MAP431 - Projet

Anas BIAD - Bachir EL KHADIR

May 26, 2014

Question 1

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$
On multiplie l'équation par la fonction test v et on intègre par parties en utilisant la formule de Green :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)v(x)dx &= \int_\Omega v(x)u_\mu(x)dx - \int_\Omega \frac{d}{dx}(\kappa_\mu(x)\frac{du_\mu}{dx}(x))v(x)dx \\ &= \int_\Omega v(x)u_\mu(x)dx + \int_\Omega \kappa_\mu(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{du_\mu}{dx}(x)dx\end{aligned}$$

Donc la forumation variationnelle du problème (3) s'écrit :

$$a_\mu(u_\mu, v) = b(v)$$

où :

$$a_\mu(u_\mu, v) = \int_\Omega v(x)u_\mu(x)dx + \int_\Omega \kappa_\mu(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{du_\mu}{dx}(x)dx$$

$$b(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

Question 2

Les coefficients de A:

$$A_{i,j} = a_\mu(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} \frac{2}{h^2}\int_{K_i}\kappa_\mu(x)dx + \frac{2}{3}h & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{h^2}\int_{K_i}\kappa_\mu(x)dx + \frac{h}{4} & \text{si } j = i+1 \\ -\frac{1}{h^2}\int_{K_{i-1}}\kappa_\mu(x)dx + \frac{h}{4} & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients de B:

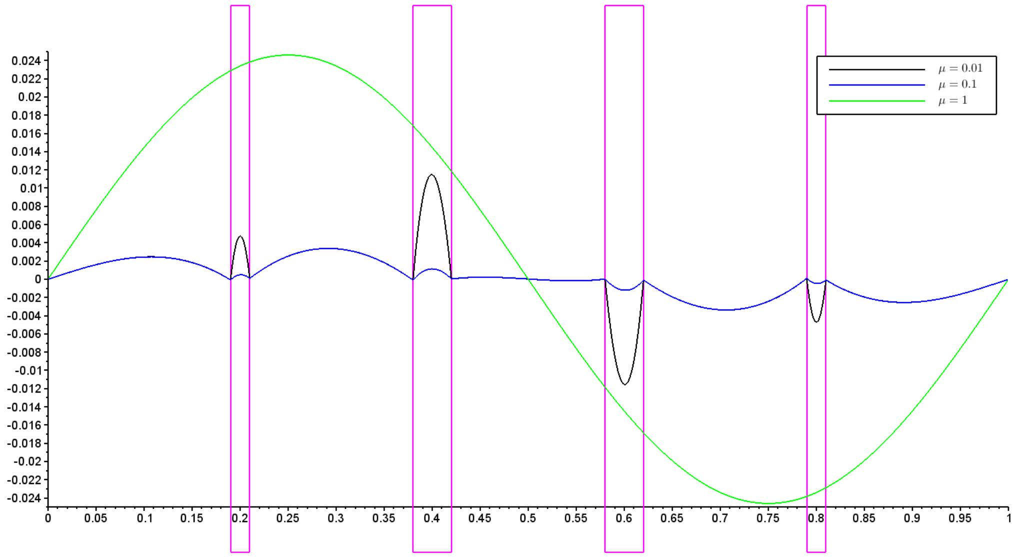
$$\begin{aligned}B_i = b(\varphi_i) &= \int_0^1 \varphi_i(x)sin(2\pi x)dx \\ &= \int_0^1 \varphi(\frac{x-x_i}{h})sin(2\pi x)dx \\ &= h\, sin(2\pi x_i)\,(sinc(\pi h))^2\end{aligned}$$

Question 3

Code sources:

calcul.sce: contient les fonctions calculant A, B puis la solution X
question3.sce: calcule et affiche le résultat pour $\mu \in \{0.01, 0.1, 1\}$

courbe de u_μ pour $\mu \in \{0.01, 0.1, 1\}$



Commentaire

- Les profils pour $\mu \in \{0.01, 0.1\}$ ne varient que dans la partie où κ est différent.
- On remarque une discontinuité brusque de la tendance des courbes lors du passage de Ω_1 à Ω_2.
- Le calcul prend beaucoup de temps.

