第2章　逻辑函数及其化简

逻辑函数?

按一定逻辑规律进行运算的代数。

基本逻辑运算

- 与逻辑
- 或逻辑
- 非逻辑

逻辑表达式（逻辑函数） $Z_i = f_i(x_1, x_2, \cdots x_n)$

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

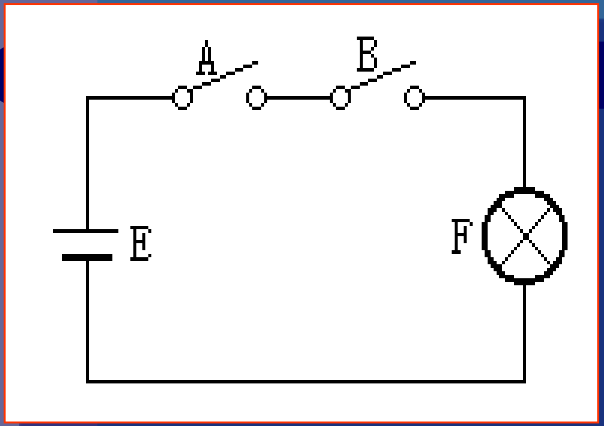
逻辑变量

用大写或小写字母表示。取值：**逻辑0、逻辑1。**

（**注意：**这里逻辑0和逻辑1不代表数值大小，仅表示相互矛盾、相互对立的两种逻辑状态）

1. 与逻辑

只有决定某一事件的所有条件全部具备，这一事件才能发生



与逻辑关系表

开关A	开关B	灯F
断	断	灭
断	合	灭
合	断	灭
合	合	亮

与逻辑真值表

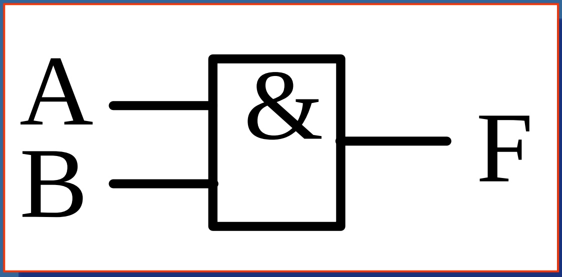
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

与逻辑运算符，也有用“×”、“∧”、“∩”、“&”表示

逻辑表达式

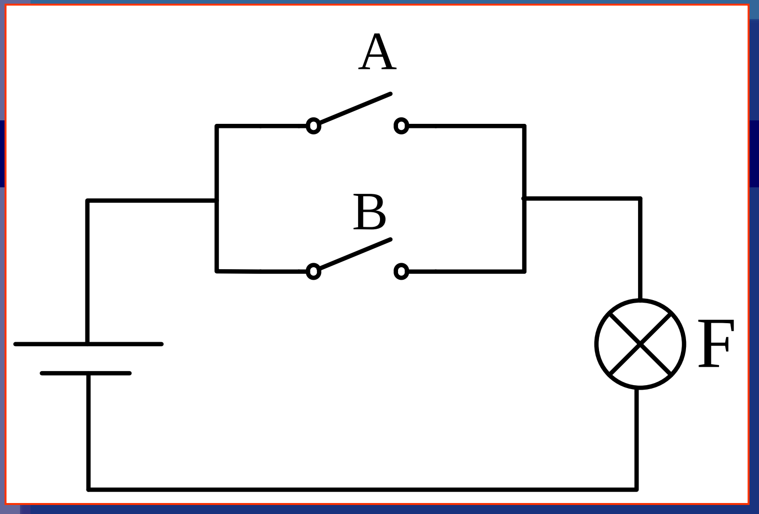
$$F = A \bullet B = AB$$

逻辑符号



2. 或逻辑

只有决定某一事件的有一个或一个以上具备，这一事件才能发生



或逻辑真值表

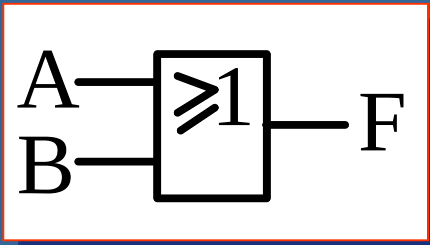
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

