MAP431 - DM 2

EL KHADIR Bachir

May 12, 2014

Question 1

$v(x+D) = u(x+D)e^{-i\frac{x+D}{D}\varphi} = u(x)e^{i\varphi}e^{-i(\frac{x}{D}+1)\varphi} = v(x)$ donc v est D-périodique. comme $v \in L^2(]-\frac{D}{2},\frac{D}{2}[)$, alors par décomposition de Fourier:

$$v(x) = \sum_{L\in\mathbb{Z}} \hat{v}(L)e^{i\frac{2\pi L}{D}}$$

et donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\sum_{L\in\mathbb{Z}} \hat{v}(L)e^{i\frac{2\pi L}{D}}\right)e^{i\frac{x}{D}\varphi} \\ &= \sum_{L\in\mathbb{Z}} u_L e^{iK_L x} && \text{où } u_L = \hat{v}(L) \end{aligned}$$

$\sum_{L\in\mathbb{Z}} |u_L|^2 = ||v||_{L_2}^2 < +\infty$, d'où la convergence de la série.

$$u|_{]-D/2,D/2[} \in H^1(]-\frac{D}{2},\frac{D}{2}[) \to \sum_{L\in\mathbb{Z}} |u_L K_L|^2 = ||\nabla u||_{L_2}^2 < +\infty$$

Question 2

En injectant $u(x,z) = u_L(z)e^{iK_L x}$ dans l'équation, on trouve:

$$-\Delta u = (u_L''(z) - K_L^2 u_L(z))e^{iK_L x} = 0$$

Les solution sont donc de la forme:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= (Ae^{K_L z} + Be^{-K_L z})e^{iK_L x} && \text{avec } A, B \in \mathbb{C} \\ &\text{qui s'écrit encore:} \\ u(x,z) &= (Ae^{|K_L|z} + Be^{-|K_L|z})e^{iK_L x} && \text{avec } A, B \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Pour que cette fonction appartiennent à $H^1(]-D/2,D/2[\times]0,+\infty[)$, il faut que $A=0$ si $K_L \neq 0$, et $A=B=0$ sinon. Donc:

$$u(x,z) = \begin{cases} Ce^{iK_L x - |K_L|z} & \text{si } K_L \neq 0 \text{ avec } C \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 3

$$u_L'(H) = -|K_L|u_L(H)$$

Question 4

Si on note $u = \sum_{L\in\mathbb{Z}} u_L(z)e^{iK_L x}$ alors on a $\gamma_H u(x) = \sum_{L\in\mathbb{Z}} u_L(H)e^{iK_L x}$.
$K_L = 0 \Rightarrow u_L = 0$ pour que $u_L(z)e^{iK_L x}$ reste $H_1(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)$.

Les $e^{iK_L x}$ forment une base, donc:

$$0 = -\Delta u = \sum_{L\in\mathbb{Z}} (u_L''(z) - K_L^2 u_L(z))e^{iK_L x} \Rightarrow (\forall L \in \mathbb{Z}) u_L''(z) - K_L^2 u_L(z) = 0$$

On est dans les condition la question 3, donc $u_L'(H) = -|K_L|u_L(H)$. Ainsi: $\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{L\in\mathbb{Z}} u_L'(H)e^{iK_L x} = \sum_{L\in\mathbb{Z}} -|K_L|e^{iK_L x} = T(\gamma_H u)$

Question 5

$$\begin{aligned}\nabla u &= \sum_{L\in\mathbb{Z}} \nabla(u_L(z)e^{iK_Lx})\\ &= \sum_{L\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} iK_Lu_L(z)\\ u_L'(z)\end{pmatrix} e^{iK_Lx}\end{aligned}$$

D'où (puisque les e^{iK_Lx} forme une famille orthonormée):

$$||u||^2_{L_2(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)} = \int_{z\in]H,+\infty[}\int_{x\in]-D/2,D/2[}\sum_{L\in\mathbb{Z}} u_L(z)e^{iK_Lx}dx\,dz = \int_{z\in]H,+\infty[}\sum_{L\in\mathbb{Z}}|u_L(z)|^2dz$$

$$||\nabla u||^2_{L_2(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)} = \int_{z\in]H,+\infty[}\sum_{L\in\mathbb{Z}}|K_Lu_L(z)|^2+|u_L'(z)|^2dz$$