Question 4

En injectant la relation:

$$u_\mu^{RB} = \sum_{j=1}^{N_0} X_{\mu,j}^{RB} u_j$$

Dans:

$$a_\mu(u_\mu^{RB}, u_i) = b(u_i)$$

et On trouve :

$$\sum_{j=1}^{N_0} X_{\mu,j}^{RB} a_\mu(u_j, u_i) = b(u_i)$$

Ainsi X_μ^{RB} est solution du système linéaire :

$$A_\mu^{RB} X_\mu^{RB} = B^{RB}$$

Avec :

$$(A_\mu^{RB})_{i,j} = a_\mu(u_j, u_i)$$

et :

$$(B^{RB})_i = b(u_i)$$

On a :

- a_μ est symétrique
- a_μ est positive car $(\forall v \in H_1^0(\Omega))\, a_\mu(v,v) = \int_\Omega (v(x))^2 dx + \int_\Omega \kappa_\mu(x)(\frac{dv}{dx}(x))^2 dx >= 0$
- Si $a_\mu(v,v) = 0$ alors $\int_\Omega (v(x))^2 dx = 0$, donc $v = 0$. Ainsi a_μ est définie

A_μ^{RB} est la matrice de a_μ dans la base des u_i, donc A_μ^{RB} est symétrique , définie positive.

Question 5

on a :

$$\begin{aligned}
(A_\mu)_{i,j} &= a_\mu(u_\mu, v)\\
&= \int_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + \int_{\Omega_1} \frac{d\varphi_i}{dx}(x)\frac{d\varphi_j}{dx}(x)dx + \mu\int_{\Omega_2} \frac{d\varphi_i}{dx}(x)\frac{d\varphi_j}{dx}(x)dx\\
&= \int_\Omega \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx + \int_{\Omega_1} \frac{d\varphi_j}{dx}(x)\frac{d\varphi_i}{dx}(x)dx + \int_{\Omega_2} \frac{d\varphi_j}{dx}(x)\frac{d\varphi_i}{dx}(x)dx\\
&= (A_0)_{i,j} + (A_1)_{i,j}
\end{aligned}$$

Où l'on a posé:

$$A_0 = \left(\int_\Omega \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx + \int_{\Omega_1} \frac{d\varphi_j}{dx}(x)\frac{d\varphi_i}{dx}(x)dx\right)_{i,j}$$

$$A_1 = \left(\int_{\Omega_2} \frac{d\varphi_j}{dx}(x)\frac{d\varphi_i}{dx}(x)dx\right)_{i,j}$$

Et donc on a:

$$A_\mu = A_0 + \mu A_1$$

D'autre part , on a

$$\begin{aligned}
(A_\mu^{RB})_{i,j} &= a_\mu(u_j, u_i)\\
&= [u_i]^T_{(\varphi_1,\dots,\varphi_N)}\, A_\mu\, [u_j]_{(\varphi_1,..,\varphi_N)}\\
&= X_i^T A_\mu X_j\\
&= X_i^T A_0 X_j + \mu X_i^T A_1 X_j\\
&= (A_0^{RB})_{i,j} + \mu(A_1^{RB})_{i,j}
\end{aligned}$$

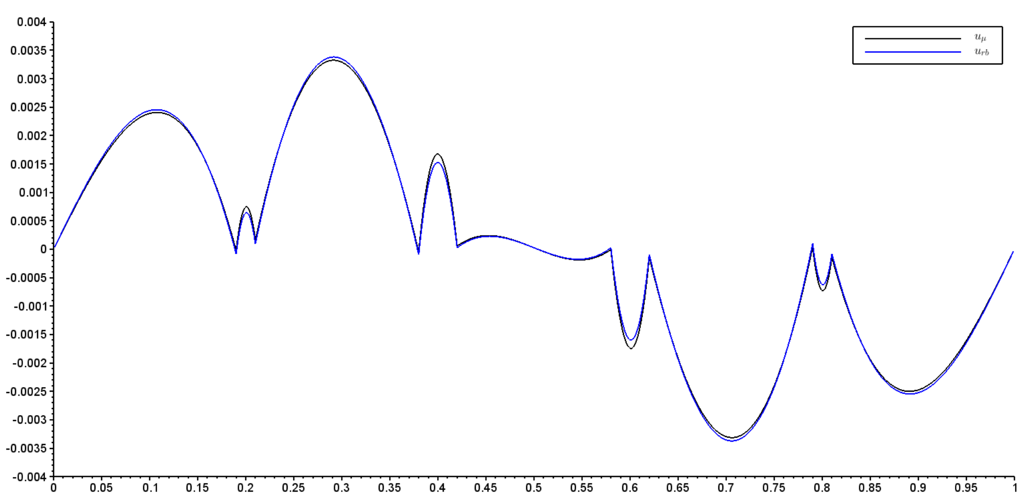
et :