逻辑表达式

$F = A + B$

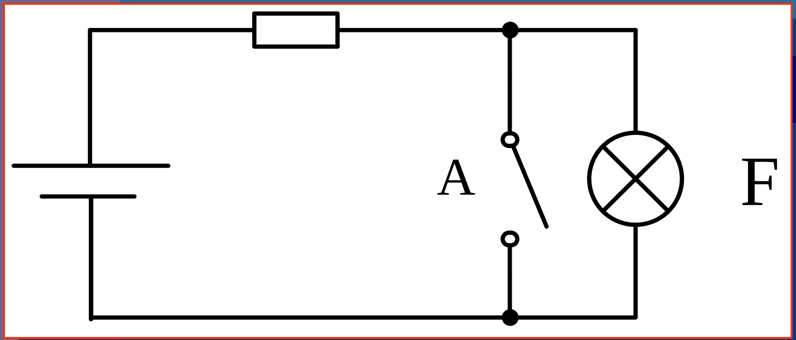
或逻辑运算符，也有用“∨”、“∪”表示

逻辑符号



3. 非逻辑

当决定某一事件的条件满足时，事件不发生；反之事件发生。



非逻辑真值表

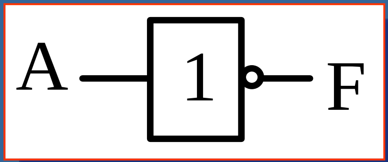
A	F
0	1
1	0

逻辑表达式

$$F=\overline{A}$$

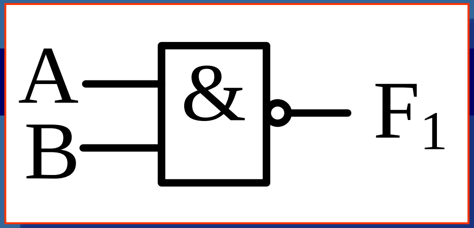
“—”非逻辑运算符

逻辑符号



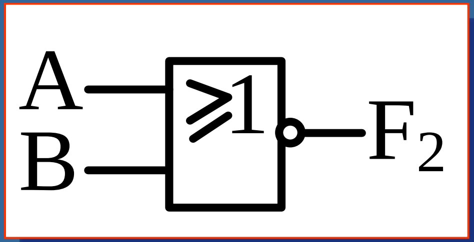
4. 复合逻辑

与非逻辑



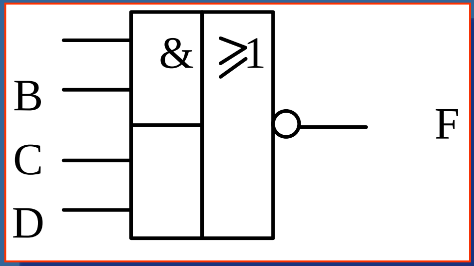
$F_1=\overline{AB}$

或非逻辑



$F_2=\overline{A+B}$

与或非逻辑



$F_3=\overline{AB+CD}$

5. 异或

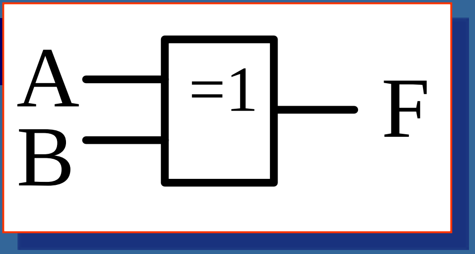
逻辑表达式

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F=A\oplus B=\bar{A}B+A\bar{B}$$

“$\oplus$”异或逻辑运算符

逻辑符号



6. 同或

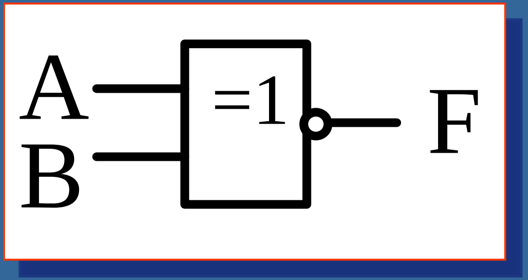
逻辑表达式

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$F=A\odot B=\overline{A\oplus B}=\bar{A}\bar{B}+AB$$

“$\odot$”同或逻辑运算符

逻辑符号



逻辑函数的定义：

输出变量

用有限个与、或、非逻辑运算符，按某种逻辑关系将逻辑变量A、B、C、. . . 连接起来，所得的表达式F = f（A、B、C、. . . ）称为逻辑函数。

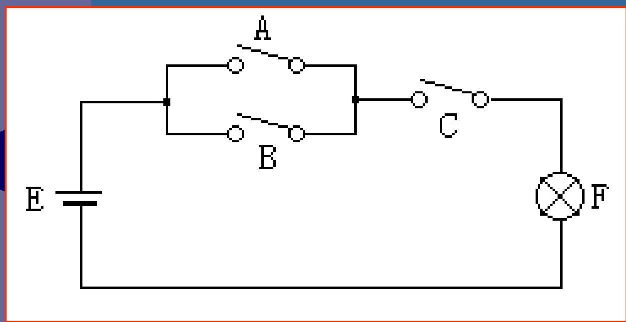
输入变量

（逻辑变量的取值：逻辑0、逻辑1。逻辑0和逻辑1不代表<u>数值大小</u>，仅表示相互矛盾、相互对立的<u>两种逻辑态）</u>

逻辑函数的表示方法

(1)真值表

（输入变量不同取值组合与函数值间的对应关系列成表格）



断“0” 合“1”

