MAP431 - Devoir à la maison

EL KHADIR Bachir

April 1, 2014

Question 1

Soit $u(x,t) = exp\, i(w(k)t - kx)$ une solution harmonique de l'équation des ondes (1), alors:

$$0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [\frac{1}{c^2}(iw(k))^2 - (-ik)^2] exp\, i(w(k)t - kx)$$

d'où:

$$\frac{w(k)^2}{c^2} = k^2$$

et:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi c}{|w(k)|} = cT$$

Chaque signal régulier se décompose par Fourier en une somme d'ondes plane harmonique. On vient de montrer que toutes ces composantes ont la même vitesse de phase $V = \frac{w}{k} = c$.

Le signal se propage donc sans se déformer si le milieu est homogène.

Question 2

On suppose maintenant que les donnés initiales sont D-périodiques.

Si $u(x,t) = exp\, i(wt - kx)$ une solution, alors $u(0,0) = u(D,0)$. ie $1 = expt(-ikD)$, ie il existe un $L \in \mathbb{Z}$ tel que

$$kD = 2\pi L$$

Appliquons la transformée de Fourier discrête au problème (1), il devient:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + k^2\hat{u} & = & 0 \\ \hat{u}(k,0) & = & \hat{u_0}(k) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} & = & \hat{u}_1(k) \end{cases}$$

De solution

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}_0(k)cos(kct) + \frac{\hat{u}_1(k)}{kc}sin(kct)$$

Pour $k = k_L$, les ondes planes harmoniques sont donc détérminées par:

$$\hat{u}_L(t) = \hat{u}(k_L,t) = \hat{u}_{0,L}cos(w_L t) + \hat{u}_{1,L}sinc(w_L t)t$$

Elle est associée aux conditions initiales suivantes:

$$u_L(x,0) = \hat{u}_{0,L}e^{-ik_L x}$$

$$\frac{\partial u_L}{\partial t}(x,0) = \hat{u}_{1,L}e^{-ik_L x}$$

La relation de dispersion étant:

$$\frac{w_L^2}{c^2} = k_L^2$$

Les fréquences spatiales sont $\frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} = \frac{L}{D}$. Elles sont inversement proportionnelles à D.

Question 3

Relation de dispersion:

Pour la fonction $U_h(k)$, on trouve:

$$\frac{\mathrm{d}^2 U_j}{\mathrm{d}t^2} = -w(k)^2 U_j(t)$$

$$U_{j+1} - 2U_j + Uj - 1 = (exp(-ikh) - 2 + exp(ikh))U_j = 2(cos(kh) - 1)U_j = -4sin^2\frac{kh}{2}U_j$$

En appliquant le schéma (4):

$$0 = -\frac{w(k)^2}{c^2}U_j + 4\frac{sin^2\frac{kh}{2}}{h^2}U_j$$

donc

$$w(k)^2 = 4\frac{c^2}{h^2}sin^2\frac{kh}{2}$$

donc

$$w = \pm w_h(k),\ w_h(k) = \frac{2c}{h}sin\frac{kh}{2}$$

Cette fois la vitesse de propagation des différentes composantes de Fourrier $V = C\,sinc\frac{kh}{2}$ dépend de la longueur d'onde k, la distance entre le signal calculé numériquement et le signal original augmente au cours du temps.

Control de la déformation:

Pour tout $x \geq 0$, on a: $x - \frac{x^3}{3} \leq sin(x) \leq x$,
donc

$$-\frac{x^2}{3} \leq \frac{sin(x)}{x} - 1 \leq 0$$

$$|sinc(x) - 1| \leq \frac{x^2}{3}$$

pour $x = \frac{kh}{2}$ on trouve le résultat

$$|sinc(\frac{kh}{2}) - 1| \leq \frac{x^2}{3}$$

La forme de la solution:

Comme dans la question 2, en passant à Fourier discrêt dans (4), on trouve:

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{U}_h}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4c^2\,sin^2\frac{kh}{2}}{h^2}\hat{U}_h = 0$$

qui donne compte tenu de la formule de dispersion:

