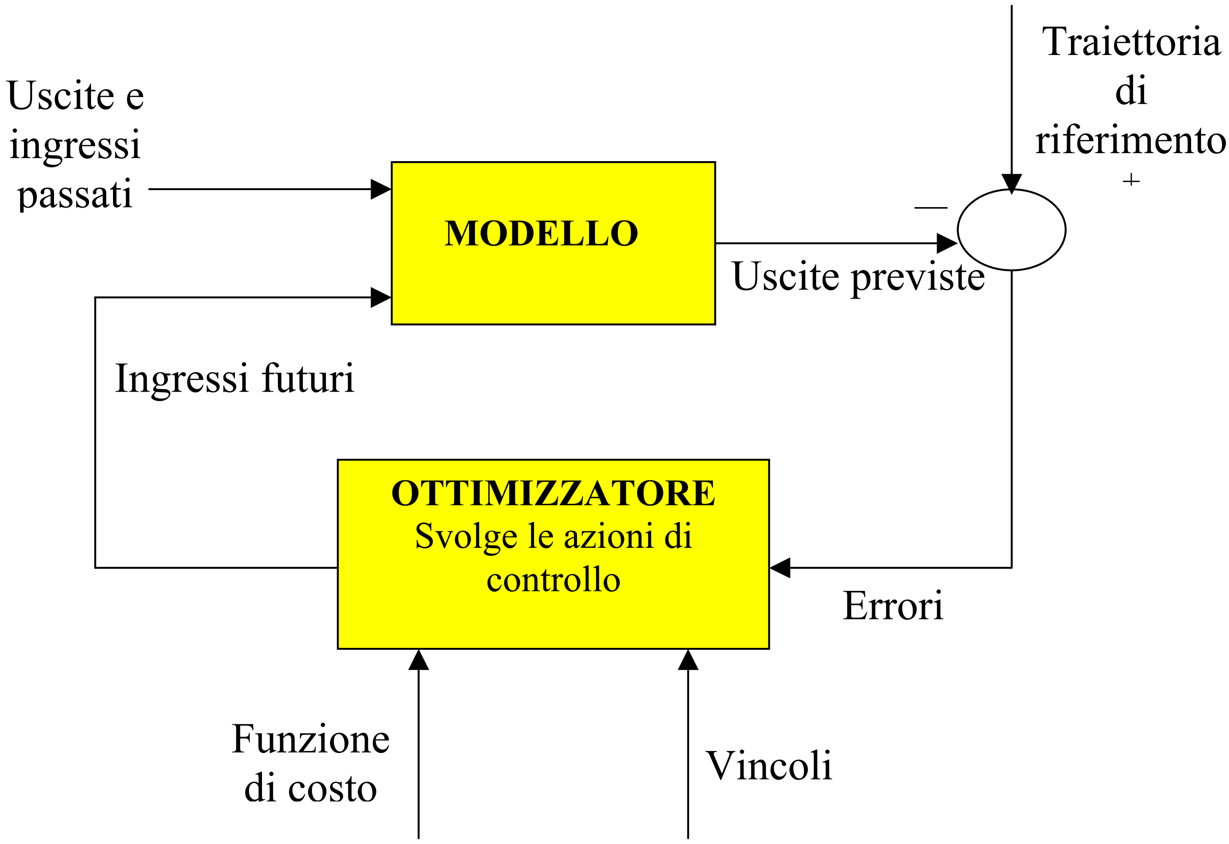
Controllo predittivo (MPC o MBPC)

Nella sua formulazione più generale, il controllo predittivo consta di tre idee di base:

1. L'utilizzo di un *modello matematico* atto a prevedere le uscite del processo negli istanti di tempo futuri (l'orizzonte). Le uscite future, comprese entro l'orizzonte e calcolate all'istante presente, dipendono dai valori passati degli ingressi e delle uscite e dai segnali di controllo futuri.
2. La presenza di una legge di controllo ottenuta attraverso la *minimizzazione di una funzione di costo* da parte di segnali di controllo. Tali segnali di controllo sono calcolati ottimizzando un determinato criterio allo scopo di tenere l'uscita del processo il più vicino possibile ad una traiettoria di riferimento nota.
3. Una *strategia ricorsiva* che, ad ogni istante, consiste nello spostamento nel futuro dell'orizzonte. Ciò implica che ad ogni istante di tempo solo il primo tra i segnali di controllo calcolati sia effettivamente utilizzato. All'istante di tempo successivo infatti si ha un aggiornamento delle uscite e la conseguente ripetizione del calcolo dei segnali di controllo.


Traiettoria di riferimento
+
—
Uscite e ingressi passati
MODELLO
Uscite previste
Ingressi futuri
OTTIMIZZATORE
Svolge le azioni di controllo
Errori
Funzione di costo
Vincoli

Il modello di previsione

- ***Risposta all'impulso.*** L'uscita è legata all'ingresso dalla relazione seguente:

