

无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位

摘 要

无源定位技术具有隐蔽性高和实用性强的优势，在国防侦察等多领域方面发挥着重要且出色的作用。本文将纯方位无源定位技术应用于无人机遂行编队，在尽可能保持电磁静默的要求下，建立定位模型，制定调整方案，从而对偏离位置的无人机进行调整，实现多样的编队队形。针对问题一，根据二维平面几何关系建立了由 10 架无人机编队组成的被动接受信号的无人机纯方位无源定位模型以及圆形编队的动态调整方案。

首先，我们对问题一的 3 个小问，逐一进行求解。对于（1），以 FY00 为原点，FY01 为极轴建立极坐标系。以被动接收信号的无人机极角以及其相对于发射信号的两架无人机所处的位置为分类依据，列出四种情况。在发射信号的无人机位置无偏差且编号已知时，利用**正弦定理**建立定位模型，联立方程组求解得出被动接收信号的无人机 (ρ, θ) 关于方向信息 (α_1, α_2) 的关系式。模型建立后，我们采用问题（3）中的部分极坐标数据对其进行**验证**，根据验证结果得知该定位模型较为精确；

对于（2），在 FY00 和 FY01 等发射信号的无人机位置均无偏差的情况下，若某无人机的偏差范围较小(小于 10°)，则根据几何关系可知：只需圆周上另外 1 架无人机发射信号，即可实现对该架无人机的有效定位。若无人机偏差范围稍大，根据隐圆定理，建立发射信号的无人机编号未知时的定位模型，借助方程组解的形式，最终确定还需要 2 架无人机发射信号，才能达到对某位置略有偏差的无人机进行有效定位的目的；

对于（3），我们建立了圆周编队无人机动态调整的多目标规划模型。为了将位置略有偏离的编队调整至 9 架无人机均匀分布在圆周上的理想位置，基于局部最优策略能导致产生全局最优解的前提条件，我们采用**贪心策略**：通过解局部最优解，即选取当前所处位置与理想位置偏差最小的无人机进行信号发射，定义偏差为九架无人机坐标与理想位置坐标的距离平方和，限制最终的总偏差。循环求得近似最优解，得出每次选取两架无人机发射信号，分别为[FY02,FY01]→[FY06,FY01]→[FY02,FY01]，其余无人机被动接收信号后均进行相应调整。我们最终得出结论，通过 3 次信号发射即可使 9 架无人机均匀分布于半径为 100m 的圆周上，到达理想位置，且偏差约为 0.0014。

针对问题二，基于问题一（3）中的对圆周上无人机调整方案的求解，建立了锥形无人机编队的定位及调整方案模型，利用 MATLAB 软件仿真，产生编队大小为 10，直线上相邻两架无人机的距离为 50m 的锥形编队坐标，并对锥形编队无人机位置初始坐标进行随机扰动产生正负偏差，根据正弦定理建立定位模型，仍采用贪心求解策略确定出锥形无人机编队的调整方案。

最后，本文利用仿真数据对模型进行了再检验，分析了模型的优缺点，讨论了模型的改进方向并对模型进行了推广。

关键词：纯方位无源定位 正弦定理 贪心策略 仿真模拟

一、 问题重述

无源定位技术作为无线定位技术的一种，与有源定位相较，有着更高的隐蔽性和更强的实用性。因而，该技术在无人机集群遂行编队方面也有着较高的应用价值，能够较大程度地满足其减少电磁波信号发射、避免外界干扰的要求。

纯方位无源定位的方法可以利用编队中一部分无人机发射信号、剩余无人机被动接收信号的形式，从而获取定位信息、做出位置调整，以达到保持编队队形的目的。

本题中，编队中的每台无人机，保持与其他无人机的相对位置关系不变，并采用 FY01、FY02 的命名方式，赋予唯一且固定的编号。此外，规定将接受信号的无人机与任意两架发射信号无人机连线之间的夹角作为其所收到的方向信息。如 α_1 、 α_2 及 α_3 即为 FY04 所收到的方向信息。