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{U}_h}{\mathrm{d}t^2} + w_h(k)^2\hat{U}_h = 0$$

qui a pour solution pour $k = k_L$:

$$\hat{U_h}(t) = \hat{u}_{0,L}cos(w_{L,h}t) + \hat{u}_{1,L}sinc(w_{L,h}t)t$$

qui est associée aux conditions intiales:

$$U_h(0) = \hat{u}_{0,L}e^{-ik_L X_h}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}U_h}{\mathrm{d}t}(0) = \hat{u}_{0,L}e^{-ik_L X_h}$$

Le schéma est donc d'odre 2. En effet:

$$w_{L,h} = \frac{2c}{h}sin\frac{k_L h}{2} = \frac{2c}{h}\left(\frac{k_L h}{2} + \mathrm{O}\left(h^3\right)\right) = ck_L + \mathrm{O}\left(h^2\right) = w_L + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

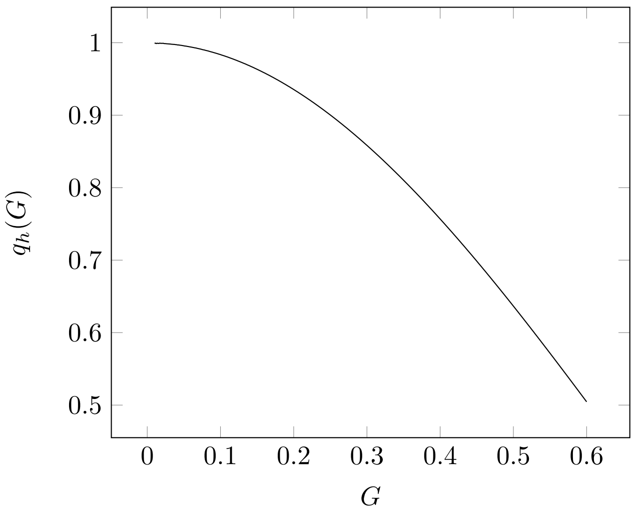
Notons $f(L) = sin^2 \frac{k_L h}{2} = sin^2 \frac{2\pi L h}{2D}$. On a:

$$f(L+J) = sin^2\left(\frac{2\pi Lh}{2D} + \frac{2\pi Jh}{2D}\right) = sin^2\left(\frac{2\pi Lh}{2D} + \pi\right) = f(L)$$

f est donc périodique.

De la relation de dispersion, $w_{L,h}$ est aussi périodiqie en L. Il convient donc de ne s'intéresser qu'aux J premiers modes de Fourier.

$$q_h(G) = \frac{w_h}{kc} = \frac{\frac{2c}{h} sin \frac{kh}{2}}{kc} = sinc\frac{kh}{2} = sinc(\pi G)$$



Pour le cas périodique, on a $2\pi L = kD = kJh$. Donc:

$$G = \frac{kh}{2\pi} = \frac{L}{J}$$

Question 4

Le schéma est explicite. En effet, de l'expression:

$$\frac{1}{c^2}\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= 2U_j^n - U_j^{n-1} + \frac{c^2\Delta t^2}{h^2}\left(()\, U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right) \\ &= \alpha^2 U_{j+1}^n + 2(1-\alpha^2)U_j^n + \alpha^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1} \end{aligned}$$

Où $\alpha = \frac{c}{\frac{h}{\Delta t}}$ est le rapport entre le pas de progression en temps $c\Delta t$ et en espace h du schéma numérique. La stabilité de ce dernier dépendra de sa valeur.

