Rotazioni

Basilio Bona

DAUIN-Politecnico di Torino

2008

Introduzione

Il termine *rotazione* indica due concetti

- un'azione fisica che viene applicata ad un oggetto per modificare il suo orientamento nello spazio tridimensionale (interpretazione fisica),
- la caratterizzazione matematica di questa azione, che permette di studiarne le proprietà e la rappresentazione attraverso operatori matematici opportuni (interpretazione astratta o matematica).

A sua volta l'interpretazione fisica è duplice:

1. L'azione viene applicata al corpo per portarlo da un orientamento ad un altro.
2. Due oggetti identici hanno orientamenti diversi e vogliamo studiarne la relazione reciproca.

Corpo rigido

Il legame tra l'interpretazione matematica e l'interpretazione fisica della rotazione, che si concretizza nella definizione del cosiddetto *operatore di rotazione*, viene considerevolmente semplificata se si fa riferimento a *corpi rigidi*.

Definizione

Un **corpo rigido** è insieme (anche infinito) di punti le cui distanze reciproche non variano nel tempo e nello spazio.
Un corpo rigido è sempre riconducibile al sistema di riferimento (sdr) ortogonale che lo caratterizza

Sistema di riferimento ortogonale

Definizione

Un **sistema di riferimento (sdr) ortogonale** nello spazio 3D è costituito da tre versori mutuamente ortogonali applicati ad un'origine comune.
In inglese si chiama *reference frame*.

Il sdr si caratterizza con il simbolo $\mathcal{R}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, dove O è l'origine comune, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono i tre versori mutuamente ortogonali.

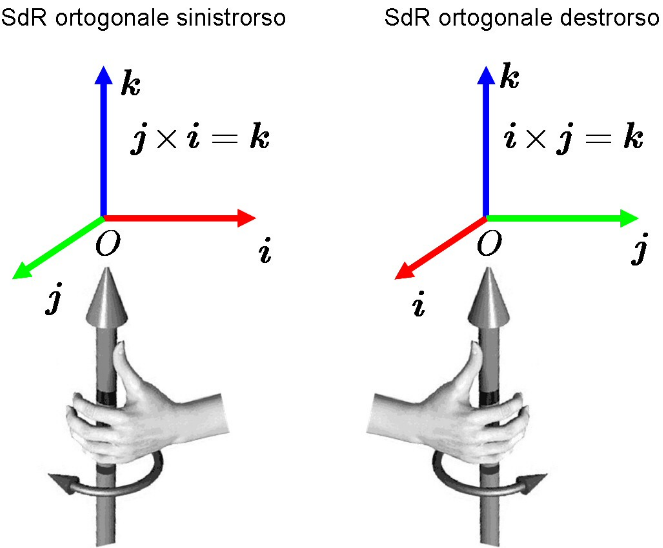
I sdr possono essere *destrorsi* o *sinistrorsi*.

Poiché per definizione il prodotto vettoriale $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ obbedisce alla *regola della mano destra*, i sdr

$$\text{sono destrorsi se } \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$
$$\text{sono sinistrorsi se } \mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$$

Useremo solo **sdr destrorsi**.

Sistema di riferimento ortogonale



Corpo rigido $\Leftrightarrow$ sdr

Un corpo rigido A è caratterizzato dal sdr $\mathcal{R}_A$ ad esso associato.

Ogni generico punto del corpo rigido $\mathbf{p}_i$ è univocamente definito nel sdr $\mathcal{R}_A$ dalle coordinate

$$\mathbf{p}_i^A = \begin{bmatrix} p_{i1}^A \\ p_{i2}^A \\ p_{i3}^A \end{bmatrix}$$

La distanza tra ogni coppia di punti rimane costante sotto qualsiasi trasformazione o azione esterna sul corpo

$$\left\| \mathbf{p}_i^A - \mathbf{p}_j^A \right\| = d_{ij} \geq 0; \quad \forall\, i, j$$

Pertanto il corpo rigido è completamente determinato dal suo sdr e quando parliamo di corpo rigido in realtà ci riferiamo al sdr che lo caratterizza.

Corpo rigido $\Leftrightarrow$ sdr

Due corpi rigidi, come quelli in Figura, possono essere interpretati come due oggetti con orientamenti diversi nello stesso istante di tempo, oppure come lo stesso oggetto in due istanti di tempo diversi.

In entrambi i casi ci interessa studiare la relazione tra i due orientamenti.

Figura: Due corpi rigidi tra loro ruotati.

Relazione tra sdr

Dati due sdr $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{R}_B$ con origine in comune, ma con orientamento (o *assetto*) differente, la loro reciproca relazione si può esprimere in due modi

- il sdr $\mathcal{R}_B$ rappresentato in $\mathcal{R}_A$
- il sdr $\mathcal{R}_A$ rappresentato in $\mathcal{R}_B$

Cosa sia meglio dipende dal significato fisico assegnato ai due riferimenti.

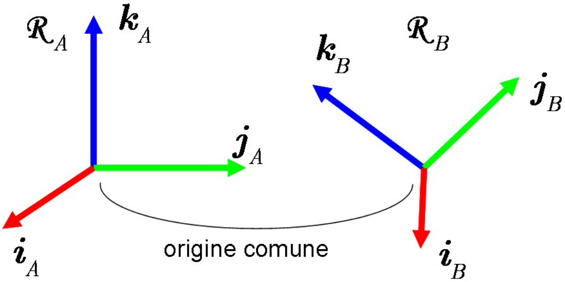


Figura: Due sdr $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{R}_B$ con origine comune, ma orientati diversamente.