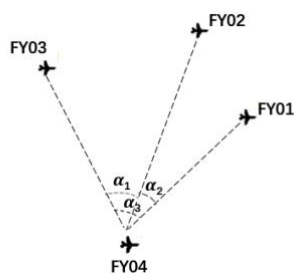


图 1 无人机接收到的方向信息示意图

基于上述题目背景与信息，需要解决如下问题：

问题 1：

圆形编队由 1 架位于圆心的无人机（编号 FY00）和均匀分布在该圆周上另外 9 架无人机（编号 FY01~FY09）构成。基于自身感知的高度信息，10 架无人机都保持在同等高度飞行。

（1）由位于圆心的无人机（FY00）和圆周上另外 2 架编号已知的无人机发射信号，为另外位置稍有偏差的被动接收信号无人机建立模型，以实现其定位。

（2）在 FY00 和 FY01 等发射信号的无人机位置均无偏差的情况下，确定额外需要发射信号的无人机数量，以实现某位置略有偏差的无人机的有效定位。

（3）在无人机初始位置均略有偏差的情况下（见表 1），仅以接收的方向信息作为位置调整的依据，制定无人机集群的位置调整方案，以达到 1 架无人机位于圆心、其余 9 架均匀分布在半径为 100m 的圆周上的编队要求。每次调整时，只有至多 3 架圆周上无人机和 FY00 可以遂行发射信号。

问题 2：

制定出采用纯方位无源定位方法的位置整方案，从而实现如锥形等其他的无人机集群的编队队形。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

问题（1）要求对由 10 架无人机组成的圆形编队建立被动接收信号无人机的定位模型，且给定条件：FY00 和发射信号的 2 架无人机位置标准且编号已知。由此可以

得知发射信号的两架无人机之间的夹角。由于发射信号的无人机位置关系不同，且被动接收信号的无人机所处位置不同，需对不同情况进行分类讨论，并根据二维平面几何关系建立方程，从而求解出被动接收信号的无人机无源定位模型。

问题（2）将问题（1）中条件减弱，将原本已知的发射信号的无人机编号变为未知，除 FY00 和 FY01 之外，确定额外需要发射信号的无人机数量，才能实现某位置略有偏差的无人机的有效定位。首先考虑题中指出该无人机位置偏差较小，则根据圆周角与圆心角的关系可以对此题进行分析求解。若位置偏差增大而编号未知，则需考虑增加方程的个数才能实现对该无人机的有效定位。

问题（3）给出圆形编队无人机的初始坐标，要求无人机仅能根据接收到的方向信息进行多次调整，给出最终使得 9 架无人机能够均匀分布于圆周上的调整方案。且要求每次圆周上发送信号的无人机不能超过 3 架，根据前述问题建立的定位模型，列出约束条件，以最终与理想圆的坐标偏差最小以及调整次数最少为目标，建立动态规划模型，考虑贪心策略进行求解。

2.2 问题二的分析

问题二将问题一中的圆形编队推广成锥形编队，要求建立纯方位无源定位模型，并设计初始位置略有偏差的锥形无人机编队调整策略。由于问题二并未给出具体坐标，可以考虑利用仿真模拟的思想，生成锥形编队坐标并对其初始坐标进行随机扰动，仍依据几何关系实现被动接收无人机的无源定位，进而借鉴问题（3）的方法对该问题进行求解。

三、 模型假设

1. 无人机均保持同一高度且相对位置保持不变。
2. 编队中无人机位置偏差较小，不会影响纯方位无源定位模型的计算。
3. 不考虑无人机位置调整所需时间。
4. 编队中各架无人机的编号保持不变。

四、 符号说明

符号	说明	单位
θ_i	第 <i>i</i> 架无人机的极角	rad
ρ_i	第 <i>i</i> 架无人机的极径	m
α_i	无人机所收到的方向信息	rad
r	理想圆半径	m