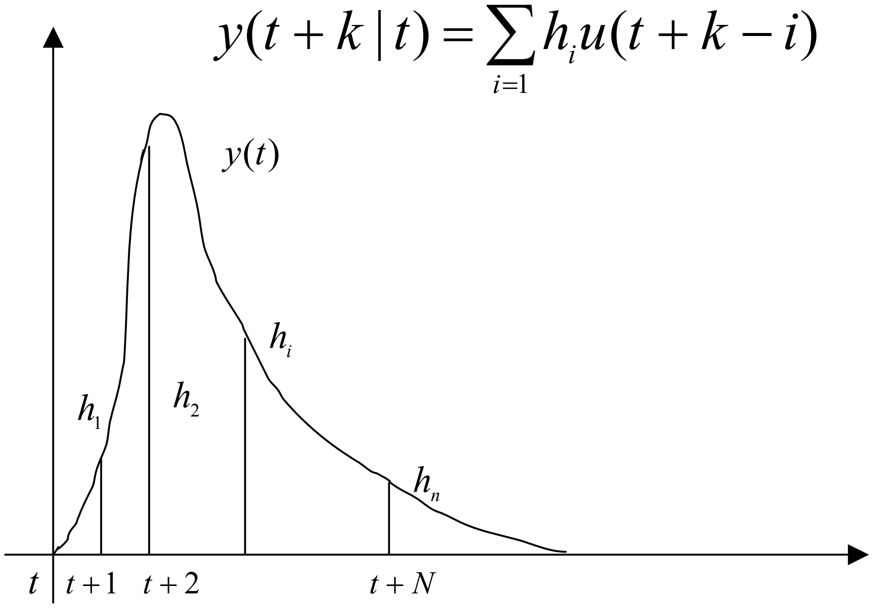
$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(t-i)$$

dove h_i è l'insieme dei campioni dell'uscita a fronte di un impulso unitario in ingresso.
Questo modello presenta alcuni importanti svantaggi che ne limitano l'utilizzo: innanzitutto la sommatoria è limitata ai soli primi N campioni

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i u(t-i)$$

e quindi l'algoritmo è valido solo per i processi stabili. Inoltre, poiché N è normalmente un numero abbastanza grande, il numero di parametri richiesti è molto elevato. Nonostante tali svantaggi, il mo-dello è ampiamente utilizzato nell'industria, trinci-palmente perché è molto intuitivo e il suo utilizzo non richiede nessuna informazione a priori sul processo. La previsione è data da:

$$\hat{y}(t+k \mid t) = \sum_{i=1}^{N} h_i u(t+k-i)$$



- ***Risposta al gradino.*** Valgono le stesse considerazioni fatte per la risposta all'impulso, con la differenza che in questo caso il segnale di ingresso è un gradino. L'uscita è legata all'ingresso dalla seguente relazione:

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u(t-i)$$

dove $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$.

La previsione è data da:

$$\hat{y}(t+k \mid t) = \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u(t-i)$$

- ***Funzione di trasferimento.*** L'uscita è legata all'ingresso dalla seguente relazione:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t)$$

con

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{na} z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_{nb} z^{-nb}$$

$$z^{-1}u(t) = u(t-1)$$

Questo modello è valido anche per processi instabili e ha il vantaggio di richiedere pochi parametri. Il suo maggiore svantaggio deriva dalla necessità di conoscere a priori il processo in esame, e specialmente l'ordine dei polinomi A e B. L'identificazione dei parametri sopradetti risulta infatti piuttosto elaborata nella maggior parte dei casi.

La previsione è data da:

$$\hat{y}(t+k \mid t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t+k \mid t).$$

La funzione di costo

L'obiettivo generale che si vuole perseguire attraverso la minimizzazione della funzione di costo è fare in modo che le uscite future del sistema seguano il più possibile una traiettoria di riferimento sull'orizzonte considerato, senza eccedere nell'energia del controllo. L'espressione generale della funzione di costo è la seguente:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t+k \mid t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2$$

- N_1 e N_2 sono il minimo e il massimo orizzonte di costo e stabiliscono i limiti entro cui l'uscita del sistema deve seguire il riferimento.
- N_u rappresenta l'orizzonte di controllo.
- $\delta(j)$ e $\lambda(j)$ sono sequenze che tengono in considerazione il comportamento futuro e sono costituite da valori costanti o esponenziali.
- $w(t)$ è la traiettoria di riferimento. Se questa è nota a priori, il sistema può reagire prima che il cambiamento sia avvenuto, evitando così il problema del ritardo nella risposta del processo.

Nella minimizzazione della funzione di costo la traiettoria di riferimento utilizzata non deve necessariamente coincidere con quella desiderata; normalmente è un'approssimazione:

$$w(t) = y(t)$$

$$w(t+k) = \alpha w(t+k-1) + (1-\alpha) r(t+k)$$

$r(t+k)$ è la traiettoria desiderata.

$w(t)$ è la traiettoria usata come riferimento.

α è un parametro compreso tra 0 e 1.

Strategia di controllo

1. Ad un determinato istante di tempo i futuri valori della variabile di controllo (fino ad N passi in avanti) vengono determinati minimizzando una funzione obiettivo nella quale rientrano i futuri valori assunti dall'uscita del processo (essenzialmente per calcolare il futuro errore di sistema, considerando anche la traiettoria di riferimento data). Questi ultimi vengono determinati sulla base del modello del processo stesso.
2. Il segnale di controllo determinato viene applicato solamente per un intervallo di campionamento perché all'istante successivo il passo 1 viene ripetuto. In questo senso si parla di retrocedere dell'orizzonte (*receding horizon*) perché la legge di controllo viene sempre aggiornata nel momento in cui nuova informazione è disponibile.

