧C))
58. A↔(B→¬ C)→ ¬ A ⊢C

59. $(A\leftrightarrow B)\wedge(C\leftrightarrow D) \vdash A\wedge C\leftrightarrow B\wedge D$
60.

五、谓词逻辑的定理：

1. $\Gamma, A(a)\vdash B$ 且 a 不在 Γ 和 B 中出现，则 $\Gamma, \exists xA(x)\vdash B$ （即$\exists$-）
2. $\forall xA(x) \dashv\vdash \forall yA(y)$
3. $\exists xA(x) \dashv\vdash \exists yA(y)$
4. $\forall x\forall yA(x,y) \dashv\vdash \forall y\forall xA(x,y)$
5. $\exists x\exists yA(x,y) \dashv\vdash \exists y\exists xA(x,y)$
6. $\forall xA(x)\vdash \exists xA(x)$
7. $\exists x\forall yA(x,y)\vdash \forall y\exists xA(x,y)$
8. $\forall xA(x) \dashv\vdash \neg\exists x\neg A(x)$
9. $\exists xA(x) \dashv\vdash \neg\forall x\neg A(x)$
10. $\forall x\neg A(x) \dashv\vdash \neg\exists xA(x)$
11. $\exists x\neg A(x) \dashv\vdash \neg\forall xA(x)$
12. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \forall xA(x)\vdash \forall xB(x)$
13. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \exists xA(x)\vdash \exists xB(x)$
14. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \forall x(B(x)\rightarrow C(x))\vdash \forall x(A(x)\rightarrow C(x))$
15. $A\rightarrow\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A\rightarrow B(x))$ $x\notin A$
16. $A\rightarrow\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A\rightarrow B(x))$ $x\notin A$
17. $\forall xA(x)\rightarrow B \dashv\vdash \exists x(A(x)\rightarrow B)$ $x\notin B$
18. $\exists xA(x)\rightarrow B \dashv\vdash \forall x(A(x)\rightarrow B)$ $x\notin B$
19. $A\wedge\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A\wedge B(x))$ $x\notin A$
20. $A\wedge\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A\wedge B(x))$ $x\notin A$
21. $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A(x)\wedge B(x))$
22. $\exists x(A(x)\wedge B(x))\vdash \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$
23. $\exists xA(x)\wedge\exists yB(y) \dashv\vdash \exists x\exists y(A(x)\wedge B(y))$
24. $\forall xA(x)\wedge\forall yB(y) \dashv\vdash \forall x\forall y(A(x)\wedge B(y))$
25. $\forall xA(x)\wedge\exists yB(y) \dashv\vdash \forall x\exists y(A(x)\wedge B(y))$
26. $\exists xA(x)\wedge\forall yB(y) \dashv\vdash \exists x\forall y(A(x)\wedge B(y))$
27. $A\vee\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A\vee B(x))$ $x\notin A$
28. $A\vee\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A\vee B(x))$ $x\notin A$
29. $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\vdash \forall x(A(x)\vee B(x))$
30. $\exists xA(x)\vee\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A(x)\vee B(x))$
31. $\exists xA(x)\vee\exists yB(y) \dashv\vdash \exists x\exists y(A(x)\vee B(y))$
32. $\forall xA(x)\vee\forall yB(y) \dashv\vdash \forall x\forall y(A(x)\vee B(y))$
33. $\forall xA(x)\vee\exists yB(y) \dashv\vdash \forall x\exists y(A(x)\vee B(y))$
34. $\exists xA(x)\vee\forall yB(y) \dashv\vdash \exists x\forall y(A(x)\vee B(y))$
35. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x))\vdash \forall xA(x)\leftrightarrow\forall xB(x)$
36. $\exists x(A(x)\leftrightarrow B(x))\vdash \exists xA(x)\leftrightarrow\exists xB(x)$
37. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x)), \forall x(B(x)\leftrightarrow C(x))\vdash \forall x(A(x)\leftrightarrow C(x))$
38. $\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)), \forall x(B_1(x)\leftrightarrow B_2(x))\vdash \forall x(A_1(x)\wedge A_2(x)\leftrightarrow B_1(x)\wedge B_2(x))$
39. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x))\vdash \forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \forall x(B(x)\rightarrow A(x))$

命题逻辑定理：

1. A ⊢A

1) A (P)
2) A (1, ∈)

2. A ⊢B→A （肯定后件律）

1) A (P)
2) B (S)
3) A (2, ∈)
4) B→A (2, 3, →+)

3. A→B，B→C ⊢A→C

1) A→B (P)
2) B→C (P)
3) A (S)
4) B (1, 3, →−)
5) C (2, 4, →−)
6) A→C (3, 5, →+)

4. A→（B→C），A→B ⊢A→C

1) A→（B→C） (P)
2) A→B (P)
3) A (S)
4) B→C (1, 3, →−)
5) B (2, 3, →−)
6) C (5, 4, →−)
7) A→C (3, 6, →+)

5. A，┐A ⊢B （矛盾推出一切）

1) A (P)
2) ┐A (P)
3) ┐B (S)
4) A (∈)
5) ┐A (∈)
6) B (3, 4, 5, ┐)

6. ┐A ⊢ A→B （否定前件律）

1) ┐A (P)
2) A (S)
3) B (1, 2, TH5)
4) A→B (2, 3, →+)

7. A ⊢ ┐A→B （否定前件律）

1) A (P)
2) ┐A (S)
3) B (1, 2, TH5)
4) ┐A→B (2, 3, →+)

8. ¬¬A ⊣⊢ A

⊢:

1) ¬¬A (P)
2) ¬A (S)
3) ¬¬A,¬A (1,2,∈)
4) A (2,3,¬)

⊣:

1) A (P)
2) ¬¬¬A (S)
3) ¬A (Th8 正向)
4) ¬¬A (2,3,¬)

9. T,A ⊢B,¬B T ⊢ ¬A(归谬律)

方法 1:

1) T,A (P)
2) B，¬B (题设)
3) ¬A (Th5 矛盾推出一切)

方法 2:

1 T (P)
2 ¬¬A (S)
3 A
4 B，¬B (题设)
5 ¬A (2 3 ¬)

10. A→B，¬B ⊢ ¬A

1) A→B (P)
2) ¬B (P)
3) A (S)
4) B (1,3,→-)
5) ¬A (3,2,4,¬+)

11. A→B ⊢ ¬B→¬A

1) A→B (P)
2) ¬B (S)
3) ¬A (1,2,Th10)
4) ¬B→¬A (3,2,→+)

