

硕士学位论文

多孔介质圆柱非稳态绕流现象的数值研究

NUMERICAL INVESTIGATION OF UNSTEADY FLOW THROUGH AND AROUND POROUS CIRCULAR CYLINDERS

廉丰华

哈尔滨工业大学
2018 年 6 月

国内图书分类号: O351.2
国际图书分类号: 532

学校代码: 10213
密级: 公开

工学硕士学位论文

多孔介质圆柱非稳态绕流现象的数值研究

硕 士 研 究 生: 廉丰华
导 师: 余鹏副教授
申 请 学 位: 工学硕士
学 科: 力学
所 在 单 位: 南方科技大学
答 辩 日 期: 2018 年 6 月
授 予 学 位 单 位: 哈尔滨工业大学

Classified Index: O351.2

U.D.C: 532

Dissertation for the Master's Degree in Engineering

**NUMERICAL INVESTIGATION OF
UNSTEADY FLOW THROUGH AND
AROUND POROUS CIRCULAR
CYLINDERS**

Candidate: Lian Fenghua

Supervisor: Prof. Yu Peng

Academic Degree Applied for: Master of Engineering

Specialty: Mechanics

Affiliation: Southern University of Science and Technology

Date of Defence: June, 2018

Degree-Conferring-Institution: Harbin Institute of Technology

摘要

圆柱绕流和多孔介质流动现象在自然界和工程中都很常见，例如，在传统工程领域，桥梁、建筑物、地下水、岩溶地貌中都充斥着类似现象；近年来随着生物、医药科技的快速发展，与之相关的多孔介质流动现象也受到了很大的关注。因此，对该现象的研究具有重要意义。

本文对一般情形下的多孔圆柱绕流进行了数值模拟，研究主要集中在层流非稳态情形，采用了控制体积法，应用了更加通用的理论模型和应力阶跃条件，探讨了达西数和雷诺数对流动的影响，得到了流动的特性。

根据计算数据，通过对不同雷诺数下物理量波动大小的分析，得到了从稳态转变为非稳态的临界雷诺数。随着达西数的增加，临界雷诺数逐渐向增大的方向移动，从一开始的 40–45 增大到了 200 以上。通过分析几个重要的物理量，探讨了雷诺数以及多孔介质的存在对流动产生的影响。通过时变曲线和能谱分析均得出，衡量波动频率的斯特劳哈尔数随着雷诺数的增加而增加。平均阻力系数随雷诺数的变化取决于达西数的大小，达西数较小时先增后减，达西数较大时则相反。在总阻力中，压差阻力所占的比例大于摩擦阻力，该比例从 71% 变化到 92%，说明尾迹区的耗散对阻力起主要作用。雷诺数或达西数越大，这一趋势就越加明显。方均根升力系数随雷诺数的增加而增加，表明涡脱落越来越剧烈。当雷诺数较小时，方均根阻力系数与雷诺数的平方根成正比。在升力系数波动中，压差波动所起的作用占主要部分，该比例从 80% 变化到 96%。随着达西数的增大，升力的波动减小，即涡脱落的程度有所下降。

关键词：计算流体力学；圆柱绕流；多孔介质；数值模拟；斯特劳哈尔数；阻力和升力系数

Abstract

Both flow around circular cylinders and flow through porous media are common in nature and engineering. For example, similar phenomena appear in the traditional engineering, including the bridge, buildings, groundwater, and karst topography; in recent years, with the rapid development of biotechnology and medical science, the related flow phenomenon has attached a great deal of attention. Therefore, the study on this phenomenon is of great significance.

In this article, numerical simulations of the flow around porous circular cylinders were carried out. The study was mainly focused on the unsteady state of laminar flow. The control volume method was used, and a more general theoretical model and stress jump conditions were applied. It was discussed how the Darcy number and Reynolds number have an effect on the flow, and the flow characteristics were acquired.

Based on the calculated data, the critical Reynolds numbers that represents the flow's change from steady state to unsteady state were obtained, by analyzing the fluctuations of the physical quantities at different Reynolds numbers. As the increase of Darcy number, the critical Reynolds number gradually moves toward the direction of increase, from 40–45 initially to more than 200. By analyzing several important physical quantities, the influence of Reynolds number and the presence of porous media on the flow was investigated. Both the time-varying curve and the energy spectrum analysis show that the Strouhal number, which measures the frequency of fluctuations, increases with increasing Reynolds number. The change of the time-average drag coefficient with the Reynolds number depends on the Darcy number. When Darcy number is small, it increases first and then decrease, and when Darcy number become large, the opposite is true. In the total drag, the proportion of pressure difference, from 71% to 92%, is larger than the frictional resistance, indicating that the dissipation in the wake plays a major role in the generation of drag. The larger the Reynolds or Darcy number is, the more obvious this tendency is. The root mean square (rms) of lift increases with Reynolds number, meaning the stronger vortex shedding. When the Reynolds number is small, rms of lift coefficient is proportional to the square root of the Reynolds number. In the fluctuations

of lift coefficient, the effect of pressure difference is the main part, with the ratio from 80% to 96%. With the increase of the Darcy number, the fluctuations of lift decreases, demonstrating the weaker vortex shedding.

Keywords: computational fluid dynamics, flow around circular cylinders, porous media, numerical simulation, Strouhal number, drag and lift coefficient

目 录

| | |
|-----------------------------|----|
| 摘要 | I |
| Abstract | II |
| | |
| 第1章 绪论 | 1 |
| 1.1 研究课题的来源、背景及意义 | 1 |
| 1.2 国内外的研究进展及成果 | 2 |
| 1.2.1 圆柱绕流 | 2 |
| 1.2.2 多孔介质内部的流动 | 5 |
| 1.2.3 绕过及穿过多孔钝体的流动 | 7 |
| 1.2.4 存在的不足和有待深入研究的问题 | 9 |
| 1.3 流体力学中的计算方法概述 | 9 |
| 1.4 本文的主要研究内容 | 14 |
| 第2章 多孔介质流动的数值求解模型 | 16 |
| 2.1 问题描述 | 16 |
| 2.1.1 控制方程 | 16 |
| 2.1.2 边界条件 | 17 |
| 2.2 求解模型 | 18 |
| 2.2.1 纯流体区域 | 18 |
| 2.2.2 多孔介质区域 | 24 |
| 2.3 本章小结 | 24 |
| 第3章 网格无关性分析和结果验证 | 26 |
| 3.1 网格划分 | 26 |
| 3.1.1 网格生成 | 26 |
| 3.1.2 网格无关性分析 | 26 |
| 3.2 结果验证 | 28 |
| 3.3 本章小结 | 30 |
| 第4章 流场结果与分析 | 32 |
| 4.1 流场的瞬时分布 | 33 |

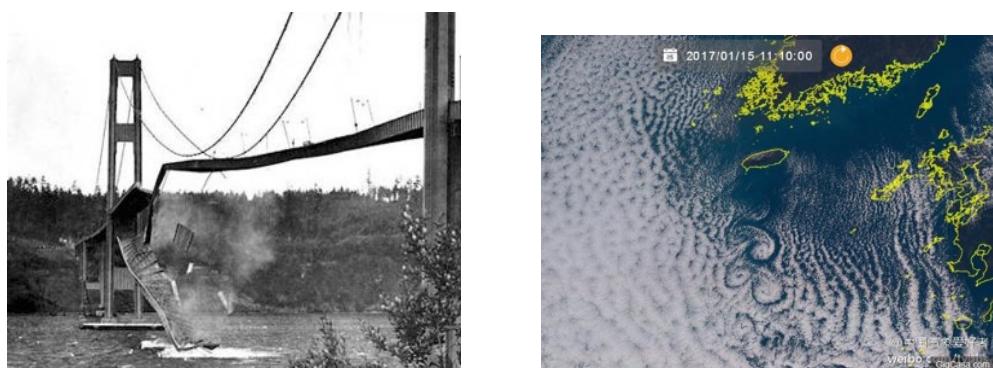
| | |
|------------------------------------|-----------|
| 4.2 平均流场的空间分布 | 38 |
| 4.3 本章小结 | 46 |
| 第 5 章 多孔圆柱受力分析 | 47 |
| 5.1 阻力 | 47 |
| 5.2 升力 | 52 |
| 5.3 Strouhal 数 | 52 |
| 5.4 本章小结 | 55 |
| 第 6 章 从稳态流动到非稳态流动的转变 | 60 |
| 6.1 判断方法 | 60 |
| 6.2 达西数的影响 | 63 |
| 6.3 本章小结 | 63 |
| 结 论 | 66 |
| 参考文献 | 68 |
| 哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限 | 74 |
| 致 谢 | 75 |

第 1 章 绪论

1.1 研究课题的来源、背景及意义

如今，圆柱绕流和多孔介质流动现象成为了人们研究的重要领域，尤其是近年来随着生物、医学及化学领域的快速发展，与之相关的多孔流动问题越来越多，等待着人们更进一步的研究。

在自然界和工程实践中，流体绕过钝体的流动是一种常见现象。船只在水面行驶，飞行器在空中航行，河水流过桥梁，海水绕过岛屿，风吹过高大的建筑物，这些都是钝体绕流的实例，它出现在世界的方方面面，与我们的生活息息相关。工程中如果未考虑到钝体绕流的某些特性，可能会发生严重后果，如图 1-1 a) 所示，1940 年 11 月，塔科马海峡吊桥崩塌，经证明这是由强风掠过时形成的卡门涡街引起共振而导致的事故，见示意图 1-2。自然界的大气、海洋中出现的绕流现象如图 1-1 b) 所示，2017 年 1 月，冷空气在东北亚日本海上空凝结成了冷流云，冷流云南下掠过济州岛时在岛屿背后形成了漩涡结构。人们很早就对这种现象进行了思索和研究，随着流体力学基本理论的建立，人们对此类现象的认识也逐渐深刻起来。

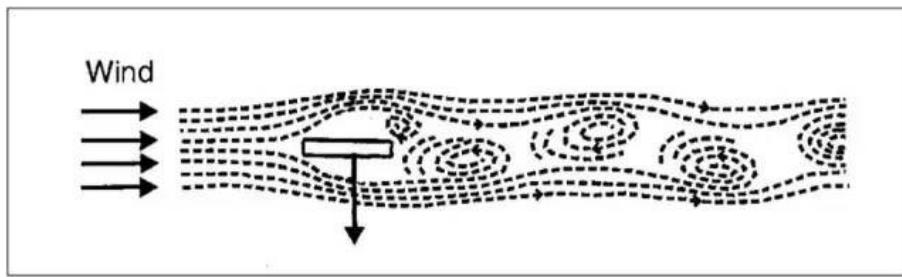


a) 塔科马海峡吊桥中部断裂

b) 冷流云绕过济州岛

图片来源: a) Pinterest; b) <http://www.wanhuajing.com/d688261>

图 1-1 钝体绕流现象举例



图片来源：Bernard J. Feldman/The Physics Teacher.

图 1-2 当稳定强风吹过桥梁（长方形）时产生漩涡，若风持续时间够长则改变桥梁的运动

1.2 国内外的研究进展及成果

1.2.1 圆柱绕流

圆柱绕流是流体力学中的一个经典问题，按照雷诺数的划分，整个流动状态可以被划分为许多阶段^[1]。在远离圆柱的区域，流动可以按照势流理论处理。在靠近圆柱的区域，按流动特性可以将区域划分为四部分，参见图 1-3^[2]。这四个区域可分别称为缓流区、边界层区、边界区和尾迹区。当流体横掠平板时，从平板的前缘开始形成边界层，起初流态为层流状态，随着流体向下游的移动，层流逐渐转变为湍流状态。随着雷诺数的增加，层流转变为湍流的转变区也向上游移动。同样地，当流体流过圆柱时，在下游会出现流态的转变，随着雷诺数的增加，转变点也逐渐向上游移动，并且依次经过划分出来的几个区域，相应的流态称为尾迹区转捩（TrW）、剪切层转捩（TrSL）、边界层转捩（TrBL）。

层流状态（L）。当 $0 < Re < 4\text{--}5$ 时，流体沿着圆柱的轮廓流动，圆柱左右的流线呈现出对称的特性，此时还没有出现流动分离。当 $4\text{--}5 < Re < 30\text{--}48$ 时，流体从圆柱表面分离，圆柱的背面开始出现封闭的附着涡，附着涡没有从圆柱表面脱落，此时尚处于稳定状态。当 $30\text{--}48 < Re < 180\text{--}200$ 时，圆柱背面的涡从圆柱表面脱落，

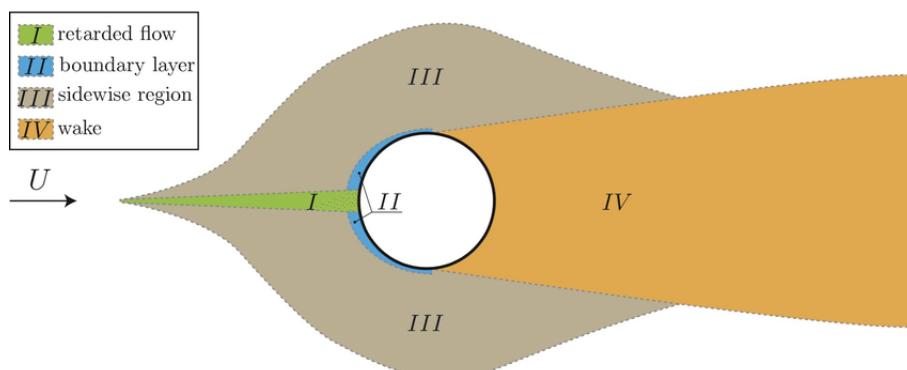


图 1-3 流动区域的划分，图片摘自文献 [2]

并由近而远地向远处缓缓飘去。其中在 $Re > 30\text{--}48$ 时，尾迹区逐渐由稳态向非稳态过渡，尾迹末端的流线开始出现类似正弦曲线的摆动。随后，大约在 $Re > 45\text{--}65$ 时，剪切层卷起了一排排的波峰和波谷，接着出现了一列列的涡，即为涡街。

尾迹区转捩 (TrW)。这一范围称为亚临界状态。当 $180\text{--}200 < Re < 220\text{--}250$ 时，首先在远离圆柱的尾迹区出现层流向湍流的转变 (远尾迹转捩, TrW1)，随着雷诺数的增大，转变点向上游移动。当 $220\text{--}250 < Re < 350\text{--}400$ 时，转变发生在接近圆柱的地方，称为近尾迹转捩 (TrW2)，最终，当涡一开始产生就已经处于湍流状态。TrW1 和 TrW2 的一个重要现象是非稳态涡产生和脱落的层流模式逐渐被湍流模式所取代^[1]。

自由剪切层转捩 (TrSL)。雷诺数处于这一范围的流动被称为亚临界状态。当 $350\text{--}400 < Re < 1k\text{--}2k$ 时，过渡波首先出现在近壁面剪切层，这一区域称为下亚临界区 (TrSL1)。 $1k\text{--}2k < Re < 20k\text{--}40k$ 时，过度涡出现在剪切层，在转变为湍流之前，过渡波沿着剪切层卷为分散的涡，之后则继续变成交替的涡，这一阶段为中亚临界区 (TrSL2)。雷诺数范围为 $20k\text{--}40k < Re < 100k\text{--}200k$ 时是下亚临界区 (TrSL3)，此时近壁面处已全部转变为湍流状态，近壁面的自由剪切层突然转变为湍流，涡出现在圆柱的背面。

边界层转捩 (TrBL)。这一状态也称为临界状态。 $100k\text{--}200k < Re < 300k\text{--}340k$ 为前临界区 (TrSL0)，沿着分离线的剪切层开始转捩，阻力系数开始下降。 $300k\text{--}340k < Re < 380k\text{--}400k$ 为单泡临界区 (TrBL1)，圆柱一侧的自由剪切层重附着形成分离泡。 $380k\text{--}400k < Re < 0.5M\text{--}1M$ 为双泡临界区 (TrBL2)，圆柱两侧形成一对对称的分离泡。 $0.5M\text{--}1M < Re < 3.4M\text{--}6M$ 为超临界区 (TrBL3)，此前出现的分离泡破碎，脱落涡丧失了周期性。 $3.5M\text{--}6M < Re < \text{unknown}$ 为过临界区 (TrBL4)，此时边界层已完全转变为湍流，脱落涡周期性重现。这一阶段雷诺数的上界仍不为人所知。

完全湍流状态 (T)。当雷诺数继续增大，整个流场变成了湍流状态。在圆柱绕流的几个阶段中，层流流动已经被较多地研究过，其中非稳态层流也有许多人研究。在非稳态区域，当雷诺数大于某个临界值 Re_{osc} 时，原本处于稳态的层流就开始变得不稳定，圆柱尾部封闭的尾迹涡开始轻微振荡。临界雷诺数 Re_{osc} 体现了尾迹的不稳定性，不同研究所揭示出的这一参数的具体数值有所不同^[1]。如果雷诺数小于临界值，尾迹也可以由外界激发而产生波动 (例如弹性丝线的振动)，随着外界干扰的平息，尾迹又会重新回归稳态。在实验研究中，人为施加的激励可以

使临界雷诺数的大小降至 20 甚至 10，从而可以测出波动的频率，即 Strouhal 数。实验表明，由此得出的频率曲线可以和 $Re > Re_{osc}$ 时的频率曲线光滑衔接。

当雷诺数大于临界值时，近尾迹的不稳定将产生一个波浪形的痕迹，尾波开始卷起。Bénard^[3-6] 做了在糖水溶液中拖动圆柱的开创性实验，描述了尾迹处形成的漩涡。Phillips^[7] 通过实验发现，当 $40 < Re < 80$ 时，周期性的尾迹是二维结构，当 $80 < Re < 100$ 时，尾迹对扰动很敏感并可能变成三维的，当 $100 < Re < 160$ 时，尾迹就总是呈现三维结构了。也有其他一些实验的结果与此不太相同。

Strouhal^[8] 第一次利用金属丝和杆在空气中产生声音并测量了它的频率，提出了无量纲参数 fD/V ，后来被称为 Strouhal 数。他的研究发现，对细金属丝 ($400 < Re < 1k$) 而言， $St = 0.185$ ；对金属杆 ($1.8k < Re < 5.4k$) 而言， $St = 0.195$ 。当 $40 < Re < 160$ 时，关系 $Re = \text{常数}$ 并不成立，此时， $St - Re$ 的关系是非线性的。Roshko^[9] 得到的 $St - Re$ 关系为

$$St = 0.212(1 - \frac{21.2}{Re}) \quad (1-1)$$

Roshko^[9] 提出了一个新的无量纲数 $Ro = fD^2/\nu$ 从而使得 $Ro - Re$ 具有线性关系：

$$Ro = 0.212(Re - 21.2) \quad (1-2)$$

Tritton^[10] 第一次使用了线性的 $Ro - Re$ 关系。在空气和水中，当 $Re > 80$ 时，涡脱落的频率会有一个不连续的下降，并且发现，涡脱落频率的下降并不会对阻力产生影响。Tritton 注意到热金属丝产生的信号在不连续点以上和以下都很有规律，但处在不连续点附近的一个小范围内时，这些信号就变得不再那么规律。这种从一个模式到另一个模式的改变不一定发生在一个特定的 Re 值，实际上，它可以发生在 $80 < Re < 105$ 的范围内。Tritton 认为，这种不连续是由封闭尾迹的突然消失和紧接着涡生成机制的改变引起的。这两种现象都会对阻力产生影响。Berger^[11] 发现，在 $Re = 125$ 以上， Ro 也有类似的不连续现象，并发现在 $125 < Re < 160$ 范围内存在两种亚稳态模式：一种是 Tritton 的高速模式，另一种低速模式被 Berger 称为“基础模式”，因为信号的幅值和相位都很有规律。这很可能是由圆柱的振动引起的。许多研究者都试图找到脱落的不连续点所对应的临界雷诺数 Re_d 。Gaster^[12] 通过减小圆柱的长径比抑制了高速模式。Nishioka 和 Sato^[13] 将长径比减小到 $L/D = 6$ ，不但抑制了原来存在的不连续性，而且将涡脱落时的临界雷诺数推移到了 $Re_{osc} = 85$ 。Friehe^[14] 确信，脱落频率和 Re_d 都严重依赖于 L/D 。

Teissié-Solier 等人于 1937 年发现，一个固定直径的圆柱在一个测试段中产生了两个不同的频率。他们测量了沿着中心间隔的高频和沿着尾迹的低频。低频部分的范围是 $6D - 8D$ ，并且在 $Re > 214$ 时消失。Gerrard^[15] 测出 $Re = 85$ 从尾端数 $7D$ 的距离时频率低了 16%，证明了壁面涡街的存在。Gerich 和 Eckelmann^[16] 随后的研究确认了沿着圆柱展向的不同脱落频率的存在以及它们的范围。

从波浪形尾迹到充分发展的交错涡街的演变影响着圆柱表面的压力分布。Thom 和 Homann 分别于 1928 年和 1936 年在水中和油中测量了层流状态下的压力分布。Williamson 和 Roshko^[17] 重复了测试并测量了在空气中的压差阻力 C_{pb} 。在 $40 < Re < 170$ 范围内， C_{pb} 从 -0.5 变化到 -0.9 。 L_f 的减小是和 C_{pb} 的增大相关联的，因为涡已经在圆柱的附近形成了。Dimopoulos 和 Hanratty^[18] 通过使用电化学的方法测量了层流周期性流动状态下圆柱表面的阻力分布。当 $Re = 60$ 时， C_f 的最大值大约是 60° ；当 $Re = 227$ 时， C_f 的最大值大约是 50° 。随着 Re 的增大， $C_{f\max}$ 的值也在增大。 $C_f = 0$ 的点意味着分离现象的发生。对于 $Re = 60$ ，分离发生的角度是 $\theta_s = 115^\circ$ ；对于 $Re = 227$ ，分离角度则渐渐变成了 $\theta_s = 105^\circ$ 。在 $60 < Re < 150$ 范围内 θ_s 的微小变化标志着圆柱背面近尾迹尺寸的减小。Dimopoulos 和 Hanratty^[18] 证明，在圆柱背面放置一个平板不会改变 θ_s 的大小。作用在圆柱上的阻力包括摩擦阻力和压差阻力，分别由摩擦力和压力差产生。阻力 C_D 在 $40 < Re < 160$ 范围内的变化是 $1.3 < C_D < 1.7$ ，小于 $5 < Re < 40$ 范围内的变化 $1.7 < C_D < 5$ 。波动的升力。Tanida^[19] 等人通过在一个油槽里拖动圆柱测量了周期性层流状态 L3 下的波动升力。 $Re = 100$ 时最大值 $C'_L = 0.08$ ，这说明圆柱附近的压力波动是非常微弱的。Roshko^[20] 测量了 $Re = 150$ 和 500 时尾迹的波动动能。 $Re = 150$ 时大部分的动能都在脱落频率 $\overline{u_1'^2}$ 附近，并在 $y/D = 1.0$ 的位置达到了最大值。对于 $y/D < 1$ ，第一谐振出现在 $\overline{u_2'^2}$ 并在尾迹轴线 $y/D = 0$ 的位置达到最大值。对于 $Re = 500$ 的湍流尾迹，最大能量出现在 $y/D = 0.5$ 的位置，并且第一谐振和随机波动 $\overline{u_r'^2}$ 相比几乎总是可以忽略不计。

1.2.2 多孔介质内部的流动

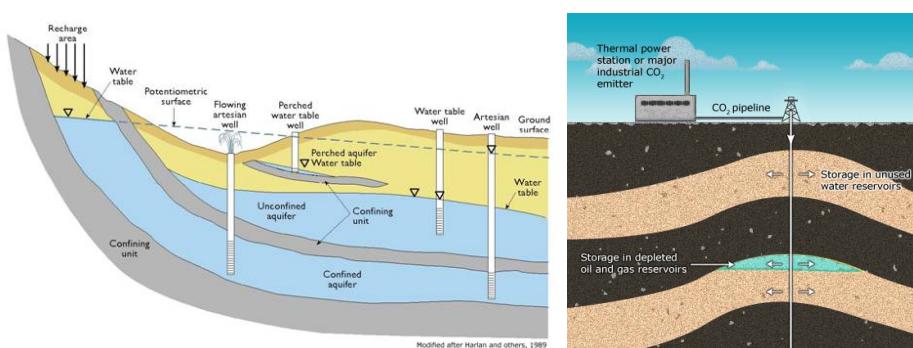
流体通过多孔介质的流动是地下水水文学、石油工程、土壤学及化学工程等领域的常见现象^[21]。地下水水文学和采油工程中常常研究的含水层和储油层是多孔介质的两个典型例子（参见图 1-4）。含水层又被称为地下水盆地，是一种含有水的地层或岩层，在一般的野外条件下允许大量的水在其中流动。储油层（和储气层）是一种多孔地层，它的多孔结构内除了含水，还含有至少一种呈现液相或

气相的碳氢化合物（石油或天然气）。除地下水中的含水层和石油工程中的储油层外，土壤、多孔岩石、陶瓷、过滤纸和沙过滤器乃至广泛分布于中国华南地区的岩溶地貌（喀斯特地貌）都是多孔介质的实例。此外，流化床、生物过滤器、森林中的降雨、生物工程中的微载体和支架以及多孔换热器也都是多孔介质流动的重要研究领域。

多孔介质可以简单描述为“含有孔洞的固体”，从流体流动的角度来说，它是多相物质占据的空间，且有一相需为固体；固相分布在整个多孔区域；一部分孔隙必须互相连通，使得气液相的流体可以在其中流动^[21]。

虽然经典力学可以描述若干分子组成的分子体系的运动，但由于流体中包含了大量的分子，从分子水平上对每一个流体粒子进行描述显得徒劳无力。事实上，仅仅处理三个分子的运动问题也是十分困难的。我们难以从分子水平去处理流体的运动，转而利用统计的方法解决问题，求出由许多个分子组成的系统的整体运动信息。这样由若干分子组成的一个系统便称为“流体质点”，流体被看作是由无数流体质点所组成的连续介质。这样的流体连续介质水平被称为“微观水平”。在处理问题时，组成流体的分子结构被忽略，描述问题的角度从分子水平迈向了微观水平。

在多孔介质中，被视为连续介质的流体在孔隙中流动，按照前述假设，我们可以确定每一点上流体的物理和运动性质。然而，由于多孔介质孔隙内部复杂的几何边界，我们无法用数学方法准确地描述固体的几何形状，也无法确定相应的边界条件。所以，流体连续介质的假设无法解决多孔介质内的流动问题。为了克服这一困难，应当转向更粗的平均水平，即转向宏观水平——也是更高水平的连续介质方法。



图片来源: Colorado Geological Society; Alan Sherwood and Jock Phillips, 'Coal and coal mining - The future of coal', Te Ara - the Encyclopedia of New Zealand

图 1-4 含水层和储油层

类比于流体质点的概念，多孔介质中可以定义表征性体积单元（representative elementary volume, REV）的概念。表征体元的尺寸应该小于整个流动区域，同时又要包含足够多的孔隙。类比流体密度的定义，孔隙率定义为多孔骨架中空隙体积占总体积的比重，并且是空间位置的连续函数。通过引入孔隙率和表征体元，实际的多孔介质被视为连续介质，描述问题的尺度从微观水平转到了宏观水平。在这个假设的基础上，我们可以用连续函数来描述多孔介质内的流动，并由此建立起相应的质量方程和动量方程。

在描述多孔介质流动方面，Darcy 定律和 Brinkman 方程是两个主要的模型。heikholeslami^[22] 在多孔圆柱微纳流动的研究中就采用了达西模型。这两个模型都不含时间的导数项和非线性的对流性。Wang L 等人^[23] 通过采用体积平均法，从具有孔隙尺度的宏观方程中严格推导出了包含时间导数项和非线性对流项的控制方程，对此方程应用蠕动流条件可以推导 Darcy 定律和 Brinkman 方程。该方程对内部项平均速度和相平均速度均满足伽利略不变性，具有现实的物理意义。为了验证得到的结果，该文献采 LB 方法求解了多孔圆柱沿槽道中心线运动的问题，并且模拟了多孔通道中的 Poiseuille 流动，与有限差分的结果相一致。在此基础上建议使用内部相平均速度而放弃使用通常用于多孔粒子系统的相平均速度。

