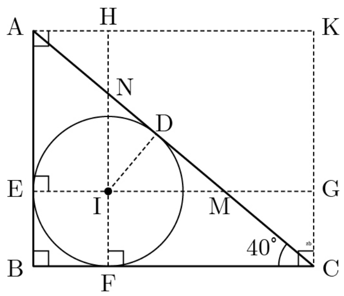
1. $\angle B=90^\circ$, $\angle C=40^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 내접원 I가 세 변과 접하는 점을 각각 D, E, F라고 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 설명을 있는 대로 모두 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $\overline{AD}=\overline{DM}$

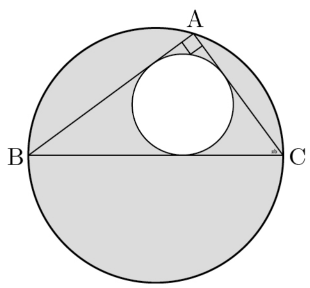
ㄴ. $\square BFIE=2\triangle ANH$

ㄷ. $\triangle MCG\equiv\triangle MID$

ㄹ. $\triangle ABC=\overline{AD}\times\overline{DC}$

① ㄷ　② ㄱ, ㄴ
③ ㄴ, ㄷ　④ ㄷ, ㄹ
⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

2. 넓이가 54인 직각삼각형 ABC의 내접원과 외접원의 둘레의 합은 21π이며 내접원의 지름과 외접원의 지름의 곱은 90일 때, 색칠한 부분의 넓이는?

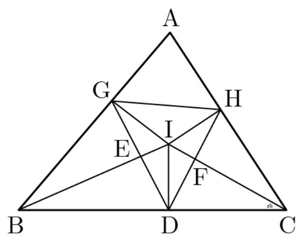


① 36π　② $\frac{189}{4}\pi$
③ 48π　④ $\frac{225}{4}\pi$
⑤ $\frac{261}{4}\pi$

3. $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 외접원과 내접원의 넓이가 각각 $100\pi\,\text{cm}^2$, $16\pi\,\text{cm}^2$일 때, $\triangle ABC$의 넓이는?

① $76\,\text{cm}^2$　② $82\,\text{cm}^2$
③ $88\,\text{cm}^2$　④ $92\,\text{cm}^2$
⑤ $96\,\text{cm}^2$

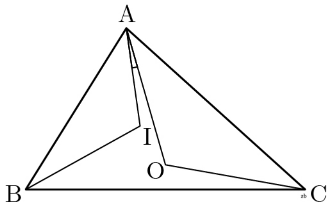
4. 다음 그림과 같이 $\angle A=70^\circ$ 인 $\triangle ABC$의 내심을 I라고 할 때, 점 I에서 $\overline{BC}$에 그은 수선의 발을 D라 하자. 점 D에서부터 $\overline{BI}$, $\overline{CI}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. $\overline{DE}$, $\overline{DF}$의 연장선과 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$와의 교점을 각각 G, H라고 할 때, $\angle GDH+\angle IGH$의 크기는?



① 90°　② 85°
③ 80°　④ 75°
⑤ 70°

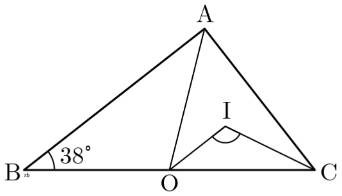
I410-ECN-0199-2022-001-000168447

5. 삼각형 ABC가 주어져 있다. 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이고, 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이다.
$\angle ABC = 58^{\circ}$, $\angle ACB = 42^{\circ}$, $\angle OCB = 10^{\circ}$ 이다.
이때, $\angle IAO$의 크기를 구하면?



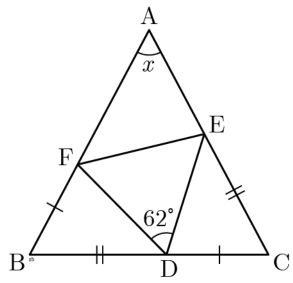
① 2° ② 3°
③ 8° ④ 11°
⑤ 16°

6. 다음 그림과 같이 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이고 점 I는 $\triangle AOC$의 내심이다. $\angle B = 38^{\circ}$일 때, $\angle OIC$의 크기는?