Matrici di rotazione

- $\mathcal{R}_B$ rappresentato in $\mathcal{R}_A$: rappresentiamo i tre versori $\mathbf{i}_B, \mathbf{j}_B$ e $\mathbf{k}_B$ in $\mathcal{R}_A$, ottenendo una matrice 3×3

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i}_B^A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{j}_B^A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}_B^A \end{bmatrix} \right) = \mathbf{R}_B^A$$

- $\mathcal{R}_A$ rappresentato in $\mathcal{R}_B$: rappresentiamo i tre versori $\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A$ e $\mathbf{k}_A$ in $\mathcal{R}_B$, ottenendo una matrice 3×3

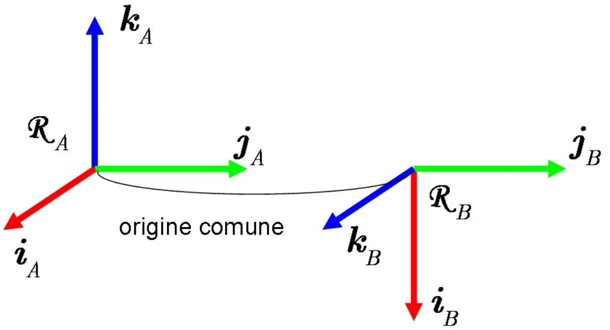
$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i}_A^B \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{j}_A^B \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}_A^B \end{bmatrix} \right) = \mathbf{R}_A^B$$

Le due matrici appartengono alla classe delle *matrici di rotazione* e la relazione tra esse è la seguente

$$\mathbf{R}_A^B = \left(\mathbf{R}_B^A \right)^{\mathsf{T}} \qquad \mathbf{R}_B^A = \left(\mathbf{R}_A^B \right)^{\mathsf{T}}$$

Esempio.1

Prendiamo due sdr particolari e calcoliamo la matrice $\mathbf{R}_B^A$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{j}_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_B^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio.1

Ora calcoliamo la matrice $\mathbf{R}_A^B$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_A^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{j}_A^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}_A^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{R}_A^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come si vede, le due matrici $\mathbf{R}_B^A$ e $\mathbf{R}_A^B$ sono l'una la trasposta dell'altra.

Fisicamente possiamo interpretare questa rotazione come

- la rotazione di 90° intorno al versore $\mathbf{j}_A$ (asse y_A) che porta $\mathcal{R}_A$ a sovrapporsi a $\mathcal{R}_B$
- la rotazione di -90° intorno al versore $\mathbf{j}_B$ (asse y_B) che porta $\mathcal{R}_B$ a sovrapporsi a $\mathcal{R}_A$

Diciamo anche che ciascuna rotazione è *inversa* dell'altra e che l'operatore di inversione è dato dalla trasposizione della matrice relativa.

Matrici di rotazione: rappresentazione asse-angolo

Il teorema di Eulero stabilisce che ogni composizione di rotazioni può sempre essere ricondotta ad una rotazione di un angolo θ intorno ad un *asse* (versore) *di rotazione* $\mathbf{u}$. Matematicamente si ha questa relazione

Matrice di rotazione intorno ad un generico asse di rotazione

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) = \mathbf{R}(\mathbf{u},\theta) = \mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1^2(1-c_\theta)+c_\theta & u_1u_2(1-c_\theta)-u_3s_\theta & u_1u_3(1-c_\theta)+u_2s_\theta \\ u_1u_2(1-c_\theta)+u_3s_\theta & u_2^2(1-c_\theta)+c_\theta & u_2u_3(1-c_\theta)-u_1s_\theta \\ u_1u_3(1-c_\theta)-u_2s_\theta & u_2u_3(1-c_\theta)+u_1s_\theta & u_3^2(1-c_\theta)+c_\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

dove

$$c_\theta \equiv \cos\theta \qquad s_\theta \equiv \sin\theta$$

Esempio.1

Esempio

Riprendiamo l'Esempio.1

L'asse $\mathbf{u}$ coincide con $\mathbf{j}$ e l'angolo vale $+90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$, quindi

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_\theta = 1 \quad c_\theta = 0$$

da cui

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrici di rotazione elementare

Esiste una specie di "base" di matrici di rotazione, che chiamiamo *elementari* perché sono rotazioni intorno agli assi principali x, y e z del sdr.

Rotazione elementare di un angolo α intorno all'asse x

$$\mathrm{Rot}(x,\alpha) = \mathrm{Rot}(\mathbf{i},\alpha) = \mathbf{R}(\mathbf{i},\alpha) = \mathbf{R}_{\mathbf{i},\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \tag{2}$$

Matrici di rotazione elementare

Rotazione elementare di un angolo β intorno all'asse y

$$\mathrm{Rot}(y,\beta) = \mathrm{Rot}(\mathbf{j},\beta) = \mathbf{R}(\mathbf{j},\beta) = \mathbf{R}_{\mathbf{j},\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Matrici di rotazione elementare

Rotazione elementare di un angolo γ intorno all'asse z

$$\mathrm{Rot}(z,\gamma) = \mathrm{Rot}(\mathbf{k},\gamma) = \mathbf{R}(\mathbf{k},\gamma) = \mathbf{R}_{\mathbf{k},\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Composizione di matrici di rotazione

Ogni altra rotazione (e la corrispondente matrice) può essere ottenuta combinando opportunamente le rotazioni elementari.

Le regole sono semplici: per comporre una rotazione complessa, generata da una serie di rotazioni elementari, occorre

a) scegliere la rotazione elementare,
b) definire l'angolo di rotazione
c) stabilire se la rotazione avviene rispetto agli assi *fissi* o agli assi *mobili*
d) se la rotazione avviene rispetto al sdr fisso, allora pre-moltiplicare, se invece avviene rispetto al sdr mobile, allora post-moltiplicare

Regola di moltiplicazione delle matrici di rotazione

Pre-fisso **Post-mobile**

I termini "fisso" e "mobile" indicano rispettivamente il sdr che si assume immobile e il sdr che si ottiene come risultato della rotazione precedente.

