

# MAP431 - Projet

Anas BIAD - Bachir EL KHADIR

May 30, 2014

## Question 1

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$

On multiplie l'équation par la fonction test  $v$  et on intègre par parties en utilisant la formule de Green :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x)v(x)dx &= \int_{\Omega} v(x)u_{\mu}(x)dx - \int_{\Omega} \frac{d}{dx}(\kappa_{\mu}(x)\frac{du_{\mu}}{dx}(x))v(x)dx \\ &= \int_{\Omega} v(x)u_{\mu}(x)dx + \int_{\Omega} \kappa_{\mu}(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{du_{\mu}}{dx}(x)dx\end{aligned}$$

Donc la formulation variationnelle du problème (3) s'écrit :

$$a_{\mu}(u_{\mu}, v) = b(v)$$

où :

$$\begin{aligned}a_{\mu}(u_{\mu}, v) &= \int_{\Omega} v(x)u_{\mu}(x)dx + \int_{\Omega} \kappa_{\mu}(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{du_{\mu}}{dx}(x)dx \\ b(v) &= \int_{\Omega} f(x)v(x)dx\end{aligned}$$

## Question 2

Les coefficients de A:

$$A_{i,j} = a_{\mu}(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} \frac{2}{h^2} \int_{K_i} \kappa_{\mu}(x)dx + \frac{2}{3}h & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{h^2} \int_{K_i} \kappa_{\mu}(x)dx + \frac{h}{4} & \text{si } j = i + 1 \\ -\frac{1}{h^2} \int_{K_{i-1}} \kappa_{\mu}(x)dx + \frac{h}{4} & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients de B:

$$\begin{aligned}B_i = b(\varphi_i) &= \int_0^1 \varphi_i(x) \sin(2\pi x) dx \\ &= \int_0^1 \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \sin(2\pi x) dx \\ &= h \sin(2\pi x_i) (\text{sinc}(\pi h))^2\end{aligned}$$

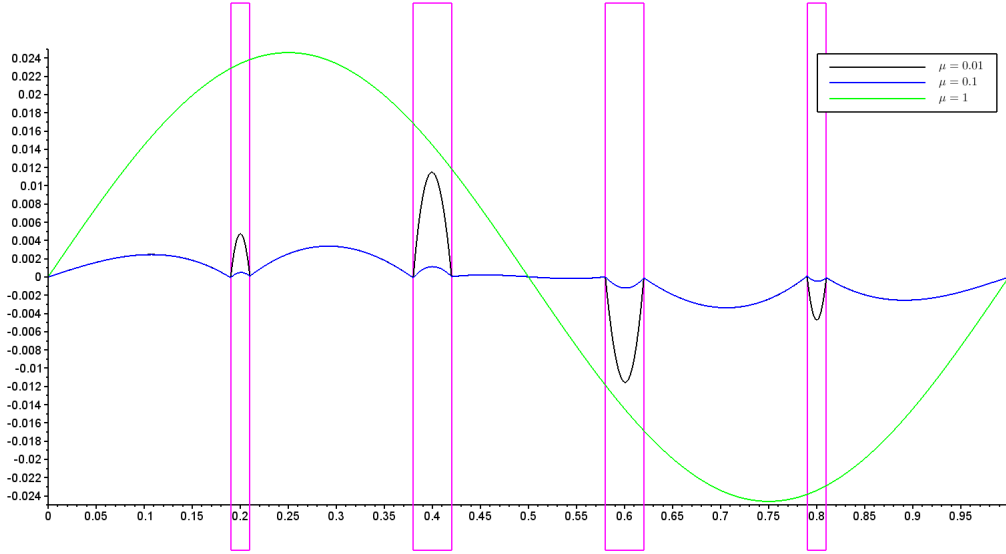
## Question 3

**Code sources:**

**calcul.sce:** contient les fonctions calculant A, B puis la solution X

**question3.sce:** calcule et affiche le résultat pour  $\mu \in \{0.01, 0.1, 1\}$

courbe de  $u_\mu$  pour  $\mu \in \{0.01, 0.1, 1\}$



#### Commentaire

- Les profils pour  $\mu \in \{0.01, 0.1\}$  ne varient que dans la partie où  $\kappa$  est différent.
- On remarque une discontinuité brusque de la tendance des courbes lors du passage de  $\Omega_1$  à  $\Omega_2$ .
- Le calcul prend beaucoup de temps.