Puis par fubini:

$$||u||^2_{H^1(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)} = ||u||^2_{L_2((]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)} + ||\nabla u||^2_{L_2(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)} = \sum_{L\in\mathbb{Z}}\int_{z\in]H,+\infty[}((1+|K_L|^2)|u_L(z)^2+|u_L'(z)|^2$$

u étant à support compact, donc $t\to u_L(t)$ aussi.

$$-2Re\left(\int_H^{+\infty} u_L'\bar{u_L}\right) = -\left(\int_H^{+\infty} u_L'\bar{u_L}+u_L\bar{u_L'}\right) = -\left(\int_H^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2\right) = |u_L(H)|^2$$

On en conclut que:

$$\begin{aligned}\sum_{L\in\mathbb{Z}}|K_L||u_L(H)|^2 &\le 2\sum_{L\in\mathbb{Z}}|K_L|\int_H^{+\infty}|u_L'(t)||u_L(t)|dt\\ &\le 2\sum_{L\in\mathbb{Z}}\int_H^{+\infty}(|u_L'(t)|^2+|K_Lu_L(t)|^2)dt \qquad \text{par Cauchy Schwartz}\\ &\le C||u||^2_{H_1(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)}\end{aligned}$$

Soit $u\in H^1$. C_c^∞ étant dense dans H^1, il existe une suite de fonction (u^n) de C_c^∞ (vérifiant (6)) tel que $u^n\to u$ dans H_1.
L'application trace étant continue, on a aussi $(\forall L\in\mathbb{Z})\, u_L^n(H)\to u_L(H)$. D'où le résultat.

Question 6

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_H} T(\gamma_Hu)\gamma_H\bar{v}\right| &= \left|<\sum_{L\in\mathbb{Z},K_L\neq 0} -|K_L|u_Le^{iK_Lx},\sum_{L\in\mathbb{Z},K_L\neq 0} v_Le^{-iK_Lx}>_{L_2(\Gamma_H)}\right|\\ &= \sum_{L\in\mathbb{Z},K_L\neq 0}(\sqrt{|K_L|}|u_L|)(\sqrt{|K_L|}|v_L|)\\ &\le \left(\sum_{L\in\mathbb{Z},K_L\neq 0}|K_L||u_L|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{L\in\mathbb{Z},K_L\neq 0}|K_L||v_L|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{Par C-S}\\ &\le C||u||_{H_1(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)}||v||_{H_1(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)}\end{aligned}$$

Question 7

Soit u, un solution de (4), notons u_H sa restriction à Ω_D^H qui appartient $H_1(\Omega_D^H)$. Les 7 premières équations sont les mêmes dans les deux systèmes. Pour la dernière équation, comme on a :

- $u_H - u^i \in H_1(]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[)$ par hypothèse .
- $\Delta(u_H-u^i) = \Delta u_H - \Delta u^i$ sur $]-D/2,D/2[\times]H,+\infty[$.

- $u_H - u^i$ quasi-périodique.

alors par $Q4$ on a:

$$\frac{\partial}{\partial n}(u_H - u^i) = T\gamma_H(u_H - u^i)\,\text{sur}\,\Gamma_H$$

Et donc u_H est solution de (7) aussi.

Réciproquement, soit u_H une solution de (7). On prolonge u_H par u tel que

$$u(x,z) = \begin{cases} u_H(x,z) & \text{si}\,(x,z) \in \Omega_D^H \\ v & \text{sinon} \end{cases}$$

Où v est la solution (unique) du problème variationel sur $H_1(\Omega_D \setminus \Omega_D^H)$ suivant :

$$\begin{cases} -\nabla(u-u^i) = 0 & \text{sur}\,\Omega_D \setminus \Omega_D^H \\ \frac{\partial}{\partial n}(u-u^i) = T(\gamma_H(u_H - u^i)) & \text{sur}\,\Gamma_H \\ (u-u^i)(-D/2,z) = (u-u^i)(D/2,z) & \text{pour}\,z > H \end{cases}$$

En tenant compte des relation (1) et (2), on trouve que $u \in u^i + H_1(\Omega_D)$ et vérifie toutes les équations de (4).