Dynamic Matrix Control (DMC)

- ***Il modello di previsione*.**

Il modello del processo utilizzato è la risposta al gradino:

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u(t-i)$$

con y_0=0.
I valori delle uscite, predetti lungo l'orizzonte, sono caratterizzati da una componente di disturbi e da una componente di segnale:

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + \hat{n}(t+k/t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + \hat{n}(t+k/t)$$

I disturbi si considerano costanti su tutto l'orizzonte:

$$\hat{n}(t+k/t) = \hat{n}(t/t) = y_m(t) - \hat{y}(t/t)$$

Si può quindi scrivere:

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + y_m(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + f(t+k)$$

dove $f(t+k)$ è la risposta libera del sistema, ovvero quella parte della risposta del sistema che non dipende dalle azioni di controllo future.

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i)$$

Se il processo è asintoticamente stabile, i coefficienti g_i tendono ad un valore costante dopo N istanti di campionamento. Quindi si può scrivere che:

$$g_{k+i} - g_i \approx 0, \qquad i > N$$

La risposta libera del sistema può essere espressa dalla equazione seguente:

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{N} (g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i)$$

Le uscite previste vengono calcolate lungo un orizzonte di previsione $k = 1..p$ servendosi di m azioni di controllo:

$$\hat{y}(t+1/t) = g_1 \Delta u(t) + f(t+1)$$
$$\hat{y}(t+2/t) = g_2 \Delta u(t) + g_1 \Delta u(t+1) + f(t+2)$$
$$\vdots$$
$$\hat{y}(t+p/t) = \sum_{i=p-m+1}^{p} g_i \Delta u(t+p-i) + f(t+p)$$

La matrice dinamica del sistema è definita come:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & \cdots & g_{p-m+1} \end{bmatrix}$$

Si può scrivere infine:

$$\hat{\mathrm{y}} = \mathrm{Gu} + \mathrm{f}$$

dove

$$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+m-1) \end{bmatrix} \qquad \mathrm{f} = \begin{bmatrix} f(t+1) \\ f(t+2) \\ \vdots \\ f(t+p) \end{bmatrix}$$

- ***La funzione di costo e la legge di controllo***

$$J = \sum_{j=1}^{p} [\hat{y}(t+j/t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{m} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2 \qquad (\delta{=}0)$$

Se non ci sono vincoli, la soluzione alla funzione di costo può essere ottenuta calcolando la derivata della funzione J e ponendola uguale a 0.

Il risultato generale è il seguente:

$$\mathrm{u} = (\mathrm{G}^T\mathrm{G} + \lambda \mathrm{I})^{-1}\mathrm{G}^T(\mathrm{w} - \mathrm{f})$$

Bisogna ricordare che, come in tutte le altre strategie di controllo predittivo, solo il primo elemento del vettore u è effettivamente utilizzato come ingresso al sistema; gli altri elementi vengono scartati perché ricalcolati all'istante successivo.

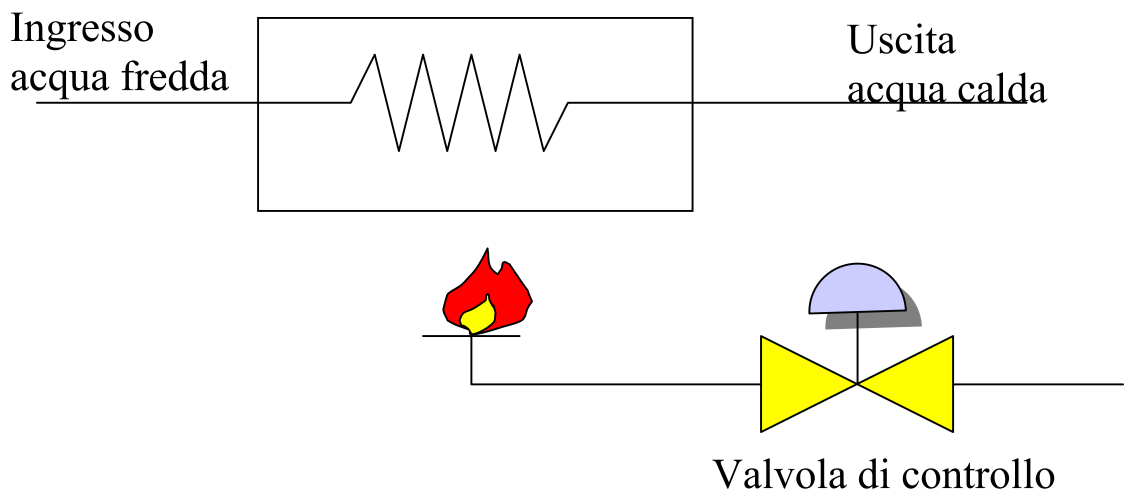
I vincoli sull'ingresso e sull'uscita possono essere posti in un'equazione che va aggiunta alla minimizzazione della funzione di costo e che ha la forma:

$$\sum_{i=1}^{N} C_{yi}^{j}\hat{y}(t+k/t) + C_{ui}^{j}u(t+k-i) + c^{j} \le 0 \qquad j = 1 \ldots N_c$$

In questo caso la legge di controllo non è più analitica, ma va calcolata con tecniche numeriche.