#### Question 4

En injectant la relation:

$$u_\mu^{RB} = \sum_{j=1}^{N_0} X_{\mu,j}^{RB} u_j$$

Dans:

$$a_\mu(u_\mu^{RB}, u_i) = b(u_i)$$

et On trouve :

$$\sum_{j=1}^{N_0} X_{\mu,j}^{RB} a_\mu(u_j, u_i) = b(u_i)$$

Ainsi  $X_\mu^{RB}$  est solution du système linéaire :

$$A_\mu^{RB} X_\mu^{RB} = B^{RB}$$

Avec :

$$(A_\mu^{RB})_{i,j} = a_\mu(u_j, u_i)$$

et :

$$(B^{RB})_i = b(u_i)$$

On a :

- $a_\mu$  est symétrique
- $a_\mu$  est positive car  $(\forall v \in H_1^0(\Omega)) a_\mu(v, v) = \int_\Omega (v(x))^2 dx + \int_\Omega \kappa_\mu(x) \left(\frac{dv}{dx}(x)\right)^2 dx \geq 0$
- Si  $a_\mu(v, v) = 0$  alors  $\int_\Omega (v(x))^2 dx = 0$ , donc  $v = 0$ . Ainsi  $a_\mu$  est définie

$A_\mu^{RB}$  est la matrice de  $a_\mu$  dans la base des  $u_i$ , donc  $A_\mu^{RB}$  est symétrique, définie positive.

## Question 5

on a :

$$\begin{aligned}
 (A_\mu)_{i,j} &= a_\mu(u_\mu, v) \\
 &= \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \int_{\Omega_1} \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \frac{d\varphi_j}{dx}(x) dx + \mu \int_{\Omega_2} \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \frac{d\varphi_j}{dx}(x) dx \\
 &= \int_{\Omega} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \int_{\Omega_1} \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \frac{d\varphi_i}{dx}(x) dx + \int_{\Omega_2} \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \frac{d\varphi_i}{dx}(x) dx \\
 &= (A_0)_{i,j} + (A_1)_{i,j}
 \end{aligned}$$

Où l'on a posé:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left( \int_{\Omega} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \int_{\Omega_1} \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \frac{d\varphi_i}{dx}(x) dx \right)_{i,j} \\
 A_1 &= \left( \int_{\Omega_2} \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \frac{d\varphi_i}{dx}(x) dx \right)_{i,j}
 \end{aligned}$$

Et donc on a:

$$A_\mu = A_0 + \mu A_1$$

D'autre part , on a

$$\begin{aligned}
 (A_\mu^{RB})_{i,j} &= a_\mu(u_j, u_i) \\
 &= [u_i]_{(\varphi_1, \dots, \varphi_N)}^T A_\mu [u_j]_{(\varphi_1, \dots, \varphi_N)} \\
 &= X_i^T A_\mu X_j \\
 &= X_i^T A_0 X_j + \mu X_i^T A_1 X_j \\
 &= (A_0^{RB})_{i,j} + \mu (A_1^{RB})_{i,j}
 \end{aligned}$$

et :

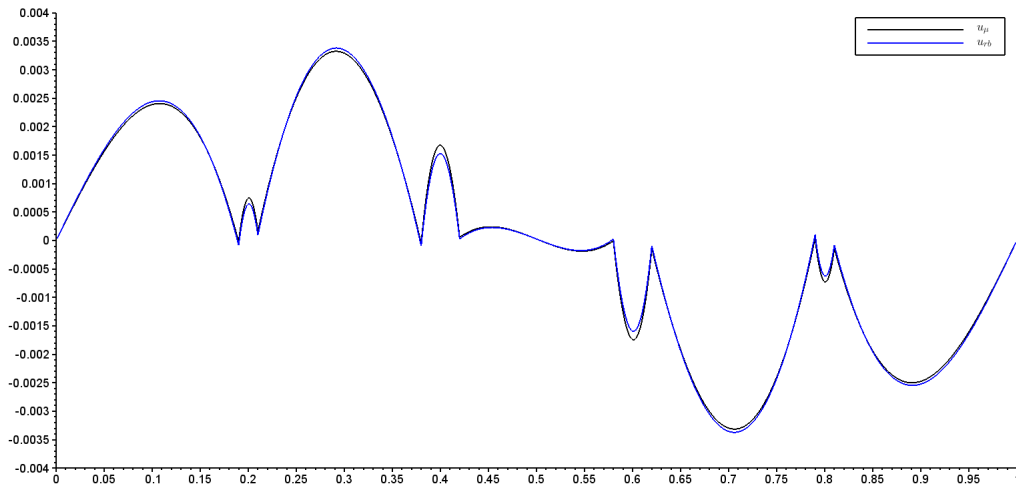
$$(B^{RB})_i = b(u_i) = B^T X_i$$

## Question 6

**Code sources:**

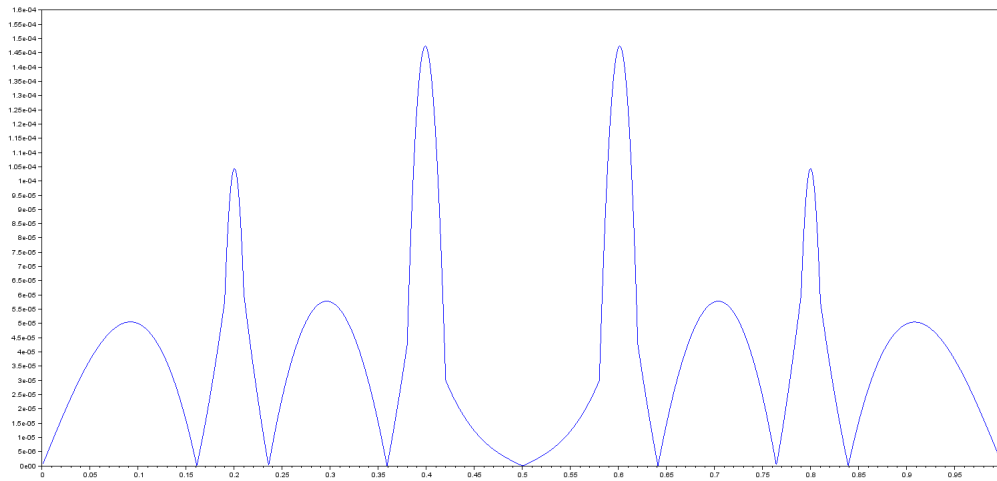
**calcul2.sce:** qui permet de calculer la solution avec la nouvelle méthode

