Étude par perturbation du modèle avec Mémoire du champignon (sans le terme du type Keller Segel)

Liam Toran

May 3, 2019

1 Equation KPP avec Memoire

On a le modele suivant:

$$\begin{cases} \partial_t \mu - \frac{T}{\lambda}\Delta\mu = f(C)(\mu+\rho) - \mu\rho \\ \partial_t \rho = F_0 \mu \\ \partial_t C = -b\rho C \end{cases} \tag{1}$$

où $f(0) = 0$ et f est positive.
On recherche des solutions en onde plane, on pose c la vitesse d'onde et $\xi = x - ct$.

$$\begin{cases} -c\mu' - \frac{T}{\lambda}\mu'' = f(C)(\mu+\rho) - \mu\rho \\ -c\rho' = F_0\mu \\ C' = \frac{b\rho C}{c} \end{cases} \tag{2}$$

Nos etats stationaires sont $(\mu, \rho, C) = \begin{cases} (0, 0, C_0) \\ (0, \rho_\infty, 0) \end{cases}$

1.1 Au voisinage de $(0, 0, C_0)$

Au voisinage de $(0, 0, C_0)$ on a, en posant $f(C_0) = f_0$:

$$\begin{cases} -c\mu' - \frac{T}{\lambda}\mu'' = f_0(\mu+\rho) \\ -c\rho' = F_0\mu \end{cases} \tag{3}$$

ce qui devient

$$\rho''' + \frac{c\lambda}{T}\rho'' + \frac{f_0\lambda}{T}\rho' - \frac{\lambda F_0 f_0}{Tc}\rho = 0 \tag{4}$$

de polynôme caracteristique

$$P(X) = X^3 + \frac{c\lambda}{T}X^2 + \frac{f_0\lambda}{T}X - \frac{\lambda F_0 f_0}{Tc} \tag{5}$$

Pour $c < 0$, $P(0) > 0$ donc P a une racine negative r_1 .
Pour que P ait deux autres racines reelles $r_3 > r_2 > r_1$ il faut (condition necessaire et suffisante) que P' s'annule deux fois et que le discriminant Δ de P soit positif.

1.1.1 Première condition: P' a deux annulations:

$P'(X) = 3X^2 + 2\frac{c\lambda}{T}X + \frac{f_0\lambda}{T}$ a pour discriminant $\Delta' = 4(\frac{\lambda}{T})^2(c^2 - 3\frac{T}{\lambda}f_0)$ ce qui donne la condition

$$\boxed{c^2 > 3\frac{T}{\lambda}f_0} \tag{6}$$

1.1.2 Deuxième condition: $\Delta > 0$:

Pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ on a $\Delta = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$ ce qui dans notre cas donne

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\lambda^4}{T^4}f_0^2c^2 - 18\frac{\lambda^3 f_0^2 F_0}{T^3} - 27\frac{\lambda^2 F_0^2 f_0^2}{T^2c^2} - 4\frac{f_0^3\lambda^3}{T^3} + 4\frac{\lambda^4 F_0 f_0 c^2}{T^4} \\ &= c^2\frac{\lambda^4 f_0(f_0+4F_0)}{T^4} - \frac{\lambda^3 f_0^2(18F_0+4)}{T^3} - \frac{27\lambda^2F_0^2f_0^2}{T^2} * \frac{1}{c^2} \\ &= \frac{\lambda^4 f_0}{T^4c^2}[(f_0+4F_0)c^4 - \frac{Tf_0(18F_0+4)}{\lambda}c^2 - 27\frac{T^2F_0^2f_0}{\lambda^2}]\end{aligned}$$

On est revenu à étudier le signe du polynôme en c^2

$$D(c^2) = (f_0+4F_0)c^4 - \frac{Tf_0(18F_0+4)}{\lambda}c^2 - 27\frac{T^2F_0^2f_0}{\lambda^2} \tag{7}$$

de discriminant d:

$$\begin{aligned}d &= \Big(\frac{Tf_0(18F_0+4)}{\lambda}\Big)^2 + 108(f_0+4F_0)\frac{T^2F_0^2f_0}{\lambda^2} \\ &= \frac{T^2f_0}{\lambda^2}(f_0(18F_0+4)^2 + 108(f_0+4F_0)F_0^2) > 0\end{aligned}$$

On obtient donc la condition sur la positivite de Δ:

$$\boxed{c^2 > \frac{Tf_0(18F_0+4) + T\sqrt{f_0(f_0(18F_0+4)^2 + 108(f_0+4F_0)F_0^2)}}{2\lambda(f_0+4F_0)}} \tag{8}$$

1.1.3 Signe des racines

On sait déjà que $r_3 < 0$. Comme $r_1r_2r_3 < 0$, on remarque que r_2 et r_1 sont du meme signe. De plus P' a un axe de symetrie $X = -\frac{c\lambda}{3T} > 0$ car $c < 0$ donc P atteint un minimum local (forcement négatif) en un point positif donc P a une racine positive.
On en deduit $r_1 > r_2 > 0$:
Sous les conditions (**??**) et (**??**), P a deux racines positives et une négative.

1.2 Au voisinage de $(0, \rho_\infty, 0)$

Autour de $(0, \rho_\infty, 0)$:

$$\begin{cases} -c\mu' - \frac{T}{\lambda}\mu'' = f(C)\rho_\infty - \mu\rho_\infty \\ C' = \frac{b\rho_\infty C}{c} \end{cases} \tag{9}$$

la deuxième ligne donne

$$C = K \exp\left(\frac{b\rho_\infty}{c} t\right) \tag{10}$$

et la première est une EDO d'ordre deux en μ avec terme source $f(C)\rho_\infty$ de polynôme caracteristique:

$$Q(X) = X^2 + \frac{c\lambda}{T} X - \frac{\rho_\infty \lambda}{T} \tag{11}$$

qui possède toujours deux racines: une négative et une positive.