7. $(C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC$

8. 必要性. 若 AB 对称，则 $AB=(AB)^T = B^T A^T = BA$，即 AB 可交换.

充分性. 若 AB 可交换，即 $AB=BA$，则 $AB=BA=B^T A^T=(AB)^T$，

即 AB 对称.

第 3 节

1. (1) $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=-\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix}-3 & & \\ & 12 & \\ & & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4 & & \\ & -1 & \\ & & 1/3\end{bmatrix}$;

(2) $|A|=5+1=6$, $A^*=\begin{bmatrix}5 & 1 & 1\\ 13 & 5 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,所以 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\begin{bmatrix}5/6 & 1/6 & 1/6\\ 13/6 & 5/6 & -1/6\\ -1/6 & 1/6 & 1/6\end{bmatrix}$.

3. (1) 略.

(2) 因为 $Ax=b$，所以 $x=A^{-1}b=\begin{bmatrix}-3\\ 22\\ -31\end{bmatrix}$.

4. (1) 因为 $A^2+3A=A(A+3E)=-2E$，则 $A\left(-\dfrac{1}{2}A-\dfrac{3}{2}E\right)=E$，所以

$A^{-1}=-\dfrac{1}{2}A-\dfrac{3}{2}E$.

(2) 因为 $A^2-E-2A-2E=E$，则

$(A+E)(A-E)-2(A+E)=(A+E)(A-3E)=E$，

所以 $A+E$ 和 $A-3E$ 均可逆，且互逆.

6. 证：$A(A-E)=0$，两边取行列式可以得到 $|A|=0$，或者 $|A-E|=0$，

此时一定有 $|A|\neq 0$，则 A 可逆，故原式两边左乘 A^{-1} 即得 $A=E$.

第 4 节

1. (1) 因为 $A=\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$，且 $A_1=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$，

可知 A_1 和 A_2 都可逆，

且 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$A_2^{-1}=-\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$，则 A 可逆，

且 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & -5 & 4 \\ & & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(2) 因为 $A=\begin{bmatrix} B & \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$，

且 $B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$，$D^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 A 可逆且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & 16/3 & -3 & -4 \\ 2/3 & -4/3 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

2. 因为 $\begin{bmatrix} O & A_1 & E & O \\ A_2 & O & O & E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} O & E & A_1^{-1} & O \\ E & O & O & A_2^{-1} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} E & O & O & A_2^{-1} \\ O & E & A_1^{-1} & O \end{bmatrix}$，

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{bmatrix}$.

3. 记 $A=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$，则 $A^T=[\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\cdots,\alpha_s{}^T]$，则由 $(AB)^T=B^TA^T=O$, 得

$B^T[\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\cdots\alpha_s{}^T]=[B^T\alpha_1{}^T,B^T\alpha_2{}^T,\cdots,B^T\alpha_s{}^T]=O,$

即 $B^T\alpha_1{}^T$=$B^T\alpha_2{}^T$=$\cdots$=$B^T\alpha_s{}^T$=0，故 $\alpha_1{}^T$，$\alpha_2{}^T$,$\cdots$，$\alpha_s{}^T$ 都是 $B^Tx=0$ 的解.

4. 令 $H=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$，取 $P=\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} E & -E \\ & E \end{bmatrix}$，则有

$PHQ=\begin{bmatrix} A+B & \\ B & A-B \end{bmatrix}$，又因为$|P|=|Q|=1$，

故$|H|=|PHQ|=|A+B||A-B|$.