一、命题逻辑推理规则：

1. $A_1, A_2 \ldots A_n \vdash A_i \ (i=1,2,\ldots,n)$ （∈）（包含律）
2. 如果 Γ ⊢Δ(Δ≠∅)且Δ ⊢A，则 Γ ⊢ A （τ）（传递律）
3. 如果 Γ ⊢A，则 Γ，Δ ⊢ A （τ_0）（增加前提律）
4. **如果 Γ，¬ A ⊢B，¬ B，则 Γ ⊢ A （¬ ）（反证律）**
5. A→B，A ⊢B （→−）（→消去律）
6. **如果 Γ，A ⊢ B，则 Γ ⊢ A→B （→+）（→引入律）**
7. A∧B ⊢A，B （∧−）（∧消去律）
8. A，B ⊢A∧B （∧+）（∧引入律）
9. **如果 Γ,A ⊢ C 且 Γ,B ⊢C，则 Γ,A∨B ⊢C （∨−）（∨消去律）**
10. A ⊢A∨B，B∨A （∨+）（∨引入律）
11. A↔B，A ⊢B 以及 A↔B，B ⊢A （↔−）（↔消去律）
12. 如果 Γ，A ⊢B 且 Γ，B ⊢A，则 Γ ⊢A↔B （↔+）（↔引入律）

二、谓词逻辑推理规则：

13. ∀xA(x) ⊢ A(a) （∀−）（∀消去律）
14. **如果 Γ ⊢ A(a) 且 a 不在 Γ 中出现，则 Γ ⊢ ∀xA(x) （∀+）（∀引入律）**
15. **Γ,A(a) ⊢ B 且 a 不在 Γ 和 B 中出现，则 Γ,∃xA(x) ⊢ B （∃−）（∀消去律）**
16. A(a) ⊢ ∃xA(x),A(x)是由 A(a)中 a 的部分出现替换为 x 而得 （∃+）

三、斜形证明：

1. A1 （前提或假设）
2. A2 （前提或假设）
3. A3 （前提或假设）
4. B1 （A1,A2,A3 ⊢ B1）
5. B2 （A1,A2,A3 ⊢ B2）
6. B3 （A1,A2 ⊢ B3）
7. B4 （A1,A2 ⊢ B4）
8. B5 （A1 ⊢ B5）

四、命题逻辑的定理：

1. A ⊢ A
2. **A ⊢ B→A （肯定后件律）**
3. A→B，B→C ⊢ A→C （→传递律）
4. A→（B→C），A→B ⊢ A→C
5. **A，¬ A ⊢ B （矛盾推出一切）**
6. **¬ A ⊢ A→B （否定前件律）**
7. **A ⊢ ¬ A→B**
8. ¬ ¬ A ⊢⊣ A
9. 如果 Γ，A ⊢ B，¬ B，则 Γ ⊢ ¬ A （¬ +）（归缪律）
10. A→B，¬ B ⊢ ¬ A

11. A→B ├ ¬ B→¬ A （逆否命题）
12. ¬ A→¬ B，B ├A
13. ¬ A→¬ B ├ B→A
14. A→¬ B，B ├ ¬ A
15. A→¬ B ├ B→¬ A
16. ¬ A→B，¬ B ├A
17. ¬ A→B ├ ¬ B→A
18. ¬ A→A ├A
19. A→¬ A ├ ¬ A
20. A→B，A→¬ B ├ ¬ A
21. A→B，¬ A→B ├ B
22. ¬ (A→B) ├ A，¬ B
23. 如果Γ，A ├ C 且Γ，B ├ C，则Γ，A∨B ├ C （∨-）
24. A∧B ├┤ B∧A
25. (A∧B)∧C ├A∧(B∧C)
26. A∧B ├┤ ¬ (A→¬ B)
27. ¬ (A∧B) ├┤ A→¬ B
28. A→B ├┤ ¬ (A∧¬ B)
29. ¬ (A→B) ├┤ A∧¬ B
30. ├ ¬ (A∧¬ A)
31. A∨B ├┤ B∨A
32. (A∨B)∨C ├┤ A∨(B∨C)
33. A∨B ├┤ ¬ A→B
34. A→B ├┤ ¬ A∨B
35. ├ ¬ A∨A
36. ¬ (A∧B) ├┤ ¬ A∨¬ B 摩根律
37. ¬ (A∨B) ├┤ ¬ A∧¬ B
38. A∨(B∧C) ├┤ (A∨B)∧(A∨C)
39. (A∧B)∨C ├┤ (A∨C)∧(B∨C)
40. A∧(B∨C) ├┤ (A∧B)∨(A∧C)
41. (A∨B)∧C ├┤ (A∧C)∨(B∧C)
42. A→B∧C ├┤ (A→B)∧(A→C)
43. A→B∨C ├┤ (A→B)∨(A→C)
44. A∧B→C ├┤ (A→C)∨(B→C)
45. A∨B→C ├┤ (A→C)∧(B→C)
46. A↔B ├┤ (A→B)∧(B→A)
47. A↔¬ A ├ B
48. A↔B，B↔C ├ A↔C
49. A↔B ├┤ ¬ A↔¬ B
50. A↔¬ B ├┤ ¬ A↔B
51. A↔¬ B ├┤ ¬ (A↔B)
52. A↔B ├┤ (¬ A∨B)∧(A∨¬ B)
53. A↔B ├┤ (A∧B)∨(¬ A∧¬ B)
54. (A↔B)↔C ├┤ A↔(B↔C)
55. ├(A↔B)∨(A↔¬ B)
56. A ├ A∧B↔B
57. A→(B→C) ├B↔(B∧(A↔A∧C))
58. A↔(B→¬ C)→ ¬ A ├C

