第 3 节

1.（1）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & -1\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$，可对角化. 解方程组

$$\left(-E-A\right)X=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-1,\ -\dfrac{3}{2},\ 1\right]^T$. 对于 $\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[0,\ 1,\ 2\right]^T$. 对于 $\lambda_3=2$，解方程组

$$\left(2E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_3=\left[-1,\ 0,\ 1\right]^T$. 显然 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性无关的，

令 $P=\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3\right]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ -\dfrac{3}{2} & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$.

（2）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 12 & -6\\ -10 & \lambda+19 & -10\\ -12 & 24 & \lambda-13\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$（二重）. 对 $\lambda_1=-1$，解方程组

$$\left(-E-A\right)X=\begin{bmatrix}-8 & 12 & -6\\ -10 & 18 & -10\\ -12 & 24 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[\frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ 1\right]^T$.对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-6 & 12 & -6\\ -10 & 20 & -10\\ -12 & 24 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[2,\ 1,\ 0\right]^T$，$\xi_3=\left[-1,\ 0,\ 1\right]^T$. 显然$\xi_1,\xi_2,\xi_3$是线性无关的，

故A可对角化，令$P=\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2 & -1\\ \frac{5}{6} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$.

（3）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-4 & -2\\ -1 & 3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$，则$A$的特征值为$\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$（二重）. 由于$rank(\lambda_2E-A)=2,$ 所以$\lambda_2=3$的几何重数为$3-rank(\lambda_2E-A)=1<2$，故A不能对角化.

2. 解：由于$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 2-\lambda & \lambda-4 & 2\\ 0 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}$

$$\overset{r_2+r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-3 & 1\\ 0 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda-3)(\lambda-a)-3\right],$$

由B可知$\lambda_1=2$是A的一个二重特征值，则$\lambda_1=2$是$(\lambda-3)(\lambda-a)-3=0$的一个根，代入解得$a=5$，则$(\lambda-2)\left[(\lambda-3)(\lambda-a)-3\right]=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$. 又因为$\lambda_2=b$是另一个特征值，故$b=6$. 对$\lambda_2=6$，解方程组

$$\left(6E-A\right)X=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[1,-2,3]^T$. 对于$\lambda_1=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=[-1,1,0]^T,\xi_3=[1,0,1]^T$.

可令$P=[\xi_2,\xi_1,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}AP=B$. 又因为$P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$,

$$A=PBP^{-1},\text{则}A^n=\left[PBP^{-1}\right]^n=PB^nP^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&&\\&6^n&\\&&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5\cdot2^n-6^n&2^n-6^n&-2^n+6^n\\-2\cdot2^n+2\cdot6^n&2\cdot2^n+2\cdot6^n&2\cdot2^n-2\cdot6^n\\3\cdot2^n-3\cdot6^n&3\cdot2^n-3\cdot6^n&2^n+3\cdot6^n\end{bmatrix}.$$

第 4 节

1.（1）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$，所以$A$的特征值为$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$. 对$\lambda_1=-1$，解方程组

$$(-E-A)X=\begin{bmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[1,\ 2,\ 2]^T$，标准化得$q_1=\frac{1}{3}[1,\ 2,\ 2]^T$.对于$\lambda_2=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[2,\ 1,\ -2\right]^T$，标准化得$q_2=\frac{1}{3}\left[2,\ 1,\ -2\right]^T$.对于$\lambda_3=5$，解方程组

$$(5E-A)X=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_3=\left[2,\ -2,\ 1\right]^T$，标准化得$q_3=\frac{1}{3}\left[2,\ -2,\ 1\right]^T$.

取正交矩阵$T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$，使得$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{bmatrix}$.

（2）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-4\\-2&\lambda+2&-2\\-4&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+3)^2$，所以$A$的特征值为$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-3$（二重）. 对$\lambda_1=6$，解方程组

$$(6E-A)X=\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[2,\ 1,\ 2\right]^T$，标准化得$q_1=\frac{1}{3}\left[2,\ 1,\ 2\right]^T$.对于$\lambda_2=-3$，解方程组

$$(-3E-A)X=\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[1,-2,0\right]^T$，$\xi_3=\left[0,-2,1\right]^T$，对其标准正交化可得$q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[1,-2,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\left[-4,-2,5\right]^T$.

取正交矩阵$T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}$，使得$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix}6 & & \\ & -3 & \\ & & -3\end{bmatrix}$.

（3）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 2 & \lambda+3 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+8)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-8,\ \lambda_2=1$（二重）. 对$\lambda_1=-8$，解方程组

$$\left(-8E-A\right)X=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-\frac{1}{2},\ -1,\ 1\right]^T$，标准化得$q_1=\frac{1}{3}\left[-1,\ -2,\ 2\right]^T$.对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[-2,1,0\right]^T$，$\xi_3=\left[2,0,1\right]^T$，对其标准正交化可得 $q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-2,1,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\left[2,4,5\right]^T$.

取正交矩阵$T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}$，使得$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix}-8 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$.

3. 解：首先由ξ_1,ξ_2正交得$\xi_1^T\xi_2=a-1=0$，解得$a=1$. 因为ξ_1是$\lambda_1=-1$的一个特征向量，ξ_2是$\lambda_2=1$的一个特征向量，假设$\lambda_2=1$的另外一个特征向量是

$\xi_3=\left[x_1,x_2,x_3\right]^T$，则 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3=0, \end{cases}$ 解得 $\xi_3=\left[2,-1,1\right]^T$，则存在可逆矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

解得 $A=P\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

或者：

首先由 ξ_1,ξ_2 正交得 $\xi_1^T\xi_2=a-1=0$，解得 $a=1$. 因为 ξ_1 是 $\lambda_1=-1$ 的一个特征向量，ξ_2 是 $\lambda_2=1$ 的一个特征向量，分别将它们标准化得 $q_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1,1,-1\right]^T$，$q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[0,1,1\right]^T$，假设由 $\lambda_2=1$ 的另外一个特征向量标准正交化得到的单位向量是 $q_3=\left[x_1,x_2,x_3\right]^T$，则由正交关系得方程组

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_2+x_3=0, \end{cases}$$

解得 $x_3=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$，若 $x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}$，此时 $q_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[2,-1,1\right]^T$，则得正交矩阵

$U=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，此时对角矩阵为 $\Lambda=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$，则

$$A = U\Lambda U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

若 $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$，此时 $q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}[-2,1,-1]^T$，此时正交矩阵为

$$U = [q_1, q_2, q_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$，最后求得的 A 也是一样的.