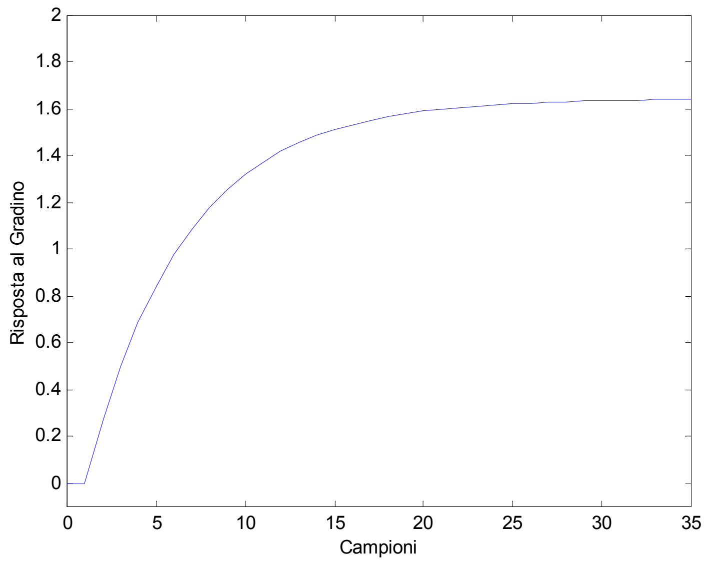
Esempio: controllo di una caldaia

$$G(z^{-1}) = \frac{0.2713z^{-3}}{1-0.8351z^{-1}}$$



Il modello del processo è la risposta al gradino:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{30} g_i \Delta u(t-i)$$



0	0	0.2713	0.4979	0.6871
0.8451	0.9770	1.0872	1.1792	1.2561
1.3202	1.3738	1.4186	1.4560	1.4872
1.5132	1.5350	1.5532	1.5684	1.5810
1.5916	1.6005	1.6079	1.6140	1.6192
1.6235	1.6271	1.6301	1.6326	1.6346

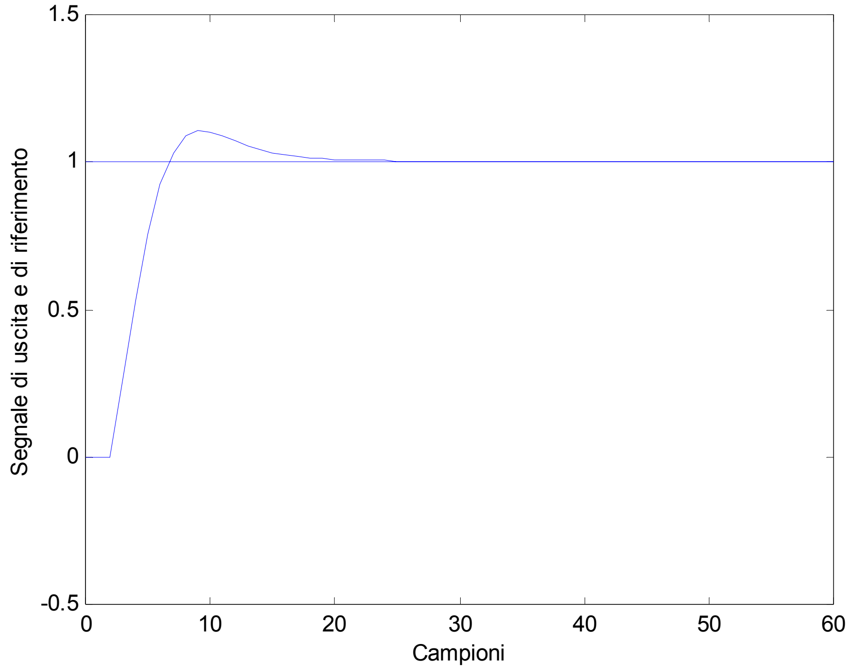
Considerando un orizzonte di previsione di 10 e un orizzonte di controllo di 5, la matrice dinamica è ottenuta dai coefficienti della risposta al gradino:

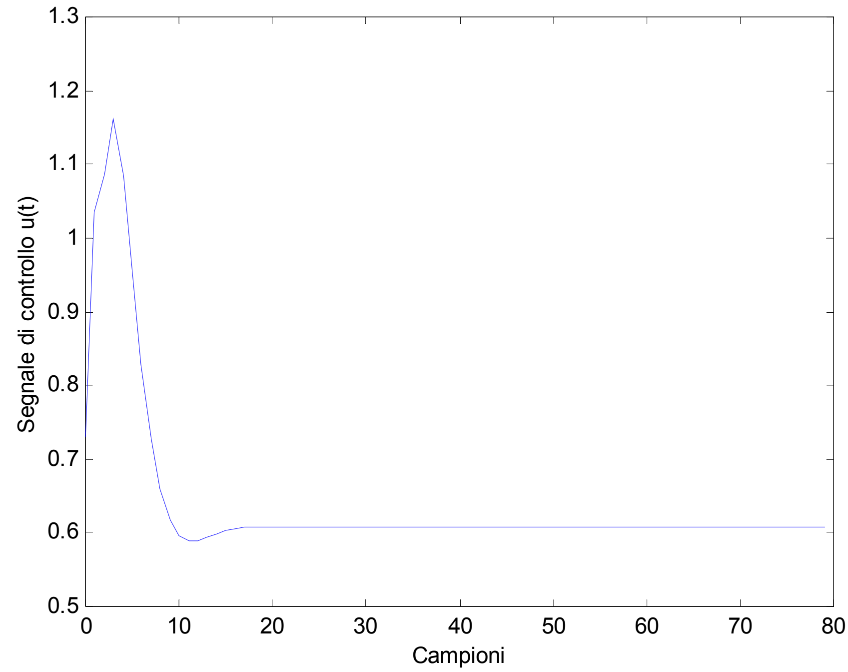
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2713 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4979 & 0.2713 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6871 & 0.4979 & 0.2713 & 0 & 0 \\ 0.8451 & 0.6871 & 0.4979 & 0.2713 & 0 \\ 0.9770 & 0.8451 & 0.6871 & 0.4979 & 0.2713 \\ 1.0872 & 0.9770 & 0.8451 & 0.6871 & 0.4979 \\ 1.1792 & 1.0872 & 0.9770 & 0.8451 & 0.6871 \\ 1.2561 & 1.1792 & 1.0872 & 0.9770 & 0.8451 \end{bmatrix}$$

