1.4 分块矩阵

主要内容：

- 分块矩阵概念
- 分块矩阵线性运算
- 分块矩阵的乘法
- 分块矩阵的转置
- 分块矩阵的逆

一. 分块矩阵概念

例：$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&6&0\\0&2&3&0\\\hline 2&0&1&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&5&6\\0&2&3\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ A_{21}=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix},\ A_{22}=(4)$$

又如，$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&6&0\\0&2&3&0\\\hline 0&0&0&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$

块对角矩阵

一. 分块矩阵概念

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},$$ 其中$\alpha_i=(a_{i1},\ldots,a_{in}),\ \mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m}$

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=(\beta_1,\quad \beta_2,\quad \cdots,\quad \beta_n),$$

其中$\beta_j=(a_{1j},\ldots,a_{mj})^T,\ j=1,2,\ldots,n$

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_t)$$

二. 分块矩阵的线性运算

加法: 同型矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$

分块方法相同

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}.$$

数乘: 分块矩阵 $A=(A_{ij})_{s\times t}$,

$$kA=(kA_{ij})_{s\times t}.$$

三. 分块矩阵的乘法

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\ \ B=(b_{ij})_{n\times p},$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}=C=(C_{kl})$$

其中C是$r\times t$分块矩阵,

$$C_{kl}=\sum_{i=1}^{s}A_{ki}B_{il}\ \ (k=1,\ldots,r;\ \ l=1,\ldots,t)$$

例1. 求AB:
$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\3&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&3&-1\\0&2&1&4\end{pmatrix}$$

解

$$AB=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&0&0\\3&-1&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&2&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\\hline 0&1&3&-1\\0&2&1&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}2&0&0&0\\4&0&0&0\\-1&0&0&0\\\hline 0&0&5&-6\end{array}\right)$$

三. 分块矩阵的乘法

注意： 设A, B均为n阶矩阵，且分块相同，

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_mB_m \end{pmatrix},$$

A^k 呢？

三. 分块矩阵的乘法

将矩阵分块作乘法其分法不是唯一的.
只需前一个矩阵列的分法与后一个矩阵行的分法一致

在例1中

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

三. 分块矩阵的乘法

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & O & O \\ O & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O & O \\ O & A_{22}B_{22} & A_{22}B_{23} \end{pmatrix}$$

例2. 如何分块来求AB:

解

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}I_2&O_{2\times3}\\A_1&I_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_1&I_2\\-I_3&O_{3\times2}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}I_2&O_{2\times3}\\A_1&I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&I_2\\-I_3&O_{3\times2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&I_2\\A_1B_1-I_3&A_1\end{pmatrix}$$

四. 分块矩阵的转置

转置： 分块矩阵$A=(A_{kl})_{s\times t}$ $A^T=(B_{lk})_{t\times s}$

其中$B_{lk}=A_{kl}^T,\ l=1,\ldots,t;\ k=1,\ldots,s$

例， $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix},$

则$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$

五. 分块矩阵的逆

逆： $D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$,（$d_1,\ldots,d_n\neq 0$）；$D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$

设$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}$, $A_1,\ldots,A_m$均可逆。

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$.

五. 分块矩阵的逆

设$A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_m & & \end{pmatrix}$, $A_1, \dots, A_m$均可逆。

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_m^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$.

特殊：$A=\begin{pmatrix} & & d_1 \\ & \iddots & \\ d_m & & \end{pmatrix}$, $d_1, \dots, d_m$均不为零，

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & d_m^{-1} \\ & \iddots & \\ d_1^{-1} & & \end{pmatrix}$.

例3 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&3&0\\0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&1\\1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\end{pmatrix}$ 求 A 的逆.

解：
$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&0&1&3&0\\0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&1\\\hline 1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&O\end{pmatrix}=\cdots\cdots$$

学到了什么？

分块矩阵概念

分块矩阵线性运算

分块矩阵的乘法

分块矩阵的转置

分块矩阵的逆

一、矩阵概念

1. $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 个数组成的数表.