12. ¬A→¬B，B ⊢A

1) ¬A→¬B (P)
2) B (P)
3) ¬A (S)
4) ¬B (1,3,→-)
5) A (3,2,4,¬)

13. ¬A→¬B ⊢ B→A

1) ¬A→¬B (P)

2) B (S)
3) ¬A (S)
4) ¬B (1. →-)
5) B (2. ∈)
6) A (3.4.5.归谬律)
7) B→A (2.6. →+)

14. A→¬B, B ⊢ ¬A
1) A→¬B (P)
2) B (P)
3) A (S)
4) ¬B (1,3,→-)
5) ¬A (3,2,4,¬)

15. A→¬B ⊢ B→¬A
1) A→¬B (P)
2) B (S)
3) A (S)
4) ¬B (1. →-)
5) B (2. ∈)
6) ¬A (3.4.5.归谬律)
7) B→¬A (2.6. →+)

16. ¬A→B, ¬B ⊢A
1) ¬A→B (P)
2) ¬B (P)
3) ¬A (S)
4) B (1. →-)
5) ¬B (2. ∈)
6) A (3.4.5.¬)

17. ¬A→B ⊢ ¬B→A
1) ¬A→B (P)
2) ¬B (S)
3) ¬A (S)
4) B (1. →-)
5) ¬B (2. ∈)
6) A (3.4.5.归谬律)
7) ¬B→A (2.6. →+)

18. ¬A→A ⊢A
1) ¬A→A (P)
2) ¬A (S)
3) A (1,2,→-)
4) A (2,3,¬)

19. A→¬A ⊢ ¬A
1) A→¬A (P)

2) A (S)
3) ¬A (1,2,→-)
4) ¬A (2,3,¬+)

20.A→B，A→¬B ⊢ ¬A
1) A→B (P)
2) A→¬B (P)
3) A (S)
4) B (1,3,→-)
5) ¬B (2,4,→-)
6) ¬A (3,5,4,¬+)

21.A→B，¬A→B ⊢ B
1) A→B (P)
2) ¬A→B (P)
3) ¬B (S)
4) ¬A (1,3,Th10)
5) B (2,4,→-)
6) B (3,5,¬)

22.¬(A→B) ⊢A, ¬B
1) ¬(A→B) (P)
2) ¬A (S)
3) A→B (Th6 否定前件律)
4) A (1,2,3,¬)
5) B (S)
6) A→B (肯定后件律)
7) ¬B (1,5,6,¬+)

23.如果Γ，A ⊢ C且Γ，B ⊢ C，则Γ，A∨B ⊢ C （∨-）

24.A∧B ⊣⊢ B∧A
⊢
1) A∧B (P)
2) A,B (1,∧-)
3) B∧A (2,∧+)
⊣
1 B∧A (P)
2 A,B (1,∧-)
3 A∧B (2,∧+)

25.(A∧B)∧C ⊣⊢ A∧(B∧C)
⊢
1) (A∧B)∧C (P)
2) A∧B,C (1,∧-)
3) A,B (2,∧-)
4) B∧C (2,3,∧+)
5) A∧(B∧C) (3,4,∧+)
⊣

1 A∧(B∧C) (P)
2 A,B∧C (1, ∧-)
3 C,B (2, ∧-)
4 A∧B (2, 3, ∧+)
5 (A∧B)∧C (3, 4, ∧+)

26. A∧B ⊢⊣ ¬(A→¬B)

⊢

1) A∧B (P)
2) A→¬B (S)
3) A,B (1, ∧-)
4) ¬B (2, 3, →-)
5) ¬(A→¬B) (2, 3, 4, ¬+)

⊣

1) ¬(A→¬B) (P)
2) ¬A (S)
3) A→¬B (2, Th6)
4) A (2, 3, ¬)
5) ¬B (S)
6) A→¬B (5, Th2)
7) B (5, 6, ¬)
8) A∧B (7, 4, ∧+)

27. ¬(A∧B) ⊢⊣ A→¬B

⊢

1) ¬(A∧B) (P)
2) A (S)
3) B (S)
4) A∧B (2, 3, ∧+)
5) ¬B (3, 1, 4, ¬+)
6) A→¬B (2, 5, →+)

⊣

1) A→¬B (P)
2) A∧B (S)
3) A,B (2, ∧-)
4) ¬B (1, 3, →-)
5) ¬(A∧B) (2, 3, 4, ¬+)

28. A→B ⊢⊣ ¬(A∧¬B)

⊢

1) A→B (P)
2) A∧¬B (S)
3) A,¬B (2, ∧-)
4) B (1, 3, →-)
5) ¬(A∧¬B) (2, 3, 4, ¬+)

⊣

1) ¬(A∧¬B) (P)
2) A (S)

3) ¬B (S)
4) A∧¬B (2, 3, ∧+)
5) B (3, 1, 4, ¬)
6) A→B (2, 5, →+)

29. ¬ (A→B) ⊢⊣ A∧¬ B

⊢
1) ¬ (A→B) (P)
2) ¬ (A∧¬ B) (S)
3) A→B (2, th28)
4) A∧¬ B (2, 3, 1, ¬)

⊣
1) A∧¬ B (P)
2) A→B (S)
3) ¬ (A∧¬ B) (2, th28)
4) ¬ (A→B) (2, 3, 1, ¬ +)

30. ⊢ ¬ (A∧¬ A)
1) A∧¬ A (S)
2) A, ¬ A (1, ∧-)
3) ¬ (A∧¬ A) (2, 3, ¬ +)

31. A∨B ⊢⊣ B∨A

⊢
1) A (S)
2) B∨A (1, ∨+)
3) B (S)
4) B∨A (3, ∨+)
5) A∨B (P)
6) B∨A (1-4, ∨-)

⊣
1) B (S)
2) B∨A (3, ∨+)
3) A (S)
4) B∨A (1, ∨+)
5) B∨A (P)
6) A∨B (1-4, ∨-)

32. (A∨B)∨C ⊢⊣ A∨(B∨C)

⊢
1) (A∨B)∨C (P)
2) A∨B (S)
3) A (S)
4) A∨(B∨C) (3, ∨+)
5) B (S)
6) B∨C (5, ∨+)
7) A∨(B∨C) (6, ∨+)

8) A∨(B∨C) (3-7, ∨-)
9) C (S)
10) B∨C (9, ∨+)
11) A∨(B∨C) (10, ∨+)
12)A∨(B∨C) (2,8,9,11, ∨-)

