

Lineare Algebra Übungszettel 1

Moritz Brand, Lian Bubolz tztzt

Aufgabe H1. Seien A, B, X, Y Mengen, und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Geben Sie für jede der folgenden Behauptungen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

1. Für alle Teilmengen Y_1 und Y_2 von Y gilt: $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
2. Für alle Teilmengen X_1 und X_2 von X gilt: $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.
3. Für alle $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ gilt $f(X' \cap f^{-1}(Y')) = f(X') \cap Y'$.
4. $(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$.
5. $(A \times X) \cup (B \times Y) = (A \cup B) \times (X \cup Y)$.

Proof.

1. Für alle Teilmengen Y_1 und Y_2 von Y gilt: $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
2. Sei $X = \{-1, 1\}$ mit $X_1 = \{-1\}$, $X_2 = \{1\}$, $Y = \{1\}$ und die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ durch $x \mapsto 1$ definiert. Dann ist per Definition $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ und dadurch auch $f(X_1 \cap X_2) = \emptyset$.

Doch $f(X_1) \cap f(X_2) = \{1\}$ wodurch die Behauptung widerlegt wurde.

3. AHHHHHHHHHH
4. AHHHHHHHHHH
5. AHHHHHHHHHH

□

Aufgabe H2. Sei $X \neq \emptyset$ eine endliche Menge und sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Es existiert ein $m \geq 1$ mit der Eigenschaft: Es gibt ein $x \in X$ mit $f^m(x) = x$. ($f^m = f \circ \dots \circ f$ ist die m -fache Komposition von f).

Proof. Wir teilen den Beweis in keine Surjektivität und Surjektivität auf:

(1) Wenn $f(x)$ nicht surjektiv ist $\exists! a \in X : \forall n \geq |X|, n \in \mathbb{N}, : f^n(x) = a$, da X endlich ist und aufgrund der fehlenden Surjektivität ($\exists q \in X : \forall p \in X : q \neq f(p) \Rightarrow |X| > |f(X)|$) $\forall b < (|X|)/(|X| - |f(X)|), b \in \mathbb{N} : |f^{b+1}(X)| < |f^b(X)|$. In diesem Fall wählen wir $x = a$ und $m = |X|$.

(2) Ist $f(x)$ surjektiv, wählen wir ein beliebiges, festes $x \in X$, wofür zwangsläufig $x \in F = \{f(x), \dots, f^{|X|+1}(x)\}$ gilt, da es nur $|X| - 1$ Elemente ungleich x in $f(X) = X$ gibt, aber $|X|$ Elemente in der Menge F . Nummerieren wir die Elemente in F mit $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, wählen wir m so, dass $m = \min(\{n | f^n(x) = x \wedge n > 0\})$ und haben so, per Definition, eine m -fache Komposition für die $f^m(x) = x$ gilt. □

Aufgabe H3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(i) Zu jedem $a \in K$ gibt es nur ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$;

Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

(ii) Falls $ab = 0$, so gilt $a = 0$ oder $b = 0$, d.h. K ist nullteilerfrei;

(iii) $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$ falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$;

(iv) $(-a)(-b) = ab$;

(v) $-(-a) = a$.

(Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome (A1), ..., (A4), (M1), ..., (M4), (D) Sie benutzen.)

Proof. Wir nutzen in jedem Beweis Kommutativität (A2, M2)

(i) Annahme: $\exists b, b' \in K : a + b = 0 = a + b'$

$$\Rightarrow b \stackrel{(A3)}{=} b + 0 \stackrel{(A4)}{=} b + (a + b') \stackrel{(A1)}{=} (b + a) + b' \stackrel{(A4)}{=} 0 + b' \stackrel{(A3)}{=} b'$$

(ii) Annahme: $\exists a, b \in K : a \neq 0 \neq b \wedge ab = 0$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{(\text{Lemma 2.3})}{=} 0((ab)^{-1}) \stackrel{(\text{Annahme})}{=} (ab)(ab)^{-1} \stackrel{(M4)}{=} 1 \text{ Widerspruch zu (M3)} \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