$$(B^{RB})_i = b(u_i) = B^T X_i$$

Question 6

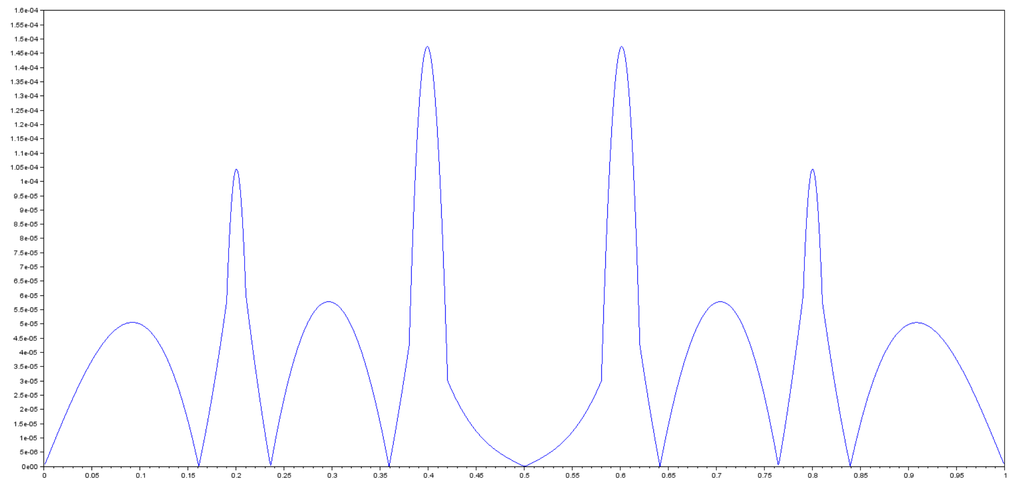
Code sources:

calcul2.sce: qui permet de calculer la solution avec la nouvelle méthode
question6.sce: calcule et affiche les solutions



Graphe de u_μ et u_{rb}

Les deux solutions sont quasiment confondues.



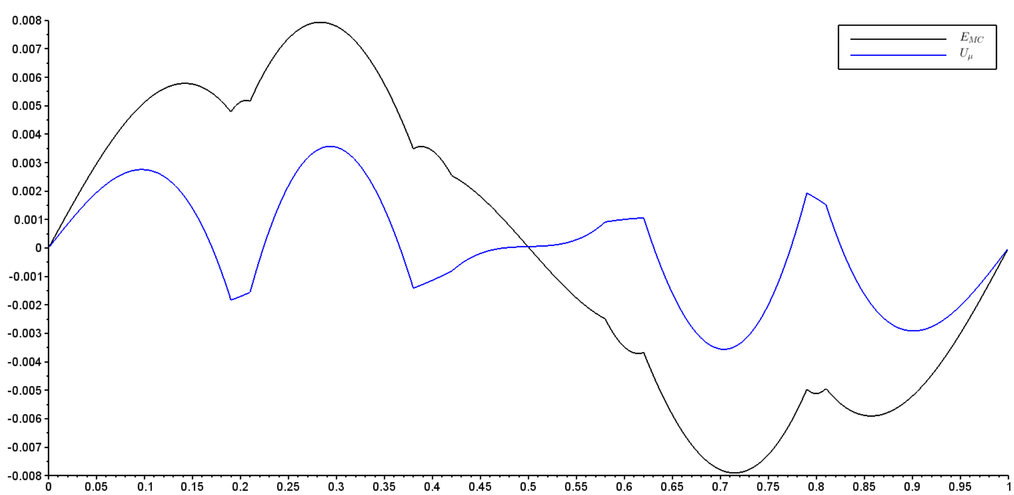
Graphe de $|u_\mu - u_{rb}|$

L'erreur est de l'ordre de 10^{-4}. La nouvelle méthode en plus d'être efficace, fournit des solutions acceptables.