1.2.3 绕过及穿过多孔钝体的流动

由于在自然界和工程中的普遍性，钝体绕流现象一直是人们研究的重要内容。

到目前为止，人们针对钝体绕流现象已经做出了大量研究，得到了许多有意义的结果。Joseph 和 Tao^[24] 采用 Darcy 定律与 Stokes 漸进方程研究了低雷诺数下流体绕过多孔球体的粘性不可压缩流动，得到了速度场、压力场和阻力系数的解析解。Neale 等^[25] 探究了 Brinkman 项对多孔球体绕流的影响，结果发现，在低雷诺数条件下，多孔圆柱受到的阻力要低于相同条件下的实心圆柱。Masliyah 和 Polikar^[26] 通过实验验证了 Neale 等人的结果。接着，Masliyah 和 Polikar^[26] 进一步发现，在高雷诺数条件下 ($7 < Re < 120$)，多孔球体受到的阻力可能会高于相同条件下的实心球体。Nandakumar 和 Masliyah^[27] 通过研究发现，Masliyah 和 Polikar 预测的阻力数值比他们的数值模拟结果高出大约 10%。

Hsu 等人^[28] 采用 Brinkman 模型研究了低雷诺数下流体绕过多孔球壳的流动。Bhattacharyya 和 Raja Sekhar^[29] 研究的多孔球体模型有一个不允许流体通过的中心，他们研究了穿过这个多孔球体模型的 Stokes 流动，其中多孔介质内的流动采用了 Brinkman 模型，多孔介质和纯流体之间的界面上采用了应力阶跃条件^[30,31]。结果

发现,应力阶跃系数对作用在该球体上的阻力和转矩都有着显著的影响。Rashidi^[32]探究了多孔介质圆柱的应力阶跃条件。

Jue^[33]探究了当 $Re = 100, 200$ 和 250 时多孔圆柱绕流中圆柱背面涡的脱落情况。他的研究基于有限单元法,采用了通用的非 Darcy 多孔介质模型,并在处理纯流体和多孔介质界面处的流动特性时使用了调和平均数。研究发现,除雷诺数外,达西数对流动也有着显著的影响,但孔隙率的影响却无足轻重。Chen 等人^[34]研究了应力阶跃条件对多孔圆柱绕流的影响,结果显示,当达西数增大时,涡脱落现象发生时所对应的雷诺数也会随之增大。同时,界面应力阶跃参数对多孔圆柱绕流的稳定性有着重要影响,其中第一参数有明显的影响而第二参数影响很小。

Noymer 等人^[35]使用商业软件 PHOENICS 研究了圆柱绕流现象, Darcy 方程和 Navier-Stokes 方程分别用来描述多孔区和纯流体区的流动,在两种流动的界面上,压力和质量流量匹配在一起。结果显示,当 $Re = 100$ 和 1000 时,作用在多孔圆柱上的阻力要比无渗流的实心圆柱高得多。这一结论也被他们的风洞试验所证实。Bhattacharyya 等人^[36]通过数值分析的方式研究了绕过及穿过多孔圆柱的稳定流动,多孔区域的流动采用了包含 Brinkman 项、Forcheimber 项和非线性对流项的通用模型。结论显示,阻力系数、尾迹长度和流动分离的角度都会随着达西数的增大而减小。当达西数减小时,再循环尾迹产生时对应的临界雷诺数也会单调减小,最终减小到一个渐进值,即为绕实心圆柱流动产生涡时所对应的雷诺数。

Fransson 等人^[37]研究了连续抽气和吸气时的圆柱绕流情况,研究的雷诺数范围为 10^4 量级,即处于亚临界区。研究发现即使中等程度的吸气或吹起对流场都有明显的影响。吸气可以延迟流动分离的发生,缩小尾迹的宽度,减小阻力,吹气具有相反的效果。

Yu 等人^[38]研究了绕过及穿过多孔圆柱流动的稳定状态,分析了雷诺数和达西数对流动的影响。结果发现圆柱背面的循环尾迹或穿入圆柱之内,或和圆柱相分离。多孔圆柱的尾迹从内部或下游开始发展,而不会像实心圆柱那样从表面开始。有限雷诺数下尾迹的形态是涡积累的结果,而非逆压梯度下的边界层分离所致。尾迹出现的临界雷诺数是达西数的函数;穿透深度是雷诺数和达西数的函数,类似地,文献 [39,40] 研究了多孔方柱和多孔球体的情形,也有类似的现象发生。

王亚玲^[41]等人对圆柱绕流进行了三维数值模拟,采用有限体积法模拟了亚临界区内的绕流流动,计算结果表明,高雷诺数时圆柱周围的流动具有明显的三维特性,且沿柱长方向不同断面的升力和阻力系数并不相同,三维模拟的升力和阻力

系数均小于二维模拟。而何鸿涛^[42]通过数值模拟的方法来研究圆柱绕流的基本特性，探究了三种控制方法对于圆柱绕流尾部涡脱落的控制效果。Amirul Hakam^[43]则研究了两个被动控制的圆柱绕流问题。

1.2.4 存在的不足和有待深入研究的问题

起初人们对这一问题的研究主要采用理论分析和解析计算的方法，随着计算机的发展，数值计算技术得到了迅速提高，与之相关的理论也层出不穷，极大地丰富了研究的手段。之后人们便主要利用数值模拟来研究此类问题了。同时也和实验相配合，验证结果的可信度，更深刻地理解其中的原理。另一方面，对流动基本原理的探讨也一直在进行中，包括对基本控制方程的改进和新的解释。

针对多孔圆柱绕流或与之相似的问题，人们通常研究的是低雷诺数绕钝体的流动，相应的钝体主要是几何形状简单的物体，例如球体、圆柱或是球壳、环形。一开始采用的模型主要是 Darcy 定律和 Brinkman 模型。后来，随着对流动控制方程认识的深入，更多的物理含义被发掘出来，于是，包含有 Brinkman 项、Forcheimber 项和非线性对流项的通用模型被越来越多的人所采用。应力阶跃条件被用在对纯流体区域和多孔介质区域界面条件的处理上，但有研究指出应力阶跃条件对作用在球体上的阻力有着明显的影响。在实际的研究中，人们发现，相比于普通的绕流问题，绕流物体内部多孔介质的存在对流动有着重要的影响，主要是达西数和孔隙率的影响。当达西数增大时，涡脱落现象发生时所对应的雷诺数也会随之增大。而更有研究指出阻力系数、尾迹长度和流动分离的角度都会随着达西数的增大而减小。现有研究表明，在稳态流动时，多孔圆柱背面的尾迹回流区和普通圆柱有所不同。普通圆柱的尾迹区附着在圆柱表面，而多孔圆柱的回流区并没有附着在表面，而是和圆柱分离了一段距离，或者穿入了圆柱内部，甚至在雷诺数增加时还会消失，这些现象指示出稳态条件下多孔介质流动不同于普通圆柱的诸多特性。因此很有必要研究非稳态时，多孔介质和普通圆柱绕流的不同点。即流态发展到非稳态时多孔介质的存在又会对流动产生怎样的影响，以及多孔参数是如何对流动状态发生具体影响的，仍是需要进一步研究的问题。

1.3 流体力学中的计算方法概述

对于简单的流动问题，通过求解流体力学方程可以得到解析解，已知的解析解可以加深对流动机理的理解，但却很难直接用于工程分析和设计中。根据实际问题对方程进行简化并使用量纲分析来求解问题是一种可行的方法，主要适用于

所研究的系统仅有一两个无量纲参数的情形。如果无量纲化的纳维尔-斯托克斯方程仅以雷诺数为独立参数，就常常使用这种方法。如果几何体的形状是固定不变的，我们可以通过相似模型实验得到想要的结果。时至今日，这种方法在实际工程设计中依然很有价值。问题在于，许多流动都需要若干个无量纲参数，可能无法建立起与实际流动相似的实验条件。例如，在飞机机翼的绕流中，为了利用更小的模型达到相同的雷诺数，就必须提高空气的流速，这可能会导致马赫数过高，为了避免这样的问题就要寻找合适的流体。在船只绕流问题中，同时满足雷诺数和弗劳德数也是几乎不可能的。与此同时，有的实验可能需要很高的成本。

随着电子计算机的诞生，计算的方法成为可能；随着计算机性能的提升和成本的下降，计算的手段也更加简易而高效。用计算机求解流体力学方程变得越来越重要，同时更多的人员使用这一方法研究流动现象，从而形成了计算流体力学这一研究领域。流动现象是用偏微分方程描述的，为了得到方程的数值解，使用离散方法将微分方程近似为代数方程然后求解，解的精度则取决于所使用的离散方法。

一个完整的数值方法应该从以下几个方面进行考虑。

(1) 数学模型。包括偏微分方程和边界条件的建立。针对要解决的具体问题，选择合适的控制方程，这样的模型可能是对原始守恒方程作出一定的简化得到的。一种求解方法是针对一类特定的问题而提出来的，试图寻找可以求解所有流动问题的通用方法是不现实的；与此同时，适用性广的方法通常针对性较差，即在求解具体问题上不是最优的。

(2) 离散方法。选择合适的离散方法对时间和空间进行离散，用得到的代数方程代替原来的微分方程。几种主要的方法是有限差分法 (finite difference, FD)、有限体积法 (finite volume, FV) 和有限元法 (finite element, FE)。谱方法 (spectral scheme)、边界元法 (boundary element) 和元胞自动机 (cellular automata) 等其他方法适用于一些特殊的问题。

(3) 坐标系和基向量的选取。流体力学的控制方程在不同的坐标系下具有不同的书写形式，例如直角坐标系、柱坐标系或球坐标系，正交或非正交坐标系下的表达方式也不相同。针对具体的流动选择合适的坐标系，这可能影响到离散方法和网格类型的选择。基向量的选择决定了向量和张量的定义，例如固定或可变、协变或逆变。速度向量和应力张量根据各坐标轴分解为各自的分量。

(4) 网格划分。将问题所在的几何区域离散化处理，所有的变量就定义在这些

离散后的位置上，最终目的是得到这些位置上各个变量的值。经过离散化处理，原先的求解区域被划分为大量的小区域。划分后的每个小区域——或称为网格——主要有以下几种形式。

1. 结构化网格 (structured grid)。
2. 分块结构化网格 (block-structured grid)。
3. 非结构化网格 (unstructured grid)。

(5) 有限近似。在离散化过程中需要选择近似的程度。有限差分方法中要选择网格点处导数的近似，有限体积方法中要选择面积分和体积分的近似，有限元方法中则要选择形状函数和权重函数。近似方法的选择影响到计算的精度，也影响到求解的困难程度、程序编写调试的难度以及程序运行的速度。最终需要在简单易行、精度和计算效率之间取得平衡。

(6) 求解方法。离散之后的方程通常是一个庞大的非线性代数方程组。对于非稳态流动，通常像常微分方程的初值问题那样来求解。每经过一个时间步长都去求解一个椭圆形问题。稳定流动问题通常采用伪时间推进 (pseudo-time marching) 或一种等效迭代方法 (equivalent iteration scheme)。由于方程是非线性的，所以要用迭代的方法求解。这些方法对方程进行线性化，得到的线性方程组几乎总是可以用迭代的技术进行求解。求解方法的选择取决于网格的类型和每一个线性方程中节点的数目。

(7) 收敛标准。对于迭代方法，要设置一个收敛的标准。通常情况下有两种迭代的级别：求解线性方程过程中的内部迭代和处理方程组之间的耦合及非线性关系过程中的外部迭代。无论是从精度还是效率的角度，迭代过程的终止条件都十分重要。

数值解法应当具有某些性质，大多数情况下不可能分析出完整的解方法，如果方法中的某一个环节不满足解的性质，那整个方法也不满足。以下是一些重要的性质。

(1) 一致性。当网格间距趋向于零时，离散化应当变得精确。离散方程和真实方程之间的差距称为截断误差 (truncation error)，通常用泰勒级数在某个节点上展开的值与真实值的差来表示。当网格尺寸 $\Delta t \rightarrow 0$ 和/或 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 时，具有一致性的方法应当使得截断误差为零。截断误差通常和网格尺寸 Δx_i 和/或时间步长 Δt 成正比，如果截断误差的主要项正比于 $(\Delta x_i)^n$ 或 $(\Delta t)^n$ ，则称为 n 阶近似 ($n > 0$)。

即使解方法具有一致性，也不意味着离散方程组的解在小步长的极限下成为

微分方程的解，因为解还需要具有稳定性。

(2) 稳定性。解的稳定性要求它在求解过程中不会放大误差。对时间问题，稳定性保证了当实际解有边界时数值解也有边界。对迭代方法而言，稳定解意味着不会发散。稳定解不容易判断，尤其是当存在边界条件和非线性的时候。因此，常常在具有常系数、不含边界条件的线性问题时去验证稳定性。经验表明，用这种方式得到的结果通常可以用于更复杂的情况，除了部分例外。广泛采用的研究稳定性的方法是冯纽曼法 (von Neumann's method)。

(3) 收敛性。随着网格尺寸趋于零，离散方程的解趋于实际微分方程的解的时候，该方法具有收敛性。对于线性初值问题，Lax 等价理论 (Lax equivalence theorem)^[44] 指出，给定一个合适的线性初值问题和有限差分近似，并且满足一致性条件，那么稳定性就成为收敛性的充要条件。对于受边界条件影响的非线性问题，稳定性和收敛性都难以验证。因此，收敛性通常使用数值实验来检验，例如，用一系列连续变化密度的网格重复计算，如果方法是稳定的并且离散过程中近似方法也都保持一致，最终的解就会收敛于一个网格无关的解。

(4) 守恒性。求解的方程满足守恒率，相应的数值方法也同样应该满足。在稳定状态且不存在源和汇的情况下，离开一个控制体的守恒量等于进入这个控制体的量。如果对方程的守恒形式使用有限体积法，那么每一个小的控制体和整个求解区域都要满足守恒率。源和汇的处理应该是一致的，以使得整个区域内源和汇的代数和等于守恒量通过边界的净流率。守恒性是解方法的一个重要性质，因为它为解的误差强加了一个限制。如果质量守恒、动量守恒和能量守恒得不到保证，就会人为产生源和汇，改变局部和整体的平衡。

(5) 有界性。数值解应该具有一定的边界，有的物理量不能取负值（例如密度、动能），有的量必须介于 0% 和 100% 之间（例如浓度）；不存在源和汇时，一些方程要求物理量的最大最小值应在区域的边界上取得。数值解法应该考虑这些条件。有界性难以得到保证。仅有一阶格式可以保证这个性质，所有的高阶格式都会产生超出边界的解，但是这仅会在网格过于稀疏时发生。

(6) 可实现性。过于复杂而无法直接处理的模型应该保证可以得到物理上真实的解。这并不是一个数值自身的问题，而是非现实的模型可能产生出非物理的解，或者造成数值方法的发散。

(7) 准确性。数值解均为近似解，除了求解算法的误差、程序或边界条件的误差外，通常还包含三种误差：模型误差、离散误差和迭代误差。模型误差为实际流

动和数学模型真实解之间的差距；离散误差为守恒方程真实解和离散之后得到的代数方程组真实解之间的差值；迭代误差为求解代数方程组时迭代得到的解和真实解之间的误差。有时，不同的误差可能相互抵消，因为如此，粗糙网格的误差可能比细密网格的误差更小。

通常使用的离散方法有有限差分、有限体积、有限单元法几种。

(1) 有限差分法。有限差分是最早出现的求解偏微分方程的数值方法，被认为由欧拉于 18 世纪提出。求解开始于微分形式的守恒方程，求解区域划分为排列在一起的网格。在每一个网格点上，用函数在该节点的值代替该节点上的偏导数，微分方程得到近似。每个节点都将得到一个代数方程，该节点和邻近节点上的变量都作为未知变量而存在。原则上，有限差分法可以用于任何网格类型，但在实际中，它常被用于结构化网格。通常用泰勒级数展开或多项式拟合的方法得到变量的一阶和二阶导数，必要时，还可以用这些方法得到网格节点之外的其他节点上的变量值。对于结构化网格，有限差分法简单而有效，易于获得高阶格式，它的缺点在于守恒性不易实施，而且不适用于复杂的流动情形。

(2) 有限体积法。有限体积法从积分形式的守恒方程开始，求解区域被划分为紧邻着的有限数量的控制体，在每一个控制体上应用守恒方程。每个控制体中心节点上的值待求，用插值的方法得到控制体每个面上的值（用中心节点的值表示），用合适的积分公式表示面积分和体积分，我们可以得到每个控制体上的代数方程，临近节点上的变量也出现在这个方程中。有限体积法适用于任何类型的网格，因此也适用于复杂的几何区域。网格仅定义了几何区域的边界，并且不需要和坐标系联系起来。只要具有同一边界的控制体具有相同的面积分，该方法就满足守恒性。有限体积法易于理解和编程实现，缺点在于，与有限差分相比，二阶以上的格式在三维情形中难以实现。

(3) 有限单元法。有限单元法在许多方面都和有限体积法相似。求解区域被划分为一系列离散的控制体或有限单元，这些控制体一般是非结构的，二维情形下通常是三角形，三维情形下则是四面体或六面体。当在整个区域上积分时，方程前要乘以权重因子。在简单的有限元法中，解通过线性形状因子来近似，每个单元都确保解在单元边界上的连续性，这样的一个因子可以根据它在单元角点上的值来构建。权重因子也是同样的形式。然后，近似被代入守恒率的加权积分，通过令积分对每个节点值的导数为零，得到待求解的方程。最终得到非线性代数方程组。

本节内容主要阐述了流体力学中的计算方法。在实际问题中，有时解析和实

验的方法无能为力，这时数值方法起到了重要作用，计算机的发展促进了数值计算的发展。数值方法应该包括多个组成部分，例如确定数学模型，选择恰当的离散方法，选取简易方便的坐标系和基向量，合理划分网格，兼顾计算精度和计算效率，选取求解方法，确定计算的收敛条件，等等。同时数值解法需要满足一定的性质，例如一致性、稳定性、收敛性、守恒性、有界性、可实现性和准确性等。常用的几种数值求解方法有限差分法、有限体积和有限单元法，各有一定的优缺点，适用于不同的场合。

1.4 本文的主要研究内容

多孔圆柱流动中流动状态随雷诺数的变化和非多孔圆柱是相似的，当雷诺数不大时，垂直于圆柱轴线任一截面上的流态是相同的，此时的流动是二维问题。雷诺数较小时流动处于稳态，随着雷诺数的增大，圆柱的背面会出现漩涡。雷诺数继续增大，流态也渐渐变成非稳态，圆柱背面会出现两列对称的涡街，速度等流动参数也以一定的规律变化着。

对多孔圆柱绕流的研究通常关注稳定状态的流动，当雷诺数增大时，流动将变得不稳定，逐渐进入非稳定状态。对多孔圆柱绕流非稳态特性的研究就构成了本课题的主要内容。进一步地，课题的研究内容可以分为以下两个方面。

(1) 层流非稳态情况下多孔圆柱绕流的数值模拟。

首先明确描述研究区域内流体流动的控制方程。由于控制方程是复杂的非线性偏微分方程，无法得到解析解，所以接下来要对方程进行离散化处理，利用计算流体力学的理论，采用合适的离散格式，运用数值求解技术来求解对应的方程，从而解决方程所描述的物理问题。最终得到所研究的流场内各个点上的数据，例如速度、涡量、压力等，以及不同条件下圆柱所受到的阻力和升力。

(2) 流动特性的分析。

利用第一步计算得到的数据，经过数据处理和分析，得到对流动形态准确而清晰的描述。通过和圆柱绕流的结果作对比，发现它们之间的相同和不同之处，分析多孔介质的存在是如何影响到流动状态的，具体而言则是分析与多孔介质相关的参数，例如达西数与孔隙率对流动的影响。同时，当这些参数取极限值时，流动状态应该退回到普通圆柱绕流时的情况。另一方面，通过和雷诺数更小时稳态情形下的多孔圆柱绕流作比较，分析流动是如何由稳态演化到非稳态的，将它们综合起来，以期待能够形成流动状态演化的更加清晰的图景。

通过对结果的分析，在初步明了参数对流动的影响之后，再返回第一步，通过设定特定的参数值，得到更多不同参数下的数据。在合理的分析方法下，继续对所得的数据进行分析处理，以得到更加具有说服力的结果，还可以对结果做进一步的处理。和已有的文献结果作比较，得到最终的结论。

基于以上内容，本文结构共分六章，第二章介绍了多孔介质流动的数值模拟模型。第三章使用该模型对多孔圆柱绕流进行计算，确定了网格的划分形式以及计算所需的网格分辨率，和固体绕流的结果进行对比，验证了计算结果的准确性。第四章分析了流动区域内的涡量图和流线图，并在经过平均化处理之后得到平均量的空间分布。第五章从多孔圆柱受力的角度进行了分析，得到了阻力、升力、Strouhal数等物理量的变化规律。第六章确定从稳态流动转变到非稳态流动的临界雷诺数，并分析达西数在其中所起的作用。最后进行总结，得出结论。

第 2 章 多孔介质流动的数值求解模型

2.1 问题描述

假设该问题中的流动为不可压缩粘性流动，流体的性质均为常数，计算区域的几何参数被固定之后，该问题的控制参数为雷诺数 Re 和达西数 Da ，定义雷诺数时以圆柱直径为特征长度，以均匀来流速度为特征速度。该问题的流动示意图如图 2-1 所示。将计算区域设定为正方形，圆柱置于正方形的中心位置，以圆心为原点建立直角坐标系， x 、 y 、 z 三个坐标轴分别指向流动方向、垂直流动的方向和圆柱的长度方向。圆柱的直径为 D ，正方形的边长为 L 。多孔圆柱绕流问题中的流动由此被分为两部分：圆柱外为纯流体区域，流体的来流速度为 U_∞ ，密度和动力粘性系数分别为 ρ 和 μ ；圆柱内为多孔介质区域，多孔介质的孔隙率为 ε 。

2.1.1 控制方程

在纯流体区域，不可压缩流动的质量守恒方程、动量守恒方程的微分形式分别为

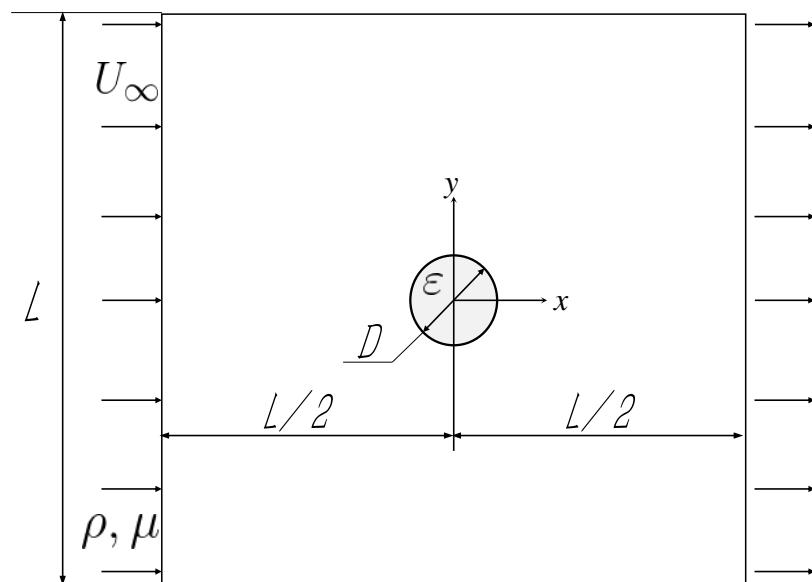


图 2-1 多孔圆柱绕流的问题定义

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} \quad (2-2)$$

式中 \mathbf{u} ——速度;

ρ ——密度;

t ——时间;

p ——压力;

μ ——动力粘性系数（动量扩散率）。

在多孔介质区域，控制方程采用 Darcy-Brinkman-Forchheimer 扩展模型：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho\mathbf{u}\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) = -\nabla(\varepsilon p^*) + \mu\nabla^2\mathbf{u} - \frac{\mu\varepsilon}{K}\mathbf{u} - \frac{\rho\varepsilon C_F |\mathbf{u}|}{\sqrt{K}}\mathbf{u} \quad (2-4)$$

式中 \mathbf{u} ——当地平均速度（达西速度）;

ε ——孔隙率;

p^* ——内部平均压力，在一个 REV 内的孔隙部分对压力取平均值；

K ——渗透率；

C_F ——Forchheimer 系数。

在多孔介质中，当地平均量（local average）和内部平均量（intrinsic average）之间存在 Dupuit-Forchheimer 关系，例如 $p = \varepsilon p^*$, $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}^*$ 。

2.1.2 边界条件

多孔介质区域和纯流体区域的边界采用压力阶跃边界条件，切向应力有一差值

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\partial u_t}{\partial n} \Big|_{\text{porous}} - \mu \frac{\partial u_t}{\partial n} \Big|_{\text{fluid}} = \beta_1 \frac{\mu}{\sqrt{K}} u_t \Big|_{\text{interface}} + \beta_2 \rho u_t^2 \quad (2-5)$$

其中多孔介质中的速度 u_t 指达西速度的切向分量，纯流体区域的速度 u_t 指流体速度的切向分量。 β_1 和 β_2 为体现应力阶跃的两个参数，大小可调。

界面上的速度相等，法向应力相等：

$$\mathbf{u}|_{\text{fluid}} = \mathbf{u}|_{\text{porous}} = \mathbf{u}|_{\text{interface}} \quad (2-6)$$

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\partial u_n}{\partial n} \Big|_{\text{porous}} - \mu \frac{\partial u_n}{\partial n} \Big|_{\text{fluid}} = 0 \quad (2-7)$$

其中多孔介质中的速度 u_n 指达西速度的切向分量，纯流体区域的速度 u_n 指流体速度的切向分量。

2.2 求解模型

2.2.1 纯流体区域

用 ϕ 表示单位质量的某一守恒量，对于质量守恒， $\phi = 1$ ，对于动量守恒， $\phi = \mathbf{u}$ ，对于其他标量的守恒， ϕ 表示单位质量内该标量的值。关于物理量 ϕ 积分形式的守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \phi \, d\Omega + \int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega} q_{\phi} \, d\Omega \quad (2-8)$$

式中 t ——时间；

Ω ——控制体的体积；

S ——控制体表面（控制面）的面积；

ρ ——密度；

\mathbf{u} ——速度；

\mathbf{n} ——控制面某一点的单位法向量；

Γ ——物理量 ϕ 的扩散率；

q_{ϕ} ——物理量 ϕ 的源或汇，即单位时间、单位体积的控制体内生成的 ϕ 。

假设控制体的中心点为 P ，控制面分为东、南、西、北四部分，四个表面的中心点分别用字母 e 、 s 、 w 、 n 表示。方程中的四项分别表示随时间变化项、对流项、扩散项和源项，分别记为 F^t 、 F^c 、 F^d 和 Q_P^ϕ 。这样，公式 (2-8) 可以简写为

$$F^t + F^c = F^d + Q_P^\phi \quad (2-9)$$

下面将对方程中的每一项积分作出近似，近似方法参考书籍 [45]。

(1) 对流项的近似

图 2-2 是一个典型的二维控制体，将节点定义在每个控制体的中心位置。下面将以东边（east）表面为例。

质量流量为

$$\dot{m}_e = \int_{S_e} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e S_e \quad (2-10)$$