Composizione di matrici di rotazione

Esempio.2 (1)

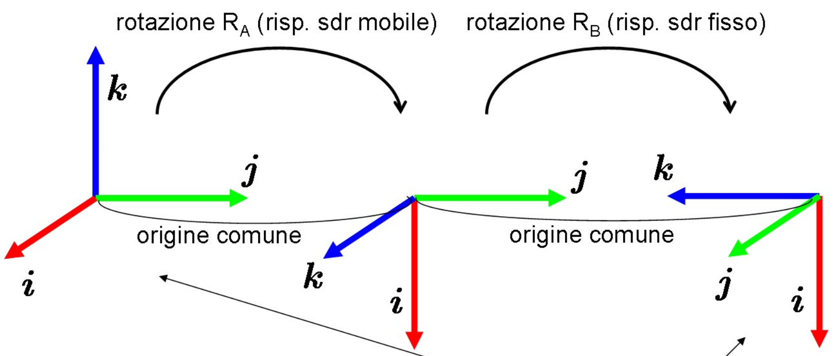
Supponiamo di avere due rotazioni da comporre, definite dalle matrici $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$ seguenti

$$\mathbf{R}_A = \mathrm{Rot}(\mathbf{j}, \pi/2) \quad \mathbf{R}_B = \mathrm{Rot}(\mathbf{k}, -\pi/2)$$

Vogliamo effettuare prima la rotazione $\mathbf{R}_A$ e successivamente la rotazione $\mathbf{R}_B$ rispetto agli assi del sdr di partenza (che chiamiamo convenzionalmente sdr *fisso*); dobbiamo perciò applicare la regola *pre-fisso*, ossia pre-moltiplichiamo $\mathbf{R}_A$ per $\mathbf{R}_B$, ottenendo

$$\mathbf{R}_B\mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Composizione di matrici di rotazione - $R_B R_A$



$$\boldsymbol{R}_B\boldsymbol{R}_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

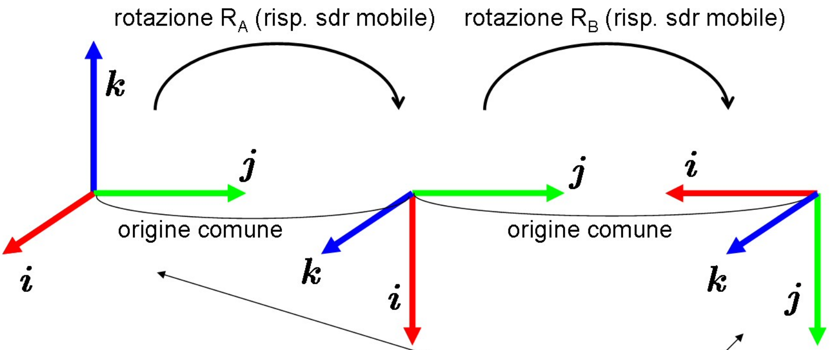
rappresenta sdr di destra in sdr di sinistra

Esempio.2 (2)

Ora invece effettuiamo prima la rotazione $\mathbf{R}_A$ e successivamente la rotazione $\mathbf{R}_B$ rispetto agli assi del sdr così ottenuto (che chiamiamo convenzionalmente sdr *mobile*); dobbiamo perciò applicare la regola *post-mobile*, ossia post-moltiplichiamo $\mathbf{R}_A$ per $\mathbf{R}_B$, ottenendo

$$\mathbf{R}_A\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Composizione di matrici di rotazione - $R_A R_B$



$$\boldsymbol{R}_A \boldsymbol{R}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rappresenta sdr di destra in sdr di sinistra

Composizione di matrici di rotazione

Osservando le Figure precedenti possiamo verificare direttamente che entrambi i prodotti $\mathbf{R}_A\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_B\mathbf{R}_A$ forniscono la rappresentazione del sdr di sinistra in quello di destra.

Perciò componendo le matrici in qualsiasi ordine, alla fine si ottiene una matrice prodotto che rappresenta il sdr di "arrivo" rispetto a quello di "partenza", ovvero, come si preferisce dire, del *sdr mobile* nel *sdr fisso*.

Matrici di rotazione - Trasformazione di vettori

Vediamo ora qual'è l'effetto della rotazione sui vettori rappresentati in due diversi riferimenti $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{R}_B$, uno ruotato rispetto all'altro.

Prima di tutto ricordiamo che i vettori sono enti matematici che possono rappresentare due classi di entità geometriche

1. *segmenti orientati* $\overrightarrow{MN}$, mediante la differenza tra le coordinate dei due estremi

$$\overrightarrow{MN} = \mathbf{v}_{MN} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \mathbf{v}_N - \mathbf{v}_M = \begin{bmatrix} v_{N1} - v_{M1} \\ v_{N2} - v_{M2} \\ v_{N3} - v_{M3} \end{bmatrix}$$

2. *punti geometrici* P, mediante le coordinate (di solito cartesiane) della punta

$$\overrightarrow{OP} \equiv P \rightarrow \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_O = \begin{bmatrix} v_{P1} \\ v_{P2} \\ v_{P3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{P1} \\ v_{P2} \\ v_{P3} \end{bmatrix}$$

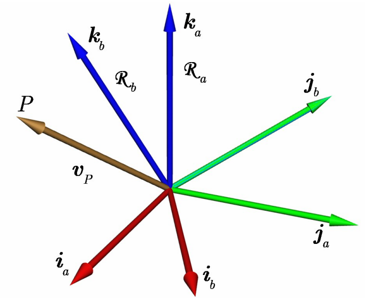
Matrici di rotazione - Trasformazione di vettori

Se i sistemi di riferimento hanno la stessa origine la trasformazione è identica per i due tipi di vettore, altrimenti deve essere considerata anche la *traslazione* tra le origini.

Per il momento le traslazioni sono escluse dall'analisi delle trasformazioni.

Matrici di rotazione - Trasformazione di vettori

1. Punti geometrici: consideriamo due riferimenti $\mathcal{R}_a$ e $\mathcal{R}_b$ con origine in comune e un punto geometrico P qualunque rappresentato dal vettore $\mathbf{v}_P$.

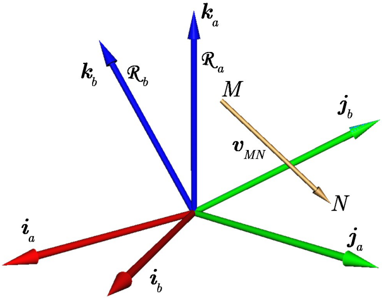


La relazione tra le rappresentazioni vettoriali dello stesso punto P nei due sdr è la seguente

$$\mathbf{v}_{Pa} = \mathbf{R}_b^a \mathbf{v}_{Pb} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{Pb} = \mathbf{R}_a^b \mathbf{v}_{Pa} \quad \text{con } \mathbf{R}_b^a = (\mathbf{R}_a^b)^\mathsf{T}$$

La matrice di rotazione è un operatore (lineare) che trasforma le coordinate di un punto da un sdr ad un altro.