Question 8

Formule variationelle du sytème (7)

Notons

$$V = \{v \in H_1(\Omega_D^h)\,|\,v_{|\Gamma} = 0, v(x,0) = 0, v(D/2,z) = e^{i\phi}v(-D/2,z)\}$$

V est un espace de Hilbert comme sous espace fermé de $H_1(\Omega_D^h)$. Soit u une solution de (A). Soit $v \in V$, multiplions la première et deuxième équation de (A) par $\bar{v}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_D^h} -\bar{v}\,div(A\nabla u) + \int_{\Omega_D^H \setminus \bar{\Omega}_D^h} -\bar{v}\,\nabla u \\ &= \int_{\Omega_D^h} \nabla\bar{v} A \nabla u + \int_{\Omega_D^H \setminus \bar{\Omega}_D^h} \nabla\bar{v}\,\nabla u \\ &- \int_0^h ((\bar{v}A\nabla u)(D/2,z) - (\bar{v}A\nabla u)(-D/2,z))\,e_x\,\mathrm{d}z - \int_h^H ((\bar{v}\nabla u)(D/2,z) - (\bar{v}\nabla u)(-D/2,z))\,e_x\,\mathrm{d}z \\ &- \int_{\Gamma_H} \bar{v}\nabla u e_z - \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} (\bar{v}A\nabla u - \bar{v}\nabla u)(x,h)\,e_z\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

On a:

- Pour $z \in [0,h]$:

$$\begin{aligned} (\bar{v}A\nabla u)(D/2,z) &= v(D\bar{/}2,z)A(D/2,z)u(D/2,z) \\ &= (e^{-i\phi}\bar{v}(-D/2,z))A(D/2,z)(e^{i\phi}u(-D/2,z)) \\ &= \bar{v}(-D/2,z)A(D/2,z)u(-D/2,z) \end{aligned}$$

- $(\bar{v}\nabla u)(D/2,z) - (\bar{v}\nabla u)(-D/2,z) = 0$ pour $z \in [h,H]$.
- $(\bar{v}A\nabla u - \bar{v}\nabla u)(x,h)\,e_z = 0$.
- $\nabla u e_z = \frac{\partial u^i}{\partial n} + T(\gamma_H(u-u^i))$ sur Γ_H.

La relation précédente se simplifie en:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_D^h} \nabla\bar{v} A \nabla u + \int_{\Omega_D^H \setminus \bar{\Omega}_D^h} \nabla\bar{v}\,\nabla u \\ &- \int_0^h (\bar{v}(-D/2,z)\,(A(D/2,z) - A(-D/2,z))\,\nabla u(-D/2,z)\,e_x\,\mathrm{d}z \\ &- \int_{\Gamma_H} \bar{v}T(\gamma_H(u)) - \int_{\Gamma_H} \bar{v}(\frac{\partial u^i}{\partial n} + T(\gamma_H(u^i))) \end{aligned}$$

Posons:

$$
\begin{aligned}
a(u,v) = &\int_{\Omega_D^h} \nabla\bar{v} A \nabla u + \int_{\Omega_D^H \setminus \bar{\Omega}_D^h} \nabla\bar{v}\,\nabla u \\
&- \int_0^h \bar{v}(-D/2,z)\,(A(D/2,z) - A(-D/2,z))\,\nabla u(-D/2,z)\,e_x\,\mathrm{d}z \\
&- \int_{\Gamma_H} \bar{v} T(\gamma_H(u))
\end{aligned}
$$

et

$$
L(v) = \int_{\Gamma_H} \bar{v}(\frac{\partial u^i}{\partial n} + T(\gamma_H(u^i)))
$$

Alors:

- $L(v)$ est une forme linéaire continue (par l'inégalité de point carré).
- $a(u,v)$ est une forme bilinéaire.
- $a(u,v)$ est continue parce que A est bornée, et par la question 6.
- $a(u,v)$ est coercive (j'admet ce résultat)

Méthode numérique:

On résout le système (7) grâce à la formule variationnelle trouvée précédement par la méthode des éléments finis(par Fem++ par exemple), on trouve u_H. On prolonge cette fonction par la solution du problème variationnelle sur $\Omega_D \setminus \bar{\Omega}_D^H$ posé à la question (7).