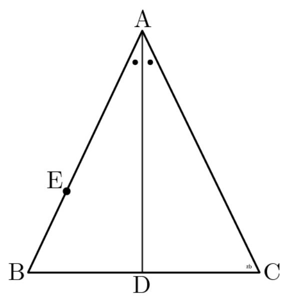
① 76° ② 104°
③ 116° ④ 128°
⑤ 152°

7. $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 밑변 BC 위의 한 점 D에 대하여 $\overline{AC}$ 위에 $\overline{BD} = \overline{CE}$인 점 E를 잡고 $\overline{AB}$ 위에 $\overline{BF} = \overline{CD}$인 점 F를 잡는다. $\angle EDF = 62^{\circ}$일 때, $\angle BAC$의 크기는?



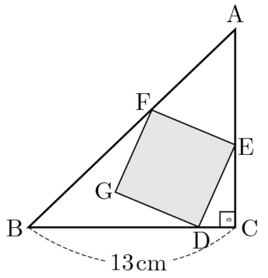
① 54° ② 55°
③ 56° ④ 57°
⑤ 58°

8. $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라 하자. $\overline{AB}$ 위의 점 E에 대하여 $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AC}$이고, $\overline{BD} + \overline{AC} = 26\,\text{cm}$, $\overline{AE} + \overline{BC} = 28\,\text{cm}$일 때, $\overline{BE}$의 길이는?



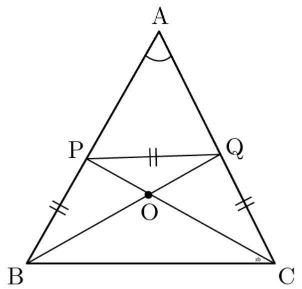
① $6\,\text{cm}$ ② $6.4\,\text{cm}$
③ $6.8\,\text{cm}$ ④ $7\,\text{cm}$
⑤ $7.2\,\text{cm}$

9. $\triangle ABC$는 $\angle C=90^\circ$, $\overline{BC}=\overline{CA}$인 삼각형이고, $\square DEFG$는 정사각형이다. $\overline{DC}+\overline{CE}=8\text{cm}$, $\overline{BC}=13\text{cm}$일 때, $\triangle AFE$의 넓이는 몇 cm^2인가?



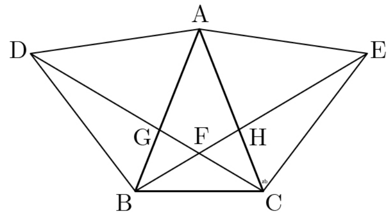
① 18
② 20
③ 25
④ 26
⑤ 30

10. 그림과 같이 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이고 $\overline{CO}$, $\overline{BO}$의 연장선이 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$일 때, $\angle A$의 크기는?



① 48°
② 50°
③ 52°
④ 56°
⑤ 60°

11. 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이며, $\triangle ABD$, $\triangle ACE$는 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정삼각형이다. $\angle BAC=44^\circ$일 때, $\angle BDC$의 크기는?

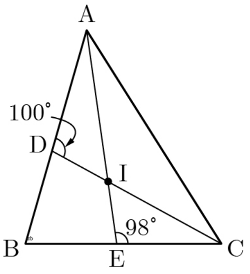


① 22°
② 26°
③ 30°
④ 34°
⑤ 38°

12. 빗변의 길이가 34cm인 직각삼각형 ABC에서 외접원과 내접원의 반지름의 차는 11cm라 하자. 이 직각삼각형 ABC의 넓이는?

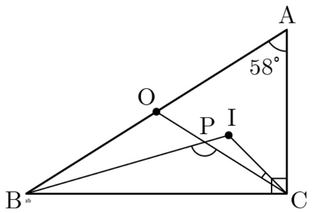
① 180cm^2
② 192cm^2
③ 224cm^2
④ 240cm^2
⑤ 268cm^2

13. 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이다. $\angle ADI = 100^\circ$, $\angle IEC = 98^\circ$일 때, $\angle B$의 크기는?



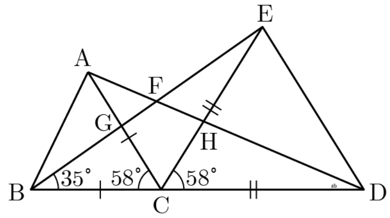
① 72°　② 73°
③ 74°　④ 75°
⑤ 76°

14. 다음 그림은 $\angle C = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 점 O는 외심, 점 I는 내심이다. 점 P는 $\overline{OC}$와 $\overline{BI}$의 교점이고 $\angle A = 58^\circ$일 때, $\angle BPC + \angle ICP$의 크기는?



