Question 1

$v(x+D) = u(x+D)e^{-i\frac{x+D}{D}\varphi} = u(x)e^{i\varphi}e^{-i(\frac{x}{D}+1)\varphi} = v(x)$ donc v est D-périodique. comme $v \in L^2(]-\frac{D}{2},\frac{D}{2}[)$, alors par décomposition de Fourier:

$$v(x) = \sum_{L\in\mathbb{Z}} \hat{v}(L)e^{i\frac{2\pi L}{D}}$$

et donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\sum_{L\in\mathbb{Z}} \hat{v}(L)e^{i\frac{2\pi L}{D}}\right)e^{i\frac{x}{D}\varphi} \\ &= \sum_{L\in\mathbb{Z}} u_L e^{iK_L x} && \text{où } u_L = \hat{v}(L) \end{aligned}$$

$\sum_{L\in\mathbb{Z}} |u_L|^2 = ||v||_{L_2}^2 < +\infty$, d'où la convergence de la série.

$$u|_{]-D/2,D/2[} \in H^1(]-\frac{D}{2},\frac{D}{2}[) \to \sum_{L\in\mathbb{Z}} |u_L K_L|^2 = ||\nabla u||_{L_2}^2 < +\infty$$

Question 2

En injectant $u(x,z) = u_L(z)e^{iK_L x}$ dans l'équation, on trouve:

$$-\delta u = (u_L''(z) - K_L^2 u_L(z))e^{iK_L x} = 0$$

Les solution sont donc de la forme:

$$u(x,z) = (Ae^{K_L z} + Be^{-K_L z})e^{iK_L x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

Pour que cette fonction appartiennent à $H^1(]-D/2,D/2[\times]0,+\infty[)$, il faut que $A = 0$.
Et dans ce cas, la solution s'écrit: $u(x,z) = Ce^{K_L(ix-z)}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

Question 3

$$u_L'(H) = -K_L u_L(H)$$

Question 4

Question 5

$$\begin{aligned} \nabla u &= \sum_{L\in\mathbb{Z}} \nabla(u_L(z)e^{iK_L x}) \\ &= \sum_{L\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} iK_L u_L(z) \\ u_L'(z) \end{pmatrix} e^{iK_L x} \end{aligned}$$

D'où (puisque les eiK_x forme une famille orthonormée):

$$||u||_{L_2}^2 = \int_{z\in]H,+\infty[} \int_{x\in]-D/2,D/2[} \sum_{L\in\mathbb{Z}} u_L(z)e^{iK_L x} dx\, dz = \int_{z\in]H,+\infty[} \sum_{L\in\mathbb{Z}} |u_L(z)|^2 dz$$

$$||\nabla u||_{L_2}^2 = \int_{z\in]H,+\infty[} \sum_{L\in\mathbb{Z}} |K_L u_L(z)|^2 + |u_L'(z)|^2 dz$$

Puis par fubini:

$$||u||_{H^1}^2 = ||u||_{L_2}^2 + ||\nabla u||_{L_2}^2 = \sum_{L\in\mathbb{Z}} \int_{z\in]H,+\infty[} \left((1+|K_L|^2)|u_L(z)^2 + |u_L'(z)|^2\right) dz$$

bla bla

On en conclut que:

$$\begin{aligned}
\sum_{L\in\mathbb{Z}} |K_L||u_L(H)|^2 &\leq 2\sum_{L\in\mathbb{Z}} |K_L| \int_H^{+\infty} |u'_L(t)||u_L(t)|dt \\
&\leq 2\sum_{L\in\mathbb{Z}} \int_H^{+\infty} (|u'_L(t)|^2 + |K_L u_L(t)|^2)dt && \text{par Cauchy Schwartz} \\
&\leq C||u||^2
\end{aligned}$$

Soit $u \in H^1$. C_c^∞ étant dense dans H^1, il existe une suite de fonction (u^n) de C_c^∞ tel que $u^n \to u$. L'application trace étant continue, on a aussi /* par densité bla bla bla */