表面的单位法向量 \mathbf{n}_e 定义为（重复的指标 i 采用求和约定）

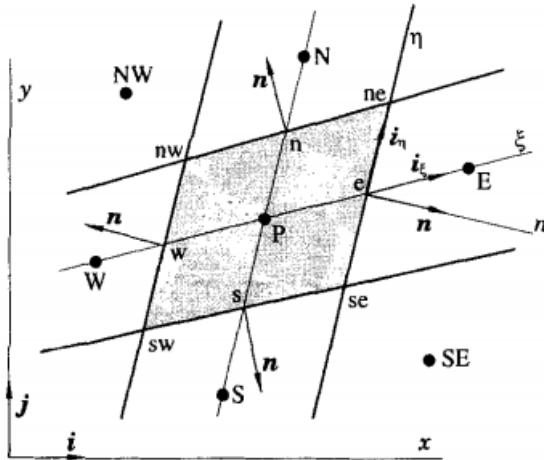


图 2-2 一个典型的二维控制体示意图及采用的符号, 图片摘自文献 [45] 第 231 页

$$\mathbf{n}_e S_e = S_e^i \mathbf{i}_i = (y_{ne} - y_{se}) \mathbf{i} - (x_{ne} - x_{se}) \mathbf{j} \quad (2-11)$$

东边表面的面积 S_e 为

$$S_e = \sqrt{(S_e^x)^2 + (S_e^y)^2} \quad (2-12)$$

于是, 质量流量可以写为

$$\dot{m}_e = \rho_e (S^x u_x + S^y u_y)_e \quad (2-13)$$

由此可见, 非正交网格表面上的向量不是沿着坐标轴的方向, 而是在两个坐标轴方向上均有分量, 这个表面上的质量流量也同时跟两个坐标方向上的速度有关。

当表面上的质量流量已知时, 物理量 ϕ 通过此表面的流率为

$$F_e^c = \int_{S_e} \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \dot{m}_e \phi_e \quad (2-14)$$

其中 ϕ_e 表示物理量 ϕ 在东边表面中心点处的值。得到 ϕ_e 最简单的办法是取相邻两个节点的平均值, 这种方法将相邻两个节点的连线视为直线, 如果线在表面处的方向发生转折, 就会产生一个额外的误差。

(2) 扩散项的近似

扩散项的流率为

$$F_e^d = \int_{S_e} \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS \approx (\Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n})_e S_e \quad (2-15)$$

物理量 ϕ 在东边表面中心点处的梯度在直角坐标系和当地坐标系下分别表示为

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{t} \quad (2-16)$$

其中 n, t 分别表示坐标系在某一点的法向和切向。

如果 ϕ 在控制体表面的变化可以用一个形状函数来描述，那就可以求出这个函数在 e 位置对坐标轴各个方向的导数，接着可以得到扩散带来的流率：

$$F_e^d = \Gamma_e \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_e S_e^i \quad (2-17)$$

这样易于设为显式格式。

另一种方法是先得到控制体中心处的导数，然后再用插值的方法得到控制体表面处的值。首先用整个控制体上的平均值来近似中心处的值：

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_p \approx \frac{1}{\Delta \Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \quad (2-18)$$

利用高斯公式将体积分转化为面积分：

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega = \int_S \phi \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_c \phi_c S_c^i, \quad c = e, s, w, n, \dots \quad (2-19)$$

上式表明， ϕ 在控制体中心对于 x 的导数近似等于各个表面上 ϕ 和 x 方向面积分量的乘积之和，即

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_p \approx \frac{1}{\Delta \Omega} \sum_c \phi_c S_c^i \quad (2-20)$$

这样， ϕ_c 可以使用和计算对流项时一样的值。如果在直角坐标系下使用线性插值，利用中心差分法也可以得到控制体中心位置的导数值：

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_p \approx \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} \quad (2-21)$$

对刚刚计算出的导数进行插值得到表面处的导数，然后根据式 (2-17) 可以得到所需的扩散流率。这种方法在迭代的过程中可能产生振荡解。

选择固结于控制体表面中心位置的正交坐标系 (n, t, s) ，可知扩散量仅由法向贡献：

$$F_e^d = \Gamma_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_e S_e \quad (2-22)$$

使用中心差分，法向导数可以近似为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_W}{L_{PE}} \quad (2-23)$$

其中 L_{PE} 表示相邻两个节点 E 和 P 之间的距离, $L_{PE} = |\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_P|$ 。如果是均匀的直角坐标系 (当地的法向即为 x 轴的方向), 那么 $L_{PE} = \Delta x$, 于是

$$\overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)}_e = \frac{1}{2} \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{EE} - \phi_P}{2\Delta x} \quad (2-24)$$

从图 2-3 可以看出, 当存在振荡时, 由上式得出的 e 点导数值可能为零, 但实际上该点具有较大的导数, 振荡对迭代造成了影响。可以通过下面的方法避免:

$$F_e^d = F_e^{d, \text{impl}} + [F_e^{d, \text{expl}} - F_e^{d, \text{impl}}]^{\text{old}} \quad (2-25)$$

其中 “impl” 和 “expl” 分别代表隐式和显式形式的流率近似, “old” 表示上次迭代的值。

Muzaferija^[46] 提出了避免这一问题的有效方法。当连接 P、E 两点的线正交于控制体表面时, 对 n 的导数近似等于对 ξ 的导数, ξ 为连线的方向。公式 (2-22) 由隐式表达式近似:

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e = \Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{L_{PE}} \quad (2-26)$$

如果 P、E 的连线正交于单元表面, 这是一个具有二阶精度的方法, 并且延迟校正项必须为零。当网格是非正交时, 延迟校正项必须包括 ξ 和 n 两个方向导数的差值。Muzaferija^[46] 提出的校正格式为

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e + \Gamma_e S_e \left[\overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)}_e - \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)}_e \right]^{\text{old}} \quad (2-27)$$

等式右边的第一项以隐式处理, 第二项为延迟校正项。校正项使用单元中心处的导数来插值:

$$\overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)}_e = \overline{(\nabla \phi)}_e \cdot \mathbf{n}; \quad \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)}_e = \overline{(\nabla \phi)}_e \cdot \mathbf{i}_\xi \quad (2-28)$$

其中 \mathbf{i}_ξ 为 ξ 方向的单位向量。最终得到的扩散流率的表达式为

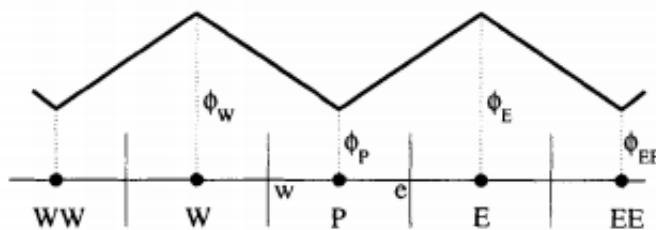


图 2-3 控制体表面梯度的近似和振荡解的避免, 图片摘自文献 [45] 第 235 页

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{L_{PE}} + \Gamma_e S_e \overline{(\nabla \phi)}_e^{\text{old}} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{i}_\xi) \quad (2-29)$$

当 $\mathbf{i}_\xi = \mathbf{n}$ 时，上式退化为正交时的情形。

在以上的方法中，我们假设 P、E 间的连线通过了单元东边表面的中心 e。以上的面积分具有二阶精度。如果网格是不规则的，P、E 连线可能不会经过表面的中心点，前面公式中的 ϕ_e 和 $(\partial\phi/\partial\xi)_e$ 等并不是 e 点的值，而是 P、E 连线与表面的交点 e' 处的值，如图 2-4 所示。e 和 e' 之间的差别带来了误差，使得原来的面积分不再具有二阶精度，误差可能会使精度降为一阶。

控制体表面中心处 e 点的值可以通过辅助节点 P' 和 E' 得到， P' 、 E' 的连线通过 e 点并指向 e 点的法向， P' 和 E' 分别位于 P、N 以及 E、NE 的连线上，如图 2-4 所示。隐式项基于节点 P 和 E 处的值，忽略网格的不规则（即使用 e' 点的值），对隐式项和更精确的方法之间的差值进行显式处理。于是，公式 (2-27) 被修正为

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{e'} + \Gamma_e S_e \left[\overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)}_e - \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)}_{e'} \right]^{\text{old}} \quad (2-30)$$

控制体表面中心处的法向导数使用中心差分计算：

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_e \approx \frac{\phi_{E'} - \phi_{P'}}{L_{P'E'}} \quad (2-31)$$

其中 $L_{P'E'}$ 为 P' 和 E' 两点之间的距离， $L_{P'E'} = |\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_{P'}|$ 。 $\phi_{E'}$ 和 $\phi_{P'}$ 的值可以使用线性插值来计算，或者通过控制体中心处的梯度得到：

$$\phi_{P'} = \phi_P + (\nabla \phi)_P \cdot (\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P) \quad (2-32)$$

上面是具有二阶精度的最简单格式。

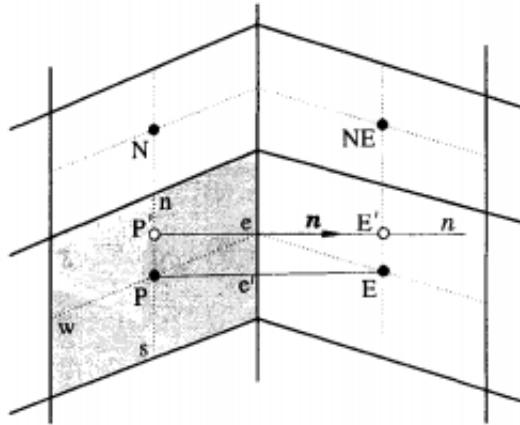


图 2-4 一种计算控制体表面中心处的值及梯度的方法，图片摘自文献 [45] 第 237 页

(3) 源项的近似

整个控制体内产生的源可以近似为控制体中心点的值与控制体体积的乘积：

$$Q_P^\phi = \int_{\Omega} q_\phi d\Omega \approx q_{\phi,P} \Delta\Omega \quad (2-33)$$

上式具有二阶精度。

对于结构化网格，二维四边形网格形成的控制体的体积等于两条对角线向量积的一半：

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \frac{1}{2} |(\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{r}_{sw}) \times (\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{r}_{se})| \\ &= \frac{1}{2} [(x_{ne} - x_{sw})(y_{nw} - y_{se}) - (y_{ne} - y_{sw})(x_{nw} - x_{se})] \end{aligned} \quad (2-34)$$

其中 \mathbf{r}_{ne} 是“ne”点的位置向量，其他同理。

对于动量方程中的压力项，既可以将其视为作用于控制体表面的保守力，也可以视为非保守的体积力。如视为表面力，

$$\begin{aligned} Q_P^P &= - \int_S p \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_c p_c S_c^x \\ &= -p_e(y_{ne} - y_{se}) + p_w(y_{nw} - y_{sw}) + p_n(y_{ne} - y_{nw}) - p_s(y_{se} - y_{sw}) \end{aligned} \quad (2-35)$$

如视为体积力，

$$Q_P^P = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \approx - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_P \Delta\Omega \quad (2-36)$$

第一种方法是完全守恒的，如果导数 $\partial p / \partial x$ 是使用高斯定理计算的话，第二种方法也是守恒的：两者通过高斯定理相联系。如果压力梯度不在直角坐标系下表示，而在位于控制体中心的当地坐标系 (ξ, η) 下表示，那么

$$Q_P^P \approx -(p_e - p_w)(y_n - y_s) + (p_n - p_s)(y_e - y_w) \quad (2-37)$$

由此得出了动量方程中压力项的近似计算。

通过以上各项的近似，水平方向的动量方程离散之后可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + A_P \phi_P + \sum_l A_l \phi_l = Q_P^* - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta\Omega \quad (2-38)$$

其中下标“P”表示中心节点，求和指标 l 表示相邻的东、南、西、北四个节点，各个系数 A 均表示得到的线性方程组， Q_P^* 表示其他力所贡献的源项的积分。上式以各个节点的 ϕ 为未知量，通过求解代数方程组得到，压力项通过 SIMPLEC 算法

求解^[47]

$$u_e^m = \overline{(u^m)}_e - \Delta\Omega \left(\frac{1}{A_p^u + \sum_l A_l^u} \right)_e \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)}_e \right]^{m-1} \quad (2-39)$$

2.2.2 多孔介质区域

控制方程与纯流体区域相似，离散方法也相似。积分形式的守恒方程为（写出第*i*个分量）

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u_i d\Omega + \int_S \frac{\rho u_i}{\varepsilon} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} -\frac{\mu \varepsilon}{K} u_i - \frac{\rho \varepsilon C_F |\mathbf{u}|}{\sqrt{K}} u_i d\Omega, \quad i = 1, 2 \quad (2-40)$$

简记为以下各项

$$F^t + F^c = F^d + Q_P^{p^*} + Q_P^D + Q_P^F \quad (2-41)$$

以水平方向为例 (*i* = 1) 各项近似如下。对流项为

$$F_e^c = \int_{S_e} \frac{\rho u}{\varepsilon} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \frac{\dot{m}_e u_e}{\varepsilon_e} \quad (2-42)$$

扩散项和纯流体区域相同。

在源项中，将压力视为体积力，

$$Q_P^{p^*} = - \int_{\Omega} \frac{\partial(\varepsilon p^*)}{\partial x} d\Omega \approx - \left(\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} \right)_P \Delta\Omega \quad (2-43)$$

多孔介质比纯流体多出 Darcy 项和 Forchheimer 项。Darcy 项的积分近似如下

$$Q_P^D = - \int_{\Omega} \frac{\mu \varepsilon}{K} u d\Omega = - \left(\frac{\mu \varepsilon}{K} \right)_P \Delta\Omega \cdot u_P \quad (2-44)$$

Forchheimer 项的积分近似如下

$$Q_P^F = - \int_{\Omega} \frac{\rho \varepsilon C_F \sqrt{u_x^2 + u_y^2}}{\sqrt{K}} u d\Omega = - \left(\frac{\rho \varepsilon C_F \sqrt{u_x^2 + u_y^2}}{\sqrt{K}} \right)_P \Delta\Omega \cdot u_P \quad (2-45)$$

压力校正方程类似于公式 (2-39)：

$$u_e^m = \overline{(u^m)}_e - \Delta\Omega \left(\frac{1}{A_p^u + \sum_l A_l^u} \right)_e \left[\left(\frac{\partial(\varepsilon p^*)}{\partial x} \right)_e - \overline{\left(\frac{\partial(\varepsilon p^*)}{\partial x} \right)}_e \right]^{m-1} \quad (2-46)$$

2.3 本章小结

本章描述了多孔介质流动的数值模拟模型，采用控制体积法，使用贴体网格和

多块网格。2.1 节描述了该问题的数学模型，整个流动区域分为纯流体区域和多孔介质区域两部分，纯流体区域的控制方程为不可压流动的纳维斯托克斯方程，需要求解速度和压强。多孔介质区域的控制方程是对纯流体区域在表征体元上取平均得到的，采用 Darcy-Brinkman-Forchheimer 扩展模型，需要求解当地平均或内部平均意义下的速度和压强。在纯流体区和多孔介质区的边界上，速度和法向应力均相等，对切向应力采用应力阶跃条件，两侧应力差值的大小可以通过两个参数来调节。

2.2 节描述了采用控制体积法的求解模型。控制体积法要求对积分形式的守恒方程进行近似，将其化为代数方程。任一守恒量的守恒方程都可以表述为，在控制体内，经过一段时间后增加的量等于经控制面流入的量与控制体内生成的量之和，进一步地，时间变化项与对流项之和等于扩散项与源项之和。采用合适的方法对代表对流项、扩散项和源项的面积分或体积分进行近似，并采用 SIMPLEC 算法求解。

第3章 网格无关性分析和结果验证

3.1 网格划分

3.1.1 网格生成

要计算的流动区域如图 3-1 所示。圆柱在二维情形下退化为一圆面，将圆柱的直径设为 1，为了尽可能多地展现出流动情况，将正方形的边长设为 60 倍的圆柱直径，并使圆柱的截面位于正方形的中心位置。整个计算区域以圆为界，分为圆柱内部和圆柱外部两部分，圆柱内部为多孔介质区域，圆柱外部为纯流体区域，圆柱表面为多孔介质区域和纯流体区域的边界。由于采用结构化网格，每个网格均为四边形，为了使圆能被较好地划分，令圆内的网格更加规则，同时使圆柱表面内外的网格尽量光滑衔接，网格尺寸连续变化，于是在圆内再划分出一个正方形，将正方形的边长设置为圆柱直径的一半。这样，整个计算区域就被分成了三个子区域，如图 3-1 所示。

在划分网格时，流动区域被分割为连续的小四边形，经纬两个方向的直线织成了整个平面区域。对于第一个子区域（圆内的正方形），只需要将四条边等分，再连接对应点即可。第二个子区域和第三个子区域为 O 型网格。第二个区域的内边界为正方形，外边界为圆，内外表面都被均匀划分，且取相同数量的节点，连接对应的节点形成一条条呈放射状的径向线段，将每一条线段等分，再顺次连接对应的节点，新得到的周向线段与之前的径向线段相交，形成了网状结构，区域被成功划分。第三个区域的内边界为圆，外边界为正方形，两个边界仍然是被均匀划分，连接节点形成径向直线，另一方向的网格划分也和第二个区域类似，不过径向线段不再被等分，而是按照内密外疏的原则依等比数列划分。为了保持圆内外两层网格的大小一致，第三个区域最内侧的网格密度比较大，如果均匀划分，将使网格数过多，而外部网格密度不需要太过细密，所以网格从内到外按照由密到疏的原则进行划分，等比数列是一个较好的选择。另外，为了使圆附近的网格更加细致，第二个区域可以按内疏外密将圆附近的网格适当加密，3.1.2 小节第一组网格的第二个区域就是这样划分的。

3.1.2 网格无关性分析

解的精度依赖于网格的疏密程度，一般情况下，随着网格数越来越多，网格划

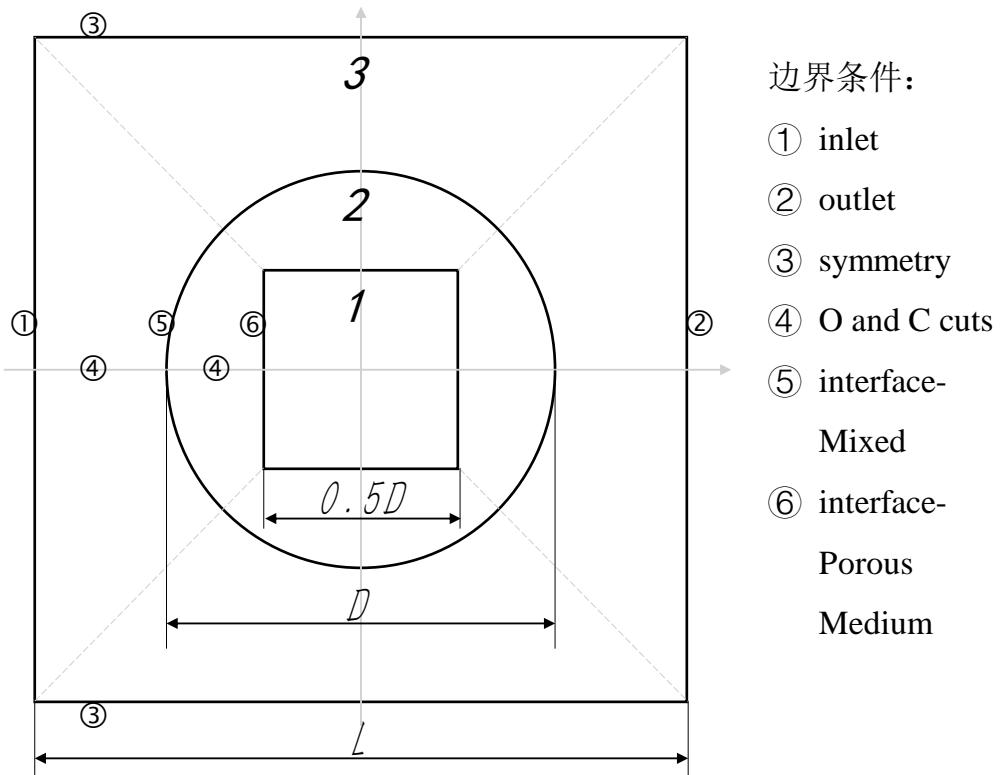


图 3-1 网格划分及边界条件设定

分得越来越致密，解的精度也随之提高，但同时计算量也越大，对计算资源的要求也越高。最终应该选择一个合适的网格密度，既使得解能够满足一定的精度要求，同时也可保持较高的计算效率。为了确保解的精度，需要进行网格无关性验证。选择几种依次递增的网格密度，在同一条件下进行数值计算，如果某一网格密度下的解与上一网格密度下的解之差满足了一定的精度要求，就可以认为该网格密度下得到的解已足够精确，从而可以选择该网格密度作为后续模拟的设定值。计算采用的参数见表 3-1，其中 β_1 和 β_2 为第 2 章描述的两个应力阶跃参数， Δt 为计算过程中采用的时间步长。表 3-2 列出了四种由疏到密的网格尺寸。进行验证的雷诺数和达西数分别为 100 和 0.0001。计算结束后，根据数据得到的平均阻力系数也列在表 3-2 中。表格最后一列的数值表示，与上一行相比，该行平均阻力系数的变化率，即本行的阻力减去上一行的阻力再除以上一行的阻力。

同时设定四个样本点，搜集这四个位置各个物理量的信息，这四个点的坐标分别是 $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,0)$, $(1.5,1.5)$ 。通过记录样本点的速度、压强随时间的变化，便于后续分析。

从表 3-2 可以看出，四种情形下计算得到的阻力系数已比较接近，但仍然存在一些差别，网格 2 的阻力系数比网格 1 增大了 0.58%，网格 3 的阻力系数比网格 2 增大了 0.29%，网格 4 的阻力系数比网格 3 减小了 0.36%。因为网格 3 和 2 之间的差别已足够小，达到了 0.3%，满足了精度要求，所以在后续计算中将采用网格 3 作为数值模拟过程中的网格密度。

表 3-1 计算参数的设定

| D | L | U_∞ | ρ | ε | β_1 | β_2 | Δt |
|-----|------|------------|---------------------|---------------|-----------|-----------|------------|
| 1 m | 60 m | 1 m/s | 1 kg/m ³ | 0.7 | 0 | 0 | 0.001 s |

表 3-2 几种不同密度的网格尺寸及相应的阻力系数

| 编号 | 网格尺寸 | | | 平均阻力系数 | 阻力系数变化率 |
|----|-----------|----------|-----------|--------|---------|
| | 区域 1 | 区域 2 | 区域 3 | | |
| 1 | 40 × 40 | 160 × 25 | 160 × 140 | 1.2354 | — |
| 2 | 60 × 60 | 240 × 30 | 240 × 170 | 1.2426 | 0.58% |
| 3 | 80 × 80 | 320 × 40 | 320 × 200 | 1.2462 | 0.29% |
| 4 | 100 × 100 | 400 × 50 | 400 × 230 | 1.2417 | -0.36% |

3.2 结果验证

确定了网格密度之后，需要验证结果的准确性。已知在多孔圆柱绕流中，达西数决定了多孔介质中流动的程度，当达西数趋于无穷大时，多孔区域变成了纯流体区域，当达西数为零时，多孔区域则变成了固体区域，内部不再有孔隙，也不再有流体的流动。所以，将达西数设成一个非常小的数值，如果得到的流动状态和已有文献中固体圆柱绕流的流动状态一致，说明结果是准确的。取 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 进行验证。

计算完成后，得到了整个区域的流场特性，即速度、压力以及圆柱受到的阻力和升力系数等。根据某一物理量随时间变化的曲线可以得到无量纲频率 Strouhal 数。阻力系数和升力系数都随时间做周期性波动，对阻力系数取出一个周期内的平均值进行比较，升力系数的平均值为零，可以通过读取升力系数波动的振幅进行比较。在本文中，一些物理量采用以下约定符号表示。时间平均速度用平均符号 (̄) 表示，例如 \bar{u} 表示水平速度的时间平均值；方均根值通过撇号 (') 来体现，例如 u' 表示水平速度的方均根值。平均阻力系数和平均升力系数分别用 C_D 和 C_L 表

示（此处不再使用平均符号），并且都由压力和摩擦力共同引起： $C_D = C_{Dp} + C_{Df}$ ， $C_L = C_{Lp} + C_{Lf}$ 。阻力系数和升力系数的方均根值则分别表示为 C_D' 和 C_L' 。升力系数波动的振幅用 C_L^A 表示。表 3-3 列出了当前过去的一些计算结果，当前结果设置的达西数为 1×10^{-5} ，其他结果都是对于固体圆柱而言，所有结果所采用的雷诺数都是 100。从表中可以看出， $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时多孔圆柱中的流动已经接近于固体圆柱的情形，当前结果与已有结果基本一致。

表 3-3 和其他数值结果的比较 ($Da = 1 \times 10^{-5}$, $Re = 100$)

| 结果 | St | C_D | C_{Dp} | $C_{L'}$ |
|---------------------------|--------|--------|----------|----------|
| Park et al. [48] | 0.165 | 1.33 | 0.99 | 0.235 |
| Li et al. [49] | 0.164 | 1.336 | 0.995 | - |
| Harrichandan and Roy [50] | 0.161 | 1.352 | - | - |
| Qu L [51] | 0.1648 | 1.319 | 0.984 | 0.225 |
| Laroussi et al. [52] | 0.173 | 1.50 | - | - |
| 当前结果 | 0.1650 | 1.2724 | 0.9976 | 0.2232 |

为了在整个雷诺数范围内作比较，展示出多孔介质趋于固体时的流动特性，将整个雷诺数范围内 Strouhal 数、平均阻力系数、升力系数据的变化和已有结果进行了比较，如图 3-2、3-3 和 3-4 所示。

图 3-2 显示了 Strouhal 数随雷诺数的变化，从图中可以看出，在雷诺数从 40 增大到 180 的范围内，当前结果与文献 [53] 符合得比较好， $Re = 180$ 和 $Re = 200$ 两个点和文献不一致，可能是因为这时流动已具有三维特性，所以模拟的结果有一定偏差。

图 3-3 显示了平均阻力随雷诺数的变化，随着雷诺数的增大，平均阻力逐渐减小，且雷诺数在开始阶段减小很快，之后减小的速度慢慢变小，两条曲线都具有这一趋势，但有一定的差距，与文献 [54] 而且文献中的数据在 $Re = 60$ 之前下降很快，随后却由一个明显的上升，然后才缓慢下降，这导致曲线在 $Re = 60$ 附近不连续，原因尚不明确，可能这是由两段数据组合而成的一个直线。此外，当前研究和文献数据在阻力值上的差距也不明确，只是总体上具有相同的变化趋势。如果在程序中不考虑达西数，而不是将达西数设为一个很小的值，那么得到的结果会更接近文献数据。所以，这一差距可能由达西数的加入而引起。

图 3-4 显示了升力振幅随雷诺数的变化，升力波动的振幅均随雷诺数的增大而增大，且二者基本吻合。总体而言，当前结果与文献在一定程度上是一致的，经

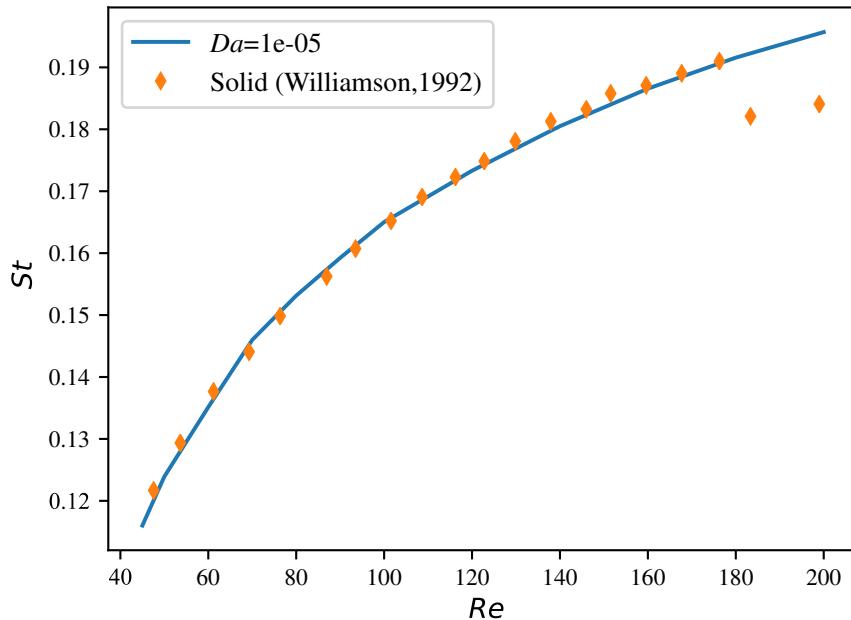


图 3-2 Strouhal 数的对比

过验证，结果基本准确。

3.3 本章小结

本章对个别多孔圆柱绕流情形进行了计算，确定了网格的划分形式以及计算所需的网格分辨率，和固体绕流的结果进行对比，验证了计算结果的准确性。

3.1 节定义了该问题的计算区域，将正方形的计算区域划分为三个子域，在每个区域内划分出正交网格，并规定每两块网格之间的边界条件。为了寻找合适的网格分辨率，在取得足够精度的同时又保证一定计算效率，进行了网格无关性验证。固定其他参数，设定一系列的网格密度，分别计算，对得到的结果进行分析，发现 80×80 的网格具有足够的精度，将作为后续计算的设定。