亮“1” 灭“0”

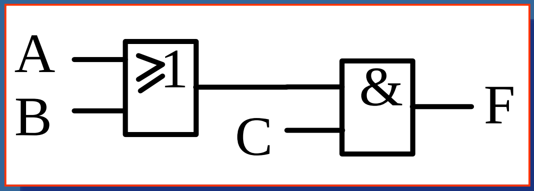
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(2)逻辑函数式

$$F=(A+B)C$$

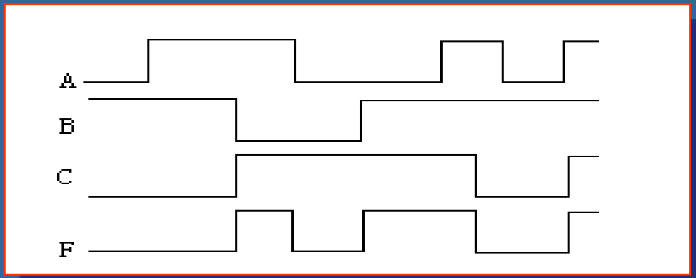
(3)逻辑图

（用逻辑符号来表示函数式的运算关系）



(4)波形图

（反映输入和输出波形变化的图形又叫时序图）



逻辑代数（布尔代数）的基本运算

与：$0\times0=0, 0\times1=0, 1\times0=0, 1\times1=1$

或：$0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1$

非：$\bar{0}=1\ ,\ \bar{1}=0$

x	y	$z=x\cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$z=x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	$z=\bar{x}$
0	1
1	0

布尔代数的基本公式

①	交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
②	结合律	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
③	分配律	$a+bc=(a+b)(a+c)$	$a(b+c)=ab+ac$
④	0—1律$_1$	$0+a=a$	$1\cdot a=a$
⑤	0—1律$_2$	$1+a=1$	$0\cdot a=0$
⑥	互补律	$a+\overline{a}=1$	$a\cdot\overline{a}=0$
⑦	吸收律$_1$	$a+ab=a$	$a(a+b)=a$
⑧	吸收律$_2$	$a+\overline{a}b=a+b$	$a(\overline{a}+b)=ab$
⑨	重叠律	$a+a=a$	$a\cdot a=a$
⑩	反演律	$\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b}$	$\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$
⑪	对合律	$\overline{\overline{a}}=a$	
⑫	包含律	$ab+\overline{a}c+bc=ab+\overline{a}c$	$(a+b)(\overline{a}+c)(b+c)=(a+b)(\overline{a}+c)$

公式的证明

- 吸收律$_1$： $a + ab = a$

$$a + ab = a \cdot 1 + ab = a(1 + b) = a \cdot 1 = a$$

- 吸收律$_2$： $a + \bar{a}b = a + b$

$$a + \bar{a}b = a + ab + \bar{a}b = a + b(a + \bar{a}) = a + b \cdot 1 = a + b$$

- 包含律： $ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c$

$$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c + bc(a + \bar{a}) = ab + \bar{a}c + abc + \bar{a}bc$$

$$= ab(1 + c) + \bar{a}c(1 + b) = ab + \bar{a}c$$

- 反演律：$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

a	b	$\overline{a+b}$	$\bar{a} \cdot \bar{b}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

异或与同或

a	b	a ⊕ b	a⊙b
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b \qquad a \odot b = ab + \bar{a}\bar{b}$$

$$a \oplus b = \overline{a \odot b} \qquad a \odot b = \overline{a \oplus b}$$

$$a \oplus b = b \oplus a \qquad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$a \cdot (b \oplus c) = ab \oplus ac$$

$$a \oplus 1 = \bar{a} \qquad a \oplus 0 = a$$

$$a \oplus a = 0 \qquad a \oplus \bar{a} = 1$$

布尔代数的三个规则

- 代入规则
- 对偶规则
- 反演规则

1、代入规则

任何一个含有某变量的等式，如果**等式**中所有出现此**变量**的位置均代之以一个**逻辑函数式**，则此等式依然成立。

BC替代B

利用反演律

例：$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

得 $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

由此反演律能推广到n个变量：

$$\overline{A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \bullet \overline{A_2} \bullet \ldots \bullet \overline{A_n}$$