注：表中未给出的符号说明，在文中均有解释

五、 模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 问题（1）模型的建立与求解

（一）问题（1）纯方位无源定位模型的建立

鉴于编号已知的2架发射信号的无人机有多种位置分布情况,需要进行分类讨论。首先,以编号 FY00 无人机所在圆心为原点建立极坐标系。无人机 FY01 所处方向为极轴正方向。

为方便叙述,将另外2架发射信号且编号已知的无人机所处位置设为 A、B,位置稍有偏差的被动接收信号无人机所处位置设为 T,假设该无人机的理想无偏位置为 T',T 点的坐标设为 (ρ, θ) 。

显然, A、B 两点将圆周分割为两部分,即为优弧 \widehat{AB} 和劣弧 \widehat{AB} ,由于无人机编队在圆周均匀分布的对称性,只需考虑如下四种类型。

(1) 优弧 \widehat{AB} , 劣弧 $\widehat{AT'B}$, $\theta \in (0, \pi)$;

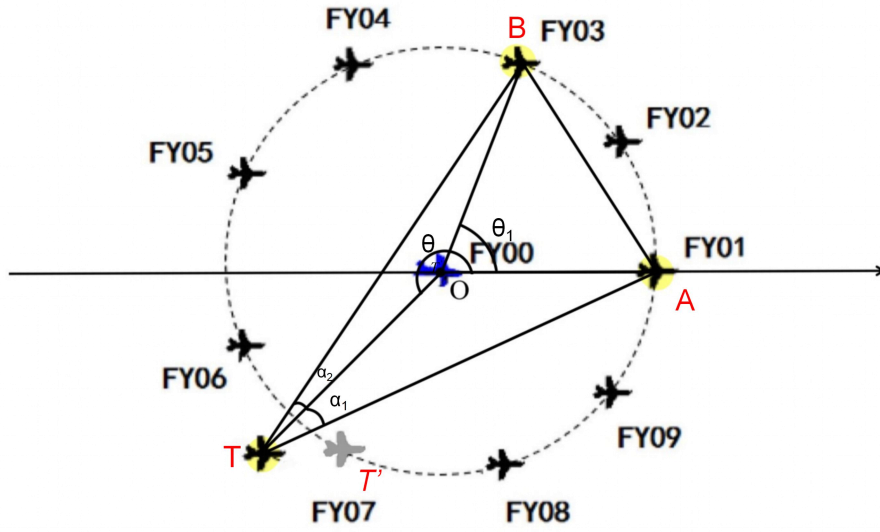


图2 位置偏离的无人机接收到的方向信息示意图

在 $\triangle OAT$, $\triangle OBT$ 中, 由正弦定理可得:

$$\begin{cases} \frac{r}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (\pi - \alpha_1 - \theta)} \\ \frac{r}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin [\pi - \alpha_2 - (\theta_1 - \theta)]} \end{cases} \quad (5.1)$$

两式联立可得

$$\frac{\sin (\pi - \alpha_1 - \theta)}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin [\pi - \alpha_2 - (\theta_1 - \theta)]}{\sin \alpha_2} \quad (5.2)$$

对上式进行化简, 得出如下结果

$$\frac{\sin \alpha_1 \cos \theta + \cos \alpha_1 \sin \theta}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin (\alpha_2 + \theta_1) \cos \theta - \cos (\alpha_2 + \theta_1) \sin \theta}{\sin \alpha_2} \quad (5.3)$$

$$\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\tan \alpha_1} = \frac{\sin (\alpha_2 + \theta_1)}{\sin \alpha_2} \cos \theta - \frac{\cos (\alpha_2 + \theta_1)}{\sin \alpha_2} \sin \theta \quad (5.4)$$