Question 5

Pour $1 \leq j \leq J$ on a:

$$\begin{aligned} u(x_j, \Delta t) &= u(0, x_j) + \Delta t\,\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x_j) + \mathrm{O}\left(\Delta t^3\right) \\ &= U_{0,j} + \Delta t U_{1,h} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x_j) + \mathrm{O}\left(\Delta t^3\right) \end{aligned}$$

Donc $U_{0,j} + \Delta t\, U_{1,h}$ est une approximation en temps d'ordre 1 uniquement.

$$\left((I - \frac{c^2\Delta t^2}{2}A_h)U_h^0 + \Delta t\, U_{1,h}\right)_j = u(0, x_j) - (u(x_{j+1}, 0) - 2u(x_j, 0) + u(x_{j-1}, 0))\frac{c^2\Delta t^2}{2h^2} + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_j)$$

Mais comme $u(x_{j+1},0) - 2u(x_j,0) + u(x_{j-1},0) = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,x_j) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$, alors:

$$\begin{aligned}
\left((I - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} A_h) U_h^0 + \Delta t\, U_{1,h}\right)_j &= u(0,x_j) - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \underset{h \to 0}{\mathrm{O}}(1) \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{O}}\left(\Delta t^3\right) \\
&= u(0,x_j) - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{O}\left(\Delta t^3\right) \\
&= u(\Delta t, x_j) + \mathrm{O}\left(\Delta t^2\right)
\end{aligned}$$

C'est donc bien un schéma d'odre 2.

Question 6

Pour la solution particulière U_h^n, le schéma donne:

$$\frac{1}{c^2} \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}$$

ie:

$$\frac{1}{c^2} \frac{e^{iw_{h,\Delta t}(k)t} - 2 + e^{-iw_{h,\Delta t}(k)t}}{\Delta t^2} U_j^n = \frac{e^{-ikh} - 2 + e^{ikh}}{h^2} U_j^n$$

ie:

$$\frac{1}{c^2} \frac{-2(1 - cos(iw_{h,\Delta t}(k)t))}{\Delta t^2} = \frac{-2(1 - cos(kh))}{h^2}$$

ie:

$$\frac{4}{\Delta t^2} sin^2 \frac{w_{h,\Delta t}(k)t}{2} = \frac{4c^2}{h^2} sin^2 \frac{kh}{2}$$

ou encore:

$$sin^2 \frac{w_{h,\Delta t}(k)t}{2} = \alpha^2 sin^2 \frac{kh}{2}$$

Si $\alpha > 1$ le schéma est instable. En effet, pour les valeurs de h et k telles que $\frac{kh}{2} \approx \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, on a:

$$sin^2 \frac{w_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} \approx \alpha^2 > 1$$

Ce qui est absurde.

Forme de la solution:

$\alpha < 1$

Appliquons la transofrmée de Fourier discrète à la relation explicite trouvée à la question 4:

$$U_j^{n+1} = \alpha^2 U_{j+1}^n + 2(1-\alpha^2) U_j^n + \alpha^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1}$$

On trouve:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{L,h}^{n+1} &= \alpha^2 \hat{U}_{L,h}^n\, e^{-ihk} + 2(1-\alpha^2) \hat{U}_{L,h}^n + \alpha^2 \hat{U}_h^n\, e^{ihk} - \hat{U}_{L,h}^{n-1} \\
&= 2(1 - 2\alpha^2 sin^2 \frac{kh}{2})\, \hat{U}_{L,h}^n - \hat{U}_{L,h}^{n-1}
\end{aligned}$$

C'est un équation récurrente d'ordre 2 d'équation caractéristique:

$$r^2 - 2(1 - 2\alpha^2 sin^2 \frac{kh}{2}) r + 1 = 0$$

Qui s'écrit, en utilisant la forule de dispersion:

$$\begin{aligned}
0 &= r^2 - 2(1 - 2 sin^2 \frac{w_{h,\Delta t} \Delta t}{2}) r + 1 \\
&= r^2 - 2cos(w_{h,\Delta t} \Delta t) r + 1 \\
&= (r - r_1)(r - r2)
\end{aligned}$$

Où $r_1 = \frac{1}{r_2} = e^{iw_{h,\Delta t}\Delta t}$.