3.2 节计算了 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 、 $Re = 100$ 时的流动情形，将得到的各物理量的变化情况和已有的固体圆柱绕流结果比对，确定了计算的准确性。

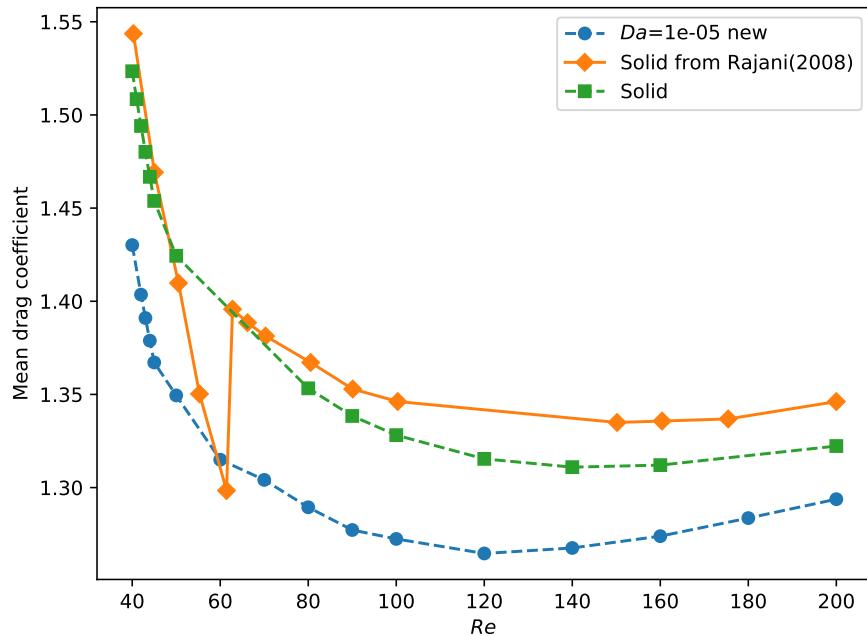


图 3-3 平均阻力系数 C_D 的对比

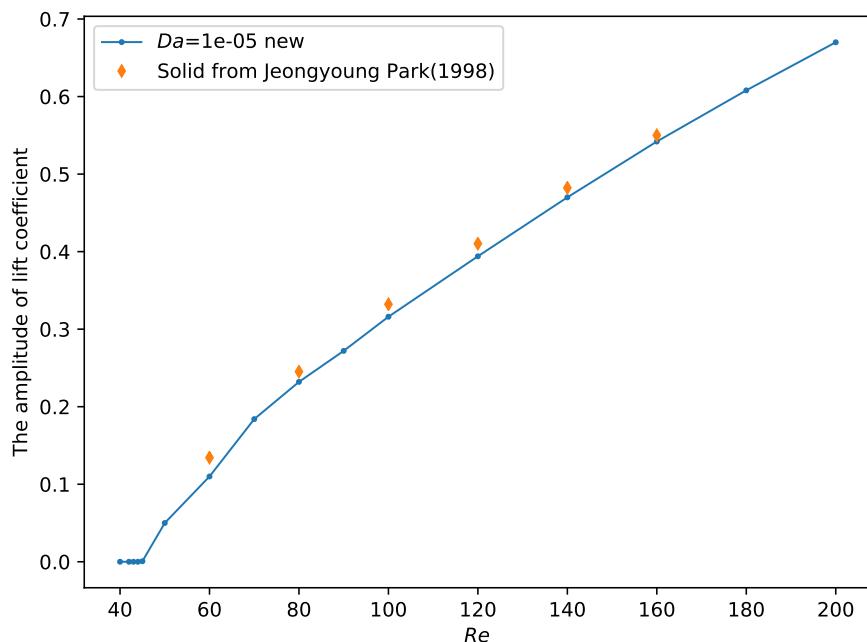


图 3-4 升力系数 C_L 的对比

第 4 章 流场结果与分析

流动由雷诺数、达西数、孔隙率等多个参数决定，当前的研究中主要通过改变雷诺数和达西数得到不同的流动，并探究参数对流动的影响。非稳态流动的雷诺数范围大约为从 40 到 200， $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时多孔区域接近固体， $Da = 1 \times 10^{-2}$ 时多孔介质的效果已经非常微弱，所以当前计算时设置的雷诺数从区间 $[40, 200]$ 内选择，达西数从区间 $[10^{-5}, 10^{-2}]$ 内选择，表 4-1 列出了达西数和雷诺数可能的组合值，实际计算过的值用对勾（√）标记。本文未改变孔隙率和应力阶跃参数的值，依承文献 [55] 的设定，将孔隙率设为 0.7，将应力阶跃的两个系数均设为零： $\varepsilon = 0.7$ ， $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 。

根据表 4-1 的设定进行计算，可以得到不同参数下计算出的流场数据，由于大多参数都处于非稳态范围内，所以得到的流场为各个时刻的瞬时流场，不同时刻的涡量、流线体现了流动特性随时间的变化，展示出非稳态流动的整体概貌。通过对一个周期内的流场进行平均化处理，可以得到平均流场，平均流场的分布情形与稳态流动类似，通过对各个平均量的空间分布进行分析，可以了解流动随雷

表 4-1 计算时用到的达西数和雷诺数的值的设置

| Re | Da | | | | | |
|------|---------|--------|--------|-------|-------|------|
| | 0.00001 | 0.0001 | 0.0005 | 0.001 | 0.005 | 0.01 |
| 40 | √ | √ | √ | √ | √ | - |
| 41 | - | √ | √ | √ | √ | - |
| 42 | √ | √ | √ | √ | √ | - |
| 43 | √ | √ | √ | √ | √ | - |
| 44 | √ | √ | √ | √ | √ | - |
| 45 | √ | √ | √ | √ | √ | - |
| 50 | √ | √ | √ | √ | √ | - |
| 60 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 70 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 80 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 90 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 100 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 120 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 140 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 160 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 180 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 200 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |

诺数、达西数的变化情况。

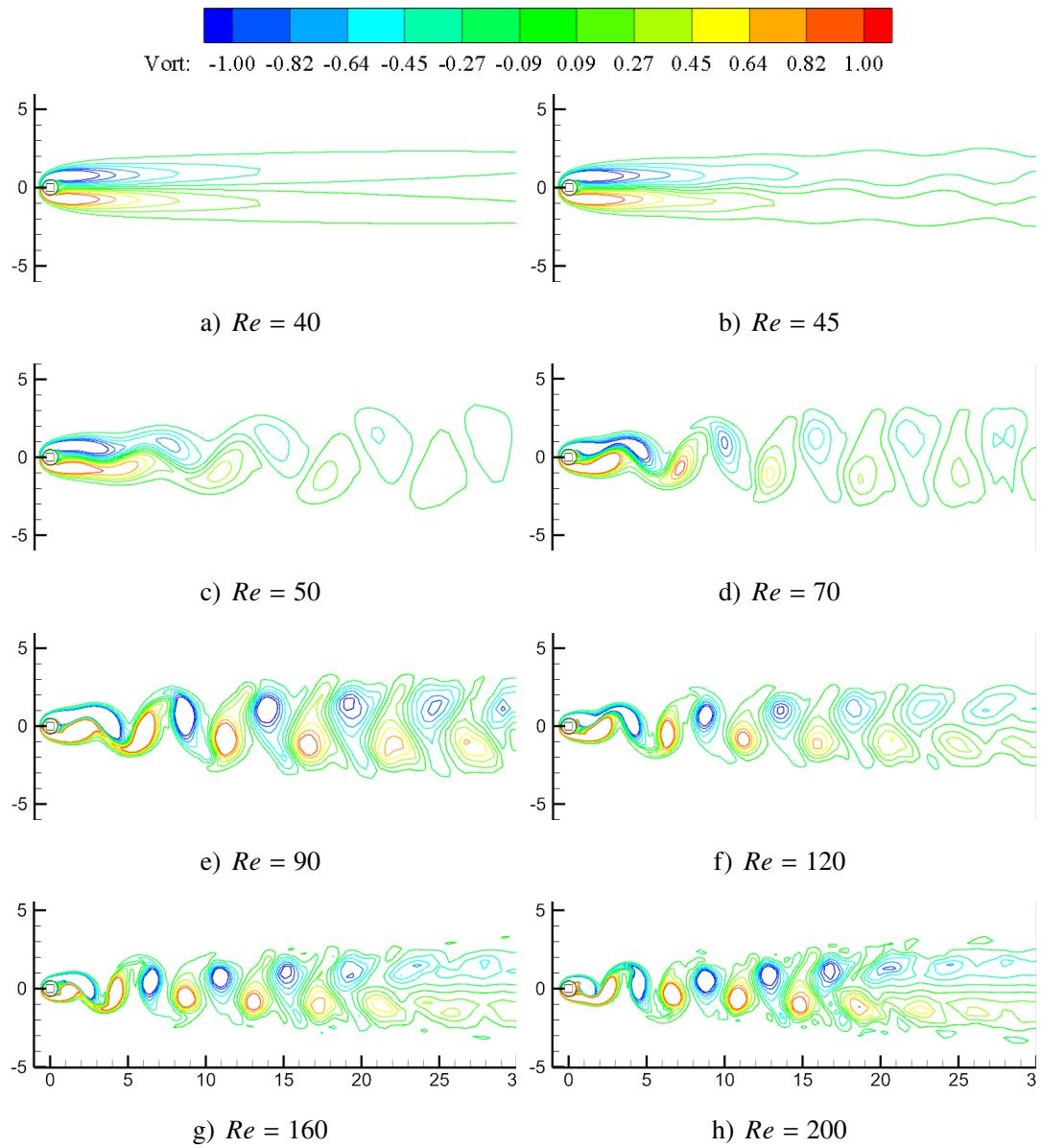
4.1 流场的瞬时分布

经过计算，可以得到不同达西数和雷诺数下整个流动区域的涡量等值线，图 4-1 ~ 4-3 分别展示了 $Da = 0.0001, 0.001, 0.01$ 时不同雷诺数下流动已达平稳时的涡量等值线。此处“平稳”一词指流动特性随时间做周期性变化，在时间平均意义上是稳定的（periodic but statistically stationary state），而“稳定”指流动特性不随时间发生任何变化，每一时刻的状态都是相同的（steady state）。图中涡量值的变化范围是 -1 到 1，圆柱背面具有正、负涡量值的区域成对出现，表示一对对脱落的涡。以达西数为 0.0001 时的图 4-1 为例，从图中可以看出， $Re = 40$ 时流动处于稳态，并在圆柱的后端产生了一对很长的漩涡，随着雷诺数的增大，尾迹的长度逐渐缩短； $Re = 45$ 时尾迹已经开始波动，流动开始处于非稳态，与前文所述一致； $Re = 50$ 时尾迹更短，非稳态已比较明显，涡脱落之后向下游移动，形成一列整齐的涡街；之后更是完全进入了非稳态，尾迹的长度也越来越短，一对对的涡向后整齐地排列。当雷诺数达到 200 时，离圆柱较远处的涡已经变得不再规律，可能是因为此时的三维效应已经比较明显，流体存在沿着圆柱长度方向的流动现象。

图 4-2 展示了 $Da = 0.001$ 时不同雷诺数下涡量的等值线图。总体的变化情况和 $Da = 0.0001$ 时相同，除了在更大的雷诺数下达到非稳态。图 4-3 展示了 $Da = 0.01$ 时不同雷诺数下涡量的等值线图。从图中可以看出，直到 $Re = 200$ 时尾迹才具有并不大的波动，雷诺数更小的时候流动基本处于稳态。

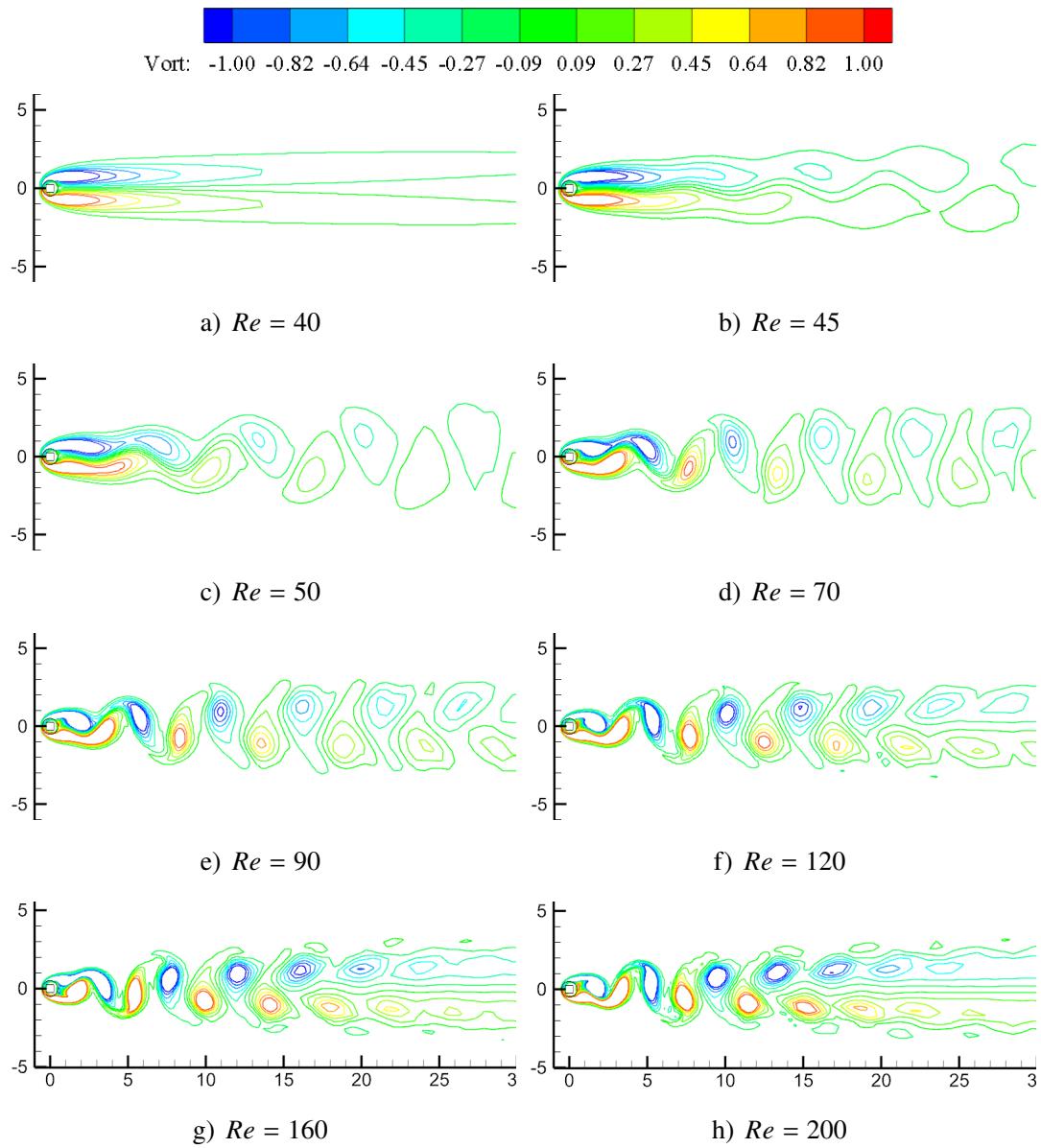
Karasudani 和 Funakoshi^[56] 在实验中研究了圆柱绕流远尾迹处涡街结构的演化，发现沿着下游经过一段距离之后，初始涡街分解成了几乎平行的剪切流动，具有高斯分布，再经过一段距离，形成了具有更大尺度的第二涡街。图 4-1 展示了 $Re = 50, 70, 90, 120, 160, 200$ 时涡量的演化情况。从 $Re = 70$ 开始，尾迹中的涡沿着下游逐渐演化成了近乎平行的剪切流动。 $Re > 50$ 时可以观察到两次卡门涡的失真和旋转。卡门涡大约形成于 $x = 5$ 的位置并从圆柱表面脱落，同时涡的中心离开了尾迹的中心线。第二次形成于 $x = 20$ 或更远的位置。在 $x = 15$ 以后，涡中心距尾迹中心线 ($y = 0$) 之间的垂直距离保持不变。沿着尾迹中心线，涡的形状从圆变得扭曲，类似于椭圆形。从 $Re = 120$ 开始， $x = 25$ 之后的远尾迹处相邻的涡逐渐出现融合趋势，到 $Re = 200$ 时已经融合起来成为一体。

对于非稳态流动，得到流动的周期后，可以继续观察流动在一个周期内的变



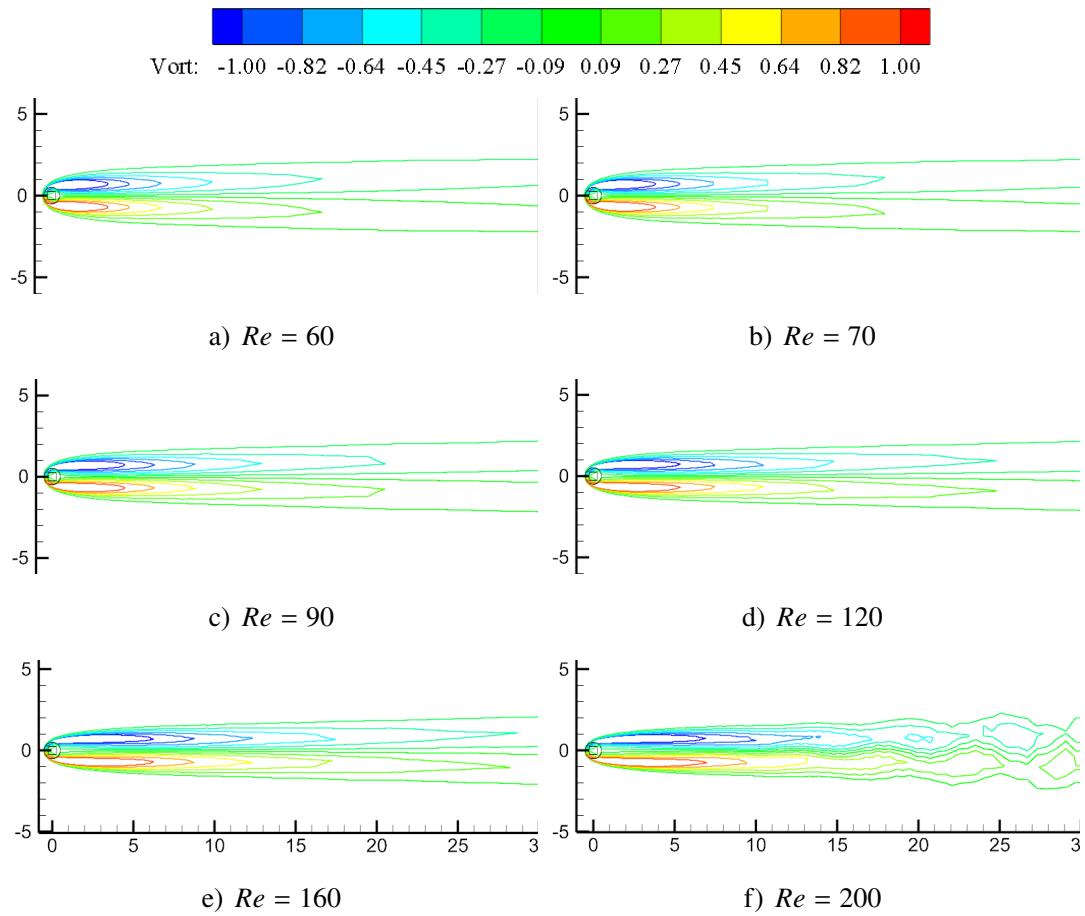
注：图中所示的流动区域为 $-1 < x < 30$, $-5 < y < 5$ 。

图 4-1 不同雷诺数下的涡量等值线 ($Da = 0.0001$)



注: 图中所示的流动区域为 $-1 < x < 30$, $-5 < y < 5$ 。

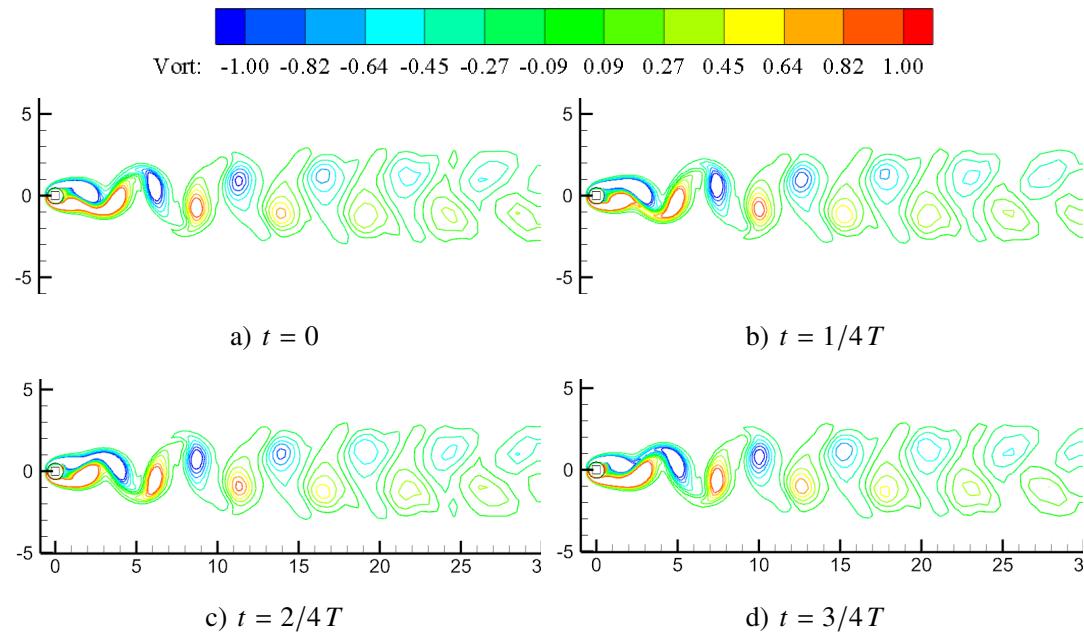
图 4-2 不同雷诺数下的涡量等值线 ($Da = 0.001$)



注：图中所示的流动区域为 $-1 < x < 30$, $-5 < y < 5$ 。

图 4-3 不同雷诺数下的涡量等值线 ($Da = 0.01$)

化情况。以 $Da = 0.0001$ 、 $Re = 100$ 为例, 图 4-4 和图 4-5 分别显示了一个周期内的涡量等值线图和流线图。如图所示, 四个时刻的流动是一致的且连续变化而来, $t = 0$ 时刻圆柱背面下方有一个涡准备脱落, 它的右侧有一个刚刚脱落的涡; 四分之一周期过后, $t = 1/4 T$, 下方的涡已经快要脱落; $t = 2/4 T$ 时刻的状态和 $t = 0$ 时刻相反, 上下对称, 即圆柱背面的上方有一个准备脱落的涡; 再过四分之一周期, $t = 3/4 T$, 此时流动的状态又与 $t = 1/4 T$ 时刻对称。之后, 随着时间的演进, 这一周期内产生的涡从左向右移动, 最终耗散在流体中, 同时有新的涡不断产生, 重复着这一周期内的现象。



注: 图中所示的流动区域为 $-1 < x < 30$, $-5 < y < 5$ 。

图 4-4 在 0, 1/4, 2/4, 和 3/4 周期时涡的脱落图 ($Da = 0.0001$, $Re = 100$)

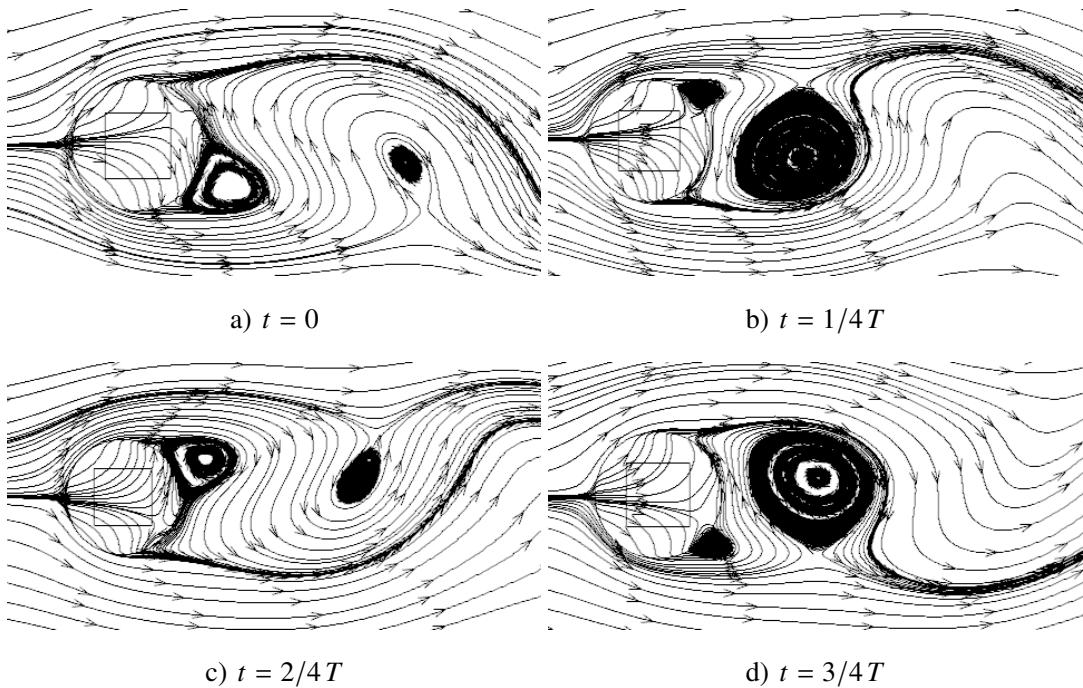


图 4-5 在 0, 1/4, 2/4, 和 3/4 周期时涡的流线图 ($Da = 0.0001$, $Re = 100$)