2、反演规则

设x原变量，称$\overline{x}$为反变量

将一个逻辑函数 F 进行下列变换：

$\cdot \rightarrow +$，$+ \rightarrow \cdot$；

$0 \rightarrow 1$，$1 \rightarrow 0$

原变量 → 反变量，　反变量 → 原变量。

所得新函数表达式叫做*F*的反函数，用 $\overline{F}$ 表示。

例：求 $z = \bar{a}\,\bar{b} + \overline{\bar{a}\,b\,\bar{c}}\,d$ 的反函数。

$$\bar{z} = \overline{\bar{a}\,\bar{b} + \overline{\bar{a}\,b\,\bar{c}}\,d} = \overline{\bar{a}\,\bar{b}} \cdot \overline{\overline{\bar{a}\,b\,\bar{c}}\,d}$$

$$= (a + b)(\bar{a}\,b\,\bar{c} + \bar{d})$$

$$\bar{z} = (a + b)(\overline{a + \bar{b} + c} + \bar{d})$$

$$= (a + b)(\bar{a}\,b\,\bar{c} + \bar{d})$$

注意：用反演规则求反函数时，不能改变运算次序。

3、对偶规则

将一个逻辑函数 F进行下列变换：

·→＋，＋ →·

0 → 1，1 →0

所得新函数表达式叫做F 的对偶式，用 F_D 表示。

$$a\cdot b+\overline{a}\cdot c+b\cdot c=a\cdot b+\overline{a}\cdot c$$

对偶

$$(a+b)(\overline{a}+c)(b+c)=(a+b)(\overline{a}+c)$$

例：　$F=\overline{AB+\overline{A}C}+1\bullet B$

其对偶式

$$F_D=\overline{(A+B)\bullet(\overline{A}+C)}\bullet(0+B)$$

逻辑函数的化简

$$z_1 = abc + \bar{a} + \bar{b} = bc + \bar{a} + \bar{b} = c + \bar{a} + \bar{b}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}bc + abc = ab\bar{c} + a\bar{b}c + (\bar{a} + a)bc \\ &= ab\bar{c} + a\bar{b}c + bc = ab\bar{c} + (a\bar{b} + b)c \\ &= ab\bar{c} + (a + b)c = ab\bar{c} + ac + bc \\ &= ab + ac + bc \end{aligned}$$

$$z_3 = ab + \bar{a}c + \bar{b}c = ab + (\bar{a} + \bar{b})c = ab + \overline{ab}c = ab + c$$

$$F_1 = \overline{A}\,\overline{B} + AC + BC + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C}E = \overline{A}\,\overline{B} + (A+B)C + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C}E$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{\overline{A}\,\overline{B}}C + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C}E = \overline{A}\,\overline{B} + C + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C}E$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + C + \overline{B}\,\overline{D} + BE$$

$$F_2 = \overline{(A \oplus B)(B \oplus C)} = \overline{(A \oplus B)} + \overline{(B \oplus C)} = A \odot B + B \odot C$$

$$= AB + \overline{A}\,\overline{B} + BC + \overline{B}\,\overline{C} = AB + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC + \overline{B}\,\overline{C}$$

$$= AB + ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = AB + \overline{A}C + \overline{B}\,\overline{C}$$

$$G = A(A+B)(\overline{A}+C)(B+D)(\overline{A}+C+E+F)(\overline{B}+E)(D+E+F)$$

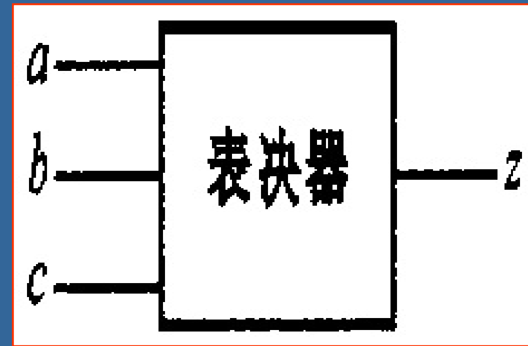
$$\begin{aligned}
G_D &= A + AB + \overline{A}C + BD + \overline{A}CEF + \overline{B}E + DEF \\
&= A + \overline{A}C + BD + \overline{A}CEF + \overline{B}E + DEF \\
&= A + C + BD + \overline{A}CEF + \overline{B}E + DEF \\
&= A + C + BD + \overline{B}E + DEF \\
&= A + C + BD + \overline{B}E(F+\overline{F}) + DEF \\
&= A + C + BD + \overline{B}EF + \overline{B}E\overline{F} + DEF \\
&= A + C + BD + \overline{B}EF + DEF + \overline{B}E\overline{F} \\
&= A + C + BD + \overline{B}EF + \overline{B}E\overline{F} \\
&= A + C + BD + \overline{B}E(F+\overline{F}) \\
&= A + C + BD + \overline{B}E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= AC(B+D)(\overline{B}+E) \\
&= AC(BE + \overline{B}D + DE) \\
&= AC(BE + \overline{B}D) \\
&= ACBE + AC\overline{B}D
\end{aligned}$$