Si $r_1 \neq r_2$, la solution s'écrit:

$$\hat{U}^n_{L,h} = a\, r_1^n + b\, r_1^{-n} \text{ où } a, b \in \mathbb{C}$$

Qui s'écrit en tranformant les exponontinelles en cos et sin:

$$\begin{aligned}
\hat{U}^n_{L,h} &= a\, cos(w_{L,h,\Delta t} t^n) + b\, sin(w_{L,h,\Delta t}\Delta t) \text{ où } a, b \in \mathbb{C} \\
&= a\, cos(w_{L,h,\Delta t} t^n) + b\, \frac{sin(\Delta t)}{\Delta t} sinc_n(w_{L,h,\Delta t}\Delta t) t^n \\
&= \hat{u}_{0,L}\, cos(w_{L,h,\Delta t} t^n) + \hat{u}_{1,L}\, sinc_n(w_{L,h,\Delta t}\Delta t) t^n
\end{aligned}$$

Si $r_1 = r_2 = 1$ La solutio générale est:

$$\hat{U}^n_{L,h} = a\, n + b \text{ où } a, b \in \mathbb{C}$$

Qui s'écrit en utilisant les conditions initales:

$$\hat{U}^n_{L,h} = (\hat{U}^1_{L,h} - \hat{U}^0_{L,h})\, n + \hat{U}^0_{L,h}$$

Controle de la déformation

Si $0 < \alpha < 1$ et $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
sin^2 \frac{w_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = \alpha^2 sin^2 \frac{kh}{2} &\implies (\exists p \in \mathbb{Z}) sin \frac{w_{h,\Delta t}(k) t}{2} = \pm \alpha sin \frac{kh}{2} + p\pi \\
&\implies \frac{w_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = arcsin(\pm \alpha sin \frac{kh}{2}) + p\pi \\
&\implies \frac{w_{h,\Delta t}(k)}{kc} = \frac{\pm arcsin(\alpha sin \frac{kh}{2}) + p\pi}{\frac{kc\Delta t}{2}} \\
&\implies \frac{w_{h,\Delta t}(k)}{kc} = \frac{\pm arcsin(\alpha sin \frac{kh}{2}) + p\pi}{\alpha \frac{kh}{2}}
\end{aligned}$$

On remarque que toutes les valeurs de $p \in \mathbb{Z}$ conduisent à la même solution par périodicité, on prendra $p = 0$. Et donc:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{w_{h,\Delta t}(k)}{kc}\right)^2 &= \left(\frac{arcsin(\alpha sin \frac{kh}{2})}{\alpha \frac{kh}{2}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{arcsin(\alpha sin \frac{kh}{2})}{\alpha sin \frac{kh}{2}}\right)^2 \left(\frac{sin \frac{kh}{2}}{\frac{kh}{2}}\right)^2 \\
&= \left(1 + \mathrm{O}\left(\alpha sin \frac{kh}{2}\right)\right)^2 (1 + \mathrm{O}(h))^2 && (\text{car } \frac{arcsinx}{x} \sim 1) \\
&= (1 + \mathrm{O}(\Delta t))^2 (1 + \mathrm{O}(h))^2 && (\text{car } \alpha sin \frac{kh}{2} = \Delta t \frac{c}{2} \frac{sin \frac{kh}{2}}{h} < \frac{kc}{4}\Delta t) \\
&= 1 + \mathrm{O}\left(\Delta t^2 + h^2\right) && (\text{Par Cauchy-Schwarz})
\end{aligned}$$

d'où:

$$w^2_{h,\Delta t} = k^2 c^2 + \mathrm{O}\left(\Delta t^2 + h^2\right)$$

Courbe de dispersion:

$$\begin{aligned}
q(\alpha, G) &= |\frac{w_{h,\Delta t}(k)}{kc}| \\
&= \frac{arcsin(\alpha sin \frac{kh}{2})}{\alpha \frac{kh}{2}} \\
&= \frac{arcsin(\alpha sin(\pi G))}{\alpha \pi G}
\end{aligned}$$