4.2 平均流场的空间分布

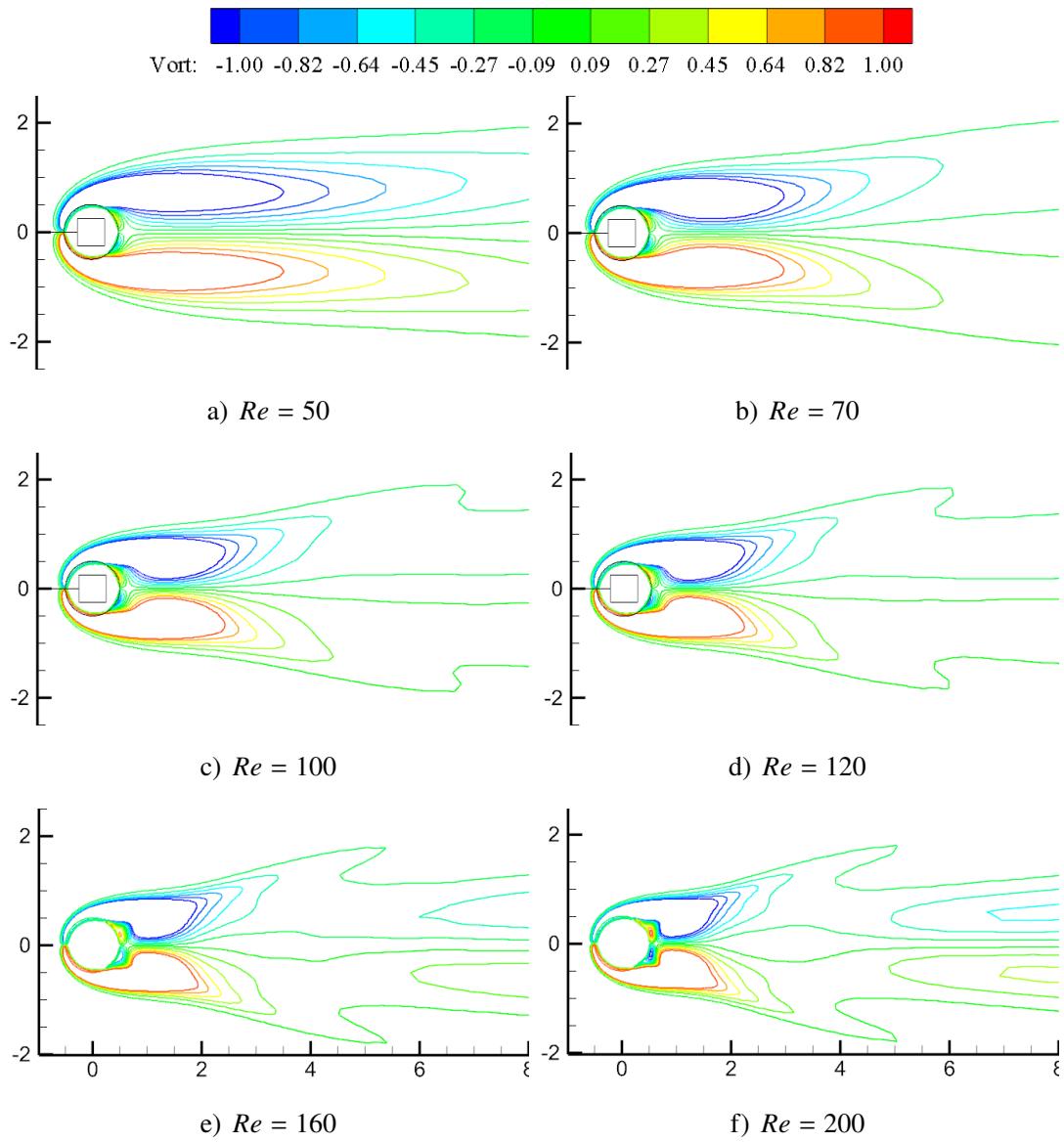
通过对一个周期内若干个时刻的流场数据进行平均化处理，可以得到一个周期内的平均流场数据，进而可以得到不同参数下的平均流场特性。图 4-6 和图 4-7 分别展示了 $Da = 0.0001$ 时不同雷诺数下平均流场的涡量等值线和流线图，达西数取其他值时也有类似的流场图。从图中可以看出流场几何特性的变化，随着雷诺数的增大，尾迹的长度 L_f 逐渐缩短，这一数值可从下文对图 4-8 的说明中得到，不同达西数和雷诺数下的回流区长度见表 4-2，其中 x_0 表示尾迹末端平均速度为零时的位置， x_m 表示尾迹之后平均速度取得最大值时的位置， L_f 即为回流区的长度，均在下文平均量的分布中有所说明。

表 4-2 不同达西数和雷诺数下平均流场的几何特性

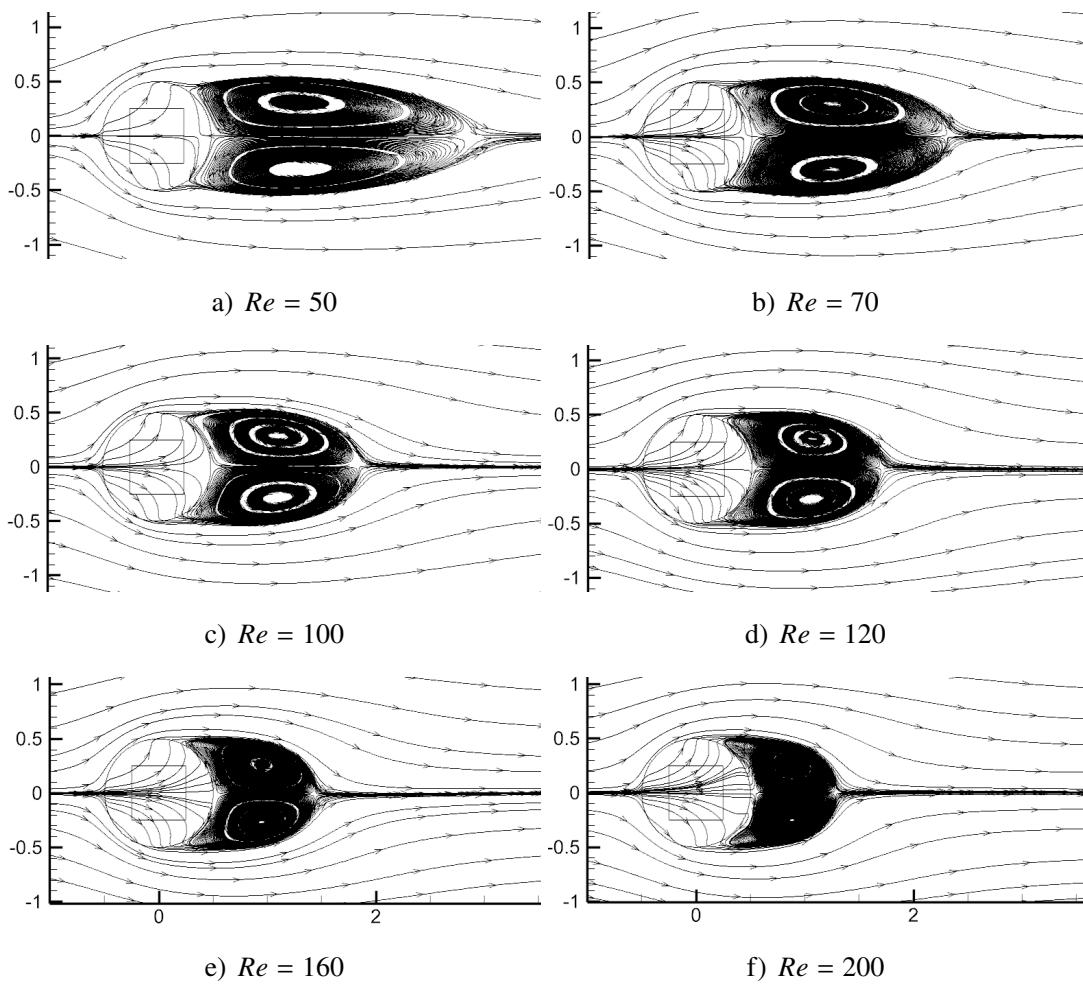
| Re | $Da = 1 \times 10^{-5}$ | | | $Da = 0.0001$ | | | $Da = 0.001$ | | |
|------|-------------------------|-------|-------|---------------|-------|-------|--------------|-------|-------|
| | x_0 | x_m | L_f | x_0 | x_m | L_f | x_0 | x_m | L_f |
| 50 | 2.92 | 无 | 2.42 | 2.89 | 无 | 2.39 | 2.92 | 无 | 2.42 |
| 70 | 2.33 | 22.07 | 1.83 | 2.30 | 21.61 | 1.80 | 2.30 | 20.28 | 1.80 |
| 100 | 1.91 | 8.01 | 1.41 | 1.87 | 7.68 | 1.37 | 1.94 | 7.52 | 1.44 |
| 120 | 1.74 | 6.36 | 1.24 | 1.69 | 6.23 | 1.19 | 1.82 | 6.23 | 1.32 |
| 160 | 1.49 | 4.95 | 0.99 | 1.44 | 4.65 | 0.94 | 1.69 | 5.27 | 1.19 |
| 200 | 1.34 | 4.19 | 0.84 | 1.28 | 4.01 | 0.78 | 1.64 | 4.84 | 1.14 |

图 4-8 展示了 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 雷诺数取不同值时时间平均量沿尾迹中心线的分布，每幅图中的六条曲线分别表示 $Re = 50, 70, 100, 120, 160, 200$ 时的变化趋势。

图 4-8 a) 为 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时流向平均速度 \bar{u} 沿尾迹中心线 ($y = 0, -30 \leq x \leq 30$) 的分布。当 $x < -10$ 时，平均速度基本等于来流速度，流动仍保持为自由来流处的流动。在 $-10 < x < -0.5$ 区间内，由于受到了圆柱的阻挡，速度迅速减小，并且减小的速度越来越快，在 $x = -0.5$ 附近，速度曲线几乎垂直地下降，到圆柱的前缘点 ($x = -0.5$) 时降为零。 $-0.5 < x < 0.5$ 区间位于圆柱内部，速度基本保持为零，这说明，对于 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 而言，多孔介质内部的流动十分微弱，多孔的效果可以忽略，此时多孔圆柱和固体圆柱几乎没有区别。在圆柱背面，速度变成了负值，说明此时处于回流区内，速度为负值时所对应的区间长度即为回流区的长度 L_f 。在回流区内，速度先增大，在回流区的中部达到最大值，然后逐渐减小，到回流区末端时又恢复为零，这一点的位置记为 x_0 (在图 4-8 b) 中用符号“ \times ”来标记)，从而 $L_f = x_0 - 0.5$ 。当 $x > x_0$ 时，已穿过了回流区，速度从零开始快速增大，



注: 图中所示的流动区域为 $-1 < x < 8$, $-2 < y < 2$ 。
图 4-6 不同雷诺数下平均流场的涡量等值线 ($Da = 0.0001$)



注：图中所示的流动区域为 $-1 < x < 3.6$, $-1 < y < 1$ 。

图 4-7 不同雷诺数下平均流场的流线图 ($Da = 0.0001$)

这时，随着雷诺数取值的不同，速度的变化趋势也具有明显的差别。对于 $Re = 50$ ，经过一段距离的增大之后，增长速度逐渐放缓，并最终保持为常数。对于大于 50 的雷诺数，速度经过一段距离的增大之后会达到局部极大值，然后开始减小，将达到极大值的位置记为 x_m 。随着雷诺数的增大，平均速度在越过极值之后的减小行为将变得复杂，渐渐出现了几段不同的变化趋势。例如，对于 $Re = 200$ ，速度在 $1.34 < x < 4.19$ 区间内增大并于 $x = 4.19$ 处达到极大值，之后整体呈下降趋势，又可细分为四段： $9 < x < 16$ 和 $21 < x < 29$ 两段区间内速度保持不变，其他两段区间内则逐渐减小。在 50–200 范围内，雷诺数越小则分段的趋势越不明显，雷诺数越接近 200 则分段趋势越明显。在远尾迹处（例如 $x = 30$ ），速度已无法恢复均匀来流的值，因为经过圆柱后速度发生了损失，且雷诺数越大，速度的损失也越大，由此可以定义尾迹损失速度为 $u_d = 1 - \bar{u}$ 。

流向平均速度在尾迹附近的放大图见图 4-8 b)，选取的范围是 $-0.5 < x < 8$ 。从图中可以更明显地看出，当 $-0.5 < x < 0.5$ 时，速度保持为零。 $Re = 50$ 时，尾迹长度 $L_f = 2.42$ ，随着雷诺数的增大，尾迹缩短，尾迹中回流的最大速度增加。离开回流区之后，增大雷诺数，平均速度的增速随之增大，而且可以在更短的距离内达到极大值。

图 4-8 c) 为 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时平均压力系数 C_p 沿尾迹中心线的分布。从 $x = -30$ 处的来流开始，与速度一样，压力系数也几乎一直保持着来流处的数值 $C_p = 0$ 。在接近圆柱前缘的地方，压力系数迅速增大到 $C_p = 1$ ，在圆柱前缘的驻点位置，压力系数达到了最大值，最大值略大于 1。在圆柱的前方 ($-30 < x < -0.5$)，压力系数的变化趋势和速度完全相反，反映了这一过程中动能和压力能的相互转化。流体进入圆柱之后，压力系数急剧下降，下降的速度逐渐减慢，到圆柱后缘点 ($x = 0.5$) 时压力系数已变为负值，即小于来流处的压力。在回流区 $-0.5 < x < x_0$ 内，压力系数继续下降，先减小到一个极小值，然后开始增大，在尾迹区之外继续不断增大，并在下游无穷远处恢复为来流处的压力。实际上，当 $x = 30$ 时，压力系数已接近 $C_p = 0$ 。从图 4-8 d) 可以看出，雷诺数越大，压力系数越低。在圆柱内部，随着雷诺数的增大，压力系数会降低到更小的值，在尾迹区的下降幅度也更大，从而取得了更小的极小值；另一方面，随着雷诺数的增大，达到极小值的位置也向上游移动。图 4-8 d) 中符号“ \times ”的含义与图 4-8 b) 相同，可以发现，随着雷诺数的增大，压力系数取极小值的位置也就越接近回流区的尾端点。

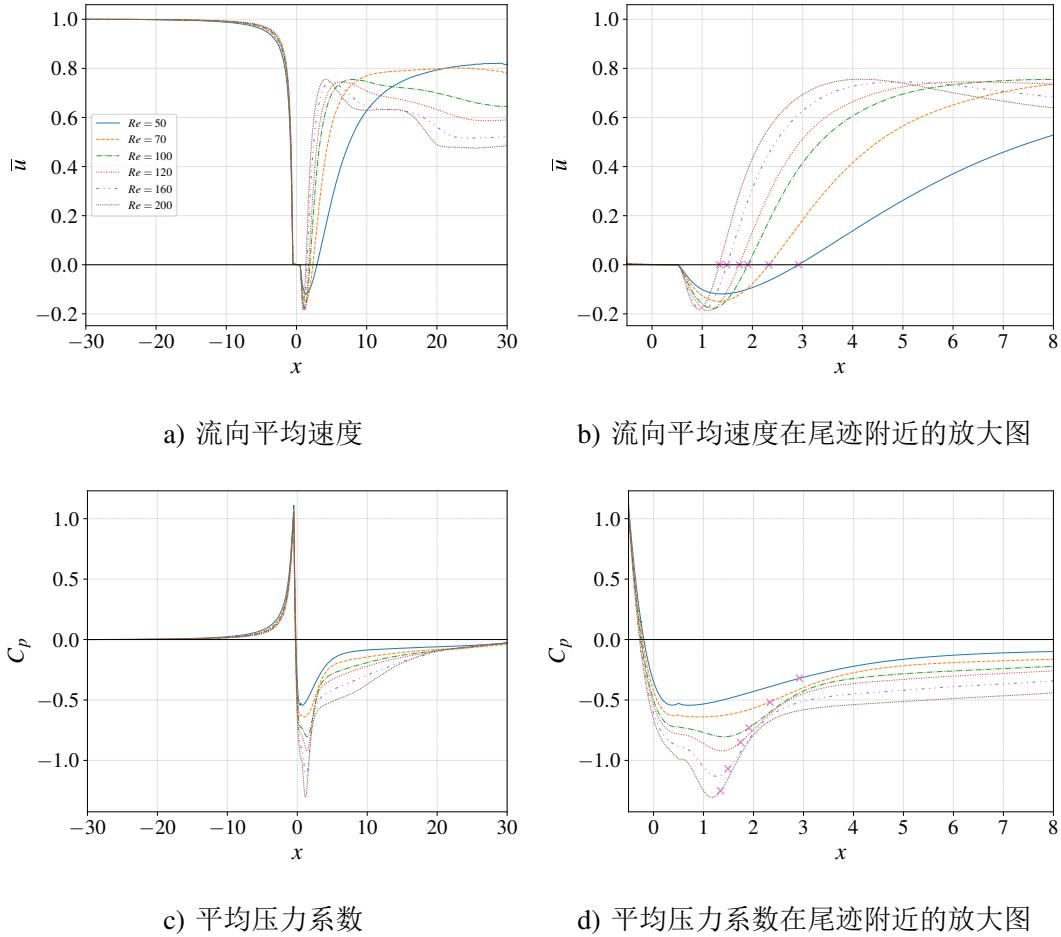
$Da = 0.0001$ 和 $Da = 0.001$ 时平均速度和压力系数沿着 $y = 0$ 的分布与图 4-8

相同，方便起见，不再一一列出。与图 4-8 相比，当达西数增大时，这些平均量具有相似的变化趋势，但也存在一些不同。主要区别体现在平均量在圆柱内部的变化情况。当 $Da = 0.0001$ 时，圆柱前缘的速度将不再减小至零，从而速度在圆柱内部仍会缓慢下降。 $Da = 0.001$ 时仍然如此，而且变化情况更加明显。

为了明了达西数的变化对平均量分布造成的影响，图 4-9 以 $Re = 100$ 为例，画出了不同达西数下各平均量沿着 $y = 0$ 的变化情况。由图可知，不同达西数下速度分布具有相同的变化趋势，如上文所述，最明显的不同在于圆柱内部的速度分布。当 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时，圆柱内部速度为零，此时的速度分布应与固体圆柱绕流时的情形相同。 $Da = 0.0001$ 时圆柱内部的速度仍旧很小，流动十分微弱，说明此时圆柱内部的阻力仍然很大。当 $Da = 0.001$ 时，流体到达圆柱前缘的速度已经增大到了 0.2，为来流速度的 20%，接着流体的速度在圆柱内下降，到圆柱后缘时稍微大于零。此时圆柱内部的阻力已经有所减少。如果达西数继续增大，圆柱内的速度仍会下降，但圆柱前后缘的速度都将变大，速度的变化曲线将不断向上移动。从图 4-9 a) 可以看出，随着达西数的增大，圆柱下游的尾迹损失速度也越大。由图 4-9 c,d) 可知，达西数越大时，压力系数在圆柱内下降得越多，随后在尾迹中也会降到一个更低的值，但经过下游长距离的恢复，压力系数都到达了相同的终点。

图 4-10 展示了 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时圆柱表面上平均压力系数的分布。 $\theta = 0$ 对应于圆柱的前缘点，该点的压力系数 C_{ps} 与图 4-8 中 $x = -0.5$ 处是同一点，压力系数相同。沿着圆柱表面从上游到下游，随着 θ 的增大，压力系数逐渐降低，在 $\theta = \theta_0$ 处压力系数降为零，此时的压力等于来流处的压力， θ_0 的范围是 37° – 44° 。 $\theta > \theta_0$ 时，压力系数继续降低，直到达到最小值，此时的角度记为 θ_m ，范围是 82° – 89° 。之后又随着 θ 的增大而增大，最后随雷诺数的不同而具有不同的变化， $\theta = 180^\circ$ 对应圆柱的后缘点，该点的压力系数 C_{pb} 与图 4-8 中 $x = 0.5$ 处是同一点，压力系数相同。比较不同雷诺数下的分布曲线，可以看到， $\theta = 0$ 处各个曲线排列紧密，而 $\theta = 180^\circ$ 则稀疏许多，即后缘点压力系数对雷诺数的变化更加敏感。对于圆柱表面的任意位置，雷诺数越大，压力系数越小。随着雷诺数的增大， θ_m 沿着圆柱表面向上游移动；同时， θ_0 也向上游移动，二者移动的幅度相同，即 $\Delta\theta = \theta_m - \theta_0$ 为常数， $\Delta\theta = 44.87^\circ$ – 45.62° 。

$Da = 0.0001$ 和 $Da = 0.001$ 时圆柱表面上的平均压力系数分布与图 4-10 具有相同的趋势。其他不同之处由达西数的不同而引起。为了表明达西数的影响，图 4-11 将雷诺数固定为 100，画出了不同达西数下平均压力系数沿圆柱表面的分布曲

图 4-8 时间平均量沿尾迹中心线的分布 ($Da = 1 \times 10^{-5}$)

线。通过观察可知，随着达西数的增大，压力系数降为零的位置 θ_0 逐渐增大，压力系数的最小值点 θ_m 也随之增大。在 $\theta = 120^\circ$ 之前，不同达西数下压力系数的差别较大，之后则差别较小。在圆柱前后两端，不同达西数所对应的压力系数 C_{ps} 和 C_{pb} 都差别不大，即前后缘点压力系数对达西数的敏感程度相近，这与图 4-10 中雷诺数的情形不同。

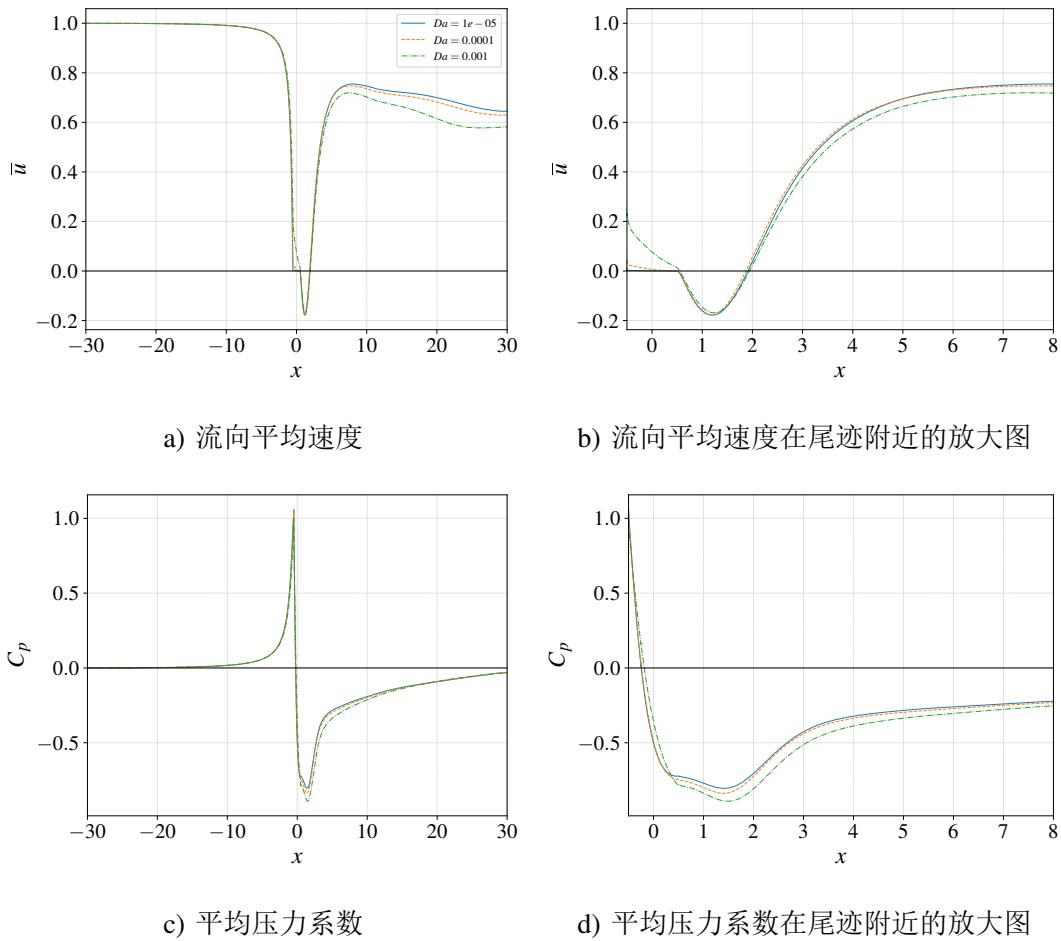


图 4-9 时间平均量沿尾迹中心线的分布 ($Re = 100$)

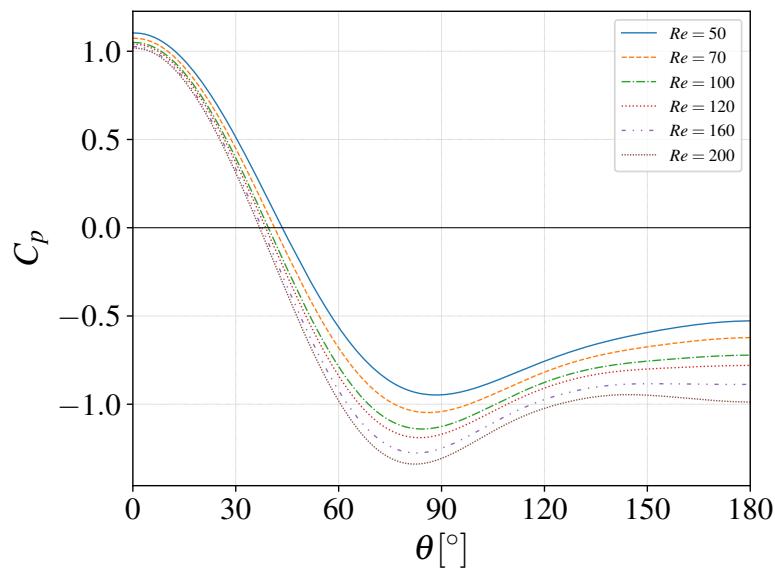


图 4-10 平均压力系数沿圆柱表面的分布 ($Da = 1 \times 10^{-5}$)

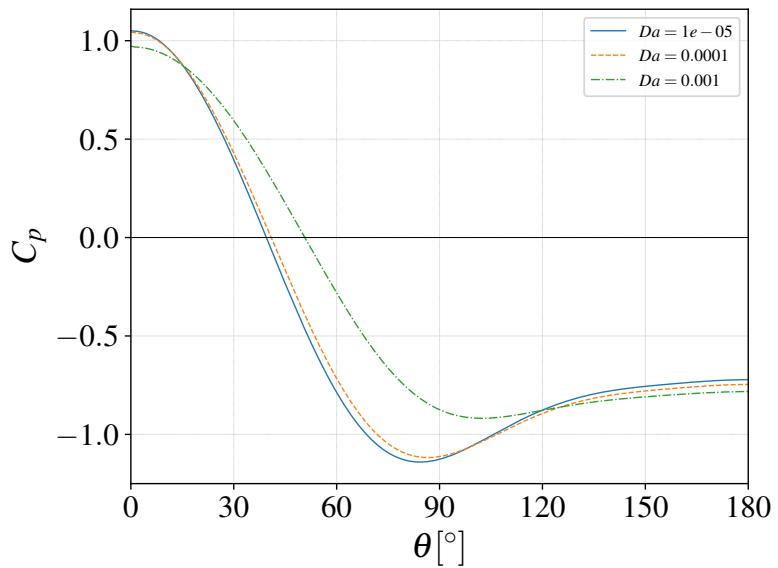


图 4-11 平均压力系数沿圆柱表面的分布 ($Re = 100$)

4.3 本章小结

本章在非稳态层流范围内选取了合适的例子进行计算，设置了合适的参数值，获得输出的数据文件。4.1 节对数据进行初步处理，得到流场的瞬时分布，瞬态行为主要由涡量等直线和流线体现。4.2 节对流场经过平均化处理，得到平均涡量的等值线和平均速度流线，分析了各个平均量沿尾迹中心线和圆柱表面变化情况，得到到达数和雷诺数对平均流场的影响，还可以借此得到尾迹中心线和圆柱表面的若干重要位置。

第 5 章 多孔圆柱受力分析

非稳态层流流动中的几个重要变量是 Strouhal 数、阻力和升力系数，Strouhal 数体现了流体的非稳态流动所具有的频率，通过阻力和升力系数则可以知晓圆柱受到的阻力和升力，在工程中的一些多孔绕流问题中具有一定的意义。

表 5-1 ~ 5-3 列出了达西数 10^{-5} ~ 10^{-3} 、雷诺数 45~200 范围内二维流动的计算结果，其他参数的设置同 3.1.2 中的表 3-1 保持一致。表中第一列数据表示非稳态流动的无量纲频率 St ，第二列到第四列表示圆柱所受的阻力系数，其中阻力系数等于压差阻力和摩擦阻力系数之和， $C_D = C_{Dp} + C_{Df}$ ，第五列到第七列表示圆柱所受的方均根升力系数，其中升力波动由压差和摩擦共同引起，但不等于二者之和。