2. Segmenti orientati: consideriamo due riferimenti $\mathcal{R}_a$ e $\mathcal{R}_b$ con origine in comune e un segmento orientato $\overrightarrow{MN}$ rappresentato dal vettore $\mathbf{v}_{MN}$.



La relazione tra le rappresentazioni vettoriali dello stesso segmento orientato $\overrightarrow{MN}$ nei due sdr è la seguente

$$\mathbf{v}_{MNa} = \mathbf{R}_b^a \mathbf{v}_{MNb} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{MNb} = \mathbf{R}_a^b \mathbf{v}_{MNa} \quad \text{con } \mathbf{R}_b^a = (\mathbf{R}_a^b)^{\mathsf{T}}$$

Si ha pertanto la stessa trasformazione lineare vista in precedenza.

Matrici di rotazione - Cosa rappresentano

Riassumiamo quanto detto sulle matrici di rotazione.
Valgono tutte e tre le interpretazioni seguenti:

- $\mathbf{R}$ rappresenta la rotazione generica $\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)$ di angolo θ intorno all'asse individuato dal versore $\mathbf{u}$; i valori di θ e $\mathbf{u}$ non traspaiono immediatamente dalla matrice, ma si possono ricavare, come vedremo meglio più avanti;
- $\mathbf{R}$ fornisce la descrizione del sdr "mobile" nel sdr "fisso";
- $\mathbf{R}$ definisce l'operatore lineare che trasforma un vettore dal sdr "mobile" al sdr "fisso". L'operatore è lineare in quanto è rappresentato da una matrice, che obbedisce alla seguente identità

$$\mathbf{R}(\lambda_1 \mathbf{x}_a + \lambda_2 \mathbf{x}_b) = \lambda_1 \mathbf{R}\mathbf{x}_a + \lambda_2 \mathbf{R}\mathbf{x}_b$$

Ricordiamo il teorema di Eulero (asse-angolo)

Matrice di rotazione $\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)$

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) = \mathbf{R}(\mathbf{u},\theta) = \mathbf{R}_{\mathbf{u},\theta} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1^2\left(1-c_\theta\right)+c_\theta & u_1u_2\left(1-c_\theta\right)-u_3s_\theta & u_1u_3\left(1-c_\theta\right)+u_2s_\theta \\ u_1u_2\left(1-c_\theta\right)+u_3s_\theta & u_2^2\left(1-c_\theta\right)+c_\theta & u_2u_3\left(1-c_\theta\right)-u_1s_\theta \\ u_1u_3\left(1-c_\theta\right)-u_2s_\theta & u_2u_3\left(1-c_\theta\right)+u_1s_\theta & u_3^2\left(1-c_\theta\right)+c_\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{u},\theta) &= \mathbf{R}(-\mathbf{u},-\theta) \\ \mathbf{R}(\mathbf{u},-\theta) &= \mathbf{R}(\mathbf{u},2\pi-\theta) = \mathbf{R}(-\mathbf{u},\theta) \\ \mathbf{R}(\mathbf{u},\theta) &= \mathbf{R}(\mathbf{u},-\theta)^\mathsf{T} \\ \mathbf{R}(-\mathbf{u},-\theta) &= \mathbf{R}(-\mathbf{u},\theta)^\mathsf{T} \\ \mathbf{R}(\mathbf{u},\theta_1)\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta_2) &= \mathbf{R}(\mathbf{u},(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned} \tag{6}$$

Matrici di rotazione - Proprietà matematiche

Le matrici di rotazione sono *matrici ortonormali* con determinante unitario e positivo.

Una matrice si dice ortonormale quando possiede le seguenti proprietà

- L'inversa coincide con la trasposta:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I} \tag{7}$$

ovvero

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}} \tag{8}$$

Matrici di rotazione - Proprietà matematiche

- Le colonne di $\mathbf{R}$ sono tra loro ortogonali e a norma unitaria. Lo stesso vale per le righe. Se

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{r}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{r}_2 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \quad \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$$

- Il determinante di $\mathbf{R}$ ha modulo unitario:

$$|\det(\mathbf{R})| = 1 \tag{9}$$

- La rotazione rigida mantiene invariate le distanze tra ogni coppia di punti e gli angoli tra i segmenti, ossia il prodotto scalare è invariante alla rotazione:

$$(\mathbf{Rx}) \cdot (\mathbf{Ry}) = (\mathbf{Rx})^{\mathsf{T}}(\mathbf{Ry}) = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ry} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Iy} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Matrici di rotazione - Proprietà matematiche

Non tutte le matrici ortonormali sono di rotazione.

Infatti esistono due tipi di matrici ortonormali

- quelle a determinante unitario positivo

$$\det \mathbf{R} = +1$$

  che sono *matrici di rotazione* (dette anche di *rotazione propria*)
- quelle a determinante unitario negativo

$$\det \mathbf{R} = -1$$

  che sono *matrici di riflessione* o *roto-riflessione*

Matrici di rotazione - Proprietà matematiche

In uno spazio tridimensionale le rotazioni formano un gruppo non commutativo rispetto al prodotto matriciale.

Questo gruppo è detto *gruppo (speciale) di rotazione (ortonormale)* e si indica con

$$SO(3) = \left\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \right\}$$

In inglese, si chiama *Special Orthonormal group of dimension 3*.

Inoltre esiste un'importante differenza tra le rotazioni e le roto-riflessioni: le prime formano un gruppo commutativo *continuo*; intuitivamente questo equivale a dire che esiste una rotazione *infinitesima*. Le seconde invece non formano un gruppo continuo; le riflessioni non possiedono la "qualità" di poter essere rese infinitesime.

Matrici di rotazione - Proprietà matematiche

Una matrice di rotazione propria **R** ammette la seguente decomposizione canonica modale

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{v}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{j}\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mathrm{j}\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{v}^* \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \tag{10}$$

dove $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ e $\mathbf{M}^{\mathrm{H}}$ è la matrice hermitiana (trasposta coniugata) di **M**, che è la matrice modale, ossia la matrice degli autovettori.

Il primo autovettore **u** è il versore che individua l'asse di rotazione; gli altri due versori **v** e $\mathbf{v}^*$ definiscono il piano normale a **u**.