Si calcola la matrice $\mathrm{K} = (\mathrm{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{G} + \lambda \mathrm{I})^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}}$ e la legge di controllo è data dal prodotto tra la prima riga di K e il vettore differenza tra la traiettoria di riferimento e la risposta libera del sistema.

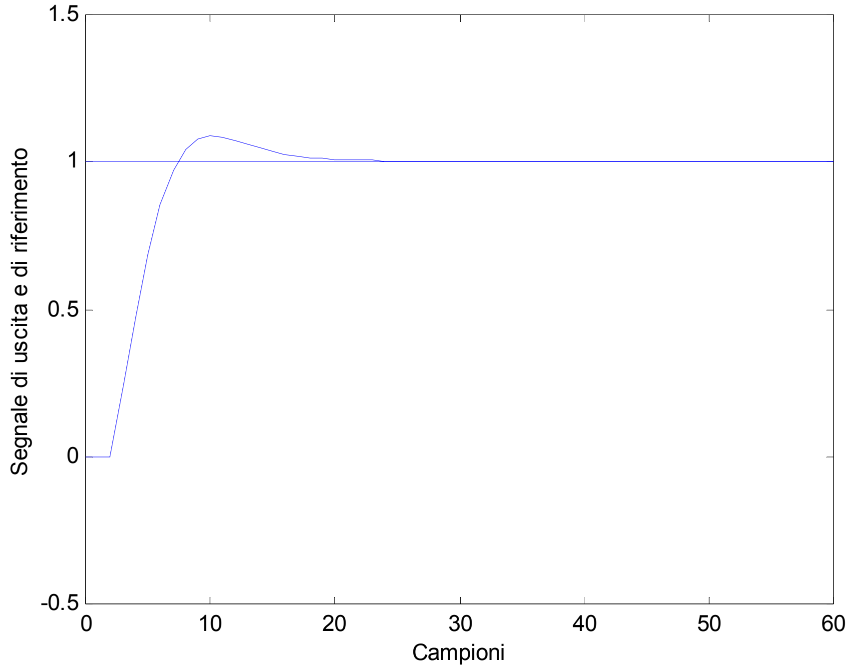
$$\Delta u(t) = \mathrm{K}(1,:)(\mathrm{w} - \mathrm{f})$$

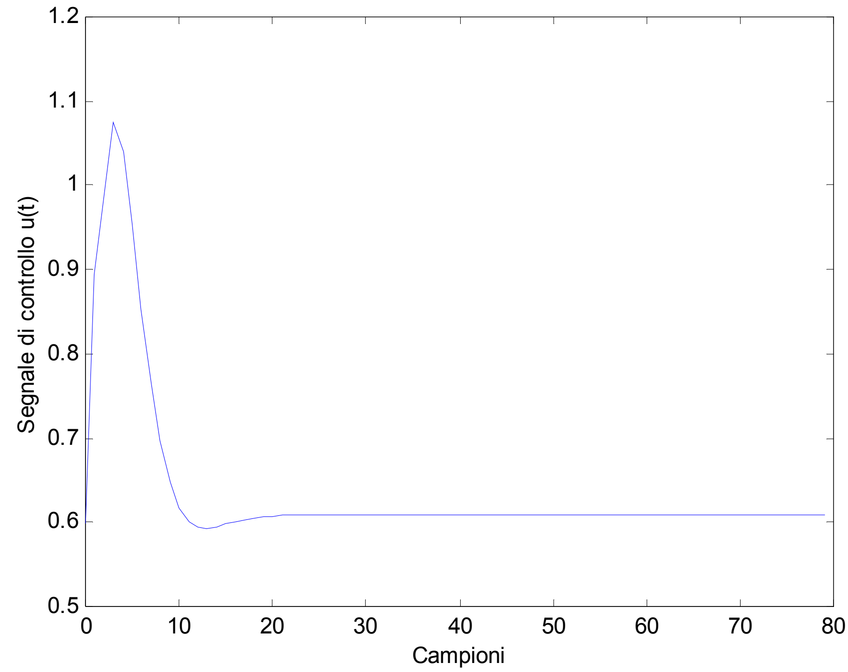
λ=1, traiettoria di riferimento a gradino