表 5-1 不同雷诺数下的计算结果 ($Da = 1 \times 10^{-5}$)

| Re | St | C_D | C_{Dp} | C_{Df} | $C_{L'}$ | $C_{L'p}$ | $C_{L'f}$ |
|------|--------|--------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 45 | 0.1160 | 1.3671 | 0.9695 | 0.3977 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0001 |
| 50 | 0.1239 | 1.3495 | 0.9702 | 0.3793 | 0.0369 | 0.0319 | 0.0056 |
| 60 | 0.1351 | 1.3150 | 0.9675 | 0.3474 | 0.0779 | 0.0681 | 0.0111 |
| 70 | 0.1460 | 1.3041 | 0.9789 | 0.3252 | 0.1313 | 0.1163 | 0.0172 |
| 80 | 0.1531 | 1.2894 | 0.9840 | 0.3054 | 0.1313 | 0.1443 | 0.0198 |
| 90 | 0.1592 | 1.2772 | 0.9887 | 0.2885 | 0.1907 | 0.1714 | 0.0220 |
| 100 | 0.1650 | 1.2724 | 0.9976 | 0.2749 | 0.2232 | 0.2019 | 0.0244 |
| 120 | 0.1733 | 1.2646 | 1.0127 | 0.2520 | 0.2766 | 0.2525 | 0.0276 |
| 140 | 0.1805 | 1.2676 | 1.0328 | 0.2348 | 0.3318 | 0.3053 | 0.0305 |
| 160 | 0.1866 | 1.2739 | 1.0532 | 0.2207 | 0.3816 | 0.3531 | 0.0326 |
| 180 | 0.1916 | 1.2836 | 1.0745 | 0.2091 | 0.3318 | 0.3994 | 0.0345 |
| 200 | 0.1957 | 1.2938 | 1.0947 | 0.1991 | 0.4728 | 0.4416 | 0.0358 |

5.1 阻力

图 5-1 显示了非稳态层流中在一定的达西数和雷诺数下阻力和升力系数随时间的变化。对于每一个雷诺数和达西数，经过开始的一段时间之后，流动逐渐进入随时间作周期性变化的平稳状态。设定的计算时间普遍为 300 秒。当达西数较小时，进入平稳状态所需的时间也更短。有时无法在 300 秒内达到平稳状态。例如， $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时， $40 < Re < 60$ 在 300 秒内波动的振幅还在变化，未达到平稳状态； $Re = 60$ 时可以在 150 秒时稳定下来，此后所需的时间逐渐减少， $Re = 100$ 时

表 5-2 不同雷诺数下的计算结果 ($Da = 0.0001$)

| Re | St | C_D | C_{Dp} | C_{Df} | $C_{L'}$ | $C_{L'p}$ | $C_{L'f}$ |
|------|--------|--------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 45 | 0.1164 | 1.3849 | 0.9814 | 0.4035 | 0.0030 | 0.0026 | 0.0004 |
| 50 | 0.1241 | 1.3681 | 0.9846 | 0.3835 | 0.0367 | 0.0317 | 0.0056 |
| 60 | 0.1361 | 1.3393 | 0.9898 | 0.3495 | 0.0810 | 0.0710 | 0.0116 |
| 70 | 0.1468 | 1.3331 | 1.0082 | 0.3250 | 0.1334 | 0.1185 | 0.0174 |
| 80 | 0.1541 | 1.3236 | 1.0205 | 0.3031 | 0.1656 | 0.1484 | 0.0202 |
| 90 | 0.1603 | 1.3192 | 1.0345 | 0.2848 | 0.1988 | 0.1795 | 0.0228 |
| 100 | 0.1656 | 1.3198 | 1.0505 | 0.2693 | 0.2322 | 0.2110 | 0.0251 |
| 120 | 0.1742 | 1.3287 | 1.0849 | 0.2438 | 0.2934 | 0.2694 | 0.0285 |
| 140 | 0.1808 | 1.3457 | 1.1219 | 0.2238 | 0.3512 | 0.3250 | 0.0313 |
| 160 | 0.1866 | 1.3683 | 1.1608 | 0.2074 | 0.4056 | 0.3778 | 0.0333 |
| 180 | 0.1916 | 1.3932 | 1.1996 | 0.1936 | 0.4543 | 0.4254 | 0.0346 |
| 200 | 0.1957 | 1.4192 | 1.2375 | 0.1817 | 0.4987 | 0.4692 | 0.0355 |

表 5-3 不同雷诺数下的计算结果 ($Da = 0.001$)

| Re | St | C_D | C_{Dp} | C_{Df} | $C_{L'}$ | $C_{L'p}$ | $C_{L'f}$ |
|------|--------|--------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 45 | 0.1171 | 1.4137 | 1.0682 | 0.3455 | 0.0063 | 0.0055 | 0.0009 |
| 50 | 0.1253 | 1.4114 | 1.0872 | 0.3242 | 0.0346 | 0.0307 | 0.0049 |
| 60 | 0.1376 | 1.4089 | 1.1208 | 0.2881 | 0.0765 | 0.0689 | 0.0099 |
| 70 | 0.1477 | 1.4228 | 1.1618 | 0.2609 | 0.1126 | 0.1028 | 0.0132 |
| 80 | 0.1548 | 1.4285 | 1.1910 | 0.2374 | 0.1343 | 0.1235 | 0.0145 |
| 90 | 0.1603 | 1.4361 | 1.2181 | 0.2180 | 0.1531 | 0.1418 | 0.0153 |
| 100 | 0.1653 | 1.4433 | 1.2416 | 0.2017 | 0.1676 | 0.1562 | 0.0156 |
| 120 | 0.1724 | 1.4522 | 1.2768 | 0.1754 | 0.1847 | 0.1736 | 0.0152 |
| 140 | 0.1783 | 1.4544 | 1.2992 | 0.1552 | 0.1922 | 0.1818 | 0.0142 |
| 160 | 0.1821 | 1.4502 | 1.3109 | 0.1392 | 0.1921 | 0.1827 | 0.0128 |
| 180 | 0.1855 | 1.4415 | 1.3153 | 0.1262 | 0.1884 | 0.1798 | 0.0115 |
| 200 | 0.1887 | 1.4299 | 1.3144 | 0.1155 | 0.1821 | 0.1744 | 0.0102 |

所需时间为 70 秒。 $Da = 0.0001$ 时，从 $Re = 50$ 开始可以在 300 秒内达到稳定。总体趋势是达到平稳时所需的时间按达西数的增大而减小。

非稳态情形下阻力和升力都随时间做周期性变化，所以此处取一个周期内的平均阻力和升力。平均阻力系数随雷诺数的变化如图 5-2 所示。当 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时，阻力系数先随雷诺数的增大而减小，在大约 $Re = 120$ 时达到最小值，之后 $Re = 120\text{--}200$ 的范围内，阻力系数随着雷诺数的增加而缓慢地增大，比之前减小时的速率小了很多。当 $Da = 0.0001$ 时，从 $Re = 45$ 开始，阻力系数下降得较快，与 $Da = 1 \times 10^{-4}$ 的下降速率相当，当 $Re = 90$ 时，阻力系数达到了极小值，此时阻力系数的值比 $Re = 45$ 降低了 4.74%，随后在 $Re = 90\text{--}200$ 的范围内，阻力系数

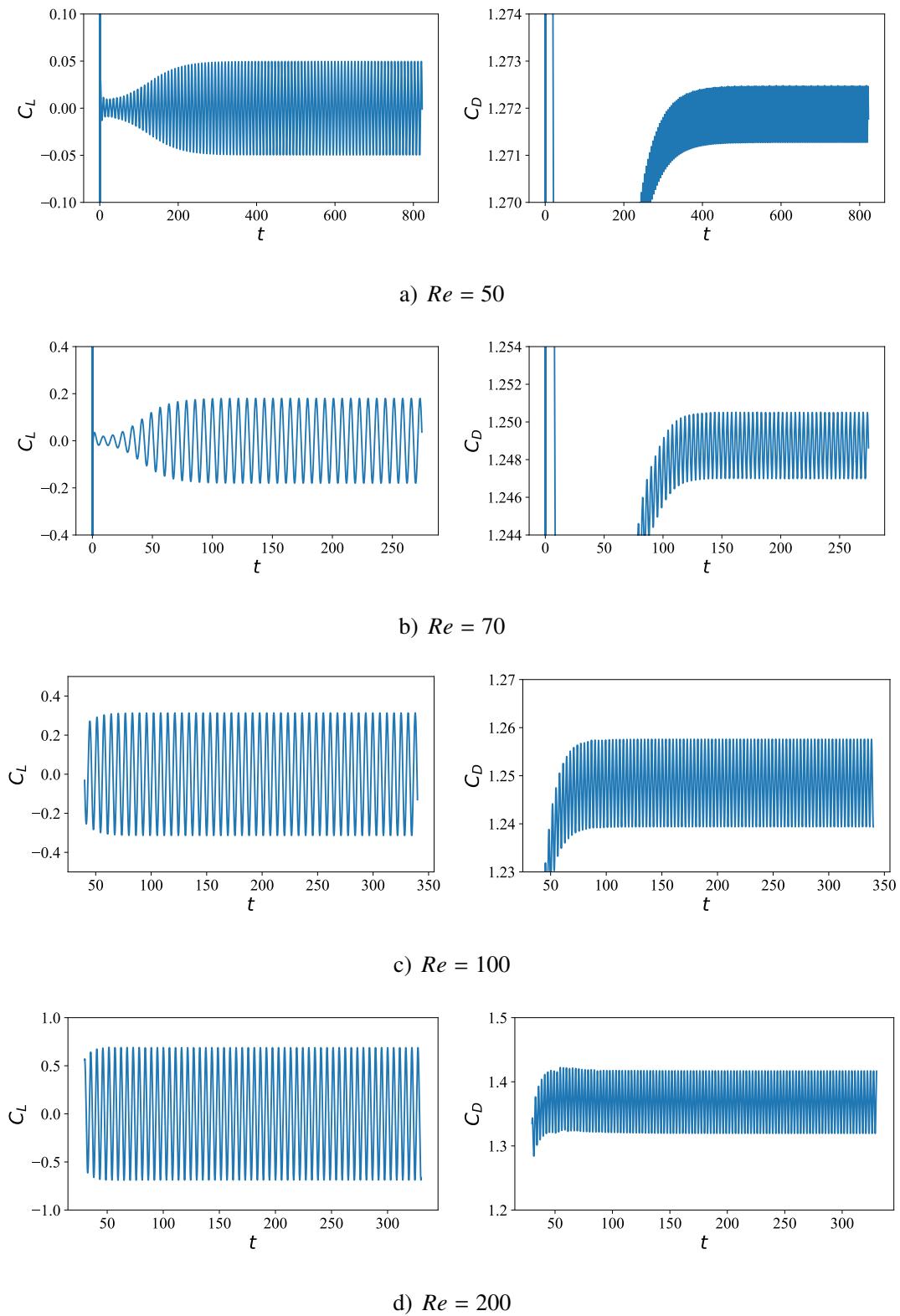


图 5-1 $Da = 0.0001$ 时升力系数和阻力系数随时间的变化

不断增大，增速比 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 的情形快许多，并且最终超过了 $Re = 45$ 时的值。当 $Da = 0.001$ 时，阻力系数的变化有所不同。在 $Re = 60$ 之前，阻力系数随着雷诺数的增大而减小，在 $Re = 60$ 之后，阻力系数突然开始增大，并于 $Re = 140$ 时达到了最大值，相比 $Re = 60$ 时增大了 3.23%，随后才逐渐下降。所以，在该达西数下，阻力再 $Re = 60\text{--}200$ 区间内的变化趋势和其他情形完全相反，可能是多孔介质渗流增大所导致的。

观察同一雷诺数下不同达西数对应的阻力系数，可以得知多孔介质的存在对流体流动的影响。在 $Re = 45\text{--}200$ 范围内，固定雷诺数，达西数越大则阻力系数越大。 $Re = 45$ 时， $Da = 1 \times 10^{-5}, 0.0001, 0.001$ 的阻力系数之比为 $1 : 1.013 : 1.034$ ，此时雷诺数很小，多孔介质的影响并不明显。随着雷诺数的增大，这一差距也逐渐拉大， $Re = 120$ 时，三者之比达到了 $1 : 1.05 : 1.15$ ， $Re = 200$ 时的比例为 $1 : 1.10 : 1.11$ ，由于 $Da = 0.0001$ 和 0.001 变化趋势相反，所以二者逐渐接近。L.-C. Hsu^[57] 利用其他模拟方法研究了二维圆柱绕流，得到了各个参数的变化情况。

当流体绕过钝体流动时，流体的粘性作用形成了摩擦阻力，物体前后的压强差形成了压差阻力。摩擦阻力为作用在物体表面的切向力在来流方向的分量之和，而压差阻力是作用在物体表面的法向力在来流方向的分量之和，二者共同形成了物体所受的阻力。用符号表示如下：

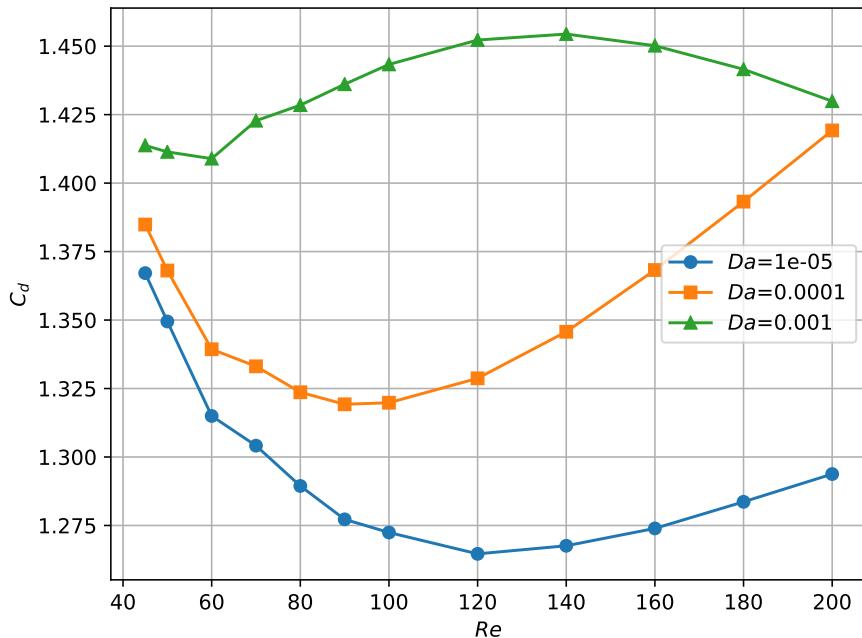


图 5-2 平均阻力系数 C_D 随 Re 的变化

$$C_D = C_{Dp} + C_{Df} \quad (5-1)$$

图 5-3 反映了不同达西数下压差阻力和摩擦阻力随雷诺数的变化。当流体在物体背面形成尾迹时，流体的能量不断耗散在尾迹的漩涡中，使得物体背面的压强较低，物体前后产生压强差，形成了压差阻力。尾迹区域越大则耗散越强，压差阻力也就越大。对于流线型物体，流体几乎顺着物体的表面流动，在物体末端才出现分离现象，所以它的阻力主要来源于摩擦阻力。钝体受到的压差阻力则相对较大，流体分离点的位置越靠前，尾迹区越大，压差阻力也越大。对于圆柱绕流，从图中可以看出，在 $Re = 45\text{--}200$ 区间内，压差阻力显著大于摩擦阻力，说明阻力主要由流动的尾迹造成。随着雷诺数的增大， $Da = 1 \times 10^{-5}$ 下压差阻力占总阻力的比例从 $Re = 45$ 时的 71% 增加到了 $Re = 200$ 时的 85%； $Da = 0.0001$ 下从 $Re = 45$ 时的 71% 增加到了 $Re = 200$ 时的 87%； $Da = 0.001$ 下更是从 $Re = 45$ 时的 76% 增加到了 $Re = 200$ 时的 92%。随着雷诺数的增大，分离点向上游移动（见图），尾迹区扩大，压差阻力增大，与图 5-3 中 C_{Dp} 的变化一致。摩擦阻力则随着雷诺数的增大而减小。

对于不同的达西数，多孔圆柱受到的阻力不尽相同。同一雷诺数下，达西数越大，则压差阻力也越大。同一雷诺数下，达西数越大，摩擦阻力越小。

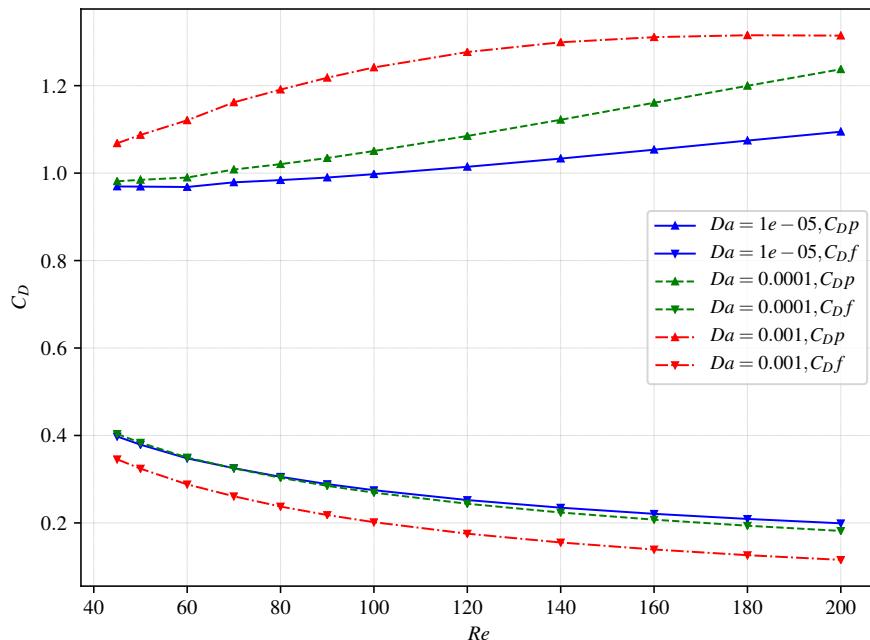


图 5-3 平均压差阻力系数 C_{Dp} 和平均摩擦阻力系数 C_{Df} 随 Re 的变化

5.2 升力

方均根升力系数 $C_{L'}$ 随达西数和雷诺数的变化如图 5-4 所示。 $C_{L'}$ 反映了涡脱落的剧烈程度, 由图可知, $C_{L'}$ 随雷诺数的增加而增加, 雷诺数增大时涡脱落也变得更加剧烈。Lu Lin 等人^[58] 发现通过流量控制减小圆柱绕流时的这一升力波动。^[51] 得出, 当 $Re = 50, 60$ 时 $C_{L'}$ 的大小正比于 \sqrt{Re} 。当雷诺数较小时 (50–60), $C_{L'}$ 与雷诺数的关系已为 $0.17\sqrt{\epsilon}$, 其中 $\epsilon = Re/Re_c - 1$, Re_c 取值 47.4^[59,60]。在整个雷诺数范围内, 升力系数的波动主要由壁面上的压力引起, 壁面摩擦力导致的波动只占一小部分。根据计算结果, $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时, 比值 $C_{L'p}/C_{L'}$ 从 $Re = 45$ 时的 80% 增加到了 $Re = 200$ 时的 93%; $Da = 0.0001$ 时从 $Re = 45$ 的 87% 增加到了 $Re = 200$ 时的 94%; $Da = 0.001$ 时从 $Re = 45$ 的 87% 增加到了 $Re = 200$ 时的 96%。与之相反, 比值 $C_{L'f}/C_{L'}$ 随着雷诺数下降, 并和雷诺数的平方根成反比。

Park 等人^[48] 判断, 在由压强和摩擦引起的升力波动之间存在一个相位的转变。随时间变化的三个升力系数具有如下关系:

$$C_L = C_{Lp} + C_{Lf} \quad (5-2)$$

$C_{L'}$ 为 C_L 的方均根:

$$C_{L'} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} C_L^2 dt} \approx \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N C_{L,n}^2} \quad (5-3)$$

由式 (5-2) 和 (5-3) 可得

$$C_{L'}^2 = C_{L'p}^2 + C_{L'f}^2 + 2 \cdot \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} C_{Lp} C_{Lf} dt \quad (5-4)$$

如果升力的波动可以看作正弦曲线, 并且压强和摩擦之间的相位差是一个常数 ϕ 的话, 式 (5-4) 可进一步写为三个方均根升力系数之间的关系

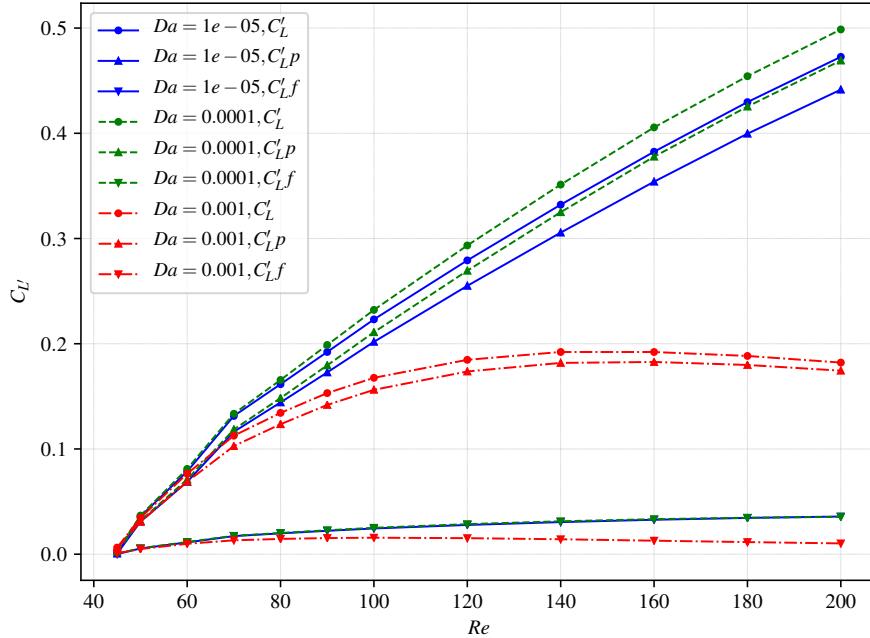
$$C_{L'}^2 = C_{L'p}^2 + C_{L'f}^2 + 2C_{L'p} C_{L'f} \cos \phi \quad (5-5)$$

从数据可以知晓, $Re = 45–200$ 范围内计算得出的 ϕ 的确几乎是常数, 大约为 30° 。

5.3 Strouhal 数

对于非稳态流动, 流动波动的频率是一个重要参数, 在工程中具有重要价值。作为表述流体波动的无量纲频率, Strouhal 数是流动振荡不稳定性的度量:

$$St = \frac{Df}{U} \quad (5-6)$$

图 5-4 方均根升力系数 $C'_{L'}$ 、 $C'_{L'p}$ 和 C'_{Lf} 随 Re 的变化

式中 St ——Strouhal 数;

D ——圆柱的直径;

f ——波动的频率;

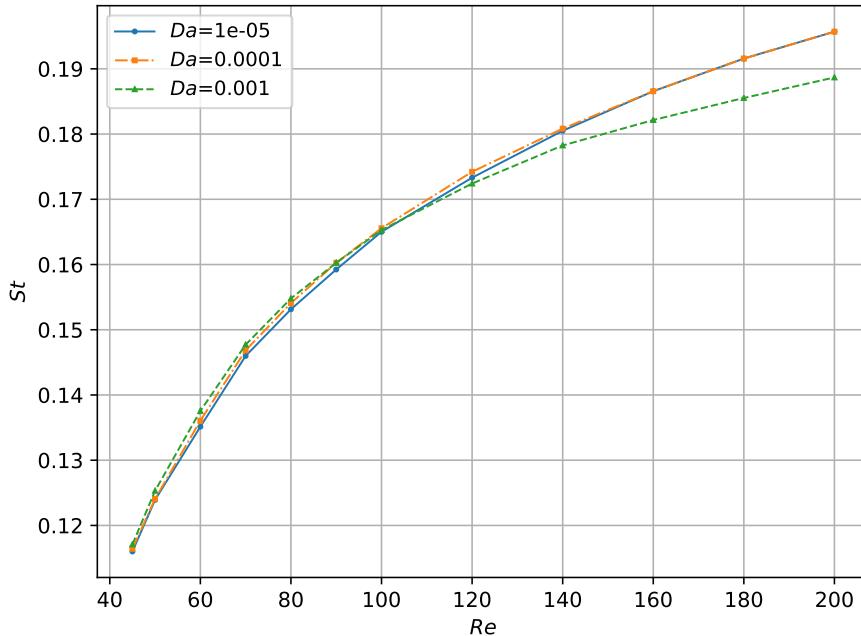
U ——远方的来流速度;

T ——波动的周期。

由于计算时设定 $D = 1 \text{ m}$, $U = 1 \text{ m/s}$, 于是 $St = f = 1/T$, 频率与周期互为倒数。周期可以根据某一物理量(例如 Point 3 的水平速度)随时间的变化曲线而得到。继而根据方程(5-6)可以得到 Strouhal 数。

图 5-5 显示了 Strouhal 数随着雷诺数和达西数的变化。从图中可以看出, Da 固定时, St 随 Re 的增大而增大, 且增长得越来越缓慢。在指定圆柱大小和流体种类的前提下, 雷诺数由来流速度决定, 来流速度越大, 流体在圆柱背面形成的漩涡产生及脱落的频率也越大, 符合直观的猜想。固定 Re 时, Da 越小, 则 St 越接近固体圆柱绕流的情形, 随着达西数趋于零, 得到的一系列曲线也将趋于某一条极限曲线, 即为固体情形下的曲线。当 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时, St 曲线已经和固体圆柱绕流的变化曲线相吻合, 3.2 节中的图 3-2 已作出了验证。

对随时间变化的物理量做傅里叶分析, 可以得到离散频率的频谱。已知某个样本点的速度、圆柱的阻力和升力系数随时间变化的数据, 对这些物理量做快速傅

图 5-5 不同达西数下 Strouhal 数随 Re 的变化

里叶变换，可以得到这些量在频域中的分布。频域的横坐标是频率，也是 Strouhal 数，某些频率上有峰值出现，表示此处能量密度很高，能量集中在这个频率附近。傅里叶变换之后可能由多个频率分量，类似谐波，形成若干离散的峰值，这些峰值按一定的间距分布，大小不一。

以 $Da = 0.0001$ 、 $Re = 100$ 为例，水平速度、垂直速度、升力系数随时间的变化以及相应的 Fourier 变换如图 5-9 所示，图中画出了稳定时的 10 个周期。其他参数下的图没有列出。

当 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时，第三个样本点处的水平速度 U 随时间周期性波动，从图中所示的十个周期可以看到，每个周期内速度都具有一大一小两个小的周期，代表了速度的两个主要频率成分，对应于右图中第二个峰值和第三个峰值 ($f = 0$ 处的第一个峰值反映的是 U 的时间平均值，即左图中橙色的水平线)。右图第三个峰值之后还有一系列的更小的峰值，由于值太小而无法表现出来，说明速度不仅具有左图中可见的两个频率，还具有无数的频率分量，只是所占比例很小，可以忽略。右图中第二个频率即为该达西数和雷诺数下流体运动的 Strouhal 数，与前文结果一致。从 $Re = 50$ 到 $Re = 200$ ，随着雷诺数的增加， $f = 0$ 处的峰值增大，说明这一点的水平速度增大；主频率向右移动，即 Strouhal 数逐渐增大，与前文所述一致。V. Babua 和 Arunn Narasimhan^[61] 对二维多孔方柱绕流的数值结果进行了能谱