Su questo piano avviene la rotazione rappresentata dall'operatore complesso di rotazione o *fasore* $e^{\mathrm{j}\theta}$.

Matrici di rotazione - Proprietà matematiche

la matrice $\mathbf{R}$ soddisfa le seguenti relazioni:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta) = e^{\mathbf{S}(\mathbf{u})\theta} = \mathbf{I} + \frac{\sin\theta}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{S}(\mathbf{u}) + \frac{1-\cos\theta}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{S}^2(\mathbf{u}) \tag{11}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta)^{\mathsf{T}} = e^{-\mathbf{S}(\mathbf{u})\theta} = \mathbf{I} - \frac{\sin\theta}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{S}(\mathbf{u}) + \frac{1-\cos\theta}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{S}^2(\mathbf{u})$$

dove

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}^2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -u_2^2-u_3^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & -u_1^2-u_3^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & -u_1^2-u_2^2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ è antisimmetrica.

Matrici di rotazione - Proprietà matematiche

Ci chiediamo ora quanti siano i parametri indipendenti che caratterizzano la rotazione.

L'asse di rotazione $\mathbf{u}$ è definito da due parametri: si tratta di una direzione (con segno) nello spazio 3D, quindi un sottospazio di dimensione 1, ma che richiede 2 parametri per rappresentarlo.

L'angolo di rotazione è definito da 1 parametro.

Quindi una matrice di rotazione è definita da 3 parametri, che sono contenuti nei 9 elementi che la compongono.

Vedremo più avanti come si passa da $\mathbf{R}$ a $(\mathbf{u}, \theta)$ e viceversa.

Matrici di rotazione - Caratteristiche matematiche

Un'altra caratterizzazione di questi 3 parametri si ha quando ad essi si associano 3 angoli intorno agli assi elementari di rotazione.

Angoli di rotazione

Ogni matrice $\mathbf{R}$ può essere associata a tre rotazioni elementari di angoli distinti:

$$\mathbf{R} = \mathrm{Rot}(\mathbf{u}_1, \alpha_1)\mathrm{Rot}(\mathbf{u}_2, \alpha_2)\mathrm{Rot}(\mathbf{u}_3, \alpha_3)$$

dove $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono scelti tra i tre assi elementari $\mathbf{u}_1 \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Angoli di rotazione

Se due rotazioni contigue sono relative allo stesso asse, si perde un grado di libertà:

$$\text{Rot}(\mathbf{u}_i, \alpha_1)\text{Rot}(\mathbf{u}_i, \alpha_2) = \text{Rot}(\mathbf{u}_i, (\alpha_1 + \alpha_2))$$

Occorre quindi escludere questi casi dalle possibili combinazioni di rotazioni elementari.

Infatti, mentre

$$\mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{i}, \alpha_1)\text{Rot}(\mathbf{k}, \alpha_2)\text{Rot}(\mathbf{i}, \alpha_3)$$

è una scelta ammissibile, il prodotto

$$\mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{i}, \alpha_1)\text{Rot}(\mathbf{k}, \alpha_2)\text{Rot}(\mathbf{k}, \alpha_3)$$

non è una scelta ammissibile.

Le possibili combinazioni ammissibili formano i cosiddetti *angoli di Cardano*.

Angoli di Cardano intorno a tre assi distinti

Vengono riportate le 6 possibili matrici di rotazione, dette *di Cardano*, ottenibili come prodotto di tre rotazioni elementari distinte intorno a 3 assi distinti; con θ_1, θ_2 e θ_3 sono stati indicati i tre generici *angoli di Cardano*

$\mathbf{R}(\mathbf{i},\theta_1)\mathbf{R}(\mathbf{j},\theta_2)\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta_3)$	angoli di Roll-Pitch-Yaw (versione alternativa)
$\mathbf{R}(\mathbf{i},\theta_1)\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta_3)\mathbf{R}(\mathbf{j},\theta_2)$	
$\mathbf{R}(\mathbf{j},\theta_2)\mathbf{R}(\mathbf{i},\theta_1)\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta_3)$	
$\mathbf{R}(\mathbf{j},\theta_2)\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta_3)\mathbf{R}(\mathbf{i},\theta_1)$	
$\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta_3)\mathbf{R}(\mathbf{i},\theta_1)\mathbf{R}(\mathbf{j},\theta_2)$	
$\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta_3)\mathbf{R}(\mathbf{j},\theta_2)\mathbf{R}(\mathbf{i},\theta_1)$	angoli di Roll-Pitch-Yaw

Angoli di Cardano intorno a due assi distinti

Sono riportate le 6 possibili rotazioni ottenibili dal prodotto di due rotazioni elementari; in questo caso gli angoli di Cardano sono stati indicati con i simboli α, β e γ:

$$\mathbf{R}(\mathbf{i},\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{j},\beta)\mathbf{R}(\mathbf{i},\gamma)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{i},\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{k},\beta)\mathbf{R}(\mathbf{i},\gamma)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{j},\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{i},\beta)\mathbf{R}(\mathbf{j},\gamma)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{j},\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{k},\beta)\mathbf{R}(\mathbf{j},\gamma)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{k},\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{i},\beta)\mathbf{R}(\mathbf{k},\gamma) \quad \text{angoli di Eulero}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{k},\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{j},\beta)\mathbf{R}(\mathbf{k},\gamma) \quad \text{angoli di Eulero (versione alternativa)}$$

Angoli di Eulero

Tra gli angoli di Cardano, i più noti sono gli *angoli di Eulero*, che descrivono una generica rotazione nello spazio utilizzando tre angoli, detti appunto "di Eulero", simbolicamente rappresentati da φ, θ, ψ, secondo la parametrizzazione seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \mathbf{R}\left(\phi,\theta,\psi\right) = \mathbf{R}_{z,\phi}\mathbf{R}_{x,\theta}\mathbf{R}_{z,\psi} &= \mathbf{R}(\mathbf{k},\phi)\mathbf{R}(\mathbf{i},\theta)\mathbf{R}(\mathbf{k},\psi) \\
&= \begin{bmatrix} c_\phi c_\psi - s_\phi c_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi - s_\phi c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\psi + c_\phi c_\theta s_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\theta c_\psi & -c_\phi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi & c_\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Angoli di Eulero

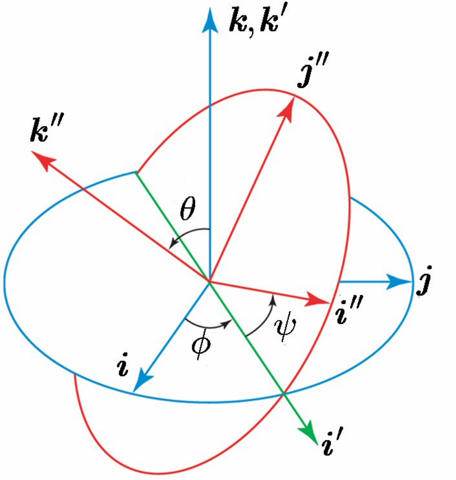


Figura: Gli angoli di Eulero.

