列向量

贡献者： Giacomo

- 本文处于草稿阶段。
- 本文缺少预备知识，初学者可能会遇到困难。

1. 列向量

几何向量的坐标让我们可以以一个全新的视角看待向量这个概念，我们可以把数组 $(a_1, \cdots, a_n)$ 称为一个向量 $\mathbf{a}$；由于我们常常会把它竖着记为

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \tag{1}
$$

这种向量被称为**列向量**，n 被称为 a 的**维度**，a_i 被称为 a 的第 i 坐标。对于列向量来说，存在一组特别的基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$，称为**标准基底**，其中 $\mathbf{e}_i$ 是第 i 坐标为 1，其他坐标为 0 的列向量，因此任何一个列向量都可以写成

$$
\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n \tag{2}
$$

的形式。

第 i 坐标 a_i 的取值可以和几何向量一样取实数 $\mathbb{R}$，也可以取一些其他的数，比如复数 $\mathbb{C}$。方便起见，我之后只考虑实向量，n 维向量就是 n 维空间的 $\mathbb{R}^n$ 上的一点。

实数取值的 2 维（或者 3 维）列向量，等价于选取了坐标系的几何向量——由标准基底的存在，列向量并不是几何向量的推广。几何向量和列向量都是更一般的向量的特殊情况。

2. 行向量

如果把向量 “横过来”，我们就得到了**行向量**，

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} , \tag{3}$$

（注意，一般 $(a_1, \cdots, a_n)$ 表示的是列向量，区别在于逗号）。

行向量和列向量的定义 “本身” 没有任何区别，对于某个外星人而言完全可以把这两个符号反过来；真正重要的是行向量和列向量之间的运算：考虑一个 n 维行向量 $\mathbf{a}$ 和 列向量 $\mathbf{b}$，我们定义 $\mathbf{a}$ **乘** $\mathbf{b}$ 为

$$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ , \tag{4}$$

是一个数。

注：l 是 left 的首字母，意味着从左边乘。

从这个角度来说，行向量是 “列向量的函数”：

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{b} &\mapsto \mathbf{ab} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ , \end{aligned} \tag{5}$$

不过，正如我们之前提过的——“行向量和列向量的定义‘本身’没有任何区别”，因此反过来看列向量也是 “行向量的函数”：

$$r_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})=\mathbf{ab}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\ , \tag{6}$$

注：r 是 right 的首字母，意味着从右边乘。

3. 转置

我们可以通过转置把行/列向量相互转化，考虑列向量 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，它的转置记为 $\mathbf{a}^T$（或者 $\mathbf{a}^\top$、${}^t\mathbf{a}$）是行向量

$$\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{pmatrix}. \tag{7}$$

排版 数学

为什么一般把向量定义为列向量?

这给无论是书写还是排版带来了诸多不变，比如横着写要多写一个转置符号，竖着写行距又太大。从用户体验上来说不是应该定义成行向量更方便吗？是什么更深层次的原因致使向量的定义成为了现在的这个样子？（尽管没有本质区别，但现在文献中和教科书中大多都这样写，反人类乎？）

王筝
数学等 2 个话题下的优秀答主

说一下个人理解。

题主应该知道矩阵可以对应到线性映射吧.

考虑矩阵A，如果x是列向量，那么不妨把A对应的线性映射还是记作A，那么就有$A(x)=Ax$，右边就是矩阵的乘法.

但如果x是行向量呢？类似的记号，就有$A(x)=xA$，不觉得别扭么……

不觉得？那么再引入一个矩阵B好了.

如果x是列向量，那么B也有一个线性映射，也记作B，那么$B(A(x))=BAx$.

但如果x是行向量，那么就变成了$B(A(x))=xAB$，不觉得别扭么……

归根结底，是我们习惯把映射写在左边，自变量写在右边……

以上.

编辑于 2014-10-27 10:52

数学达人上官正申

信息技术行业 从业人员

14 人赞同了该回答

这都是大家的一致性习惯，因为线性变换 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$ 写成矩阵形式为 AX , 其中 X 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标。

如果向量默认是行向量，写成矩阵形式则需要进行转置 AX^T , 如果不想写转置，那就要写成 XA , 也就是作用矩阵要写在右边。

前者比较麻烦，要多写一个转置符号，后者又不符合我们约定俗成的习惯。所以大家天然地喜欢默认将向量看作列向量。其实看作行向量也一样，没有任何影响，就是习惯而已。

发布于 2022-12-27 21:04

浅鸦

数学

3 人赞同了该回答

因为方便矩阵变换，例如T(x)=Ax，x必须是后置的列向量。

发布于 2014-10-27 00:39

秋千无闻

好个天气，秋千无闻

参考线性方程组的变换。线性的代数的矩阵 只是符号而已，用来表述线性方程组的变换与运算。

发布于 2022-10-21 10:00

行向量与列向量

（重定向自列向量）

“*m*-by-*n* matrix”的各地常用名称	
中国大陆	m行n列矩阵
台湾	m列n行矩阵

“横排（row）”的各地常用名称	
中国大陆	行
台湾	列

“纵排（column）”的各地常用名称	
中国大陆	列
台湾	行

在线性代数中，行向量（Row vector）是一个1×n的矩阵，即矩阵由一个含有n个元素的行所组成：

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]。$$

行向量的转置是一个列向量，反之亦然。

所有的行向量的集合形成一个向量空间，它是所有列向量集合的对偶空间。

符号

为简化书写、方便排版起见，有时会以加上转置符号T的行向量表示列向量。

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^{\mathrm{T}}$$

为进一步化简，习惯上会把行向量和列向量都写成行的形式。不过行向量的元素是用空格隔开，列向量则用分号隔开。例如，假设x是一个行向量，那么x和x^{T}就可以如下方式表示。

$$\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_m] \qquad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1; x_2; \ldots; x_m]$$

参见

- 线性代数
- 共变和反变

参考文献

- Axler, Sheldon Jay, Linear Algebra Done Right 2nd, Springer-Verlag, 1997, ISBN 0-387-98259-0
- Lay, David C., Linear Algebra and Its Applications 3rd, Addison Wesley, August 22, 2005, ISBN 978-0-321-28713-7
- Meyer, Carl D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), February 15, 2001 [2017年5月13日], ISBN 978-0-89871-454-8, （原始内容存档于2001年3月1日）
- Poole, David, Linear Algebra: A Modern Introduction 2nd, Brooks/Cole, 2006, ISBN 0-534-99845-3
- Anton, Howard, Elementary Linear Algebra (Applications Version) 9th, Wiley International, 2005
- Leon, Steven J., Linear Algebra With Applications 7th, Pearson Prentice Hall, 2006