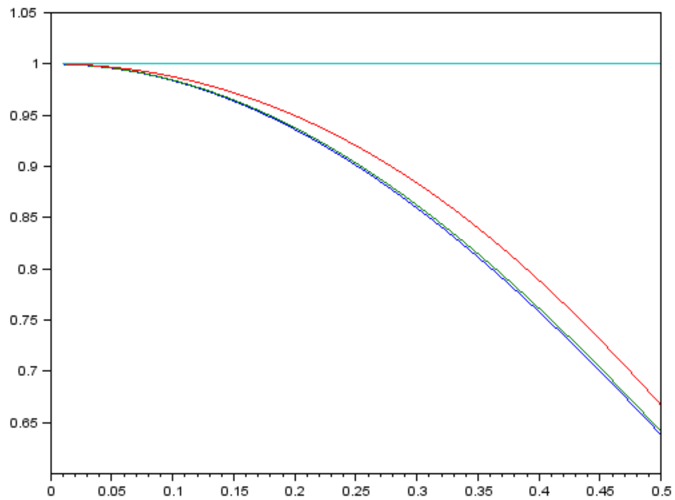


Figure 1: courbe de $q(\alpha, G)$ pour $alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$

- A α fixé, quand Δt et h tendent vers 0, G tend vers 0. Et donc

$$\begin{aligned} q(\alpha, G) &= \frac{arcsin\left(\alpha\pi G + \mathrm{O}\left(G^3\right)\right)}{\alpha\pi G} \\ &= \frac{\alpha\pi G + \mathrm{O}\left(G^3\right)}{\alpha\pi G} \\ &= 1 + \mathrm{O}\left(G^2\right) \end{aligned}$$

  On retrouve que le schéma est d'ordre 2.

- A α fixé, $G \to q(\alpha, G)$ est décroissante au voisinage de 0. **Interpréation:** En prenant beaucoup de points par longueur d'onde, la simulation colle mieux à la réalité.

- A G fixé, $\alpha \to q(\alpha, G)$ est croissante, et tend vers 1 en $\alpha \to 1$. Il vaut mieux prendre $\alpha = 1$.

- Prendre $\alpha \to 0$, ie $\Delta t = \mathrm{o}\,(h)$, revient à considérer une évolution continue en temps. On retrouve le schéma semi-discretisé. Formellement: $q(\alpha, G) \sim_{\alpha \to 0} \frac{sin(\pi G)}{\pi G}$ qui est le résultat trouvé à la question 3. Pour faire tendre α vers 0, on a envie de laisser h constant et faire tendre Δt vers 0. Sauf qu'on vient de démontrer que dans ce cas là, la fonction de dispersion $q(\alpha, G) \approx sinc(\pi G)$ qui est décroissante en h

Passage à la 2D

On modifie le schéma saute-mouton en conséquence. On pose $U^n_{i,j}$ comme approximation de $u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ où Δx et Δy les pas en espace dans les deux directions du plan $(\vec{x}, \vec{y})$. On propose le schéma suivant:

$$\frac{1}{c^2}\frac{U^{n+1}_{i,j} - 2U^n_{i,j} + U^{n-1}_{i,j}}{\Delta t^2} - \frac{U^n_{i,j+1} - 2U^n_{i,j} + U^n_{i,j-1}}{\Delta x^2} - \frac{U^n_{i+1,j} - 2U^n_{i,j} + U^n_{i-1,j}}{\Delta y^2} = 0$$

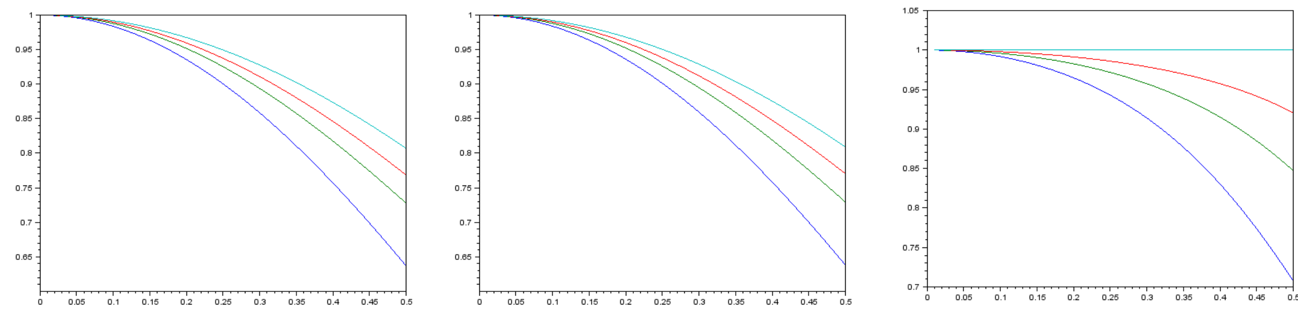
En cherchant les solutions de la forme:

$$U^n_{\Delta x, \Delta y} = e^{i(wt^n - \vec{k}X_{\Delta x, \Delta y})}$$

où $\vec{k}.X_{\Delta x, \Delta y} = \left(k_x i * \Delta x\, \vec{x} + k_y j * \Delta y\, \vec{y}\right)_{i,j}$, On trouve la relation de dispersion suivante:

$$sin^2\frac{w_{h,\Delta t}(k)t}{2} = \alpha_x^2 sin^2\frac{k_x \Delta x}{2} + \alpha_y^2 sin^2\frac{k_y \Delta y}{2}$$

où $\alpha_x = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ et $\alpha_y = \frac{c\Delta t}{\Delta y}$.



(a) $\alpha = 0.01$ (b) $\alpha = 0.1$ (c) $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Figure 2: Courbes de dispersion pour $\theta \in \{0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}$

Si l'on prend $\Delta x = \Delta y = h$, la relation se simplifie en:

$$sin^2 \frac{w_{h,\Delta t}(k)t}{2} = \alpha^2 \left(sin^2 \frac{k_x h}{2} + sin^2 \frac{k_y h}{2} \right)$$

Cette équation en w admet une solution si et seulement si

$$\alpha^2 sup_{\vec{k}} \left\{ sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2} + sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2} \right\} \leq 1$$

ie si $\alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour trouver l'ordre du schéma, on procède comme précédemment: Si $0 < \alpha < 1$ et $k \neq 0$:

$$sin^2 \frac{w_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = \alpha^2 \left(sin^2 \frac{k_x h}{2} + sin^2 \frac{k_y h}{2} \right) \implies sin \frac{w_{h,\Delta t}(k)t}{2} = \pm \alpha \sqrt{sin^2 \frac{k_x h}{2} + sin^2 \frac{k_y h}{2}}$$

$$\implies \frac{w_{h,\Delta t}(k)}{kc} = \pm \frac{arcsin\left(\alpha \sqrt{sin^2 \frac{k_x h}{2} + sin^2 \frac{k_y h}{2}} \right)}{\alpha \frac{kh}{2}}$$

Et donc:

$$\left(\frac{w_{h,\Delta t}(k)}{kc} \right)^2 = \left(\frac{arcsin\left(\alpha \sqrt{sin^2 \frac{k_x h}{2} + sin^2 \frac{k_y h}{2}} \right)}{\alpha \frac{kh}{2}} \right)^2$$

Si $\theta = arctan(\frac{ky}{kx})$, alors $cos(\theta) = \frac{ky}{k}$ et $sin(\theta) = \frac{kx}{k}$. Et donc:

$$q(\alpha, G, \theta) = |\frac{w_{h,\Delta t}(k)}{kc}| = \frac{arcsin\left(\alpha \sqrt{sin^2(\pi G cos(\theta)) + sin^2(\pi G sin(\theta))} \right)}{\alpha \pi G}$$

Le schéma présente des anisotropies parceque le coefficient de dispersion dépend de la direction de l'onde (paramétrée par θ). Contrairement au cas 1D, lorsque $\alpha = 1$, le schéma n'est plus exacte.

Le cas le plus favorable est le cas où $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{sqrt(2)}{2}$. On obtient donc une solution exacte dans les directions diagonales.

Pour α fixé , $\theta \to q(\alpha, G, \theta)$ est symétrique par rapport à $\frac{\pi}{4}$, décroissante dans $[0, \frac{\pi}{4}]$ Le cas le plus défavorable est $\theta = 0$ ou 1, ie dans le sens des directions du maillage.