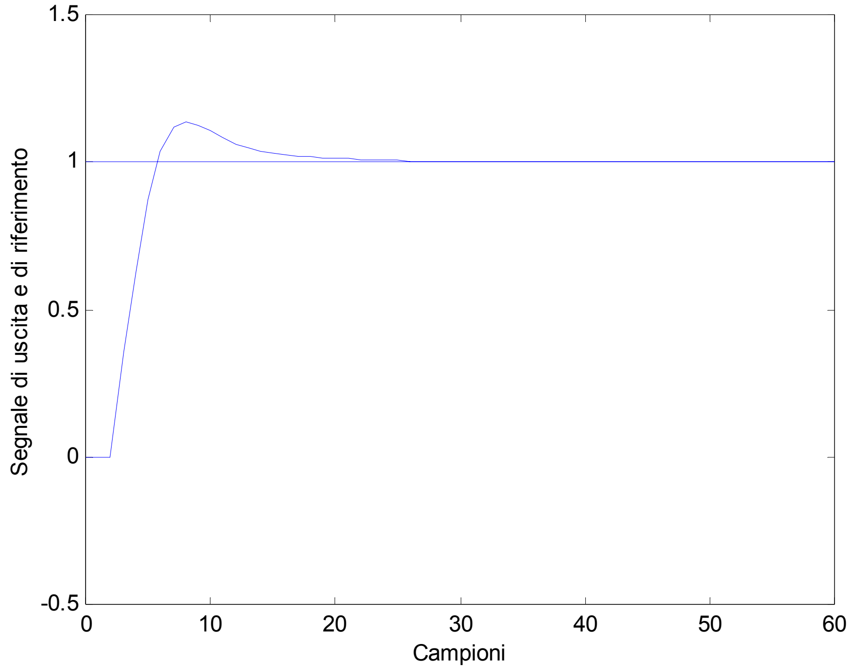


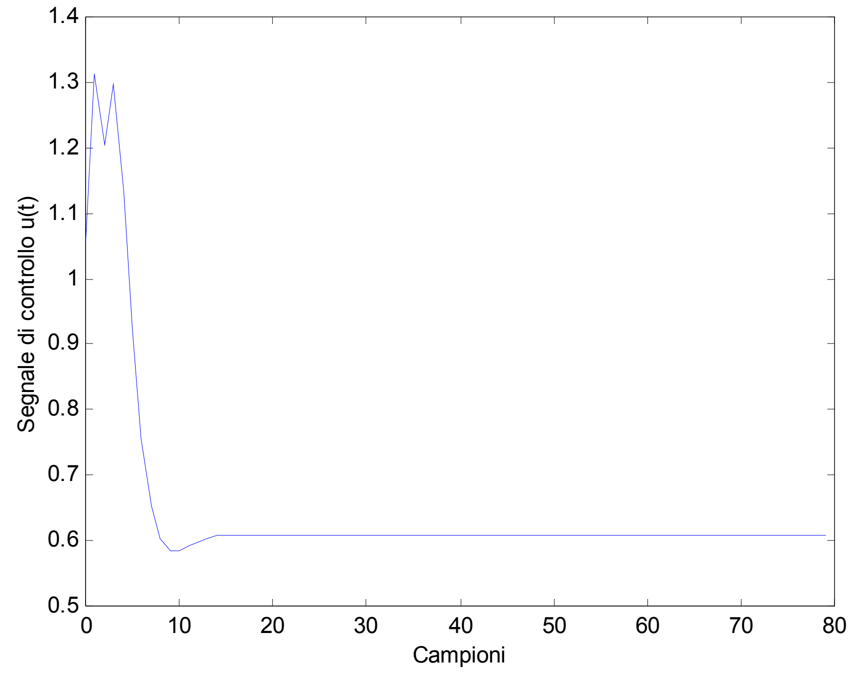
λ=1.6, traiettoria di riferimento a gradino