① 129°　② 132°
③ 140°　④ 145°
⑤ 148°

15. 그림과 같이 $\overline{BD}$ 위에 점 C를 잡아 $\overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$인 이등변삼각형 ABC, ECD를 각각 그렸다. $\angle EBC = 35^\circ$, $\angle ACB = 58^\circ$, $\angle ECD = 58^\circ$일 때, <보기> 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?



<보기>

ㄱ. $\angle CAD = 35^\circ$　ㄴ. $\angle ADC = 25^\circ$
ㄷ. $\angle AHE = 90^\circ$　ㄹ. $\angle AFG = 58^\circ$
ㅁ. $\angle ACD = 122^\circ$

① 1개　② 2개
③ 3개　④ 4개
⑤ 5개

정답 및 해설

1) [정답] ④

[해설] ㄷ. $\triangle MCG$과 $\triangle MID$에서

$\overline{CG}=\overline{ID}$(내접원의 반지름의 길이)

$\angle CGM=\angle IDM=90^\circ$

$\angle GMC=\angle DMI$(맞꼭지각)이므로

$\triangle MCG\equiv\triangle MID$($ASA$합동)

ㄹ. $\triangle AHN\equiv\triangle IDN$($ASA$합동)

$\triangle DIM\equiv\triangle GCM$($ASA$합동)

$\overline{AE}=\overline{AD}=a$, $\overline{BE}=\overline{BF}=b$, $\overline{CD}=\overline{CF}=c$라 하면

$\triangle ABC=\square AEIH+\square BEIF+\square CFIG$이므로

$\frac{1}{2}(a+b)(b+c)=ab+b^2+bc$

$\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}(ab+b^2+bc)$

$\therefore ac=ab+b^2+bc$

그런데 $\triangle ABC=ab+b^2+bc$이므로

$\triangle ABC=\overline{AD}\times\overline{CD}$

2) [정답] ②

[해설] 내접원의 반지름의 길이를 a, 외접원의 반지름의 길이를 b라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times a\times(2a+4b)=54$

$\therefore a(a+2b)=54 \quad \cdots$ ㉠

$2a\times 2b=90$에서 $2ab=45 \quad \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+45=54$, $a^2=9$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

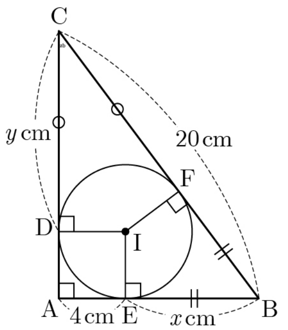
$2\times 3\times b=45$, $\therefore b=\frac{15}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$\pi\times\left(\frac{15}{2}\right)^2-\pi\times 3^2=\frac{189}{4}\pi$

3) [정답] ⑤

[해설]



직각삼각형 ABC의 외접원과 내접원의 넓이가 각각 $100\pi\text{cm}^2$, $16\pi\text{cm}^2$이면 반지름의 길이는 각각 10cm, 4cm이고 외심은 빗변 $\overline{BC}$의 중점이므로 그림에서 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=4\text{cm}$이다.

이때, $\overline{BE}=x\text{cm}$, $\overline{CD}=y\text{cm}$라 하면

$\overline{BE}=\overline{BF}=x\text{cm}$, $\overline{CD}=\overline{CF}=y\text{cm}$이므로

$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$에서 $x+y=20$

$\therefore\triangle ABC=\triangle AIB+\triangle BIC+\triangle AIC$

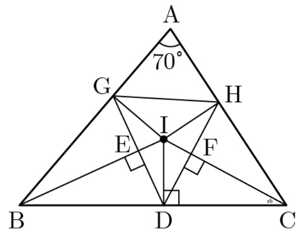
$=\frac{1}{2}\times\{4(4+x)+20\times 4+4(y+4)\}$

$=\frac{1}{2}\times\{4(x+y)+112\}$

$=\frac{1}{2}\times 192=96(\text{cm}^2)$

4) [정답] ①

[해설]



$\triangle BDE$와 $\triangle BGE$에서

$\angle BED=\angle BEG=90^\circ$, $\angle DBE=\angle GBE$,

$\overline{BE}$는 공통이므로

$\triangle BDE\equiv\triangle BGE$($ASA$합동)

또, $\triangle CDF$와 $\triangle CHF$에서

$\angle DFC=\angle HFC=90^\circ$, $\angle DCF=\angle HCF$

$\overline{CF}$는 공통이므로

$\triangle CDF\equiv\triangle CHF$($ASA$합동)

따라서 $\triangle GDH$에서 점 I는 $\overline{GD}$, $\overline{HD}$의 수직이등분선의 교점이므로 외심이다.