公式法化简的缺点：
不直观，要求经验、技巧较高，难以判断是否最简。

应用实例

例1：三人表决电路



真值表

a	b	c	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

规则：

（1）a、b、c同意为1，不同意为0；

（2）议案通过z=1，不通过z=0；

（3）少数服从多数。

$$z = ab\overline{c} + a\overline{b}c + \overline{a}bc + abc$$

$$z = ab + ac + bc$$

$$z = (a+b+c)(a+b+\overline{c})(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+b+c)$$

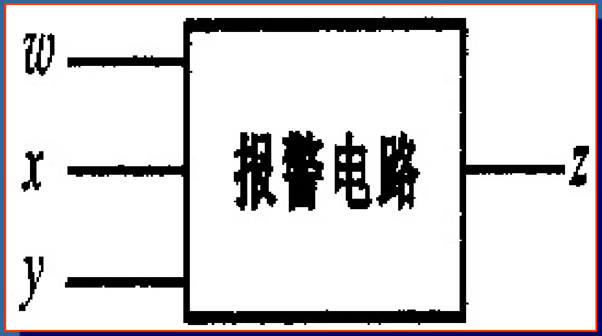
结论：相同逻辑的真值表是唯一的，但是可以用不同的逻辑表达式描述。

应用实例

例2：保险箱防盗报警电路

该报警电路接收w、x和y 3个输入。信号w来自一个控制开关，当开关闭合时，$w=1$，否则$w=0$；信号x 由放置保险箱的橱门的状态决定，若橱门是关闭的，则$x=0$，否则$x=1$；y由保险箱上的敏感元件产生，若保险箱打开，则$y=1$，否则$y=0$。在正常状态下，开关断开、橱门及保险箱均关闭。保险箱的正确操作顺序是，闭合控制开关→打开橱门→开启保险箱。此后，即关闭保险箱→关闭橱门→断开控制开关，恢复正常状态。如果未按上述正确顺序操作，则报警电路的输出$z=1$；如果操作正确，则z保持为0。

分析：



保险箱的启动次序？

打开： 闭合控制开关→打开橱门→开启保险箱

关闭： 关闭保险箱→关闭橱门→断开控制开关

输入输出变量的二值设定：

w：1——控制开关闭合，0——控制开关断开

x：1——橱门打开，0——橱门关闭

y：1——保险箱开启，0——保险箱关闭

z：1——报警，0——操作正常

真值表

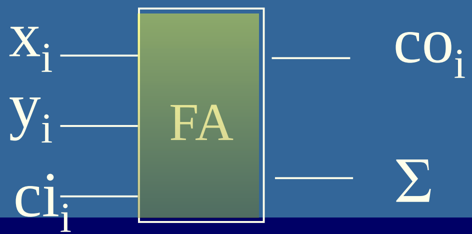
w	x	y	z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

逻辑表达式：

$$z = \overline{w}\,\overline{x}y + \overline{w}x\overline{y} + \overline{w}xy + w\overline{x}y$$

$$z = (w + x + y)(\overline{w} + x + y)(\overline{w} + \overline{x} + y)(\overline{w} + \overline{x} + \overline{y})$$

例3：一位二进制全加器



CI_i	x_i	y_i	CO_i	Σ_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

加数x_i、被加数y_i与前一位进位ci_i彼此间进行异或运算

和

$$\Sigma_i = x_i\overline{y_i}\,\overline{ci_i} + \overline{x_i}y_i\overline{ci_i} + \overline{x_i}\,\overline{y_i}ci_i + x_iy_ici_i$$

$$= x_i \oplus y_i \oplus ci_i$$

进位

$$co_i = x_iy_i\overline{ci_i} + x_i\overline{y_i}ci_i + \overline{x_i}y_ici_i + x_iy_ici_i$$

$$= x_iy_i + x_ici_i + y_ici_i$$

加数x_i、被加数y_i与前一位进位ci_i彼此间两两之积，然后“或”