第 6 章 第 2 节

1．解：$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$r(A)=4.$

2．（1）解：$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，

则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=10,\ \lambda_2=1$（二重）. 对 $\lambda_1=10$，解方程组

$$\left(10E-A\right)X=\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-\frac{1}{2},-1,1\right]^T$，标准化得到 $q_1=\frac{1}{3}\left[-1,-2,2\right]^T$. 对于 $\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[-2,1,0\right]^T$，$\xi_3=\left[2,0,1\right]^T$，标准化得到 $q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-2,1,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\left[2,4,5\right]^T$.

取 $T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$，则 T 为正交矩阵，且 $X=TY$，可得二次型的标准形为：$f=10y_1^2+y_2^2+y_3^2$，规范形为：$f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

（2）解：$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，

则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$（二重）．对 $\lambda_1=-1$，解方程组

$$\left(-E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-1,0,1\right]^T$，标准化得到 $q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-1,0,1\right]^T$．对于 $\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[0,1,0\right]^T,\ \xi_3=\left[1,0,1\right]^T$，标准化得到 $q_2=\left[0,1,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1,0,1\right]^T$．

取 $T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则 T 为正交矩阵，且 $X=TY$，可得二次型的标准形为：$f=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$，规范形为：$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$．

3.（1）解：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\frac{25}{4}x_2^2-3x_2x_3$$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\frac{25}{4}\left(x_2+\frac{6}{25}x_3\right)^2-\frac{9}{25}x_3^2,$$

则$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{5}{2}x_2, \\ y_2 = x_2 + \dfrac{6}{25}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即$Y = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$，有标准形 $f = y_1^2 - \dfrac{25}{4}y_2^2 - \dfrac{9}{25}y_3^2$，可逆线性变换为：$X = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\dfrac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$

（2）解：$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2,$$

则$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$，有标准形 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2$，可逆线性变换为：$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$.

第 3 节

4. （1）解：$f(x_1, x_2, x_3) = 5\left(x_1^2 - \dfrac{4}{5}x_1x_2\right) + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3$

$$= 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2\right)^2 + \frac{26}{5}x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2\right)^2 + \frac{26}{5}\left(x_2 - \frac{5}{13}x_3\right)^2 + \frac{42}{13}x_3^2,$$

则有标准形 $f = 5y_1^2 + \dfrac{26}{5}y_2^2 + \dfrac{42}{13}y_3^2$，故此二次型是正定的.

（2）解：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=10\left(x_1^2+\frac{4}{5}x_1x_2+\frac{12}{5}x_1x_3\right)+2x_2^2+x_3^2-28x_2x_3$

$$=10\left(x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{6}{5}x_3\right)^2+\frac{2}{5}x_2^2-\frac{67}{5}x_3^2-28x_2x_3$$

$$=10\left(x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{6}{5}x_3\right)^2+\frac{2}{5}\left(x_2-35x_3\right)^2+\left(490-\frac{67}{5}\right)x_3^2,$$

则有标准形 $f=10y_1^2+\frac{2}{5}y_2^2+\left(490-\frac{67}{5}\right)y_3^2$，故此二次型是正定的.

2. 证：$A+B$ 显然是对称矩阵，又因为若存在可逆矩阵 X，有 $X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX$，由于 A 和 B 都是正定的，则 X^TAX 和 X^TBX 正定，故 $X^T(A+B)X$ 正定，可得 $A+B$ 正定.

3. 证：不妨设 A 是 n 阶方阵，则设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征根，因为 A 是正定的，故有 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$. 又因为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$ 是 A^{-1} 的全部特征根，显然也有 $\frac{1}{\lambda_1}>0,\frac{1}{\lambda_2}>0,\cdots,\frac{1}{\lambda_n}>0$，则 A^{-1} 是正定的. 又因为 $A^*=A^{-1}|A|$，故 A^* 的所有特征根为 $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$，由于 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0$，故有 $\frac{|A|}{\lambda_1}>0,\frac{|A|}{\lambda_2}>0,\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}>0$，即 A^* 也正定.