이때, 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle BIC=\frac{1}{2}\angle A+90^\circ=\frac{1}{2}\times 70^\circ+90^\circ=125^\circ$

사각형 $IEDF$에서

$\angle EDF=360^\circ-(125^\circ+90^\circ+90^\circ)=55^\circ$

$\triangle GDH$에서 $\angle GIH=2\angle EDF=2\times 55^\circ=110^\circ$

$\overline{IG}=\overline{IH}$이므로 $\angle IGH=\frac{180^\circ-110^\circ}{2}=35^\circ$

$\therefore\angle GDH+\angle IGH=55^\circ+35^\circ=90^\circ$

5) [정답] ③

[해설] $\angle BAC=180^\circ-(58^\circ+42^\circ)=80^\circ$

$\angle IAC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$

$\angle ACO=42^\circ-10^\circ=32^\circ$

$\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 $\angle OAC=\angle OCA=32^\circ$

$\therefore\angle IAO=40^\circ-32^\circ=8^\circ$

6) [정답] ③

[해설] 점 O는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

$\angle A=90^\circ$이고 $\overline{OA}=\overline{OB}$

즉, $\triangle ABO$는 이등변삼각형이다.

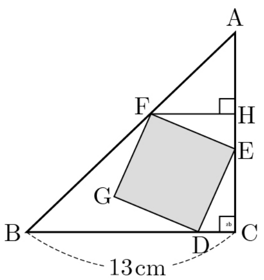
$\angle OAB=\angle OBA=38^\circ$

$\angle OAC = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$
$\triangle AOC$에서
$\angle OIC = \frac{1}{2}\angle OAC + 90^\circ = \frac{1}{2} \times 52^\circ + 90^\circ = 116^\circ$

7) [정답] ③
[해설] $\triangle BDF$와 $\triangle CED$에서
$\overline{BF} = \overline{CD}$, $\overline{BD} = \overline{CE}$, $\angle FBD = \angle DCE$이므로
$\triangle BDF \equiv \triangle CED$($SAS$합동)
$\angle BFD + \angle BDF = 180^\circ - \angle FBD$
$\angle BFD = \angle CDE$이므로
$\angle CDE + \angle BDF = 180^\circ - \angle FDE$
즉, $\angle FBD = \angle FDE = 62^\circ$
$\therefore \angle x = 180^\circ - 62^\circ \times 2 = 56^\circ$

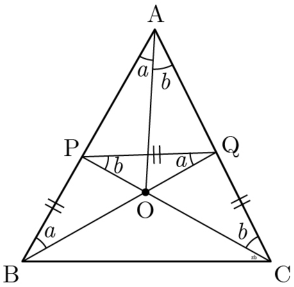
8) [정답] ①
[해설] $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AC}$, $\overline{BC} = 2\overline{BD}$이므로
$\begin{cases} \overline{BD} + \overline{AC} = 26\,cm \\ 2\overline{BD} + \frac{2}{3}\overline{AC} = 28\,cm \end{cases}$ 위의 식에 2를 곱하고
아래의 식에 3을 곱하면
$\begin{cases} 2\overline{BD} + 2\overline{AC} = 52\,cm \\ 6\overline{BD} + 2\overline{AC} = 84\,cm \end{cases}$ 이므로 아래의 식에서 위의 식을 빼면 $4\overline{BD} = 32\,cm$, $\overline{BD} = 8\,cm$
따라서 $\overline{AC} = 18\,cm$이고 $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{AC} = 6\,cm$

9) [정답] ②
[해설]



$\triangle ABC$ 빗변 위의 점 F에서 $\overline{AC}$로 수선의 발을 내렸을 때 생기는 점을 H라고 하자. $\triangle ABC$가 직각이등변삼각형이므로 $\triangle AFH$도 직각이등변삼각형이다. 그러므로 $\overline{FH} = \overline{AH}$이다.
$\overline{FE} = \overline{ED}$, $\angle FEA = \angle EDC$이므로
$\triangle FEH \equiv \triangle EDC$ (RHA합동)이다.
그러므로 $\overline{DC} + \overline{CE} = \overline{CH}$이다.
$\overline{AH} = \overline{FH} = \overline{CE} = (13-8)cm = 5cm$
$\overline{DC} = (8-5)cm = 3cm$
그러므로 $\triangle AFE$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20cm^2$이다