⊣

1)A∨(B∨C) (P)
2) B∨C (S)
3) C (S)
4) (A∨B)∨C (3, ∨+)
5) B (S)
6) A∨B (5, ∨+)
7) (A∨B)∨C (6, ∨+)
8) (A∨B)∨C (3-7, ∨-)
9) A (S)
10) A∨B (9, ∨+)
11) (A∨B)∨C (10, ∨+)
12)A∨(B∨C) (2,8,9,11, ∨-)

33. A∨B ⊢⊣ ┐A→B

⊢

1) A∨B (P)
2) A (S)
3) ┐A→B (2, 否定前提律)
4) B (S)
5) ┐A→B (4, 肯定后件律)
6) ┐A→B (1-4, ∨-)

⊣

1) ┐A→B (P)
2) ┐(A∨B) (S)
3) ┐A (S)
4) B (1,2, →-)
5) A∨B (4, ∨+)
6) A
7) A∨B (6 ∨+)
8) A∨B (2 7 ┐)

34. A→B ⊢⊣ ┐A∨B

⊢

1) A→B (P)
2) ┐┐A (S)
3) A (2, th8)
4) B (1,3, →-)
5) ┐┐A →B (2,4, →+)
6) ┐A∨B (5, th33)

⊣
1) ¬A∨B (P)
2) ¬¬A→B (1, th33)
3) A (S)
4) ¬¬A (2, th8)
5) B (2, 4, →-)
6) A→B (3, 5, →+)

35. ⊢ ¬A∨A
⊢
1) A (S)
2) A (1, ∈)
3) A→A (1, 2, →+)
4) ¬A∨A (3, th34)

36.¬(A∧B) ⊢⊣ ¬A∨¬B
⊢
1) ¬(A∧B) (P)
2) A (S)
3) B (S)
4) A∧B (2, 3, ∧+)
5) ¬B (3, 1, 4, ¬)
6) A→¬B (2, 5, →+)
7) ¬A∨¬B (6, th34)
⊣
1) ¬A∨¬B (P)
2) A∧B (S)
3) A, B (2, ∧-)
4) A→¬B (1, th34)
5) ¬B (3, 4, →-)
6) ¬(A∧B) (2, 3, 5, ¬)

37.¬(A∨B) ⊢⊣ ¬A∧¬B
⊢
1) ¬(A∨B) (P)
2) A (S)
3) A∨B (2, ∨+)
4) ¬A (2, 3, ¬ +)
5) B (S)
6) A∨B (5, ∨+)
7) ¬B (5, 6, ¬ +)
8) ¬A∧¬B (4, 7, ∧+)
⊣
1) ¬A∧¬B (P)
2) ¬A, ¬B (1, ∧-)
3) A∨B (S)
4) ¬A→B (3, th33)
5) B (2, 4, →-)

6) ┐(A∨B) (2,3,5,┐+)

38. A∨(B∧C) ⊢ (A∨B)∧(A∨C)

⊢

1) A∨(B∧C) (P)
2) A (S)
3) A∨B (2, ∨+)
4) A∨C (2, ∨+)
5) (A∨B)∧(A∨C) (3,4, ∧+)
6) B∧C (S)
7) B,C (6, ∧-)
8) A∨B,A∨C (7, ∨+)
9) (A∨B)∧(A∨C) (8, ∧+)
10) (A∨B)∧(A∨C) (2-9, ∨-)

⊣

1) (A∨B)∧(A∨C) (P)
2) A∨B,A∨C (1, ∧-)
3) ┐A→B,┐A→C (2, th33)
4) ┐A (S)
5) B,C (3,4, →-)
6) B∧C (5, ∧+)
7) ┐A→B∧C (4,6, →+)
8) A∨(B∧C) (7, th33)

39. (A∧B)∨C ⊢ (A∨C)∧(B∨C)

⊢

1) (A∧B)∨C (P)
2) A∧B (S)
3) A,B (2. ∧-)
4) A∨C, B∨C (3. ∨+)
5) (A∨C)∧(B∨C) (4. ∧+)
6) C (S)
7) A∨C, B∨C (5. ∨+)
8) (A∨C)∧(B∨C) (4. ∧+)
9) (A∨C)∧(B∨C) (2.5.6.8. ∨+)

⊣

1) (A∨C)∧(B∨C) (P)
2) A∨C,B∨C (1, ∧-)
3) ┐C→A,┐C→B (2, th33)
4) C∨┐C (th35)
5) ┐C (S)
6) A,B (3,5, →-)
7) A∧B (6, ∧+)
8) (A∧B)∨C (7, ∨+)
9) C (S)
10) (A∧B)∨C (8, ∨+)

11) (A∧B)∨C (5, 8, 9, 10, ∨-)

40. A∧(B∨C) ⊢⊣ (A∧B)∨(A∧C)

⊢:

1)	A∧(B∨C)		(P)
2)	A, B∨C		(∧-)
3)	¬B→C		(2. TH33)
4)		¬(A∧B)	(S)
5)		¬A∨¬B	(4. 摩根律)
6)		A→¬B	(5. Th34)
7)		A	(2. ∈)
8)		¬B	(7. 6. →-)
9)		C	(3. 8. →-)
10)		A∧C	(7 9 ∧+)
11)	¬(A∧B)→(A∧C)		(4. 10. →+)
12)	(A∧B)∨(A∧C)		(11. TH33)

⊣:

12)	(A∧B)∨(A∧C)		(P)
13)		A∧B	(S)
14)		A, B	(13. ∧-)
15)		B∨C	(∨+)
16)		A∧(B∨C)	(∧+)
17)	(A∧C)		(S)
18)	A, C		(16. ∧-)
19)	B∨C		(∨+)
20)	A∧(B∨C)		(∧+)
21)	A∧(B∨C)		(13. 16. 17. 20. ∨-)

41. (A∨B)∧C ⊢⊣ (A∧C)∨(B∧C)

⊢

1)	(A∨B)∧C		(P)
2)	A∨B, C		(∧-)
3)	¬A→B		(TH33)
4)		¬(A∧C)	(S)
5)		¬A∨¬C	(摩根律)
6)		A→¬C	(TH33)
7)		C	(2. ∈)
8)		¬A	(6. 7. TH10)
9)		B	(3. →-)
10)		B∧C	(7. 9. ∧+)
11)	¬(A∧C)→(B∧C)		(4. 10. →+)
12)	(A∧C)∨(B∧C)		(11. TH33)