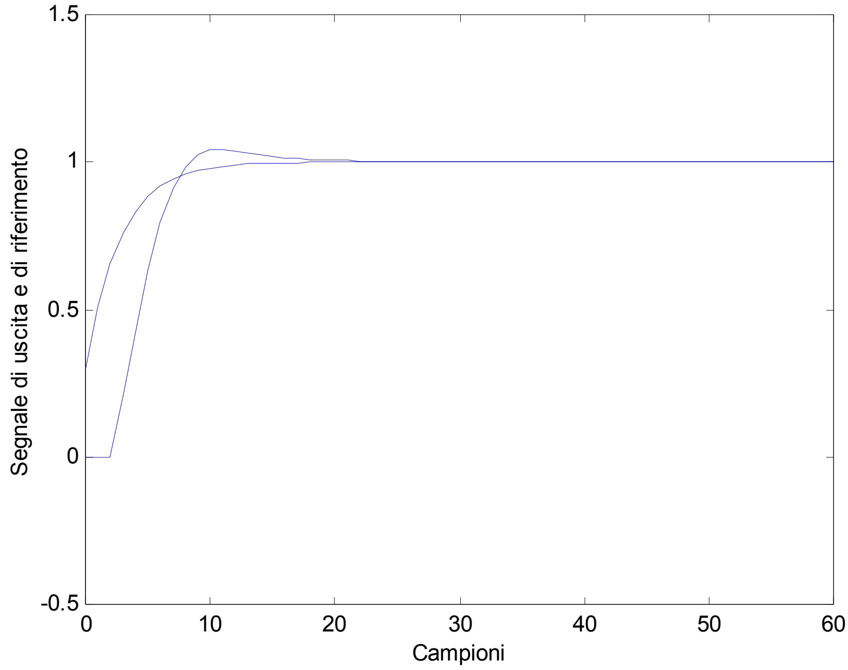


λ=0.4, traiettoria di riferimento a gradino

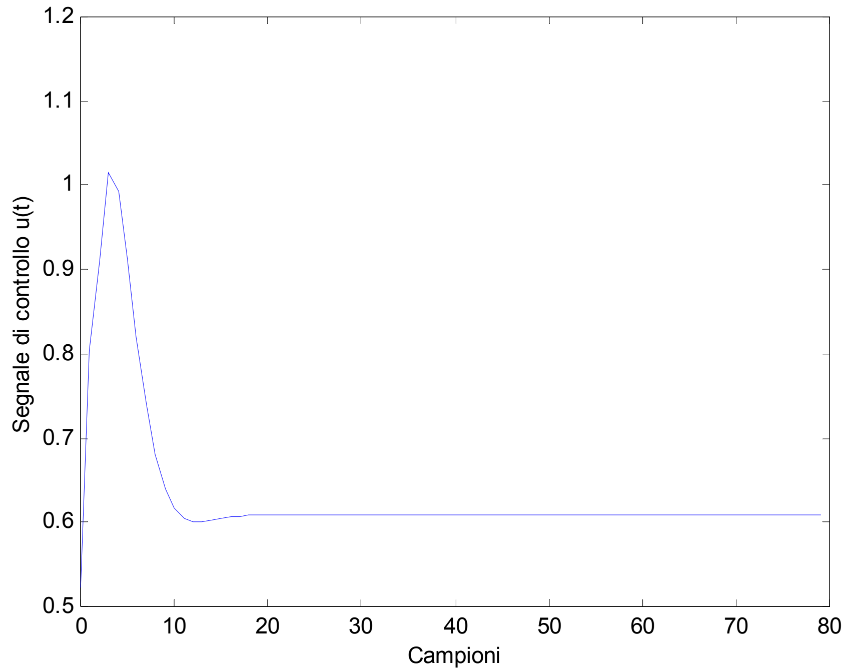




λ=1, α=0.7

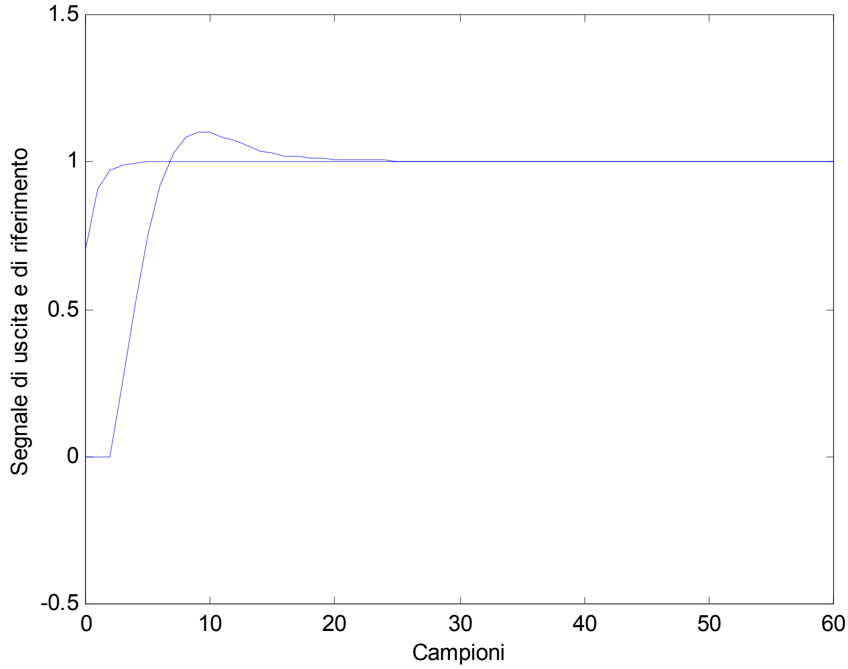


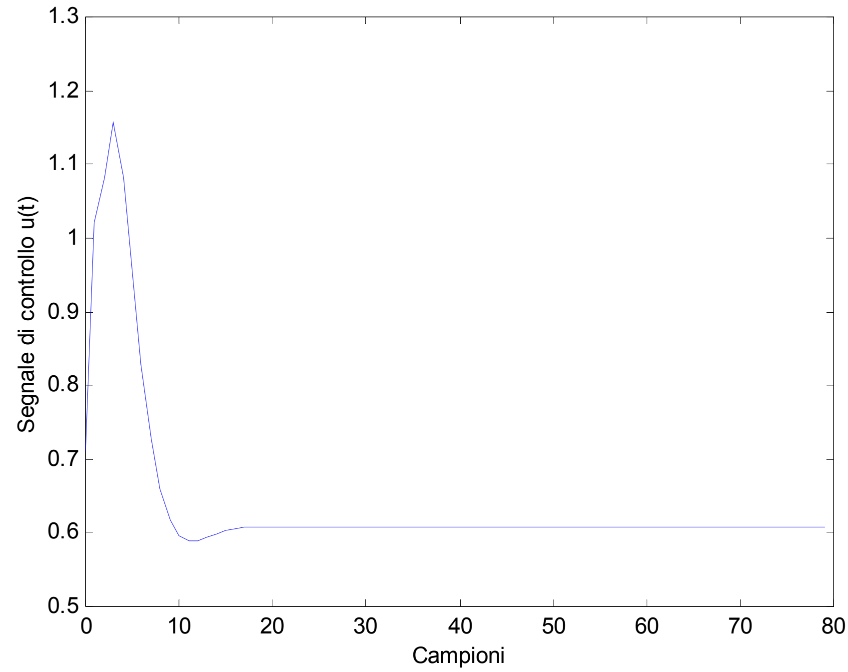
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
10
20
30
40
50
60
Campioni
Segnale di uscita e di riferimento