2. 几类特殊矩阵：

- 零矩阵 $O=(0)_{m\times n}$，
- 行矩阵：$A=\left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\right)$，
- 列矩阵：$B=\left(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n\right)^T=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，
- 方阵：$A_{n\times n}$，

一、矩阵概念

- 三角阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，上三角阵；

$B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，下三角阵.

一、矩阵概念

- 对角阵：$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$

$$= diag\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

- 单位阵：$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$

二、矩阵的运算

1. 线性运算：

(1) 加法：$A_{m\times n}+B_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$

减法：$A_{m\times n}-B_{m\times n}=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$

(2) 数乘：$k\,A_{m\times n}=\left(k\,a_{ij}\right)_{m\times n}$

(3) 八条运算规则．

2. 乘法：

(1) $A_{m\times r}B_{r\times n}=C_{m\times n}$

(2) $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ir}b_{rj}$

(3) 一般，$AB\neq BA$，　$AB=0\not\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$，

$AB=AC$ 且 $A\neq 0\not\Rightarrow B=C$．

3. 转置：$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，　$A^T=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$．

三、矩阵的逆

1. 初等变换与初等矩阵 .

$$(AB)^T = B^T A^T$$

倍乘与数乘的区别

2. A可逆 $\Leftrightarrow AB = BA = I$

$\Leftrightarrow AB = I$ 或 $BA = I$ $(A, B$为方阵$)$

$\Leftrightarrow AX = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow AX = b$ 有唯一解

$\Leftrightarrow A$可表示为有限个初等矩 阵的乘积

$\Leftrightarrow A$与I行等价 .

四. 分块矩阵

3. 等价 $A \cong B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$

4. 求 A^{-1}

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

分块矩阵

1. AB：A的列的分法与B的行的分法一致 .

2. 块对角阵

四. 分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_kB_k\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1}\end{pmatrix}\text{（}A_i\text{ 可逆）}$$

$$A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

$$AX=b$$

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \text{行阶梯形}$$

五. 高斯消元法

$$AX = b$$

$$(A\ \ b) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \text{行阶梯形}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
 & 1 & & & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
 & & \ddots & & & \ddots & & \\
 & & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,r+1} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{d_{r+1}} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

1. $d_{r+1} \neq 0$, 无解;
2. $d_{r+1} = 0$, 有解:
   (1) $r = n$: 有唯一解: $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n$.
   (2) $r < n$: 有无穷多组解.

例1 设 $\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$$A = I - \alpha^T\alpha, \quad B = I + 2\alpha^T\alpha.$$

求: AB.

解: $AB = (I - \alpha^T\alpha)(I + 2\alpha^T\alpha)$

$$= I - \alpha^T\alpha + 2\alpha^T\alpha - 2\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha$$

$$= I + \alpha^T\alpha - 2\alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha$$

$$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1,$$

$$AB = I + \alpha^T\alpha - 2\cdot\frac{1}{2}\alpha^T\alpha = I.$$

例2 设 A 是实对称矩阵且 $A^2=O$，

证明：$A=O$.

证：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，且 $A^T=A$，则

$$A^2=AA=AA^T=B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n},$$

$$b_{ii}=a_{i1}^{\ 2}+a_{i2}^{\ 2}+\cdots+a_{in}^{\ 2}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

$\because\ A^2=O$,

$\therefore\ b_{ii}=a_{i1}^{\ 2}+a_{i2}^{\ 2}+\cdots+a_{in}^{\ 2}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$,

$\because$ A 是实矩阵，$\therefore$ $a_{ij}=0\,(i,j=1,2,\cdots,n)$.

$\therefore\ A=0$.

例3 求 A 的逆矩阵 A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad \prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0.$$

解: $$A=\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \hline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & & & & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{a_{n-1}} & \end{pmatrix}$$

例4 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$$AXA+BXB=AXB+BXA+I$$

求：X.

解：$AX(A-B)+BX(B-A)=I$

$AX(A-B)-BX(A-B)=I$

$(A-B)X(A-B)=I$

若 $A-B$ 可逆，则

$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2$.

五. 高斯消元法

$$(A-B\quad I)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

五. 高斯消元法

$$X = \left[(A-B)^{-1}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$