(iii) Seien $b \neq 0$ und $d \neq 0$

$$\text{Lemma 1.1 } (b^{-1}d^{-1})^{-1} = bd$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis : } (b^{-1}d^{-1})^{-1} &\stackrel{(M3)}{=} (b^{-1}d^{-1})^{-1}(1) \stackrel{(M4)}{=} (b^{-1}d^{-1})^{-1}((b^{-1}b)(d^{-1}d)) \stackrel{(M1, M2)}{=} \\ &(b^{-1}d^{-1})^{-1}(b^{-1}d^{-1})(bd) \stackrel{(M4)}{=} 1(bd) \stackrel{(M3)}{=} bd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a/b + c/d &\stackrel{(\text{Schreibweise})}{=} ab^{-1} + cd^{-1} \stackrel{(M3)}{=} 1(ab^{-1} + cd^{-1}) \stackrel{(D)}{=} 1(ab^{-1}) + 1(cd^{-1}) \stackrel{(M4)}{=} \\ (dd^{-1})(ab^{-1}) + (bb^{-1})(cd^{-1}) &\stackrel{(M1, M2)}{=} a(b^{-1}d)d^{-1} + c(d^{-1}b)b^{-1} \stackrel{(M1, M2)}{=} ad(b^{-1}d^{-1}) + cb(d^{-1}b^{-1}) \stackrel{(D)}{=} \\ b^{-1}d^{-1}((ad) + (cb)) &\stackrel{(\text{Schreibweise})}{=} (ad + cb)/(b^{-1}d^{-1})^{-1} \stackrel{(\text{Lemma 1.1})}{=} (ad + cb)/(bd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv) } (-a)(-b) &\stackrel{(A3)}{=} 0 + (-a)(-b) \stackrel{(\text{Lemma 2.3})}{=} 0(-b) + (-a)(-b) \stackrel{(A4)}{=} (a + (-a))(b) + (-a)(-b) \stackrel{(D)}{=} \\ ab + (-a)b + (-a)(-b) &\stackrel{(D)}{=} ab + (-a)(b + (-b)) \stackrel{(A4)}{=} ab + (-a)0 \stackrel{(\text{Lemma 2.3, A3})}{=} ab \end{aligned}$$

$$\text{(v) } -(-a) \stackrel{(A3)}{=} -(-a) + 0 \stackrel{(A4)}{=} -(-a) + ((-a) - a + a) \stackrel{(A1)}{=} (-(-a) + (-a)) + a \stackrel{(A4)}{=} 0 + a \stackrel{(A3)}{=} a$$

□

Aufgabe H4. Sei K ein Körper, und sei $K^\times := K \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Es gibt keine bijektive Abbildung $e : K \rightarrow K^\times$ mit $e(a + b) = e(a)e(b)$ für alle $a, b \in K$. Sie dürfen verwenden, dass das Polynom $X^2 - 1$ in K nur die Nullstellen 1 und -1 hat. Den Fall $\text{char}(K) = 2$ (d.h. $1 + 1 = 0$) sollte man getrennt betrachten.

Proof. Wir zeigen per Widerspruchsbeweis, dass es keine bijektive Abbildung geben kann:

Annahme: Es gibt eine bijektive Abbildung.

$$\exists x \in K : e(x) = (-1) \Rightarrow e(x + x) = (-1)(-1) \stackrel{(H3)}{=} 1_{K^\times}$$

$$\text{Sei } y \in K, y \neq 0_K, e(0_K + y) = e(0_K)e(y) \Leftrightarrow e(y) = e(0_K)e(y) \Rightarrow e(0_K) = 1_{K^\times}$$

$$\Rightarrow e(x + x) = e(0_K) \stackrel{(e^{-1})}{\Rightarrow} x + x = 0_K$$

$$\text{Wenn } x + x = 0_K, \text{ dann gilt } 0_K = (x + x)x^{-1} = 1_K + 1_K \Rightarrow \text{char}(K) = 2$$

$$\Rightarrow 1_{K^\times} = e(0_K) = e(1_K + 1_K) = e(1_K)e(1_K) = e(1_K)^2$$

Wir wissen, dass das Polynom $X^2 - 1$ nur die Nullstellen 1 und -1 hat.

$\Rightarrow e(1_K) = 1_K = e(0_K) \stackrel{(e^{-1})}{\Rightarrow} 1_K = 0_K$ was ein Widerspruch zu den Körperaxiomen ist.

□

Es ist Funktionen-Party. $\tan(y)$, $\log(x)$ etc. sind gut drauf, tanzen und lachen. Nur e^x steht einsam in der Ecke. $\log(x)$: "Was ist denn los?" e^x : "Ich versuche mich ja zu integrieren, aber es kommt immer dasselbe dabei raus..."