1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Campioni
Segnale di controllo u(t)

$\lambda=1, \alpha=0.3$





MPC con vincoli

- Vincoli sull'ampiezza della variabile di controllo.
- Vincoli sullo slew rate della variabile di controllo.
- Vincoli sui valori dell'uscita del processo.

$$\underline{y} \leq y \leq \overline{y}$$

$$\underline{y} \leq Gu + f \leq \overline{y}$$

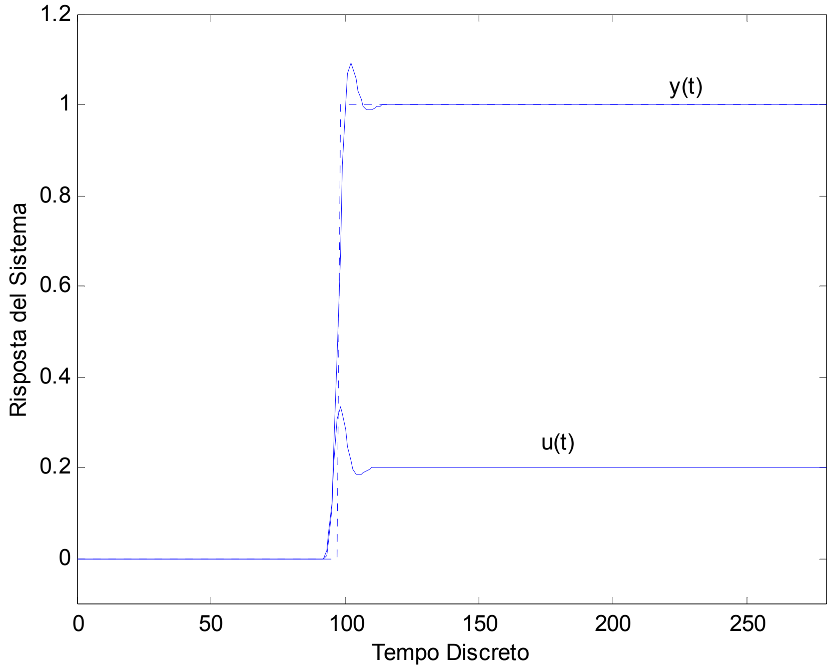
In forma compatta i vincoli possono quindi essere espressi come:

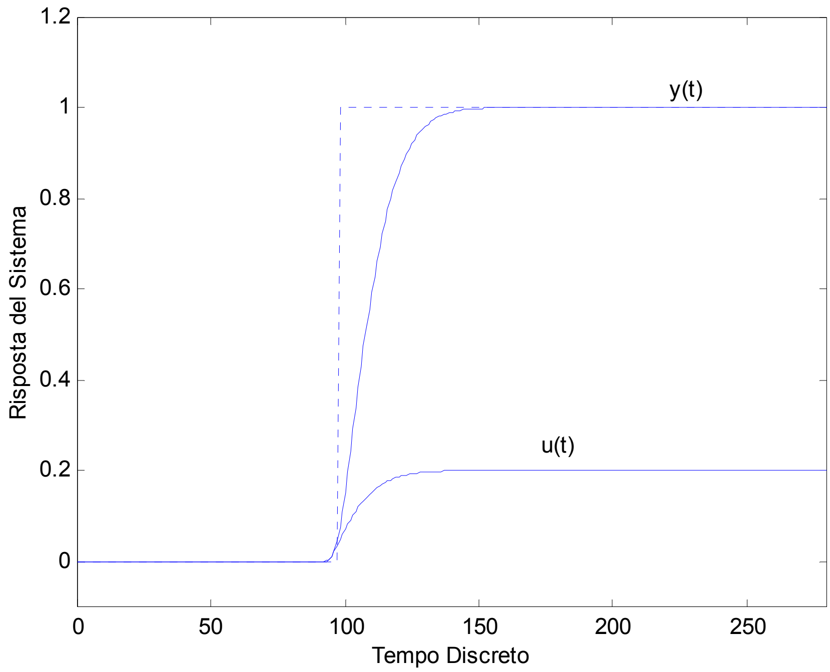
$$Ru \leq c$$

con R, u e c matrici (o vettori) di dimensioni opportune.
Bisogna quindi risolvere un problema di ottimizzazione vincolata, con metodi standard.

Il grande vantaggio dell'MPC è proprio quello di sfruttare al meglio i vincoli, con conseguente grande beneficio economico (ottimizzazione della produzione)!

Esempio: con e senza vincoli sull'overshoot





Vantaggi del MPC

- Si basa su concetti intuitivi e quindi il suo utilizzo è facilmente comprensibile anche da personale non altamente specializzato;
- Permette di trattare una vasta gamma di tipologie di processi, stabili, instabili, a fase minima e non minima, monovariabili e multivariabili e recentemente anche nonlineari;
- Permette di trattare intrinsecamente i ritardi in modo semplice;
- Permette di trattare intrinsecamente i limiti presenti sui segnali del sistema, consentendo così di ottenere prestazioni di controllo elevate con conseguenti notevoli benefici economici per i gestori dell'impianto.