分析，可以看出当前研究与之具有相似的结果和变化趋势。

图 5-6、5-7 和 5-8 分别显示了不同达西数和雷诺数下升力系数、水平速度、垂直速度随时间的变化经 Fourier 变换后所得的频谱图。主频率对应的单个的尖峰表明尾迹中出现了剧烈的涡脱落。由图 5-6 可知，当 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时，多孔介质接近固体，频谱图中会有一个占优势地位的明显的峰值，和固体的情形相匹配。随着达西数的增加， $Da = 0.0001$ 时，频谱图中主频所对应的峰值振幅变大了，表明尾迹中涡脱落的强度增强，当 $Da = 0.001$ 时，峰值减小了许多，表明尾迹中涡脱落的强度减弱了许多。达西数继续提高时，主频的峰值将越来越不明显，直到在整个频率范围内都没有明显的突出。固定达西数，观察不同雷诺数下的频谱图，随着雷诺数的增加，峰值振幅也随之增大，即更大的雷诺数对应着更强的涡脱落程度。图 5-7 和图 5-8 具有相同的趋势。图 5-7 在主频率周围还出现了其他的峰值，因为水平速度的时变曲线不是简单的周期性，如图 5-9 a) 所示。图 5-9 以 $Da = 0.0001$ 、 $Re = 100$ 为例，展示了物理量随时间的变化曲线和相应的频谱图，右侧的频谱图是对左侧 10 个周期内的曲线进行变换得到的，峰值情形与前面的图相一致。

5.4 本章小结

本章分析了 Strouhal 数、阻力系数、升力系数等几个重要的参数。Strouhal 数表征波动的频率，通过某个物理量随时间周期性变化的曲线得到周期，进而得到频率。频率随着雷诺数的增加而增加，但增速逐渐减小。阻力和升力都随时间作周期性变化，因而分别取一个周期内的平均值，阻力直接取平均值，升力取方均根值。阻力系数随雷诺数先增后减，达西数较大时则相反。压差阻力在总阻力中的占比大于摩擦阻力，且二者随雷诺数变化趋势相反。雷诺数增大时压差占比也增大，因为尾迹区在不断扩大。方均根升力系数随雷诺数的增加而增加，表明涡脱落越来越剧烈。计算表明，在升力系数的组成中，由压力引起的波动同样占主要地位，摩擦则居于次位。另外，还可以获得压力和摩擦引起的升力波动之间的相位差距。

5.3 节通过对速度、升力系数随时间变化的能谱分析，再次得到了不同参数流动下的 Strouhal 数。涡脱落的频率为频谱图中峰值对应的频率，它的振幅体现了涡脱落的剧烈程度。随着达西数和雷诺数的增加，这个峰值逐渐减小，即涡脱落的强度逐渐减弱。

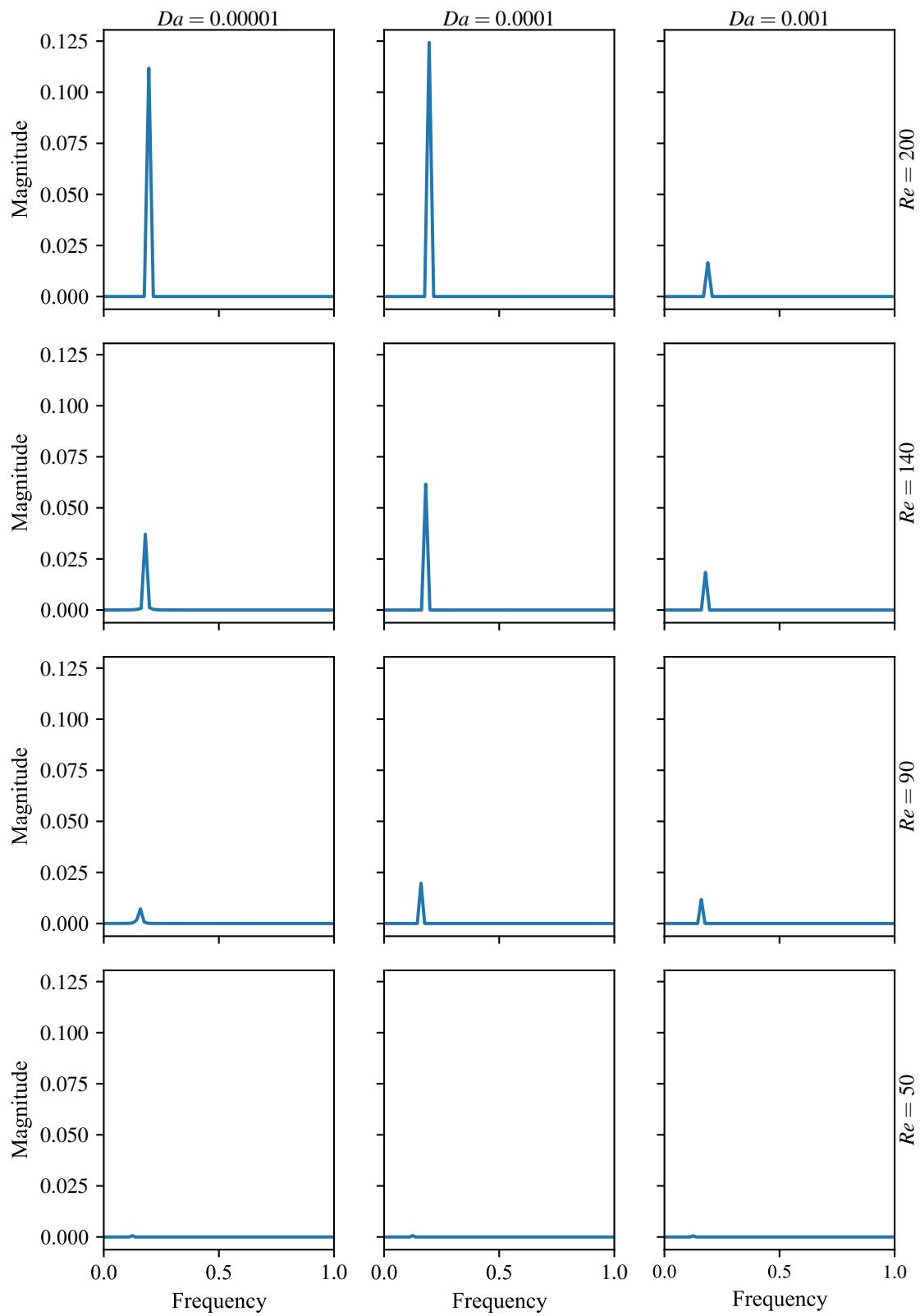
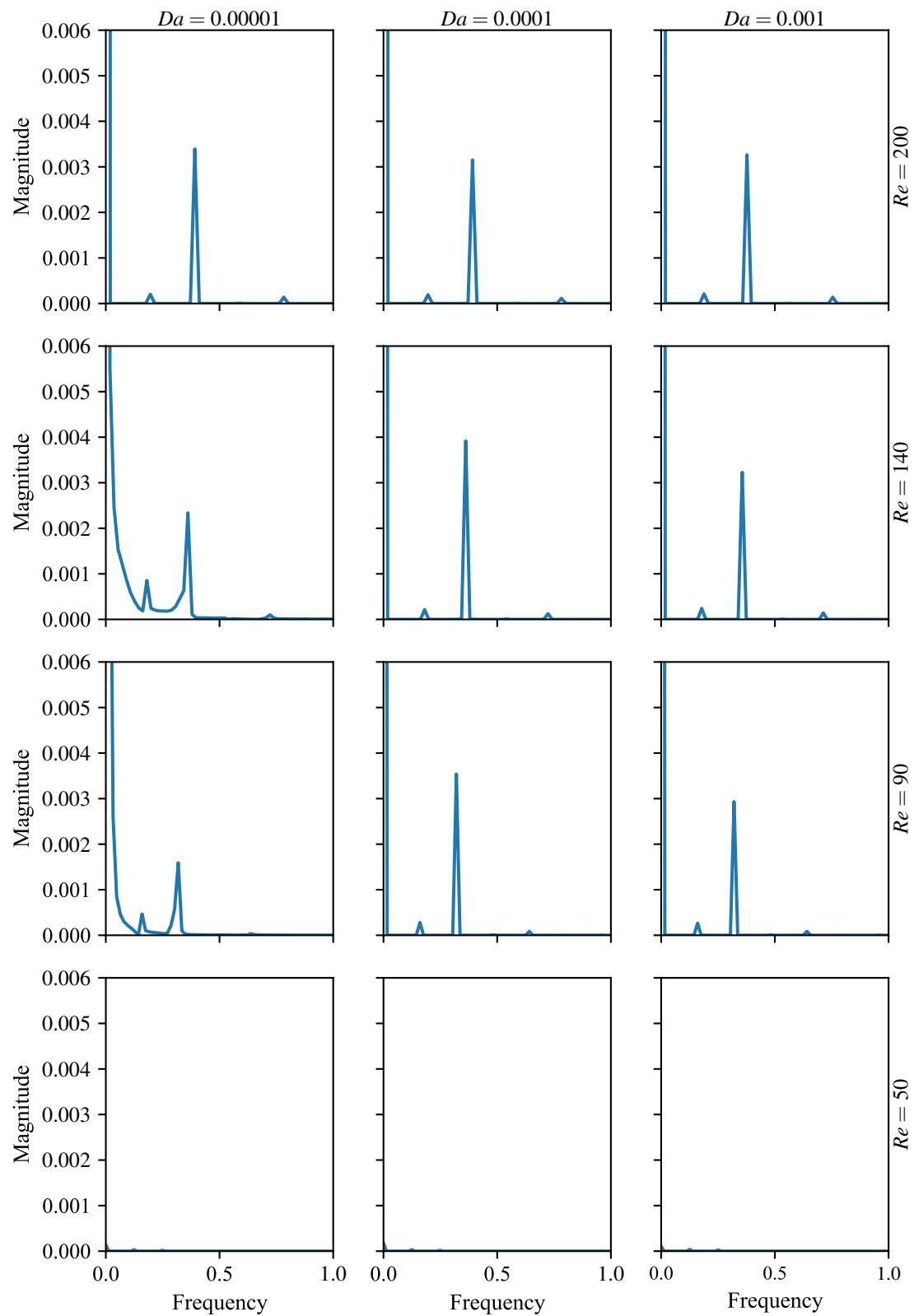


图 5-6 不同达西数和雷诺数下升力系数 C_L 的频谱图

图 5-7 不同达西数和雷诺数下(3,0)点水平速度 U 的频谱图

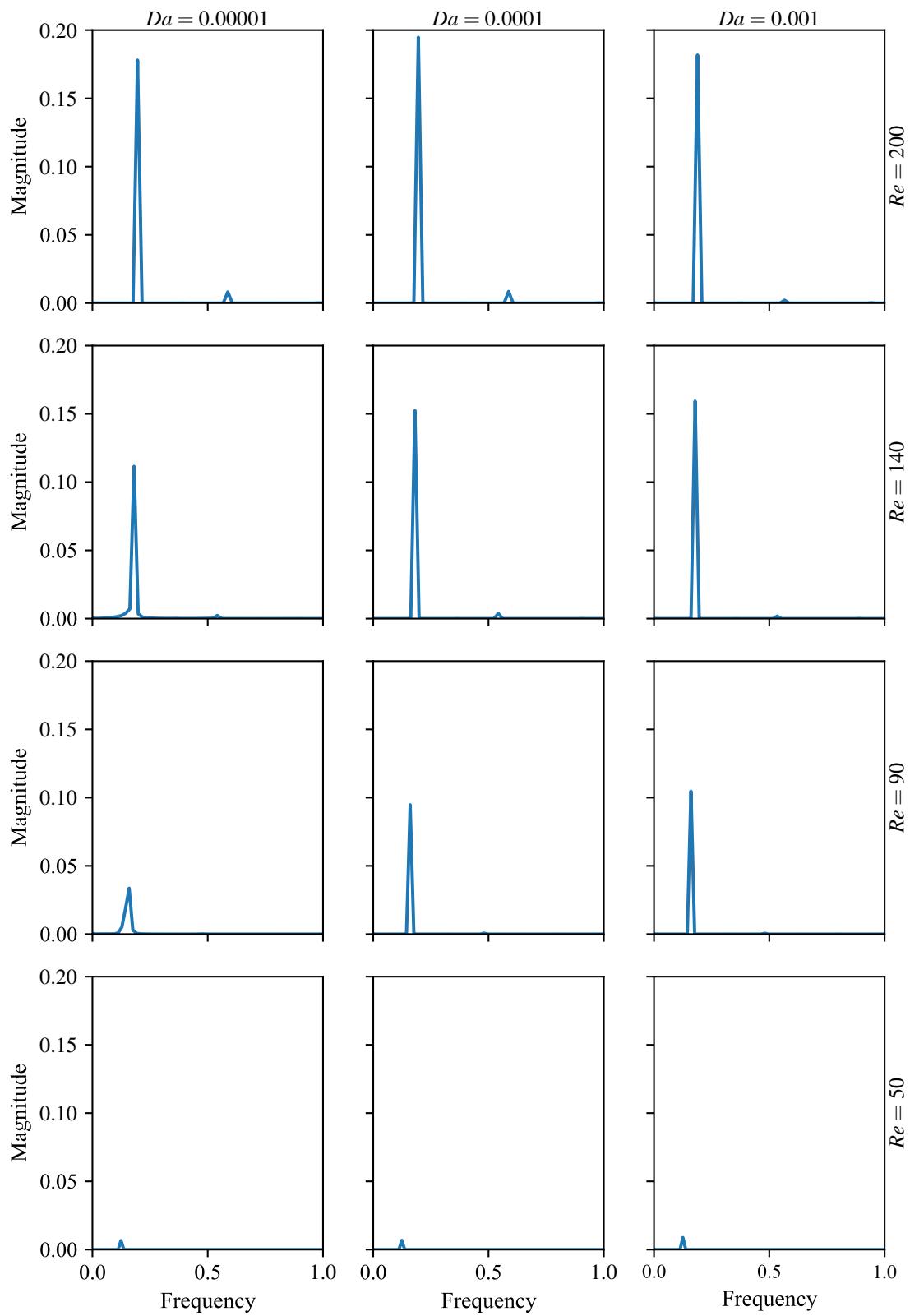


图 5-8 不同达西数和雷诺数下 (3,0) 点垂直速度 V 的频谱图

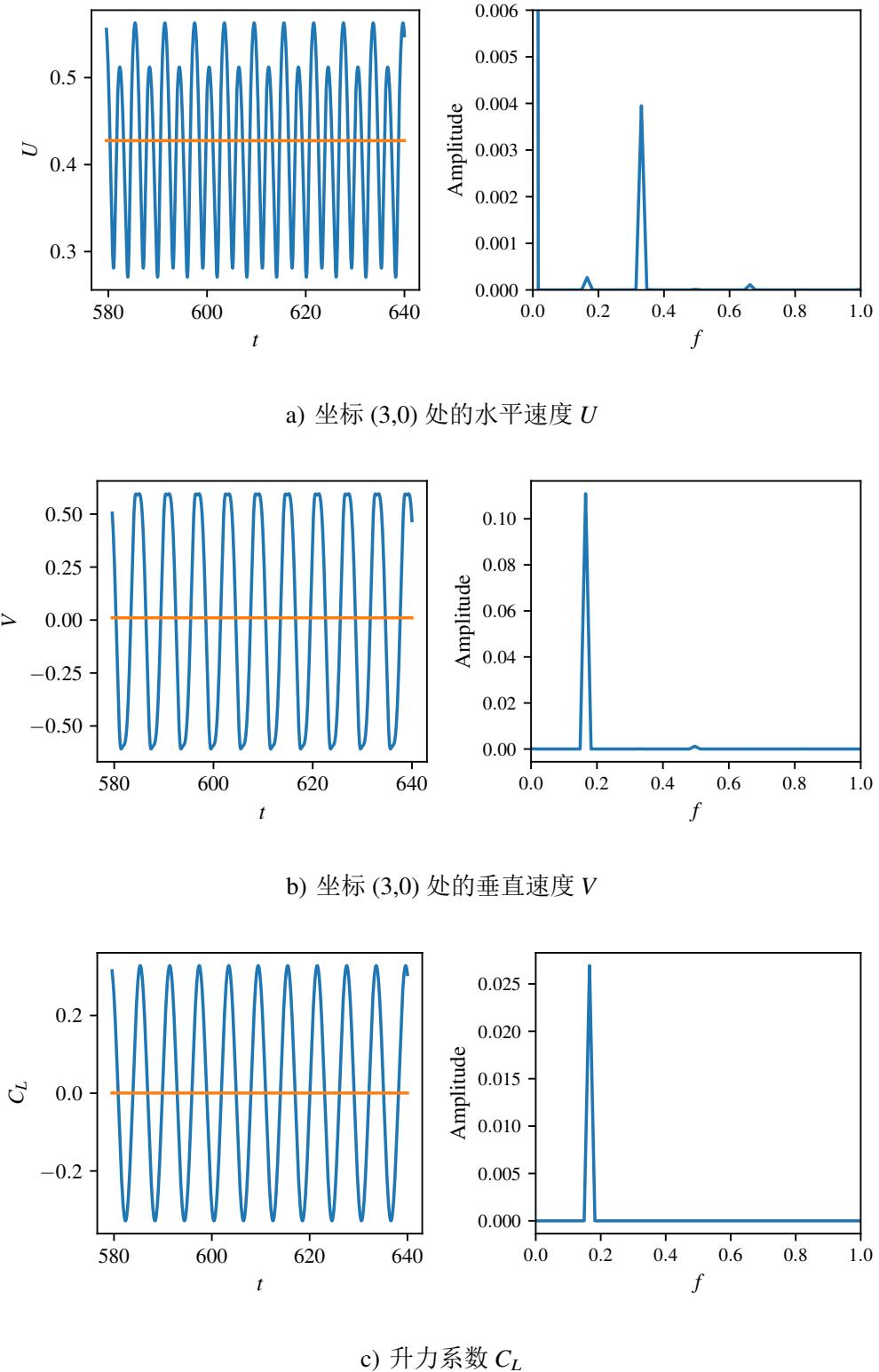


图 5-9 同一雷诺数和达西数下不同物理量的时间序列图及能谱图 ($Da = 0.0001, Re = 100$)

第 6 章 从稳态流动到非稳态流动的转变

在稳定流动状态 (L2)，流动在圆柱背面分离，形成了上下对称的一对漩涡，随着雷诺数的增加，圆柱背面尾迹的长度随之增加，分离点的角度则逐渐减小（从更靠前的位置开始分离）。这些量的变化情况可以参考文献 [51,54]。Waqas Sarwar Abbasi^[62] 研究了多孔方柱绕流时流动从稳态向非稳态的转变，并分析了雷诺数的影响。而对于多孔介质圆柱流动问题，由前面的结果可知，非稳态流动开始时所对应雷诺数的值都在 40 以上，本章主要确定非稳态流动开始发生时所对应的临界雷诺数。

6.1 判断方法

固定达西数，当雷诺数较小时，流动处于稳态；随着雷诺数的增加，流动逐渐转变为非稳态，尾迹出现振荡，然后上下两个漩涡从圆柱表面交替脱落，各变量随时间做周期性变化。对于每个达西数，都存在一个临界雷诺数，该雷诺数标志着流动状态的转变。为了知晓某一达西数所对应的临界雷诺数，可以有不同的判断方法。

首先，可以通过观察某一物理量随时间的变化来判断流动状态。从已有数据计算出不同雷诺数下某一物理量随时间的变化图，随着时间的增加，如果该物理量波动的振幅逐渐减小，并最终减小到一个可以接受的极小值（例如 1×10^{-6} ），那么就可以认为此雷诺数下的流动可以达到稳定状态；反之，如果该物理量波动的振幅减小到某一值时保持不变，而这个保持不变的值并不足够小，那么就认为此雷诺数下流动尚处于稳定状态。对于每一个达西数，都可以按照此方法寻找到临界雷诺数的范围。这样对于每个参数都要仔细寻找临界值，显得繁琐，但也更加直观。

另外，通过直接分析误差随时间的变化也可以判断流动状态。图 6-1 显示了 $Da = 0.0001$ 时不同雷诺数下在计算过程中误差随时间步数的变化（包括 Resor0、Resor1、Resor2）。从图中可以看出，当 $Re = 40$ 时，随着计算的进行，误差越来越小，并最终达到一个接近零的极小值，于是可以认为流动已经处于稳定状态；当 $Re = 45$ 时，随着计算的进行，误差很早便达到了一个稳定波动的状态，但不会接近零，所以此时流动处于非稳态。由此可知临界雷诺数大于 40 而小于 45，与通过

升力得到的结果一致。

当流动处于稳态时，误差基本不再变化，当流动处于非稳态时，误差随时间呈周期性变化，计算出误差在一个周期内的平均值，作为该达西数和雷诺数下的平均误差，画出不同达西数下平均误差随雷诺数的变化，如图 6-2 所示。从图中可以看出，不同达西数下误差的变化趋势基本一致。Resor2 都接近零，Resor0、Resor1 都随着雷诺数的增大而增大，伴随着流动由稳态转变为非稳态，可以设定一个精度，当误差大于改值时流动状态发生改变，由此可以得到临界雷诺数。

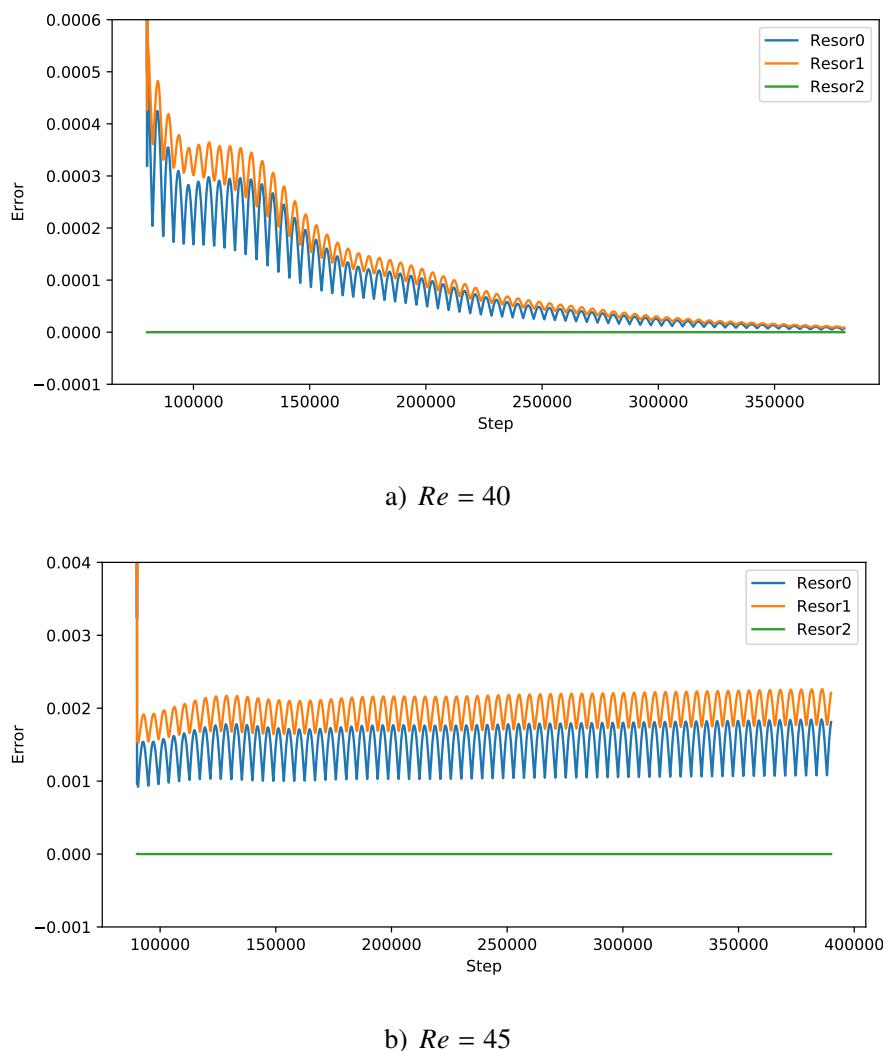


图 6-1 $Da = 0.0001$ 时不同雷诺数下误差随时间的变化

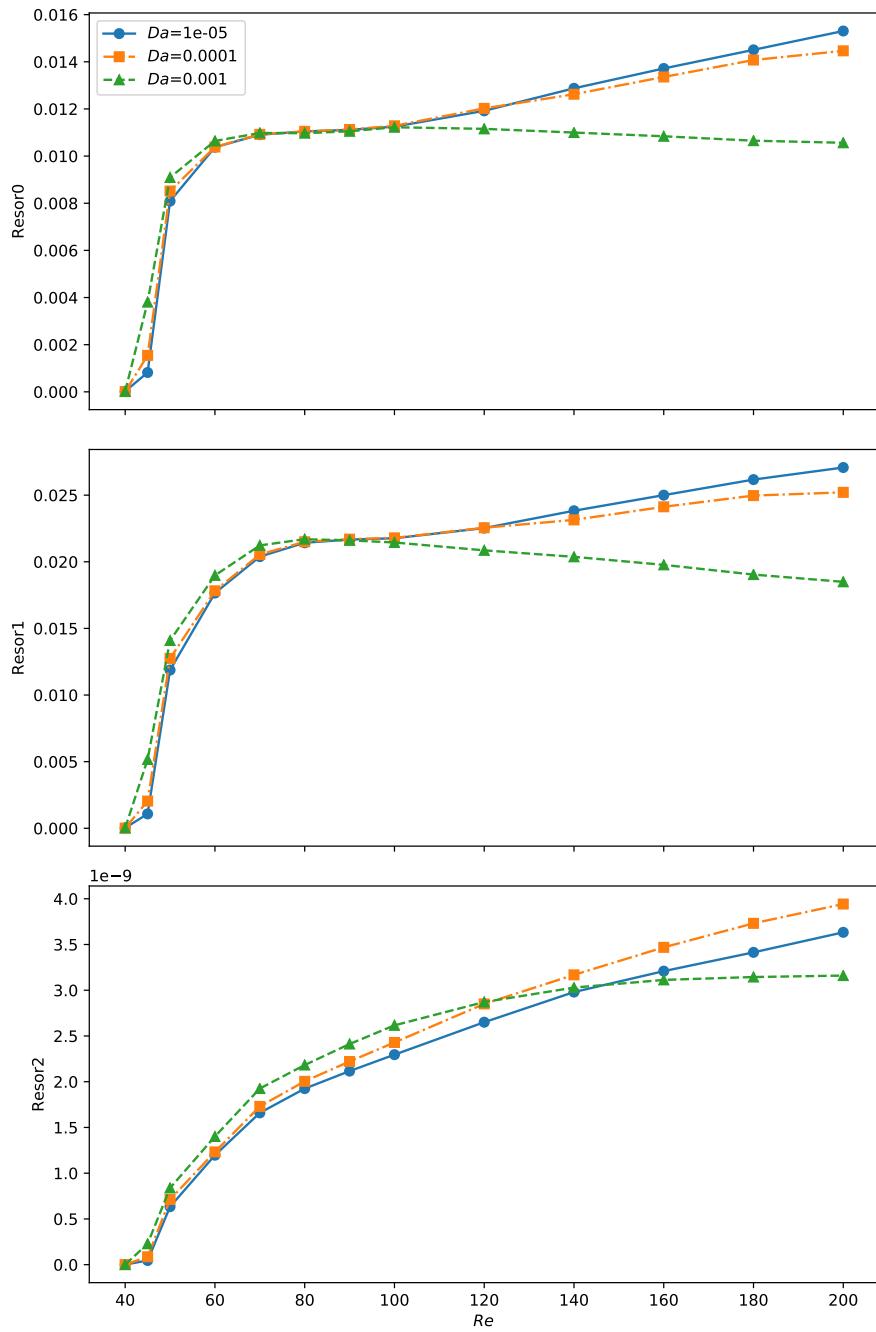


图 6-2 平均误差随 Re 和 Da 的变化

6.2 达西数的影响

本节通过选择升力系数随时间的变化图 (C_L-t) 来判断流动状态。图 6-3 ~ 6-8 显示了不同达西数下升力系数随时间的变化。以 $Da = 10^{-4}$ 为例，当 $Re = 40$ 时，升力系数随着时间逐渐减小，并最终减小到一个极小的值 ($< 10^{-6}$)，因此 $Re = 40$ 时流动尚处于稳态。当 $Re = 45$ 时，升力系数不会随时间减小，而是以稳定地波动，因此 $Re = 45$ 时流动已经处于非稳态。由此可知， $Da = 0.0001$ 所对应的临界雷诺数处于 40 和 45 之间，非常接近 45。而 $Da = 0.1$ 时整个雷诺数范围都处于稳态。

