



# 6.1 实二次型及其标准形

主要内容：二次型及其矩阵

合同变换

用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形

## 一. 二次型及其矩阵

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j && \text{其中: } a_{ij} = a_{ji} \\ &= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{1n} x_1 x_n \\ &\quad + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{2n} x_2 x_n \\ &\quad + \cdots \cdots \\ &\quad + a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 \end{aligned}$$

称为  $n$  元二次型.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

若  $a_{ij}$  为实数, 则称为**实二次型**.

若  $a_{ij}$  为复数, 则称为**复二次型**.

$$\text{设 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} = a_{ji},$$

则  $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{X}^T A \mathbf{X}$ .

$A$ : 二次型  $f(x_1, \dots, x_n)$  的矩阵.

# 二次型及其矩阵

**例1**  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T AX$$

*A:  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵*

若令  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$ , 则有  $f(x_1, x_2, x_3) = X^T BX$

但  $B^T \neq B$ , 故  $B$  不是  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵

$$\text{二次型 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

也记为  $f(X) = X^T A X$ .  $(A^T = A)$

二次型  $f(X)$  的秩:  $A$  的秩.

在例1 中,  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \quad R(A) = 3,$$

故  $f(x_1, x_2, x_3)$  的秩为 3 .



## 二. 合同变换

### 1. 矩阵合同

定义 对 $n$ 阶矩阵 $A, B$ , 若存在可逆矩阵 $C$ , 使

$$C^T A C = B,$$

则称  $A$  与  $B$  合同.

矩阵合同具有以下性质:

- (1) 反身性: 矩阵 $A$ 与自身合同;
- (2) 对称性: 若 $A$ 与 $B$ 合同, 则 $B$ 与 $A$ 合同;
- (3) 传递性: 若 $A$ 与 $B$ 合同, 且 $B$ 与 $C$ 合同, 则 $A$ 与 $C$ 合同.

$A$ 与 $B$ 等价:  $PAQ = B$ ,  $P, Q$  可逆;

$A$ 与 $B$ 相似:  $P^{-1}AP = B$ ,  $P$ 可逆;

请思考: 矩阵合同与等价、相似有何关系?

## 2. 合同变换

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (1)$$

(1)式称为从  $y_1, \dots, y_n$  到  $x_1, \dots, x_n$  的线性变换.

# 合同变换

$$\text{令 } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

则(1)式可记为

$$X = C Y \tag{2}$$

若  $C$  为可逆矩阵，则(2)式称为可逆变换，

若  $C$  为正交矩阵，则(2)式称为正交变换。

当  $C$  可逆时，(2)式又可记为

$$Y = C^{-1} X \tag{3}$$

对于二次型  $f(X) = X^TAX$ , 若令  $X = CY$  ( $C$  可逆), 则

$$f(X) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y.$$

记  $B = C^T A C$ , 则  $\textcolor{blue}{B^T = B}$ , 且

$$f(X) = Y^T B Y = g(Y).$$

二次型  $f(X)$  与  $g(Y)$  的矩阵  $A$  与  $B$  合同.

也称二次型  $f(X)$  与  $g(Y)$  合同.

称  $X = CY$  ( $C$  可逆) 为 **合同变换**.

正交变换是一种特殊的可逆变换, 也是一种特殊的合同变换,  
而合同变换就是可逆变换.

### 三. 用配方法化二次型为标准形

只含平方项的二次型

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_r y_r^2 \quad (d_i \neq 0)$$

称为**标准形**.

形如

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$$

的二次型称为**规范形**.

$p$ : 正惯性指数;

$r - p$ : 负正惯性指数;

$|r - 2p|$ : 符号差.

# 用配方法化二次型为标准形

## 例2 用配方法化二次型为标准形

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3 \\
 &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3) + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 \\
 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) - 2x_3^2 \\
 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 2x_3^2
 \end{aligned}$$

令  $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

则  $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$



# 用配方法化二次型为标准形

令 
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (1)$$
 即 
$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad (2)$$

(1): 从  $x_1, x_2, x_3$  到  $y_1, y_2, y_3$  的线性变换.

(2): 从  $y_1, y_2, y_3$  到  $x_1, x_2, x_3$  的线性变换.

(1)与(2)所表达的  $x_1, x_2, x_3$  与  $y_1, y_2, y_3$  的关系是相同的.

利用配方法与归纳法可以证明:

**定理1** 任一实二次型  $f(X) = X^TAX$  都可用配方法化为标准形.

# 用配方方法化二次型为标准形

例3  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

令 
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则, } f(x_1, x_2, x_3) &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 6y_3^2 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2 \\ &= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2 \end{aligned}$$

# 用配方方法化二次型为标准形

上式最后一步使用的变换是

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

若再令  $\begin{cases} t_1 = \sqrt{2}z_1 \\ t_2 = \sqrt{6}z_3 \\ t_3 = \sqrt{2}z_2 \end{cases}$

则,

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2 = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2$$

## 定理2 任何一个实二次型的规范形都是惟一的.

**证** 将实二次型  $f(X) = X^TAX$  经合同变换化为标准形后，将正项集中在前，负项集中在后：

$$d_1 y_1^2 + \dots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \dots - d_r y_r^2$$

$$\text{令 } z_i = \sqrt{d_i} y_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

得  $f(X) = X^TAX$  的规范形为

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$$

由于合同变换不改变二次型的秩，所以  $r$  是惟一确定的。在理论上还可进一步证明正惯性指数  $p$  是惟一的(此证明略)，因此，负惯性指数  $r-p$  与符号差  $|r-2p|$  也是惟一的。

## 四. 用正交变换化二次型为标准形

**定理3** 任一  $n$  元实二次型  $f(X) = X^TAX$  都可用正交变换  $X = CY$  化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征值.

**证** 因  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵,

所以存在正交矩阵  $C$  (回顾5.4), 使

$$C^TAC = C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

令  $X = CY$ , 则

$$f(X) = Y^T C^T A C Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

### 例4 用正交变换化二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

解  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$$

特征值:  $\lambda_1 = 2$  (二重特征值),  $\lambda_2 = -7$ ,

# 用正交变换化二次型为标准形

求  $\lambda_1 = 2$  的特征向量:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

特征向量:  $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$

将  $\alpha_1, \alpha_2$  正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \dots = \frac{1}{5} (2, 4, 5)^T$$

# 用正交变换化二次型为标准形

求  $\lambda_1 = -7$  的特征向量:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = x_3 \end{cases}, \quad \alpha_3 = (1, 2, 2)^T,$$

将  $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$  单位化:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5)^T$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|} \alpha_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$$

# 用正交变换化二次型为标准形

$$\text{令 } C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad Y = (y_1, y_2, y_3)^T$$

则  $X = CY$  为正交变换，且

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$$



# 学到了什么?

二次型及其矩阵

合同变换

用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形