⊣

13)	(A∧C)∨(B∧C)		(P)
14)		A∧C	(S)
15)		A, C	(14. ∧-)
16)		A∨B	(15. ∨+)
17)		(A∨B)∧C	(15. 16. ∧+)

18) B∧C (S)
19) B, C (18. ∧-)
20) A∨B (19. ∨+)
21) (A∨B)∧C (18. 19. ∧+)
22) (A∨B)∧C (∨-)

42. A→B∧C ⊢⊣ (A→B)∧(A→C)
⊢
1) A→B∧C (P)
2) A (S)
3) B∧C (2, →-)
4) B, C (3, ∧+)
5) A→B (2, 4, →+)
6) A→C (2, 4, →+)
7) (A→B)∧(A→C) (5, 6, ∧+)

⊣
1) (A→B)∧(A→C) (P)
2) A→B, A→C (1, ∧-)
3) A (S)
4) B, C (2, 3, →-)
5) B∧ C (4, ∧+)
6) A→B∧C (2, 3, 5, ┐)

43. A→B∨C ⊢⊣ (A→B)∨(A→C)
⊢
1) A→B∨C (P)
2) ┐(A→B) (S)
3) A, ┐B (2, th22)
4) B∨C (1, 3, →-)
5) ┐B→C (4, th33)
6) C (3, 5, →-)
7) A→C (6, 肯定后件律)
8) ┐(A→B)→(A→C) (2, 7, →+)
9) (A→B)∨(A→C) (8, th33)

⊣
1) (A→B)∨(A→C) (P)
2) A→B (S)
3) A (S)
4) B (2, 3, →-)
5) B∨C (4, ∨+)
6) A→B∨C (3, 5, →+)
7) A→C (S)
8) A (S)
9) C (7, 8, →-)
10) B∨C (9, ∨+)
11) A→B∨C (8, 10, →+)

12) A→B∨C (2-11, ∨-)

44. A∧B→C ⊢⊣ (A→C)∨(B→C)

⊢:

1) A∧B→C (P)
2) ¬(A→C) (S)
3) A, ¬C (2, Th22)
4) B (S)
5) A∧B (3, 4, ∧+)
6) C (1, 5, →-)
7) B→C (4, 6, →+)
8) ¬(A→C)→(B→C) (2, 7, →+)
9) (A→C)∨(B→C) (8, th33)

⊣

1) (A→C)∨(B→C)
2) A→C (S)
3) A∧B (S)
4) A (3, ∧-)
5) C (2, 4, →-)
6) A∧B→C (3, 5, →+)
7) B→C (S)
8) A∧B (S)
9) B (8, ∧-)
10) C (7, 9, →-)
11) A∧B→C (8, 10, →+)
12) A∧B→C (2, 6, 7, 11, ∨-)

45. A∨B→C ⊢⊣ (A→C)∧(B→C)

⊢:

1) A∨B→C (P)
2) A (S)
3) A∨B (2, ∨+)
4) C (1, 3, →-)
5) A→C (2, 4, →+)
6) B (S)
7) A∨B (6, ∨+)
8) C (1, 7, →-)
9) B→C (6, 8, →+)
10) (A→C)∧(B→C) (5, 10, ∧+)

⊣

1) (A→C)∧(B→C) (P)
2) A→C, B→C (1, ∧-)
3) A∨B (S)
4) A (S)
5) C (2, 4, →-)
6) B (S)

7) C (2,6,→-)
8) C (4-7,∨-)
9) A∨B→C (3,8,→-)

46. A↔B ⊢⊣ (A→B)∧(B→A)
47. A↔¬ A ⊢ B
48. A↔B, B↔C ⊢A↔C
49. A↔B ⊢⊣ ¬ B↔¬ A
50. A↔¬ B ⊢⊣ B↔¬ A
51. A↔¬ B ⊢⊣ ¬ (B↔A)
52. A↔B ⊢⊣ (¬ A∨B)∧(¬ B∨A)
53. A↔B ⊢⊣ (A∧B)∨(¬ B∧¬ A)
C↔B ⊢⊣ (C∧B)∨(¬ B∧¬ C)

⊢:
1) C↔B
2) ¬ (C∧B)
3) C→¬ B
4) ¬ B↔B
5) ¬ B∧¬ C
6) ¬ (C∧B)→(¬ B∧¬ C)
7) (C∧B)∨(¬ B∧¬ C)

⊣
1) (C∧B)∨(¬ B∧¬ C)
2) (C∧B)
3) C↔B
4) (¬ B∧¬ C)
5) C↔B
6) C↔B

54. (A↔B)↔C ⊢⊣ A↔(B↔C)

55. ⊢(A↔B)∨(A↔¬ B)
56. A ⊢A∧B↔B
57. A→(B→C) ⊢B↔(B∧(A↔A∧C))
58. A↔(B→¬ C)→ ¬ A ⊢C
59. (A↔B)∧(C↔D) ⊢ A∧C↔B∧D

谓词逻辑推理规则：
13 ∀xA(x) ⊢ A(a) （∀-）（∀消去律）
14 如果Γ⊢A 且 a 不在Γ中出现，则Γ⊢∀xA(x) （∀+）（∀引入律）
15 A(a) ⊢ B 且 a 不在 B 中出现，则∃xA(x)⊢B （∃-）（∀消去律）
16 A(a) ⊢ ∃xA(x),A(x)是由 A(a)中的 a 的部分出现替换为 x 而得 (∃+)

1.
2. ∀xA(x) ⊢⊣ ∀yA(y)
1) ∀xA(x) (P)

2) A(a) (∀-) a∉1
3) ∀yA(y) (∀+)

3. ∃xA(x) ⊢ ∃yA(y)
1) ∃xA(x) (P)
2) A(a) (S)a∉3
3) ∃yA(y) (∃+)
4) ∃yA(y) (∃-)

4. ∀x∀yA(x, y) ⊢ ∀y∀xA(x, y)
1) ∀x∀yA(x, y) (P)
2) ∀yA(a, y) (∀-) a∉1
3) A(a, b) (∀-) b∉1, 2
4) ∀xA(x, b) (∀+)
5) ∀y∀xA(x, y) (∀+)