Angoli di Eulero

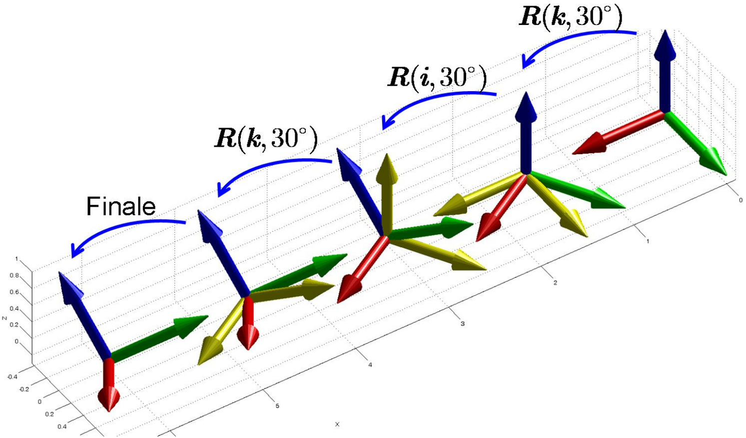


Figura: Esempio di angoli di Eulero.

Angoli di Eulero

Per ricavare gli angoli di Eulero da una matrice qualsiasi, purché ortogonale e con determinante pari a $+1$, definita da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

dove i valori r_{ij} sono noti, occorre risolvere il seguente sistema di equazioni nonlineari:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \mathsf{c}_\phi \mathsf{c}_\psi - \mathsf{s}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{s}_\psi \\
r_{12} &= -\mathsf{c}_\phi \mathsf{s}_\psi - \mathsf{s}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{c}_\psi \\
r_{13} &= \mathsf{s}_\phi \mathsf{s}_\theta \\
r_{21} &= \mathsf{s}_\phi \mathsf{c}_\psi + \mathsf{c}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{s}_\psi \\
r_{22} &= -\mathsf{s}_\phi \mathsf{s}_\psi + \mathsf{c}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{c}_\psi \\
r_{23} &= -\mathsf{c}_\phi \mathsf{s}_\theta \\
r_{31} &= \mathsf{s}_\theta \mathsf{s}_\psi \\
r_{32} &= \mathsf{s}_\theta \mathsf{c}_\psi \\
r_{33} &= \mathsf{c}_\theta
\end{aligned}$$

Angoli di Eulero

La soluzione del sistema di equazioni si ottiene come segue:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \mathtt{atan2}\left(r_{13},\ \ -r_{23}\right) \pm 2k\pi \\
\psi &= \mathtt{atan2}\left(-\mathrm{c}_\phi r_{12} - \mathrm{s}_\phi r_{22},\ \ \mathrm{c}_\phi r_{11} + \mathrm{s}_\phi r_{21}\right) \pm 2k\pi \\
\theta &= \mathtt{atan2}\left(\mathrm{s}_\phi r_{13} - \mathrm{c}_\phi r_{23},\ \ r_{33}\right) \pm 2k\pi
\end{aligned}
$$

avendo utilizzato la funzione trigonometrica inversa $\mathtt{atan2}(y,x)$

$$
\theta = \mathtt{atan2}(y,x) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) =
$$

$$
= \begin{cases}
0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ & \text{se} \quad x \geq 0;\ y \geq 0 \\
90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \text{se} \quad x \leq 0;\ y \geq 0 \\
-180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ & \text{se} \quad x \leq 0;\ y \leq 0 \\
-90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ & \text{se} \quad x \geq 0;\ y \leq 0
\end{cases}
$$

che risulta più robusta dal punta di vista numerico.

Angoli di RPY

Un'altra parametrizzazione molto comune è quella data dagli angoli di Roll, Pitch, Yaw (RPY) (in italiano Rollio, Beccheggio, Imbardata) detti anche angoli di Tait-Bryant, simbolicamente rappresentati da $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ e definiti implicitamente come segue

$$\mathbf{R}_{\theta_x,\theta_y,\theta_z} = \mathbf{R}\left(\theta_x, \theta_y, \theta_z\right) = \mathbf{R}_{z,\theta_z}\mathbf{R}_{y,\theta_y}\mathbf{R}_{x,\theta_x} = \mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta_z)\mathbf{R}(\mathbf{j}, \theta_y)\mathbf{R}(\mathbf{i}, \theta_x)$$

$$\begin{bmatrix} \mathsf{c}_{\theta_z}\mathsf{c}_{\theta_y} & \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{c}_{\theta_z} - \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_z} & \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{c}_{\theta_z} + \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_z} \\ \mathsf{c}_{\theta_y}\mathsf{s}_{\theta_z} & \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{s}_{\theta_z} + \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_z} & \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{s}_{\theta_z} - \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_z} \\ -\mathsf{s}_{\theta_y} & \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_y} & \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_y} \end{bmatrix}$$

Angoli di RPY

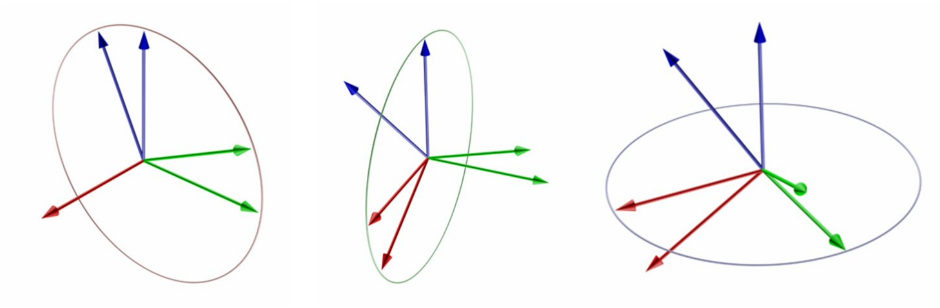


Figura: Angoli RPY.

