Apêndice A

Lista de Distribuições

Neste apêndice são listadas as distribuições de probabilidade utilizadas no texto para facilidade de referência. Sã apresentadas suas funções de (densidade) de probabilidade além da média e variância. Uma revisão exaustiva de distribuições de probabilidades pode ser encontrada em Johnson et al. (1992, 1995) e Evans et al. (1993).

A.1 Distribuição Normal

X tem distribuição normal com parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, denotando-se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ a distribuição é chamada normal padrão.

No caso vetorial, $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_p)$ tem distribuição normal multivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de variância-covariância Σ, denotando-se $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = (2\pi)^{-p/2}|\Sigma|^{-1/2} \exp[-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2]$$

para $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ e Σ positiva-definida.

A.2 Distribuição Log-Normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = e^X$ tem distribuição log-normal com parâmetros μ e σ^2. Portanto, sua função de densidade é dada por

$$p(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{y}(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\log(y)-\mu)^2}{\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E(X) = \exp\{\mu + \sigma^2/2\} \quad \text{e} \quad V(X) = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1).$$

A.3 A Função Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Propriedades,

- Usando integração por partes pode-se mostrar que,

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0.$$

- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Para n um inteiro positivo,

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{e} \qquad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\dots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\pi}$$

A.4 Distribuição Gama

X tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, denotando-se $X \sim Ga(\alpha, \beta)$, se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

$$E(X) = \alpha/\beta \quad \text{e} \quad V(X) = \alpha/\beta^2.$$

Casos particulares da distribuição Gama são a distribuição de Erlang, $Ga(\alpha, 1)$, a distribuição exponencial, $Ga(1, \beta)$, e a distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade, $Ga(\nu/2, 1/2)$.

A.5 Distribuição Wishart

Diz-se que uma matriz aleatória Ω $(n \times n)$ segue uma distribuição Wishart com parâmetro Σ e ν graus de liberdade, denotando-se $\Omega \sim W(\Sigma, \nu)$, se sua função de densidade é dada por,

$$p(\Omega|\Sigma, \nu) \propto |\Omega|^{(\nu-n-1)/2} \exp(-(1/2)tr(\Sigma\Omega))$$

sendo $\nu \geq n$, Σ positiva-definida e $tr(A)$ indica o traço de uma matriz A. Uma propriedade útil é que $A\Omega A' \sim W(A\Sigma A', \nu)$.

A.6 Distribuição Gama Inversa

X tem distribuição Gama Inversa com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, denotando-se $X \sim GI(\alpha, \beta)$, se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\; x^{-(\alpha+1)}\; e^{-\beta/x}, \quad x > 0.$$

$$E(X) = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \quad \text{para } \alpha > 1 \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \quad \text{para } \alpha > 2.$$

Não é difícil verificar que esta é a distribuição de $1/X$ quando $X \sim Ga(\alpha, \beta)$.

A.7 Distribuição Wishart Invertida

Diz-se que uma matriz aleatória Ω $(n \times n)$ segue uma distribuição Wishart-Invertida com parâmetro Σ e ν graus de liberdade, denotando-se $\Omega \sim WI(\Sigma, \nu)$ se sua função de densidade é dada por,

$$p(\Omega|\Sigma, \nu) \propto |\Omega|^{-(\nu+n+1)/2} \exp(-(1/2)tr(\Sigma\Omega))$$

sendo $\nu \geq n$, Σ positiva-definida e $tr(A)$ indica o traço de uma matriz A. Não é difícil verificar que $\Omega^{-1} \sim W(\Sigma, \nu)$. Outra propriedade é que $A\Omega A' \sim WI(A\Sigma A', \nu)$.

A.8 Distribuição Beta

X tem distribuição Beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, denotando-se $X \sim Be(\alpha, \beta)$, se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}\, (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

A.9 Distribuição de Dirichlet

O vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ tem distribuição de Dirichlet com parâmetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, denotada por $D_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ se sua função de densidade conjunta é dada por

$$p(\boldsymbol{x}|\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_1),\ldots,\Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1-1} \ldots x_k^{\alpha_k-1}, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = 1,$$

para $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$ e $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

$$E(X_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}, \quad V(X_i) = \frac{(\alpha_0-\alpha_i)\alpha_i}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}, \quad \text{e} \quad Cov(X_i, X_j) = -\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}$$

Note que a distribuição Beta é obtida como caso particular para $k = 2$.

A.10 Distribuição t de Student

X tem distribuição t de Student (ou simplesmente t) com parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\nu > 0$ (chamado graus de liberdade), denotando-se $X \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$, se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\nu,\mu,\sigma^2) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})\ \nu^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi}\sigma} \left[\nu + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]^{-(\nu+1)/2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{para } \nu > 1 \quad \text{e} \quad V(X) = \sigma^2 \frac{\nu}{\nu-2}, \quad \text{para } \nu > 2.$$

Um caso particular da distribuição t é a distribuição de Cauchy, denotada por $C(\mu, \sigma^2)$, que corresponde a $\nu = 1$.

A.11 Distribuição F de Fisher

X tem distribuição F com $\nu_1 > 0$ e $\nu_2 > 0$ graus de liberdade, denotando-se $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$, se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\, \nu_1^{\nu_1/2}\, \nu_2^{\nu_2/2}\, x^{\nu_1/2-1}(\nu_2+\nu_1 x)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}, \quad x > 0.$$

$$E(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}, \quad \text{para } \nu_2 > 2 \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)(\nu_2-2)^2}, \quad \text{para } \nu_2 > 4.$$

A.12 Distribuição de Pareto

X tem distribuição de Pareto com parâmetros α e β denotando-se $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$, se sua função de densidade de probabilidade é dada por,

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad x > \beta.$$

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}\right)^2.$$

A.13 Distribuição Binomial

X tem distribuição binomial com parâmetros $n \geq 1$ e $p \in (0,1)$, denotando-se $X \sim bin(n, p)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \ldots, n.$$

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad V(X) = np(1-p)$$

e um caso particular é a distribuição de Bernoulli com $n = 1$.

A.14 Distribuição Multinomial

O vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ tem distribuição multinomial com parâmetros n e probabilidades $\theta_1, \ldots, \theta_k$, denotada por $M_k(n, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ se sua função de probabilidade conjunta é dada por

$$p(\boldsymbol{x}|\theta_1, \ldots, \theta_k) = \frac{n!}{x_1!, \ldots, x_k!}\theta_1^{x_1}, \ldots, \theta_k^{x_k}, \quad x_i = 0, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^k x_i = n,$$

para $0 < \theta_i < 1$ e $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$. Note que a distribuição binomial é um caso particular da distribuição multinomial quando $k = 2$. Além disso, a distribuição marginal de cada X_i é binomial com parâmetros n e θ_i e

$$E(X_i) = n\theta_i, \quad V(X_i) = n\theta_i(1-\theta_i), \quad \text{e} \quad Cov(X_i, X_j) = -n\theta_i\theta_j.$$

A.15 Distribuição de Poisson

X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\theta > 0$, denotando-se $X \sim Poisson(\theta)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$E(X) = V(X) = \theta.$$

A.16 Distribuição Binomial Negativa

X tem distribuição de binomial negativa com parâmetros $r \geq 1$ e $p \in (0, 1)$, denotando-se $X \sim BN(r, p)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x|r, p) = \binom{r + x - 1}{x} p^r (1-p)^x, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Um caso particular é quando $r = 1$ e neste caso diz-se que X tem distribuição geométrica com parâmetro p. Neste caso,

$$p(x|p) = p^r(1-p)^x, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$