5. ∃x∃yA(x, y) ⊢ ∃y∃xA(x, y)
1) ∃x∃yA(x, y) (P)
2) ∃yA(a, y) (S) a∉1, 5
3) A(a, b) (S) b∉1, 5, 2
4) ∃xA(x, b) (∃+)
5) ∃y∃xA(x, y) (∃+)
6) ∃y∃xA(x, y) (∃-)
7) ∃y∃xA(x, y) (∃-)

6. ∀xA(x) ⊢ ∃xA(x)
1) ∀xA(x) (P)
2) A(a) (∀-)
3) ∃xA(x) (∃+)

7. ∃x∀yA(x, y) ⊢ ∀x∃yA(x, y)
1) ∃x∀yA(x, y) (P)
2) ∀yA(a, y) (S) a∉5
3) A(a, b) (∀-) b∉1, 2
4) ∃yA(a, y) (∃+)
5) ∀x∃yA(x, y) (∀+)
6) ∀x∃yA(x, y) (∃-)

8. ∀xA(x) ⊢ ¬ ∃x¬ A(x)
⊢
1) ∀xA(x) (P)
2) ∃x¬ A(x) (S)
3) ¬ A(a) (S) a∉1, 2, 7
4) A(a) (∀-)
5) ¬ ∃x¬ A(x) (th5)
6) ¬ ∃x¬ A(x) (∃-)
7) ¬ ∃x¬ A(x) (¬ +)

⊣

1 ¬ ∃x¬ A(x)		(P)
2	¬ A(a)	(S)
3	∃x¬ A(x)	(∃+)
4 A(a)		(1, 2, 3, ¬)
5 ∀xA(x)		(∀+)

9. ∃xA(x) ⊢⊣ ¬ ∀x¬ A(x)

⊢

1) ∃xA(x)		(S)
2)	A(a)	(S) a∉5
3)	∀x¬ A(x)	(S)
4)	¬ A(a)	(∀−)
5)	¬ ∀x¬ A(x)	(¬ +)
6) ¬ ∀x¬ A(x)		(∃−)

⊣

1 ¬ ∀x¬ A(x)		(P)
2	¬ ∃xA(x)	(S)
3	A(a)	(S) a∉1, 2
4	∃xA(x)	(∃+)
5	¬ A(a)	(3, 2, 4, ¬ +)
6	∀x¬ A(x)	(∀+)
7 ∃xA(x)		(2, 1, 4, ¬)

10. ∀x¬ A(x) ⊢⊣ ¬ ∃xA(x)

⊢

1) ∀x¬ A(x)			(P)
2)	∃xA(x)		(S)
3)		A(a)	(S) a∉1, 2
4)		¬ A(a)	(∀−)
5)		¬ ∃xA(x)	(th5)
6)	¬ ∃xA(x)		(∃−)
7) ¬ ∃xA(x)			(¬ +)

⊣

1) ¬ ∃xA(x)		(S)
2)	A(a)	(S)
3)	∃xA(x)	(∃+)
4) ¬ A(a)		(¬ +)
5) ∀x¬ A(x)		(∀+)

11. ∃x¬ A(x) ⊢⊣ ¬ ∀xA(x)

⊢

1 ∃x¬ A(x)		(S)
2	¬ A(a)	(S) a∉5
3	∀xA(x)	(S)

4 A(a) (∀-)
5 ¬ ∀xA(x) (¬ +)
6 ¬ ∀xA(x) (∃-)

⊣
1)¬ ∀xA(x) (P)
2) ¬ ∃x¬ A(x) (S)
3) ∀xA(x) (th8)
4)∃x¬ A(x) (1,3,¬)

12. ∀x(A(x)→B(x)),∀xA(x) ⊢ ∀xB(x)
1) ∀x(A(x)→B(x)) (P)
2) ∀xA(x) (P)
3) A(a)→B(a) (∀-)
4) A(a) (∀-)
5) B(a) (→-)
6) ∀xB(x) (∀+)

13. ∀x(A(x)→B(x)),∃xA(x) ⊢ ∃xB(x)
1) ∀x(A(x)→B(x)) (P)
2) ∃xA(x) (P)
3) A(a) (S)
4) A(a)→B(a) (∀-)
5) B(a) (→-)
6) ∃xB(x) (∃+)
7) ∃xB(x) (∃-)

14. ∀x(A(x)→B(x)),∀x(B(x)→C(x)) ⊢ ∀x(A(x)→C(x))
1) ∀x(A(x)→B(x)) (P)
2) ∀x(B(x)→C(x)) (P)
3) A(a)→B(a) (∀-)
4) B(a)→C(a) (∀-)
5) A(a)→C(a) (Th2.3)
6) ∀x(A(x)→C(x)) (∀+)

15. A→∀xB(x) ⊢⊣ ∀x(A→B(x)) x∉A
⊢
1) A→∀xB(x) (P)
2) A (S)
3) ∀xB(x) (→-)
4) B(a) (∀-) a∉1
5) A→B(a) (→+)
6) ∀x(A→B(x) (∀+)

⊣
1) ∀x(A→B(x) (P)
2) A→B(a) (∀-)a∉1

3) A (S)
4) B(a) (→-)
5) ∀xB(x) (∀+)
6) A→∀xB(x) (→+)

16. A→∃xB(x) ⊢⊣ ∃x(A→B(x)) x∉A

⊢

1) A→∃xB(x) (P)
2) ¬ ∃x(A→B(x)) (S)
3) ∀X¬ (A→B(x)) (TH10)
4) ¬ (A→B(a)) (∀-)
5) A,¬ B(a) (TH22)
6) ∀x¬ B(x) (∀+)
7) ¬ ∃xB(x) (TH10)
8) ∃xB(x) (1,5,→-)
9) ∃x(A→B(x)) (¬)

⊣

1) ∃x(A→B(x)) (P)
2) A→B(a) (S)a∉1
3) A (S)
4) B(a) (2,3,→-)
5) ∃xB(x) (∃+)
6) A→∃xB(x) (→+)
7) A→∃xB(x) (∃-)

17. ∀xA(x)→B ⊢⊣ ∃x(A(x)→B) x∉B

⊢

1) ∀xA(x)→B (P)
2) ¬ ∃x(A(x)→B) (S)
3) ∀x¬ (A(x)→B) (th10)
4) ¬ (A(a)→B) (∀-) a∉1,2
5) A(a),¬ B (th22)
6) ∀xA(x) (∀+)
7) B (2,5,7,→-)
8) ∃x(A(x)→B) (¬)