Question 7

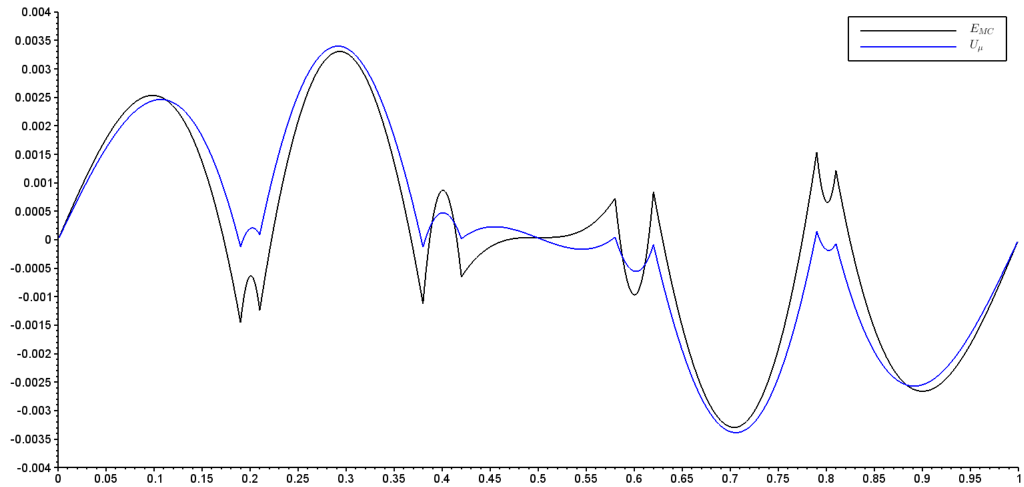
Code sources:

question7.sce: applique la méthode de l'énoncé



μ uniforme sur $[1.1, 1]$

- Les deux solutions sont assez différentes.
- La nouvelle de méthode de résolution de Galerkin permet de simuler un grand nombre de solutions en un temps raisonnable.



μ de loi log-uniforme

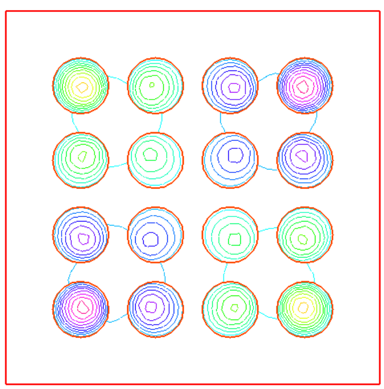
Les deux solutions sont proche dans ce cas de figure.

Question 8

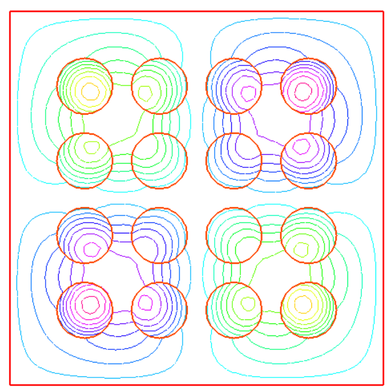
Code sources:

equation.edp: implémente l'algorithme sur FreeFem++

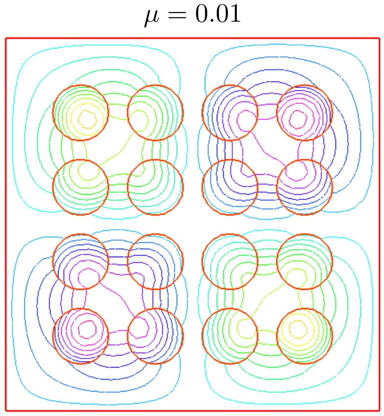
Résultat graphique



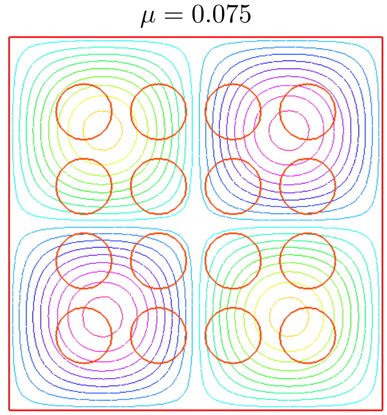
$\mu = 0.01$



$\mu = 0.075$



$\mu = 0.1$



$\mu = 1$