Angoli di RPY

Per ricavare gli angoli RPY si applicano ragionamenti analoghi a quelli usati per la soluzione degli angoli di Eulero, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\theta_x &= \mathtt{atan2}\left(r_{32},\ \ r_{33}\right) \pm 2k\pi \\
\theta_z &= \mathtt{atan2}\left(-\mathsf{c}_{\theta_x} r_{12} + \mathsf{s}_{\theta_x} r_{13},\ \ \mathsf{c}_{\theta_x} r_{22} - \mathsf{s}_{\theta_x} r_{23}\right) \pm 2k\pi \\
\theta_y &= \mathtt{atan2}\left(-r_{31},\ \ \mathsf{s}_{\theta_x} r_{32} + \mathsf{c}_{\theta_x} r_{33}\right) \pm 2k\pi
\end{aligned}$$

Altre definizioni di angoli RPY sono possibili, e vengono qualche volta usate; ad esempio, alcuni testi definiscono come angoli RPY quelli associati alle tre rotazioni elementari che seguono

$$\mathbf{R}_{\theta_z,\theta_y,\theta_x} = \mathbf{R}\left(\theta_z,\theta_y,\theta_x\right) = \mathbf{R}_{x,\theta_x}\mathbf{R}_{y,\theta_y}\mathbf{R}_{z,\theta_z} = \mathbf{R}(\mathbf{i},\theta_x)\mathbf{R}(\mathbf{j},\theta_y)\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta_z)$$

$$\begin{bmatrix} \mathsf{c}_{\theta_y}\mathsf{c}_{\theta_z} & -\mathsf{c}_{\theta_y}\mathsf{s}_{\theta_z} & \mathsf{s}_{\theta_y} \\ \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{c}_{\theta_z} + \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_z} & -\mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{s}_{\theta_z} + \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_z} & -\mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_y} \\ -\mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{c}_{\theta_z} + \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_z} & \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{s}_{\theta_y}\mathsf{s}_{\theta_z} + \mathsf{s}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_z} & \mathsf{c}_{\theta_x}\mathsf{c}_{\theta_y} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Parametri di Eulero

Data la rotazione $\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta)$, di un angolo θ intorno al versore $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, si definiscono i quattro *parametri di Eulero* v_i (che non vanno confusi con gli angoli di Eulero), nel modo seguente:

$$v_1 = u_1 \sin\frac{\theta}{2}, \quad v_2 = u_2 \sin\frac{\theta}{2}, \quad v_3 = u_3 \sin\frac{\theta}{2}, \quad v_4 = \cos\frac{\theta}{2}$$

Solo tre di questi parametri sono tra loro indipendenti, in quanto sussiste il vincolo

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{4} v_i^2} = 1$$

Parametri di Eulero

Dati $\mathbf{u}$ e θ e quindi i parametri di Eulero v_i, la rappresentazione della matrice di rotazione $\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta)$ può essere ricavata come segue:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta) = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2 & 2(v_1 v_2 - v_3 v_4) & 2(v_1 v_3 + v_2 v_4) \\ 2(v_1 v_2 + v_3 v_4) & -v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 + v_4^2 & 2(v_2 v_3 - v_1 v_4) \\ 2(v_1 v_3 - v_2 v_4) & 2(v_2 v_3 + v_1 v_4) & -v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \end{bmatrix}$$

Viceversa, data $\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta)$ si ottengono i parametri di Eulero come segue:

$$\begin{aligned} v_4 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + r_{11} + r_{22} + r_{33})} \\ v_1 &= \frac{1}{4v_4}(r_{32} - r_{23}) \\ v_2 &= \frac{1}{4v_4}(r_{13} - r_{31}) \\ v_3 &= \frac{1}{4v_4}(r_{21} - r_{12}) \end{aligned}$$

Parametri di Eulero

L'ambiguità di segno presente in v_4 si può eliminare assumendo il vincolo:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2},$$

ovvero $-\pi \leq \theta \leq \pi$; in questo modo il parametro v_4 può essere solo positivo.

L'angolo di rotazione si ottiene dalla relazione $\cos\theta = v_4^2 - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$ e il versore $\mathbf{u}$ come

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sin(\theta/2)} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

I parametri di Eulero si possono calcolare in funzione degli angoli di Eulero ϕ, θ, ψ come segue:

$$v_1 = \sin\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad v_2 = \cos\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$v_3 = \sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad v_4 = \cos\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Parametri di Eulero

I parametri di Eulero sono una forma di parametrizzazione molto conveniente: sono più compatti della matrice $\mathbf{R}$ e più efficaci dal punto di vista numerico degli angoli di Eulero, in quanto ricavare $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{v})$ non richiede l'uso di formule trigonometriche.

Inoltre, date due rotazioni $\mathbf{R}(\mathbf{v}_a)$ e $\mathbf{R}(\mathbf{v}_b)$, si possono direttamente calcolare i parametri di Eulero del prodotto delle rotazioni $\mathbf{R}(\mathbf{v}_c) = \mathbf{R}(\mathbf{v}_a)\mathbf{R}(\mathbf{v}_b)$ mediante il seguente prodotto matriciale:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{F}(\mathbf{v}_a)\mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} v_{a4} & -v_{a3} & v_{a2} & v_{a1} \\ v_{a3} & v_{a4} & -v_{a1} & v_{a2} \\ -v_{a2} & v_{a1} & v_{a4} & v_{a3} \\ -v_{a1} & -v_{a2} & -v_{a3} & v_{a4} \end{bmatrix} \mathbf{v}_b$$

Quaternioni

Per una descrizione dei *quaternioni*, delle loro proprietà e dell'uso che se ne fa per rappresentare le rotazioni, si vedano le dispense ad essi dedicate.

Parametri di Cayley-Klein

Un altro modo di rappresentare le rotazioni fu introdotto da Felix Klein (1849-1925).