⊣

1) ∃x(A(x)→B) (P)
2) A(a)→B (S) a∉1,6
3) ∀xA(x) (S)
4) A(a) (∀-)
5) B (→-)
6) ∀xA(x)→B (→+)
7) ∀xA(x)→B (∃-)

18. ∃xA(x)→B ⊢⊣ ∀x(A(x)→B) x∉B

⊢

1) ∃xA(x)→B
2) A(a) (S) a∉1
3) ∃xA(x) (∃+)
4) B (→−)
5) A(a)→B (→+)
6) ∀x(A(x)→B) (∀+)

⊣

1) ∀x(A(x)→B)) (P)
2) ¬ (∃xA(x)→B) (S)
3) ∃xA(x),¬ B (Th22)
4) A(a)→B (∀−)a∉1
5) ¬ A(a) (Th10)
6) ∀x¬ A(x) (∀+)
7) ¬ ∃xA(x) (Th10 谓词逻辑的)
8) ∃xA(x)→B (¬)

19. A∧∀xB(x) ⊢⊣ ∀x(A∧B(x)) x∉A

⊢

1)A→∀xB(x) (P)
2) A (S)
3) ∀xB(x) (→−)
4) B(a) (∀−)a∉1,2
5)A→B(a) (2,4,→+)
6)∀x(A→B(x)) (∀+)

⊣

1)∀x(A→B(x)) (P)
2)A→B(a) (∀−)a∉1
3) A (S)
4) B(a) (→−)
5) ∀xB(x) (∀+)
6)A→∀xB(x) (→+)

20. A∧∃xB(x) ⊢⊣ ∃x(A∧B(x)) x∉A

⊢

1) A∧∃xB(x) (P)
2) A,∃xB(x) (∧−)
3) B(a) (S) a∉1,5
4) A∧B(a) (∧+)
5) ∃x(A∧B(x)) (∃+)
6) ∃x(A∧B(x)) (∃−)

⊣

1) ∃x(A∧B(x)) (P)
2) A∧B(a) (S) a∉1,5
3) A,B(a) (∧−)
4) ∃xB(x) (∃+)
5) A∧∃xB(x) (∧+)
6) A∧∃xB(x) (∃−)

21. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash \forall x(A(x) \wedge B(x))$

$\vdash$

1) $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ (P)
2) $\forall xA(x), \forall xB(x)$ ($\wedge$-)
3) $A(a), B(a)$ ($\forall$-)
4) $A(a) \wedge B(a)$ ($\wedge$+)
5) $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ ($\forall$+)

$\dashv$

1) $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ (P)
2) $A(a) \wedge B(a)$ ($\forall$-)
3) $A(a), B(a)$ ($\wedge$-)
4) $\forall xA(x), \forall xB(x)$ ($\forall$+)
5) $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ ($\wedge$+)

22. $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y) \vdash \exists x\exists y(A(x) \wedge B(y))$

$\vdash$

1) $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y)$ (P)
2) $\exists xA(x), \exists yB(y)$ ($\wedge$-)
3) $A(a)$ (s) $a \notin 1,9$
4) $\exists yB(y)$ ($\in$)
5) $B(b)$ (s) $b \notin 1,3,8$
6) $A(a) \wedge B(b)$ ($\wedge$+)
7) $\exists y(A(a) \wedge B(y))$ ($\exists$+)
8) $\exists x\exists y(A(x) \wedge B(y))$ ($\exists$+)
9) $\exists x\exists y(A(x) \wedge B(y))$ ($\exists$-)
10) $\exists x\exists y(A(x) \wedge B(y))$ ($\exists$-)

$\dashv$

1) $\exists x\exists y(A(x) \wedge B(y))$ (P)
2) $\exists y(A(a) \wedge B(y))$ (S) $a \notin 1,6$
3) $A(a) \wedge B(b)$ (S) $b \notin 1,2,7$
4) $A(a), B(b)$ ($\wedge$-)
5) $\exists xA(x), \exists yB(y)$ ($\exists$+)
6) $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y)$ ($\wedge$+)
7) $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y)$ ($\exists$-)
8) $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y)$ ($\exists$-)

23. $\forall xA(x) \wedge \forall yB(y) \vdash \forall x\forall y(A(x) \wedge B(y))$

$\vdash$

1) $\forall xA(x) \wedge \forall yB(y)$ (P)
2) $\forall xA(x), \forall yB(y)$ ($\wedge$-)
3) $A(a), B(b)$ ($\forall$-)
4) $A(a) \wedge B(b)$ ($\wedge$+)
5) $\forall y(A(x) \wedge B(y)$ ($\forall$+)
6) $\forall x\forall y(A(x) \wedge B(y))$ ($\forall$+)

$\dashv$

1) $\forall x\forall y(A(x) \wedge B(y))$ (P)

2) ∀y(A(a)∧B(y)　　(∀-)　a∉1
3) A(a)∧B(b)　　(∀-)　b∉1
4) A(a),B(b)　　(∧-)
5) ∀xA(x), ∀yB(y)　　(∀+)
6) ∀xA(x)∧∀yB(y)　　(∧+)

24. ∀xA(x)∧∃yB(y) ⊢⊣ ∀x∃y(A(x)∧B(y))

⊢

1) ∀xA(x)∧∃yB(y)　　(P)
2) ∀xA(x)　　(∧-)
3) ∃yB(y)　　(∧-)
4) B(b)　　(S)　b∉1,8
5) A(a)　　(2,∀-)　a∉1
6) A(a)∧B(b)　　(∧+)
7) ∃y(A(a)∧B(y))　　(6,∃+)
8) ∀x∃y(A(x)∧B(y))　　(7,∀+)
9) ∀x∃y(A(x)∧B(y))　　(∃-)

⊣

1) ∀x∃y(A(x)∧B(y))　　(p)
2) ∃y(A(a)∧B(y))　　(∀-) a∉1
3) A(a)∧B(b)　　(s) b∉1,4,5
4) A(a),B(b)　　(∧-)
5) ∃yB(y)　　(∃+)
6) A(a),∃yB(y)　　(∃-)
7) ∀xA(x)　　(∀+)
8) ∀xA(x)∧∃yB(y)　　(∧+)

25. ∃xA(x)∧∀yB(y) ⊢⊣ ∃x∀y(A(x)∧B(y))