10) [정답] ⑤
[해설]



$\triangle PBQ$에서 $\overline{PB} = \overline{PQ}$이므로
$\angle PBQ = \angle PQB = a$라 하면
$\triangle OAB$에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$이므로 $\angle BAO = a$
또, $\triangle QPC$에서 $\overline{PQ} = \overline{QC}$이므로
$\angle QPC = \angle QCP = b$라 하면
$\triangle OAC$에서 $\overline{OA} = \overline{OC}$이므로 $\angle CAO = b$
$\therefore \angle BAC = a + b$
한편, $\angle BOC = 2\angle BAC$이므로
$\angle POQ = \angle BOC = 2(a+b)$(맞꼭지각)
$\triangle OQP$에서
$2(a+b) + a + b = 180^\circ$, $3(a+b) = 180^\circ$
$\therefore a + b = 60^\circ$

11) [정답] ①
[해설] $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$
$\overline{AD} = \overline{AC}$이므로 $\triangle DAC$는 이등변삼각형이다.
$\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 60^\circ + 44^\circ = 104^\circ$
$\therefore \angle ADC = \frac{180^\circ - 104^\circ}{2} = 38^\circ$
$\therefore \angle BDC = \angle ADB - \angle ADC = 60^\circ - 38^\circ = 22^\circ$

12) [정답] ④
[해설] 직각삼각형의 외접원의 지름은 직각삼각형의 빗변과 같다. 그러므로 외접원의 반지름은 $17\,cm$이다. 외접원과 내접원의 반지름의 차가 $11\,cm$이므로 내접원의 반지름은 $6\,cm$이다. $\triangle ABC$의 빗변을 $\overline{AB}$라고 한다면 $(\overline{BC} - 6) + (\overline{CA} - 6) = 34$이므로 $\overline{BC} + \overline{CA} = 46\,cm$이다.
직각삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times (\triangle ABC$의 둘레) 이므로 $\frac{1}{2} \times 6 \times (34 + 46) = 240\,cm^2$이다.

13) [정답] ①
[해설] $\angle BAI = \angle CAI = a$, $\angle ACI = \angle BCI = b$라 하면
$\triangle ABC$에서
$2(a+b) + \angle B = 180^\circ$ $\quad \therefore a + b = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$
$\triangle ABE$에서 $\angle AEC = a + \angle B = 98^\circ$ $\cdots$ ㉠
$\triangle BCD$에서 $\angle ADC = b + \angle B = 100$ $\cdots$ ㉡
㉠+㉡을 하면 $a + b + 2\angle B = 198^\circ$ 이므로
$\left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle B\right) + 2\angle B = 198^\circ$

$\frac{3}{2}\angle B=108^{\circ}$ $\therefore \angle B=72^{\circ}$

14) [정답] ④

[해설] $\angle BOC=2\angle A=2\times 58^{\circ}=116^{\circ}$

$\overline{OB}=\overline{OC}$이므로

$\angle OBC=\angle OCB=\frac{180^{\circ}-116^{\circ}}{2}=32^{\circ}$

점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\times 32^{\circ}=16^{\circ}$

$\angle ICB=\frac{1}{2}\angle C=45^{\circ}$

$\triangle PBC$에서

$\angle BPC=180^{\circ}-(16^{\circ}+32^{\circ})=132^{\circ}$

$\angle ICP=45^{\circ}-32^{\circ}=13^{\circ}$

$\therefore \angle BPC+\angle ICP=132^{\circ}+13^{\circ}=145^{\circ}$

15) [정답] ③

[해설] ㄴ. $\angle ACE=180^{\circ}-2\times 58^{\circ}=64^{\circ}$

$\triangle ACD$와 $\triangle BCE$에서

$\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACD=\angle ACE+58^{\circ}=\angle BCE$

$\overline{CD}=\overline{CE}$이므로 $\triangle ACD\equiv\triangle BCE$

즉,

$\angle ADC=\angle BEC=180^{\circ}-(35^{\circ}+122^{\circ})=23^{\circ}$

ㄷ. $\angle AHE$와 $\angle CHD$는 맞꼭지각이므로

$\angle AHE=\angle CHD=180^{\circ}-(58^{\circ}+23^{\circ})=99^{\circ}$