59. $(A\leftrightarrow B)\wedge(C\leftrightarrow D) \vdash A\wedge C\leftrightarrow B\wedge D$
60.

五、谓词逻辑的定理：

1. $\Gamma, A(a)\vdash B$ 且 a 不在 Γ 和 B 中出现，则 $\Gamma, \exists xA(x)\vdash B$ （即$\exists$-）
2. $\forall xA(x) \dashv\vdash \forall yA(y)$
3. $\exists xA(x) \dashv\vdash \exists yA(y)$
4. $\forall x\forall yA(x,y) \dashv\vdash \forall y\forall xA(x,y)$
5. $\exists x\exists yA(x,y) \dashv\vdash \exists y\exists xA(x,y)$
6. $\forall xA(x)\vdash \exists xA(x)$
7. $\exists x\forall yA(x,y)\vdash \forall y\exists xA(x,y)$
8. $\forall xA(x) \dashv\vdash \neg\exists x\neg A(x)$
9. $\exists xA(x) \dashv\vdash \neg\forall x\neg A(x)$
10. $\forall x\neg A(x) \dashv\vdash \neg\exists xA(x)$
11. $\exists x\neg A(x) \dashv\vdash \neg\forall xA(x)$
12. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \forall xA(x)\vdash \forall xB(x)$
13. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \exists xA(x)\vdash \exists xB(x)$
14. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \forall x(B(x)\rightarrow C(x))\vdash \forall x(A(x)\rightarrow C(x))$
15. $A\rightarrow\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A\rightarrow B(x))$ $x\notin A$
16. $A\rightarrow\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A\rightarrow B(x))$ $x\notin A$
17. $\forall xA(x)\rightarrow B \dashv\vdash \exists x(A(x)\rightarrow B)$ $x\notin B$
18. $\exists xA(x)\rightarrow B \dashv\vdash \forall x(A(x)\rightarrow B)$ $x\notin B$
19. $A\wedge\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A\wedge B(x))$ $x\notin A$
20. $A\wedge\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A\wedge B(x))$ $x\notin A$
21. $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A(x)\wedge B(x))$
22. $\exists x(A(x)\wedge B(x))\vdash \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$
23. $\exists xA(x)\wedge\exists yB(y) \dashv\vdash \exists x\exists y(A(x)\wedge B(y))$
24. $\forall xA(x)\wedge\forall yB(y) \dashv\vdash \forall x\forall y(A(x)\wedge B(y))$
25. $\forall xA(x)\wedge\exists yB(y) \dashv\vdash \forall x\exists y(A(x)\wedge B(y))$
26. $\exists xA(x)\wedge\forall yB(y) \dashv\vdash \exists x\forall y(A(x)\wedge B(y))$
27. $A\vee\forall xB(x) \dashv\vdash \forall x(A\vee B(x))$ $x\notin A$
28. $A\vee\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A\vee B(x))$ $x\notin A$
29. $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\vdash \forall x(A(x)\vee B(x))$
30. $\exists xA(x)\vee\exists xB(x) \dashv\vdash \exists x(A(x)\vee B(x))$
31. $\exists xA(x)\vee\exists yB(y) \dashv\vdash \exists x\exists y(A(x)\vee B(y))$
32. $\forall xA(x)\vee\forall yB(y) \dashv\vdash \forall x\forall y(A(x)\vee B(y))$
33. $\forall xA(x)\vee\exists yB(y) \dashv\vdash \forall x\exists y(A(x)\vee B(y))$
34. $\exists xA(x)\vee\forall yB(y) \dashv\vdash \exists x\forall y(A(x)\vee B(y))$
35. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x))\vdash \forall xA(x)\leftrightarrow\forall xB(x)$
36. $\exists x(A(x)\leftrightarrow B(x))\vdash \exists xA(x)\leftrightarrow\exists xB(x)$
37. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x)), \forall x(B(x)\leftrightarrow C(x))\vdash \forall x(A(x)\leftrightarrow C(x))$
38. $\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)), \forall x(B_1(x)\leftrightarrow B_2(x))\vdash \forall x(A_1(x)\wedge A_2(x)\leftrightarrow B_1(x)\wedge B_2(x))$
39. $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x))\vdash \forall x(A(x)\rightarrow B(x)), \forall x(B(x)\rightarrow A(x))$