⊢

1) ∃xA(x)∧∀yB(y)　　(P)
2) ∃xA(x), ∀yB(y)　　(∧-)
3) B(b)　　(∀-)b∉1
4) A(a)　　(S) a∉1,7
5) A(a)∧B(b)　　(∧+)
6) ∀y(A(a)∧B(y))　　(∀+)
7) ∃x∀y(A(x)∧B(y))　　(∃+)
8) ∃x∀y(A(x)∧B(y))　　(∃-)

⊣

1) ∃x∀y(A(x)∧B(y))　　(P)
2) ∀y(A(a)∧B(y))　　(S) a∉1,7
3) A(a)∧B(b)　　(∀-)b∉1
4) A(a), B(b)　　(∧-)
5) ∀yB(y)　　(∀+)
6) ∃xA(x)　　(∃+)
7) ∃xA(x)∧∀yB(y)　　(∧+)
8) ∃xA(x)∧∀yB(y)　　(∃-)

26. $\exists xA(x) \wedge \forall yB(y) \vdash \exists x\forall y(A(x) \wedge B(y))$

$\vdash$

1)	$\exists xA(x) \wedge \forall yB(y)$			(P)
2)	$\exists xA(x)$, $\forall yB(y)$			$(\wedge-)$
3)	$B(b)$			$(\forall-)b\notin 1$
4)		$A(a)$		(S) $a\notin 1,7$
5)		$A(a) \wedge B(b)$		$(\wedge+)$
6)		$\forall y(A(a) \wedge B(y))$		$(\forall+)$
7)		$\exists x\forall y(A(x) \wedge B(y))$		$(\exists+)$
8)	$\exists x\forall y(A(x) \wedge B(y))$			$(\exists-)$

$\dashv$

1)	$\exists x\forall y(A(x) \wedge B(y))$	(P)	
2)		$\forall y(A(a) \wedge B(y))$	(S) $a\notin 1,7$
3)		$A(a) \wedge B(b)$	$(\forall-)$ $b\notin 1$
4)		$A(a)$, $B(b)$	$(\wedge-)$
5)		$\forall yB(y)$	$(\forall+)$
6)		$\exists xA(x)$	$(\exists+)$
7)		$\exists xA(x) \wedge \forall yB(y)$	$(\wedge+)$
8)	$\exists xA(x) \wedge \forall yB(y)$	$(\exists-)$	

27. $A \vee \forall xB(x) \vdash \forall x(A \vee B(x))$ $x\notin A$

$\vdash$

1)	$A \vee \forall xB(x)$			(P)
2)		$\forall xB(x)$		(S)
3)		$B(b)$		$(\forall-)$ $b\notin 1,2,5$
4)		$A \vee B(b)$		$(\vee+)$
5)		$\forall x(A \vee B(x))$		$(\forall+)$
6)		A		(S)
7)		$A \vee B(b)$		$(\vee+)$ $b\notin 1,2,8$
8)		$\forall x(A \vee B(x))$		$(\forall+)$
9)	$\forall x(A \vee B(x))$			$(\vee-)$

$\dashv$

1)	$\forall x(A \vee B(x))$			(P)
2)	$A \vee B(b)$			$(\forall-)b\notin 1$
3)			$B(b)$	(S)
4)			$\forall xB(x)$	$(\forall+)$
5)			$A \vee \forall xB(x)$	$(\vee+)$
6)		A		(S)
7)		$A \vee \forall xB(x)$		$(\vee+)$
8)	$A \vee \forall xB(x)$			$(\vee-)$

28. $A \vee \exists xB(x) \vdash \exists x(A \vee B(x))$ $x\notin A$

$\vdash$

1) A∨∃xB(x) (P)
2) ∃xB(x) (S)
3) B(b) (S) b∉1,2,5,6
4) A∨B(b) (∨+)
5) ∃x(A∨B(x)) (∃+)
6) ∃x(A∨B(x)) (∃−)
7) A (S)
8) A∨B(b) (∨+)
9) ∃x(A∨B(x)) (∃+)
10) ∃x(A∨B(x)) (∨−)

⊣

1) ∃x(A∨B(x)) (P)
2) A∨B(b) (S) b∉1,8
3) B(b) (S)
4) ∃xB(x) (∃+)
5) A∨∃xB(x) (∨+)
6) A (S)
7) A∨∃xB(x) (∨+)
8) A∨∃xB(x) (∨−)
9) A∨∃xB(x) (∃−)

29. ∀xA(x)∨∀xB(x) ⊢ ∀x(A(x)∨B(x))

⊢

1) ∀xA(x)∨∀xB(x) (P)
2) ∀xB(x) (S)
3) B(b) (∀−) b∉1,2
4) A(b)∨B(b) (∨+)
5) ∀x(A(x)∨B(x)) (∀+)
6) ∀xA(x) (S)
7) A(b) b∉1,6
8) A(b)∨B(b) (∨+)
9) ∀x(A(x)∨B(x)) (∀+)
10) ∀x(A(x)∨B(x)) (∨−)

30. ∃xA(x)∨∃xB(x) ⊢⊣ ∃x(A(x)∨B(x))

⊢

1) ∃xA(x)∨∃xB(x) (P)
2) ∃xA(x) (S)
3) A(a) (S) a∉1,2,5
4) A(a)∨B(a) (3, ∨+)
5) ∃x(A(x)∨B(x)) (4,∃+)
6) ∃x(A(x)∨B(x)) (3,∃−)
7) ∃xB(x) (S)
8) B(a) (S) a∉5
9) A(a)∨B(a) (8, ∨+)
10) ∃x(A(x)∨B(x)) (9,∃+)
11) ∃x(A(x)∨B(x)) (8,10,∃−)

12) ∃x(A(x)∨B(x)) (2,6,7,11, ∨-)

31. ∃xA(x)∨∃yB(y) ⊢ ∃x∃y(A(x)∨B(y))

⊢

1) ∃xA(x)∨∃xB(x) (P)
2) ∃xA(x) (S)
3) A(a) (S) a∉1,2,5
4) A(a)∨B(b) (3, ∨+)
5) ∃y(A(a)∨B(y)) (4,∃+)
6) ∃x∃y(A(x)∨B(y)) (4,∃+)
7) ∃x∃y(A(x)∨B(y)) (3,∃-)
8) ∃xB(x) (S)
9) B(a) (S) a∉5
10) A(a)∨B(a) (8, ∨+)
11) ∃y(A(a)∨B(y)) (4,∃+)
12) ∃x∃y(A(x)∨B(y)) (9,∃+)
13) ∃x∃y(A(x)∨B(y)) (8,10,∃-)
14) ∃x∃y(A(x)∨B(y)) (2,6,7,11, ∨-)