同理，对 $Da = 1 \times 10^{-5}, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01$ ，也可以用同样的方式得到相应的临界雷诺数。最终得到的临界雷诺数见表 6-1。从表中可以看到，达西数越大，临界雷诺数也越大，当达西数小于 10^{-3} 时，临界雷诺数小于 45，当达西数达到 10^{-2} 时，临界雷诺数已在 150 附近，当达西数等于 0.1 时，雷诺数 200 以下已经完全处于稳态，由于雷诺数 200 以上具有一定的三维效应，所以不再计算。达西数为无量纲的渗透率，不同达西数所对应的临界雷诺数具有不同的数值，这反映了达西数对流动的影响。当达西数很小时，多孔区几乎为固态，只有极少量的流体可以穿过圆柱，此时，临界雷诺数等于固体圆柱绕流时的值。随着达西数的增大，多孔介质的影响体现出来，流体可以从圆柱内部穿过，一定程度上减弱了原来的不稳定。达西数很大时，多孔介质接近消失，相当于整个区域都是纯流体的流动，没有了圆柱内部的渗流以及多孔介质的阻碍，流动更接近稳态，需要更大的雷诺数才能由稳态转变为非稳态。

6.3 本章小结

本章通过计算结果判断流动从稳态 (L2) 转变为非稳态 (L3) 的临界雷诺数，

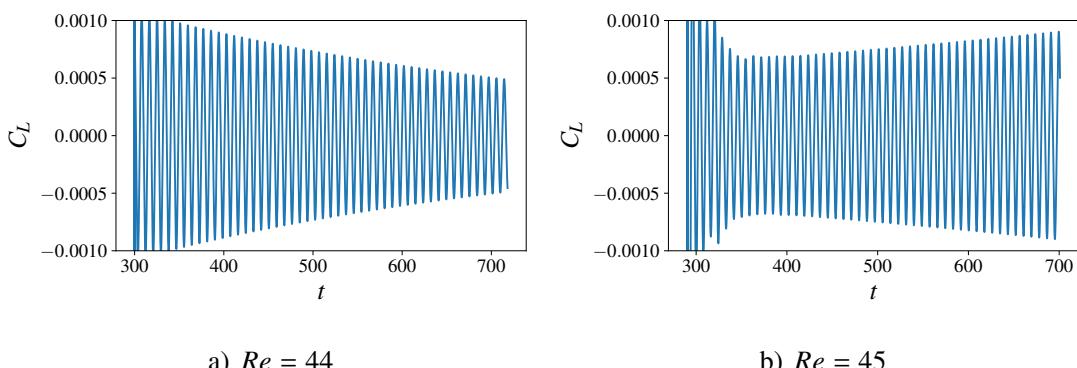


图 6-3 $Da = 1 \times 10^{-5}$ 时不同雷诺数下升力系数随时间的变化

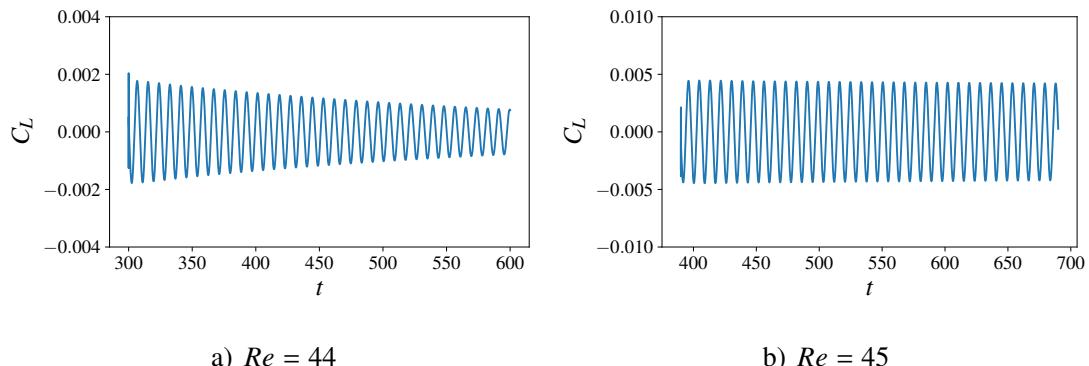


图 6-4 $Da = 0.0001$ 时不同雷诺数下升力系数随时间的变化

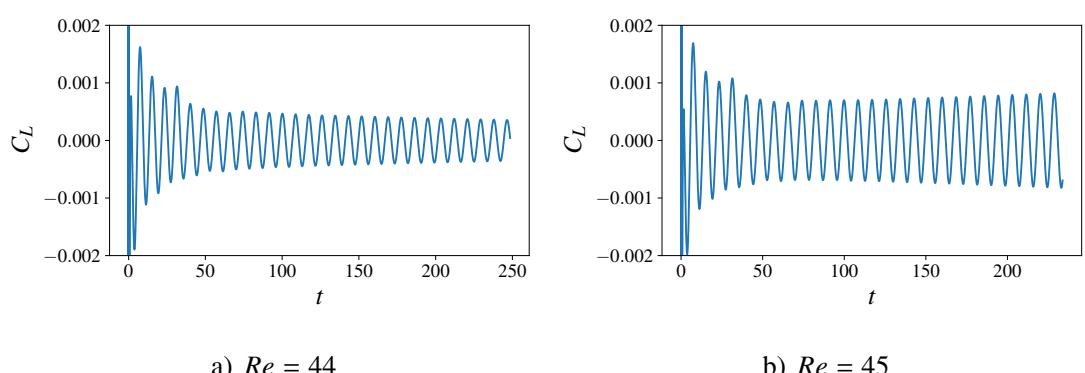


图 6-5 $Da = 0.0005$ 时不同雷诺数下升力系数随时间的变化

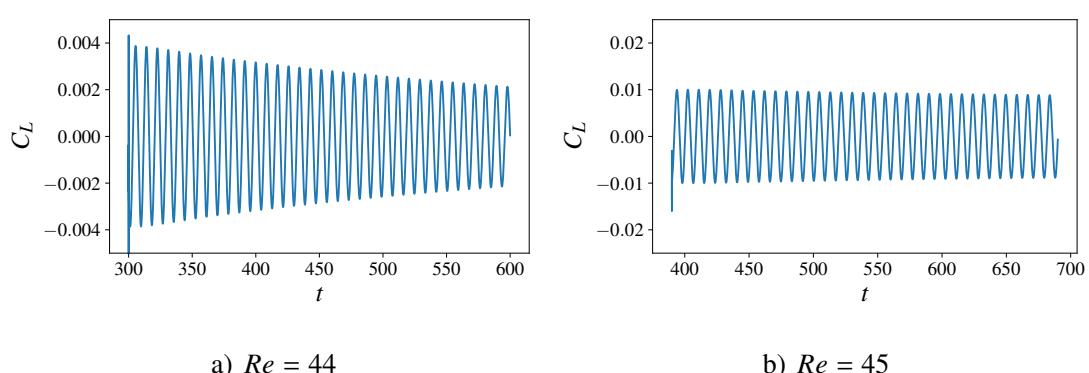
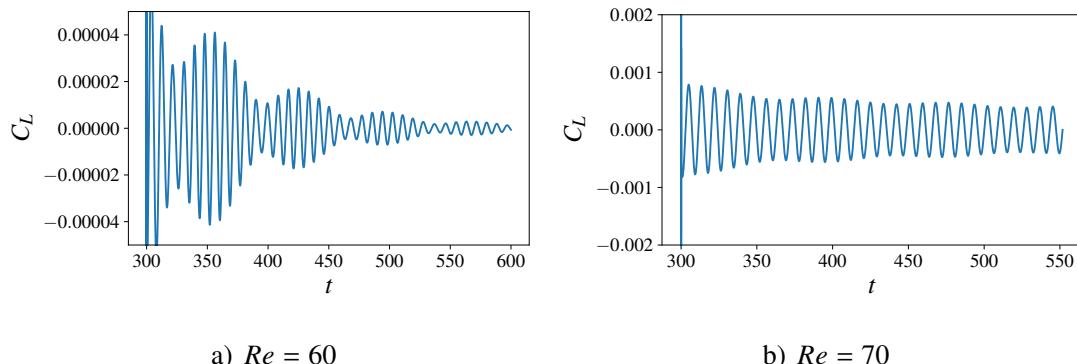
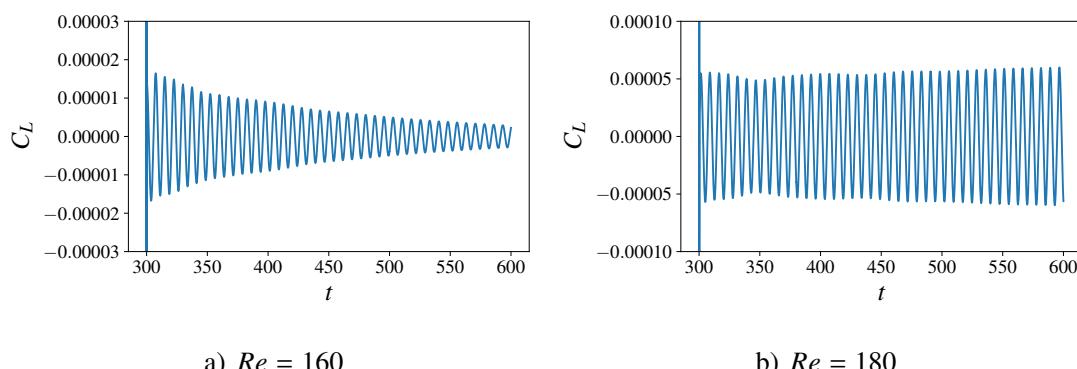


图 6-6 $Da = 0.001$ 时不同雷诺数下升力系数随时间的变化

图 6-7 $Da = 0.005$ 时不同雷诺数下升力系数随时间的变化图 6-8 $Da = 0.01$ 时不同雷诺数下升力系数随时间的变化

确定不同达西数下非稳态流动的具体范围。达西数较小时，雷诺数位于 40 到 45 之间，随着达西数的增大，临界雷诺数也逐渐增大，当达西数增大到 0.1 时，临界雷诺数已在 200 之上。另外，随着雷诺数的增大，尾迹的长度逐渐变小。同一雷诺数下，更大的达西数则对应更缓慢的波动。

表 6-1 不同达西数下的临界雷诺数

| Da | 临界 Re |
|--------------------|---------|
| 1×10^{-5} | 44—45 |
| 0.0001 | 45 |
| 0.0005 | 44—45 |
| 0.001 | 45 |
| 0.005 | 70 |
| 0.01 | 180 |
| 0.1 | >200 |

结 论

本文采用基于有限体积法的多孔介质流动计算模型，对层流非稳态情形下的多孔圆柱绕流问题进行了数值模拟，主要探讨了达西数和雷诺数变化对流动的影响，其中雷诺数的范围是 40–200，达西数的范围是 1×10^{-5} –0.01。根据计算得到的结果，对流动特性进行分析，得出了以下结论。

(1) 在适当划分计算区域的基础上，研究了网格密度对计算结果的影响。将达西数和雷诺数分别设为 0.0001 和 100，对比了不同网格密度下的平均阻力系数，确定了将网格尺寸设为 80×80 时模拟结果较好。通过对达西数等于 1×10^{-5} 时斯特劳哈尔数、平均阻力系数和升力波动振幅与已有结果的差别，验证了求解程序的准确性。

(2) 得到了不同达西数下非稳态层流流动的范围，主要是流动从稳态变化为非稳态的临界雷诺数，并且临界雷诺数随达西数的增大而增大。当达西数为 1×10^{-5} 时，临界雷诺数为 40–45，达西数增加到 0.001，临界雷诺数仍在 40 到 45 之间，当达西数增大到 0.01 时，临界雷诺数随之增加到 140–160，达西数达到 0.1 时，雷诺数 40–200 范围内的流动已经全都是稳态流动了。

(3) 为了说明雷诺数和达西数的影响，分析了几个重要的时间平均量。其中，衡量波动频率的斯特劳哈尔数随着雷诺数的增加而增加，但增速逐渐减小。达西数对该参数的影响较小。另外，几个物理量的能谱分析也佐证了这一点。达西数较小时平均阻力系数随雷诺数先增后减，达西数较大时则相反。压差阻力对总阻力形成所起的作用要大于摩擦阻力，雷诺数或达西数越大，这一趋势就越加明显，该比例从 71% 到 92% 不等。方均根升力系数随雷诺数的增加而增加，表明涡脱落越来越剧烈。当雷诺数较小时，方均根阻力系数与雷诺数的平方根成正比。压差波动在升力系数波动中所占的比例也要大于摩擦引起的作用，该比例从 80% 变化到 96%。

圆柱等钝体绕流现象已经被广泛研究，而以往多孔圆柱绕流的研究主要关注稳态特性，随着雷诺数继续增大，流动逐渐变为非稳态，本文则考察了这种情形下的流动特性。在多孔流动中采用了更加通用的理论模型，应用了应力阶跃条件，得到了多孔介质的存在对流动的影响，为层流非稳态多孔圆柱绕流的研究提供了部分参考，同时为进一步的研究做出了准备。

由于斯特劳哈尔数、阻力系数、升力系数等参数在工程实践中具有一定的意义，本文得出了非稳态层流中这些量的特性，所以可以和实际应用相结合，得到具有价值的启发。此外，本文的研究工作存在局限性，还有许多遗留问题等待探讨。

(1) 对一些流动特性未作出充足的解释。在某些方面，多孔介质的存在对流动的影响并不十分清晰。

(2) 稳态多孔圆柱绕流时存在许多不同于普通圆柱绕流的特性，非稳态绕流情形下还没有做类似的探讨。

(3) 流动中还有许多有意义的物理量未作分析。通过对那些物理量的分析，可以得到更多雷诺数和达西数的影响。除了雷诺数和达西数，还可以研究其他参数的影响。

参考文献

- [1] Zdravkovich M. Flow around circular cylinders; vol. i fundamentals[M]. [S.l.]: Oxford Science Publication, 1997.
- [2] Demartino C, Ricciardelli F. Aerodynamics of nominally circular cylinders: A review of experimental results for Civil Engineering applications[J]. *Engineering Structures*, 2017, 137 : 76 – 114.
- [3] Bénard H. Formation of centres of circulation behind a moving obstacle (in French)[J]. *Comptes Rendus Académie des Sciences*, 1908, 147.
- [4] Bénard H. A 'cinematographic' study of eddies and ripples produced by towed obstacle (in French)[J]. *Comptes Rendus Académie des Sciences*, 1908, 147.
- [5] Bénard H. On the zone of formation of alternate eddies behind an obstacle (in French)[J]. *Comptes Rendus Académie des Sciences*, 1913, 156.
- [6] Bénard H. On marching of alternate eddies behind an obstacle (in French)[J]. *Comptes Rendus Académie des Sciences*, 1913, 156.
- [7] Phillips O M. The intnesity of Aeolian tones[J/OL]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1956, 1(06) : 607.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112056000408>.
- [8] Strouhal V. Ueber eine besondere Art der Tonerregung[J/OL]. *Annalen der Physik und Chemie*, 1878, 241(10) : 216 – 251.
<http://dx.doi.org/10.1002/andp.18782411005>.
- [9] Roshko A. On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies[J]. National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.
- [10] Tritton D J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers[J/OL]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1959, 6(04) : 547.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112059000829>.
- [11] Berger E. Die bestimmung der hydodynamischen groessen einer karmanschen wirbelstrasse aus hitzdrahtmessungen bei kleinen reynoldschen zahlen[J/OL]. *ZEITSCHRIFT FUER FLUGWISSENSCHAFTEN*, 1964.
<https://books.google.co.jp/books?id=FSwVnQAACAAJ>.

- [12] Gaster M. Vortex shedding from circular cylinders at low Reynolds numbers[J/OL]. Journal of Fluid Mechanics, 1971, 46(04) : 749.
<http://dx.doi.org/10.1017/s002211207100082x>.
- [13] Nishioka M, Sato H. Measurements of velocity distributions in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers[J/OL]. Journal of Fluid Mechanics, 1974, 65(01) : 97.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112074001273>.
- [14] Friehe C A. Vortex shedding from cylinders at low Reynolds numbers[J/OL]. Journal of Fluid Mechanics, 1980, 100(02) : 237.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112080001127>.
- [15] Gerrard J H. The three-dimensional structure of the wake of a circular cylinder[J/OL]. Journal of Fluid Mechanics, 1966, 25(01) : 143.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112066000090>.
- [16] Gerich D, Eckelmann H. Influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinders[J/OL]. Journal of Fluid Mechanics, 1982, 122(-1) : 109.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112082002110>.
- [17] Williamson C H K, Roshko A. Measurements of base pressure in the wake of a cylinder at low Reynolds numbers[J]. Zeitschrift fur Flugwissenschaften und Weltraumforschung, 1990, 14 : 38–46.
- [18] Dimopoulos H G, Hanratty T J. Velocity gradients at the wall for flow around a cylinder for Reynolds numbers between 60 and 360[J/OL]. Journal of Fluid Mechanics, 1968, 33(02) : 303.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112068001321>.
- [19] Tanida Y, Okajima A, Watanabe Y. Stability of a circular cylinder oscillating in uniform flow or in a wake[J/OL]. Journal of Fluid Mechanics, 1973, 61(04) : 769.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112073000935>.
- [20] Roshko A. On the Development of Turbulent Wakes From Vortex Streets[J]. NACA Report, Printed in USA, 1954, 1191.
- [21] Bear J. Dynamics of fluids in porous media[M]. [S.l.] : Courier Corporation, 2013.

- [22] Sheikholeslami M. Influence of Lorentz forces on nanofluid flow in a porous cylinder considering Darcy model[J]. *Journal of Molecular Liquids*, 2017, 225 : 903 – 912.
- [23] Wang L, Wang L-P, Guo Z, et al. Volume-averaged macroscopic equation for fluid flow in moving porous media[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, 82 : 357 – 368.
- [24] Joseph D, Tao L. The effect of permeability on the slow motion of a porous sphere in a viscous liquid[J]. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1964, 44(8-9) : 361 – 364.
- [25] Neale G, Epstein N, Nader W. Creeping flow relative to permeable spheres[J]. *Chemical Engineering Science*, 1973, 28(10) : 1865 – 1874.
- [26] Masliyah J H, Polikar M. Terminal velocity of porous spheres[J]. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1980, 58(3) : 299 – 302.
- [27] Nandakumar K, Masliyah J H. Laminar flow past a permeable sphere[J]. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1982, 60(2) : 202 – 211.
- [28] Hsu H, Huang L, Hsieh P. A re-investigation of the low Reynolds number uniform flow past a porous spherical shell[J]. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2004, 28(14) : 1427 – 1439.
- [29] Bhattacharyya A, Sekhar G R. Viscous flow past a porous sphere with an impermeable core: effect of stress jump condition[J]. *Chemical engineering science*, 2004, 59(21) : 4481 – 4492.
- [30] Ochoa-Tapia J A, Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I. Theoretical development[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, 38(14) : 2635 – 2646.
- [31] Ochoa-Tapia J A, Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—II. Comparison with experiment[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, 38(14) : 2647 – 2655.
- [32] Rashidi S, Nouri-Borujerdi A, Valipour M, et al. Stress-jump and continuity interface conditions for a cylinder embedded in a porous medium[J]. *Transport in Porous Media*, 2015, 107(1) : 171 – 186.
- [33] Jue T-C. Numerical analysis of vortex shedding behind a porous square cylinder[J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2004, 14(5) : 649 – 663.

- [34] Chen X, Yu P, Winoto S, et al. Numerical analysis for the flow past a porous square cylinder based on the stress-jump interfacial-conditions[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2008, 18(5) : 635 – 655.
- [35] Noymer P D, Glicksman L R, Devendran A. Drag on a permeable cylinder in steady flow at moderate Reynolds numbers[J]. Chemical Engineering Science, 1998, 53(16) : 2859 – 2869.
- [36] Bhattacharyya S, Dhinakaran S, Khalili A. Fluid motion around and through a porous cylinder[J]. Chemical Engineering Science, 2006, 61(13) : 4451 – 4461.
- [37] Fransson J H, Konieczny P, Alfredsson P H. Flow around a porous cylinder subject to continuous suction or blowing[J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, 19(8) : 1031 – 1048.
- [38] Yu P, Zeng Y, Lee T S, et al. Steady flow around and through a permeable circular cylinder[J/OL]. Computers & Fluids, 2011, 42(1) : 1 – 12.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.040>.
- [39] Yu P, Zeng Y, Lee T, et al. Wake structure for flow past and through a porous square cylinder[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2010, 31(2) : 141 – 153.
- [40] Yu P, Zeng Y, Lee T S, et al. Numerical simulation on steady flow around and through a porous sphere[J/OL]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2012, 36 : 142 – 152.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2012.03.002>.
- [41] 王亚玲, 刘应中, 缪国平. 圆柱绕流的三维数值模拟 [J]. 上海交通大学学报, 2001, 35(10) : 1464 – 1469.
- [42] 何鸿涛. 圆柱绕流及其控制的数值模拟研究 [D]. [S.I.] : 北京: 北京交通大学, 2009.
- [43] Hakam A, Widodo B, Yuwono T Y, et al. Numerical investigation of the flow around circular cylinder with two passive controls[J/OL]. Journal of Physics: Conference Series, 2018, 974 : 012011.
<http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/974/1/012011>.
- [44] Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems[M]. [S.I.] : Wiley, New York, 1967.

- [45] Ferziger J H, Perić M. Computational Methods for Fluid Dynamics[M/OL]. [S.l.] : Springer Berlin Heidelberg, 2002.
[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2.](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2)
- [46] Muzaferija S. Adaptive finite volume method for flow prediction using unstructured meshes and multigrid approach[D]. [S.l.] : University of London, 1994.
- [47] Van Doormaal J, Raithby G. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows[J]. Numerical heat transfer, 1984, 7(2) : 147 – 163.
- [48] Park J, Kwon K, Choi H. Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160[J/OL]. KSME International Journal, 1998, 12(6) : 1200 – 1205.
[http://dx.doi.org/10.1007/bf02942594.](http://dx.doi.org/10.1007/bf02942594)
- [49] Li Y, Zhang R, Shock R, et al. Prediction of vortex shedding from a circular cylinder using a volumetric Lattice-Boltzmann boundary approach[J/OL]. The European Physical Journal Special Topics, 2009, 171(1) : 91 – 97.
[http://dx.doi.org/10.1140/epjst/e2009-01015-9.](http://dx.doi.org/10.1140/epjst/e2009-01015-9)
- [50] Harichandan A B, Roy A. Numerical investigation of low Reynolds number flow past two and three circular cylinders using unstructured grid CFR scheme[J/OL]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2010, 31(2) : 154 – 171.
[http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2010.01.007.](http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2010.01.007)
- [51] Qu L, Norberg C, Davidson L, et al. Quantitative numerical analysis of flow past a circular cylinder at Reynolds number between 50 and 200[J/OL]. Journal of Fluids and Structures, 2013, 39 : 347 – 370.
[http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.02.007.](http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.02.007)
- [52] Laroussi M, Djebbi M, Moussa M. Triggering vortex shedding for flow past circular cylinder by acting on initial conditions: A numerical study[J/OL]. Computers & Fluids, 2014, 101 : 194 – 207.
[http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.05.034.](http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.05.034)
- [53] Williamson C H. Vortex dynamics in the cylinder wake[J]. Annual review of fluid mechanics, 1996, 28(1) : 477 – 539.

- [54] Rajani B, Kandasamy A, Majumdar S. Numerical simulation of laminar flow past a circular cylinder[J/OL]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(3) : 1228–1247.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2008.01.017>.
- [55] Yu P, Lee T S, Zeng Y, et al. A numerical method for flows in porous and homogenous fluid domains coupled at the interface by stress jump[J]. *International journal for numerical methods in fluids*, 2007, 53(11) : 1755 – 1775.
- [56] Karasudani T, Funakoshi M. Evolution of a vortex street in the far wake of a cylinder[J/OL]. *Fluid Dynamics Research*, 1994, 14(6) : 331 – 352.
[http://dx.doi.org/10.1016/0169-5983\(94\)90040-x](http://dx.doi.org/10.1016/0169-5983(94)90040-x).
- [57] Hsu L-C, Ye J-Z, Hsu C-H. Simulation of Flow Past a Cylinder With Adaptive Spectral Element Method[J/OL]. *Journal of Mechanics*, 2016, 33(02) : 235 – 247.
<http://dx.doi.org/10.1017/jmech.2016.77>.
- [58] Lu L, Qin J-M, Teng B, et al. Numerical investigations of lift suppression by feedback rotary oscillation of circular cylinder at low Reynolds number[J/OL]. *Physics of Fluids*, 2011, 23(3) : 033601.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.3560379>.
- [59] Norberg C. An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio[J/OL]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, 258(-1) : 287.
<http://dx.doi.org/10.1017/s0022112094003332>.
- [60] Kumar B, Mittal S. Effect of blockage on critical parameters for flow past a circular cylinder[J/OL]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, 50(8) : 987 – 1001.
<http://dx.doi.org/10.1002/fld.1098>.
- [61] Babu V, Narasimhan A. Investigation of vortex shedding behind a porous square cylinder using lattice Boltzmann method[J/OL]. *Physics of Fluids*, 2010, 22(5) : 053605.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.3407667>.
- [62] Abbasi W S, Islam S U. Transition from steady to unsteady state flow around two inline cylinders under the effect of Reynolds numbers[J/OL]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2018, 40(3).
<http://dx.doi.org/10.1007/s40430-018-1083-y>.

哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限

学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《多孔介质圆柱非稳态绕流现象的数值研究》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果，且学位论文中除已标注引用文献的部分外不包含他人完成或已发表的研究成果。对本学位论文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。

作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用权限

学位论文是研究生在哈尔滨工业大学攻读学位期间完成的成果，知识产权归属哈尔滨工业大学。学位论文的使用权限如下：

(1) 学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文，并向国家图书馆报送学位论文；(2) 学校可以将学位论文部分或全部内容编入有关数据库进行检索和提供相应阅览服务；(3) 研究生毕业后发表与此学位论文研究成果相关的学术论文和其他成果时，应征得导师同意，且第一署名单位为哈尔滨工业大学。

保密论文在保密期内遵守有关保密规定，解密后适用于此使用权限规定。

本人知悉学位论文的使用权限，并将遵守有关规定。

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

致 谢

又到毕业时。16年秋天，我来到深圳，开始了南科大与哈工大的联培项目，时间匆匆，如今研究生的第二个年头都已经过去大半了。

在完成毕业论文的过程中，我得到了许多人的指导和帮助；整个研究生期间，我也受益于大家的鼓励和支持，故在这里致以谢意。

首先，感谢我的导师余鹏教授。我的毕设课题和老师之前的研究一脉相承，研究思路和求解方法也有老师过去的研究可作参考，所以省去了不少功夫。在过去的时间里，科研和生活中的心态曾经暂起暂落，在与老师的交流中获益良多，从而能够放下部分疑惑，逐渐调整自己。“云山苍苍，江水泱泱”，老师的教诲将成为我前行路上的一部分。

其次，感谢课题组的人们。在做毕设课题的过程中，从确定论文框架，到填充具体细节，都得到了汤婷婷师姐的帮助，论文的主要工作得以完成。同时感谢课题组中苏建、卢锐新、余世敏师姐等其他成员不时的建议和帮助。

感谢一起就读于此的同学，在学习生活中可以互相支持，共同前行。

感谢哈工大 L^AT_EX 论文模板 H^IT_HE_SISI_S，在写论文时不需要忙碌于繁杂琐碎的格式要求。

最后，感谢父母家人的支持。