**question6.sce:** calcule et affiche les solutions



Graphe de  $u_\mu$  et  $u_{rb}$

Les deux solutions sont quasiment confondues.



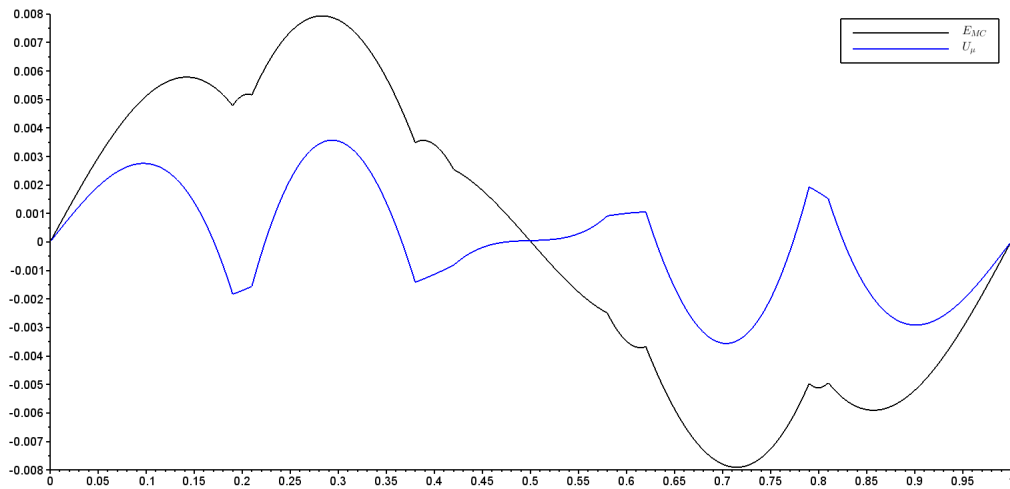
Graphe de  $|u_\mu - u_{rb}|$

L'erreur est de l'ordre de  $10^{-4}$ . La nouvelle méthode en plus d'être efficace, fournit des solutions acceptables.

### Question 7

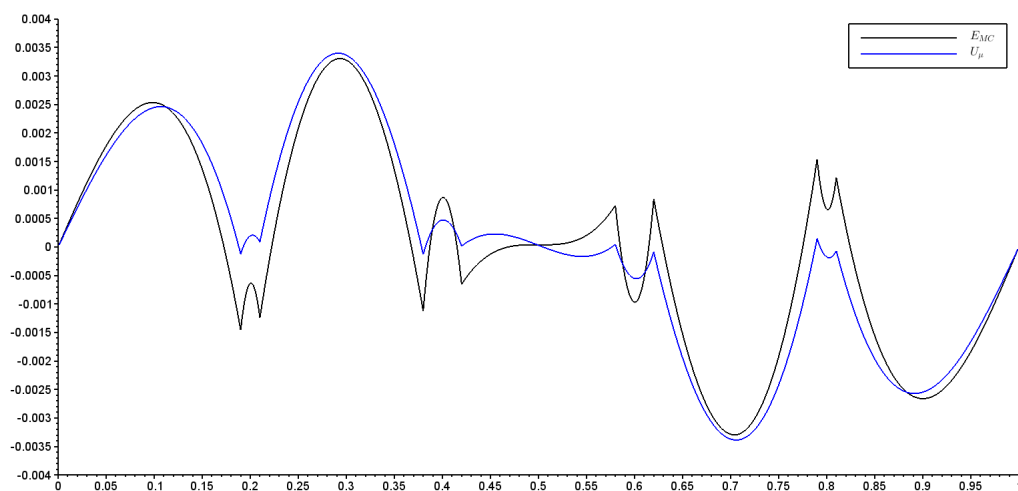
Code sources:

`question7.sce`: applique la méthode de l'énoncé



$\mu$  uniforme sur  $[1,1]$

- Les deux solutions sont assez différentes.
- La nouvelle méthode de résolution de Galerkin permet de simuler un grand nombre de solutions en un temps raisonnable.



$\mu$  de loi log-uniforme

Les deux solutions sont proche dans ce cas de figure.

### Question 8

**Code sources:**

**equation.edp:** implémente l'algorithme sur FreeFem++

### Résultat graphique