32. ∀xA(x)∨∀yB(y) ⊢ ∀x∀y(A(x)∨B(y))

⊢

1) ∀xA(x)∨∀yB(y) (P)
2) ∀xA(x) (S)
3) A(a) a∉1,2
4) A(a)∨B(b) (∨+)b∉1,2
5) ∀y(A(a)∨B(y)) (∀+)
6) ∀x∀y(A(x)∨B(y)) (∀+)
7) ∀yB(y) (S)
8) B(b) (∀-)b∉1,7
9) A(a)∨B(b) (∨+)a∉1,7
10) ∀y(A(a)∨B(y)) (∀+)
11) ∀x∀y(A(x)∨B(y)) (∀+)
12) ∀x∀y(A(x)∨B(y)) (∨-)

⊣

1) ∀x∀y(A(x)∨B(y)) (P)
2) ∀y(A(a)∨B(y)) (∀-)
3) A(a)∨B(b) (∀-)
4) ¬∀xA(x) (S)
5) ∃x¬A(x) (Th8 谓词)
6) ¬A(a) (S) a∉1,4
7) ¬A(a)→B(b) (Th33)
8) B(b) (→-)
9) ∀yB(y) (∀+)
10) ∀yB(y) (∃-)
11) ¬∀xA(x)→∀yB(y) (→+)
12) ∀xA(x)∨∀yB(y) (Th33)

33. ∀xA(x)∨∃yB(y) ⊢ ∀x∃y(A(x)∨B(y))

⊢

1)	∀xA(x)∨∃yB(y)			(P)
2)			∀xA(x)	(S)
3)			A(a)	(∀-)
4)			A(a)∨B(b)	(∨+)
5)			∃y(A(a)∨B(y))	(∃+)
6)			∀x∃y(A(x)∨B(y))	(∀+)
7)		∃yB(y)		(S)
8)			B(b)	(S)
9)			A(a)∨B(b)	(∨+)
10)			∃y(A(a)∨B(y))	(∃+)
11)			∀x∃y(A(x)∨B(y))	(∀+)
12)		∀x∃y(A(x)∨B(y))		(∃-)
13)	∀x∃y(A(x)∨B(y))			(∨-)

⊣

1)	∀x∃y(A(x)∨B(y))	(P)	
2)	∃y(A(a)∨B(y))	(∀-)	a∉1
3)	¬ (∀xA(x)∨∃yB(y))	(s)	
4)	¬ ∀xA(x)∧¬ ∃yB(y)	(th)	
5)	¬ ∀xA(x),¬ ∃yB(y)	(∧-)	
6)	∀y¬ B(y)	(th10)	
7)	∃x¬ A(x)	(th10)	
8)	¬ A(a)	(s)	
9)	¬ B(b)	(∀-)	b∉1,8
10)	¬ A(a)∧¬ B(b)	(∧+)	
11)	∀y¬ (A(a)∨¬ B(y))	(∀+)	
12)	¬ ∃y(A(a)∨B(y))	(th10)	
13)	¬ ∃y(A(a)∨B(y))	(∃-)	
14)	∀xA(x)∨∃yB(y)	(¬)	

⊣ 方法二：

1)	∀x∃y(A(x)∨B(y))	(P)	
2)	¬ ∃yB(y)	(S)	
3)	¬ A(a)	(S)	a∉1,2
4)	∀y¬ B(y)	(2,th10)	
5)	¬ B(b)	(4,∀-)	b∉1,2,3
6)	¬ A(a)∧¬ B(b)	(4,5,∧+)	
7)	¬ (A(a)∨B(b))	(6,th37)	
8)	∀y¬ (A(a)∨B(y))	(7,∀+)	
9)	¬ ∃y(A(a)∨B(y))	(8,th10)	
10)	∃y(A(a)∨B(y))	(1,∀-)	
11)	A(a)	(3,10,9, ¬)	
12)	∀xA(x)	(11,∀+)	
13)	¬ ∃yB(y)→ ∀xA(x)	(2,12,→+)	
14)	∀xA(x)∨∃yB(y)	(13,th33)	

34. ∃xA(x)∨∀yB(y) ⊢⊣ ∃x∀y(A(x)∨B(y))

⊢

1)	∃xA(x)∨∀yB(y)		(P)
2)		∃xA(x)	(S)
3)		A(a)	(S) a∉1,2,6
4)		A(a)∨B(b)	(∨+)
5)		∀y(A(x)∨B(y))	(∀+)
6)		∃x∀y(A(x)∨B(y))	(∃+)
7)		∃x∀y(A(x)∨B(y))	(∃−)
8)	∀yB(y)		(s)
9)	B(b)		(∀−) b∉1,8
10)	A(a)∨B(b)		(∨+)
11)	∀y(A(x)∨B(y))		(∀+)
12)	∃x∀y(A(x)∨B(y))		(∃+)
13)	∃x∀y(A(x)∨B(y))		(∨−)

⊣

1)	∃x∀y(A(x)∨B(y))		(P)
2)		∀y(A(a)∨B(y))	(S) a∉1,10
3)		A(a)∨B(b)	(∀−)b∉1,2
4)		¬∃xA(x)	(S)
5)		∀x¬A(x)	(Th10 谓词)
6)		¬A(a)	(∀−)
7)		¬A(a)→B(b)	(3,Th33)
8)		B(b)	(→−)
9)		∀yB(y)	(∀+)
10)	¬∃xA(x)→∀yB(y)		(→+)
11)	¬∃xA(x)→∀yB(y)		(∃−)
12)	∃xA(x)∨∀yB(y)		(Th33)

35. ∀x(A(x)↔B(x)) ⊢ ∀xA(x)↔∀xB(x)
36. ∃x(A(x)↔B(x)) ⊢ ∃xA(x)↔∃xB(x)

10)	∃x(A(x)↔B(x))		(P)
11)	A(a)↔B(a)		(S)
12)		∃xA(x)	(S)
13)		A(a)	(S)
14)		B(a)	(↔−)
15)		∃xB(x)	(∃+)
16)		∃xB(x)	(∃−)
17)	∃xB(x)		(S)
18)	B(a)		(S)
19)	A(a)		(↔−)
20)	∃xA(x)		(∃+)
21)	∃xA(x)		(∃−)
22)	∃xA(x)↔∃xB(x)		(↔+)
23)	∃xA(x)↔∃xB(x)		(∃−)