I *parametri di Cayley-Klein* (CK) sono elementi di matrici 2×2

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono variabili complesse. La matrice $\mathbf{Q}$ deve essere unitaria, per cui i parametri CK obbediscono alle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta^* \\ \beta &= -\gamma^* \end{aligned}$$

e la matrice $\mathbf{Q}$ può venire scritta anche come

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

con la ulteriore condizione di vincolo

$$\det \mathbf{Q} = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$$

Parametri di Cayley-Klein

Nella matrice **Q** sono presenti 3 parametri liberi che possono venire usati per descrivere le rotazioni; dati i parametri CK, è possibile ricavare la matrice di rotazione nel modo seguente:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) & \frac{\mathrm{j}}{2}(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{\mathrm{j}}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & -\mathrm{j}(\alpha\beta + \gamma + \delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & \mathrm{j}(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{bmatrix}$$

la matrice **R** pur contenendo parametri immaginari, risulta reale.

Dati gli angoli di Eulero ϕ, θ, ψ, i parametri CK si calcolano nel modo seguente:

$$\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi+\psi)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \beta = \mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi-\psi)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\gamma = \mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\phi-\psi)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \delta = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\phi+\psi)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Parametri di Cayley-Klein

La relazione tra i parametri CK α, β, i parametri di Eulero v_1, v_2, v_3, v_4 e gli elementi di un quaternione h_0, h_1, h_2, h_3 è la seguente:

$$\alpha = h_0 + \mathrm{j} h_3 = v_4 + \mathrm{j} v_3$$
$$\beta = h_2 + \mathrm{j} h_1 = v_2 + \mathrm{j} v_1$$

La matrice $\mathbf{Q}$ si può anche esprimere come:

$$\mathbf{Q} = h_0 \mathbf{1} + \mathrm{j}\left(h_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + h_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + h_3 \boldsymbol{\sigma}_3\right)$$

dove $\mathbf{1}$ è la matrice identità 2×2 e le $\boldsymbol{\sigma}_i$ sono le cosiddette *matrici di spin di Pauli* (*Pauli spin matrices*)

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Un altro modo di rappresentare l'assetto di un corpo rigido consiste nell'utilizzare tre soli parametri, senza ricadere nelle difficoltà associate, ad esempio, all'uso degli angoli di Eulero o RPY.

Invece di usare la tecnica dei parametri di Eulero o dei quaternioni, che richiede quattro parametri, anche se legati da un'equazione di vincolo sulla norma, si usano i cosiddetti *vettori di rotazione* $\mathbf{r}$, le cui componenti r_i descrivono l'asse di rotazione e la cui norma $\|\mathbf{r}\|$ fornisce il valore dell'angolo di rotazione o di una sua funzione trigonometrica. In generale il vettore di rotazione $\mathbf{r}$ è definito nel modo seguente:

$$\mathbf{r} = \gamma\left(\theta\right)\mathbf{u}$$

dove $\mathbf{u}$ è il versore a norma unitaria che individua l'asse di rotazione e $\|\mathbf{r}\| = \gamma\left(\theta\right)$ è una funzione dispari.

La funzione $\gamma(\theta)$ è scelta di solito tra le quattro seguenti alternative:

a) $\gamma(\theta) = \theta$

b) $\gamma(\theta) = \sin\theta$

c) $\gamma(\theta) = \sin\dfrac{\theta}{2}$

d) $\gamma(\theta) = \tan\dfrac{\theta}{2}$

Si può notare che la scelta **c)** equivale alla definizione dei quaternioni, essendo le tre componenti di $\mathbf{r}$ pari agli ultimi tre elementi di un quaternione, ovvero ai primi tre parametri di Eulero.

In questo caso il vettore $\mathbf{r}$ si dice *vettore (di rotazione) di Eulero*, da non confondersi con i parametri di Eulero o con gli angoli di Eulero.

Vettori di Rodrigues

La scelta **d)** porta ai cosiddetti *vettori (di rotazione) di Rodrigues o di Gibbs*, anch'essi molto usati nel campo della cinematica teorica.

La relazione tra i vettori di Rodrigues $\mathbf{r}$ e i parametri di Eulero $\mathbf{v}$ è data dalle seguenti espressioni:

$$r_1 = \frac{v_1}{v_4}, \quad r_2 = \frac{v_2}{v_4}, \quad r_2 = \frac{v_3}{v_4}$$

Va sottolineato che i vettori di Rodrigues non sono definiti per angoli $\theta = (2k \pm 1)\,\pi$.

Dati due vettori di Rodrigues $\mathbf{r}_a$ e $\mathbf{r}_b$, il loro "prodotto", che indicheremo con il simbolo $\odot$, si calcola nel modo seguente:

$$\mathbf{r}_a \odot \mathbf{r}_b = \frac{\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_b \times \mathbf{r}_a}{1 - \mathbf{r}_a^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_b}$$

Vettori di Rodrigues

Per quanto riguarda l'equivalenza tra matrici di rotazione e vettori di Rodrigues, si possono stabilire le seguenti relazioni:

Il prodotto di due rotazioni $\mathbf{R}_a\mathbf{R}_b$ equivale al prodotto $\mathbf{r}_a \odot \mathbf{r}_b$ dei corrispondenti vettori di Rodrigues;

Per calcolare $\mathbf{R}$ noto $\mathbf{r}$, dopo aver posto $v_2 = r_2,\ v_3 = r_3,\ v_4 = 1$, si usa la relazione

$$\mathbf{R}(\mathbf{u},\theta) = \begin{bmatrix} r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 & 2(r_1 r_2 - r_3) & 2(r_1 r_3 + r_2) \\ 2(r_1 r_2 + r_3) & -r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 & 2(r_2 r_3 - r_1) \\ 2(r_1 r_3 - r_2) & 2(r_2 r_3 + r_1) & -r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 \end{bmatrix}$$

e poi si dividono gli elementi così trovati per $\left(1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right)$;

Per calcolare $\mathbf{r}$ nota $\mathbf{R}$ si costruisce la matrice antisimmetrica $\mathbf{S}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}^\mathsf{T}}{1 + \mathrm{tr}\,(\mathbf{R})}$$

da cui si possono poi ricavare immediatamente gli elementi r_i.