在该问题中, 发射信号的无人机位置均无偏差, 也即 r, α_1, α_2 皆已知, 所以基于上述已知量, 可得定位模型如下

$$(k_1 + k_2)\sin \theta = (k_3 - 1)\cos \theta \quad (5.6)$$

经化简，易得

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{k_3 - 1}{k_1 + k_2} + k\pi \\ \rho = \frac{r}{\sin \alpha_1} \cdot \sin (\alpha_1 + \theta) \end{cases} \quad (k = 0 \text{ 或 } 1) \quad (5.7)$$

其中，

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{\tan \alpha_1} \\ k_2 = \frac{\cos (\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \\ k_3 = \frac{\sin (\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (5.8)$$

(2) 优弧 \widehat{AB} ，劣弧 $\widehat{AT'B}$ ， $\theta \in (\pi, 2\pi)$ ；

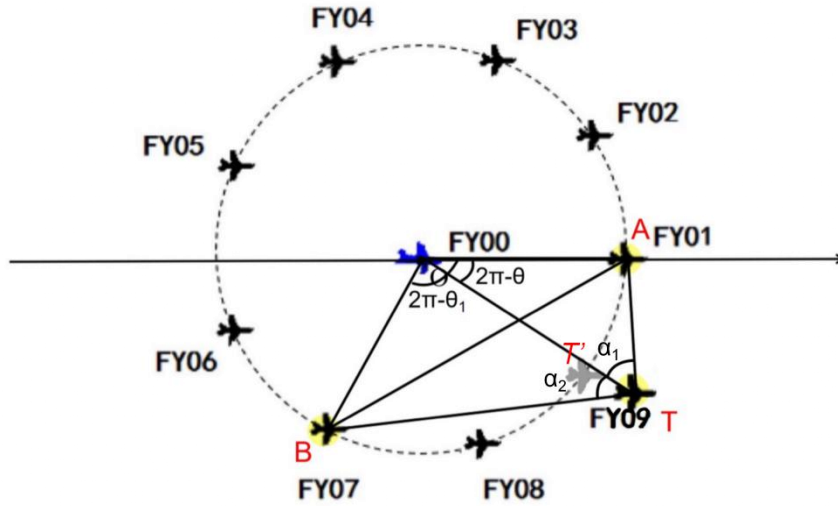


图3 位置偏离的无人机接收到的方向信息示意图

与上述情况相同，仍基于 $\triangle OAT$ ， $\triangle OBT$ 中的正弦定理，得出如下两个等式：

$$\begin{cases} \frac{r}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (\theta - \alpha_1 - \pi)} \\ \frac{r}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin [\pi - (\theta - \theta_1) - \alpha_2]} \end{cases} \quad (5.9)$$

联立得

$$\frac{\sin (\theta - \alpha_1 - \pi)}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin [\pi - (\theta - \theta_1) - \alpha_2]}{\sin \alpha_2} \quad (5.10)$$

进一步化简后可得

$$\left[-\frac{1}{\tan \alpha_1} - \frac{\cos (\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \right] \sin \theta = \left[\frac{\sin (\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} - 1 \right] \cos \theta \quad (5.11)$$

又由于 r, α_1, α_2 的已知性，便构建出该情况下的定位模型

$$(-k_1 - k_2)\sin \theta = (k_3 - 1)\cos \theta \quad (5.13)$$

化简后即得

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{k_3 - 1}{-k_1 - k_2} + k\pi \\ \rho = \frac{r}{\sin \alpha_1} \cdot \sin(\theta - \alpha_1 - \pi) \end{cases} \quad (k = 0 \text{ 或 } 1) \quad (5.14)$$

其中，

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{\tan \alpha_1} \\ k_2 = \frac{\cos(\alpha_2 + \theta_1)}{\sin \alpha_2} \\ k_3 = \frac{\sin(\alpha_2 + \theta_1)}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (5.15)$$

(3) 劣弧 \widehat{AB} ，优弧 $\widehat{AT'B}$ ， $\theta \in (0, \pi)$ ；

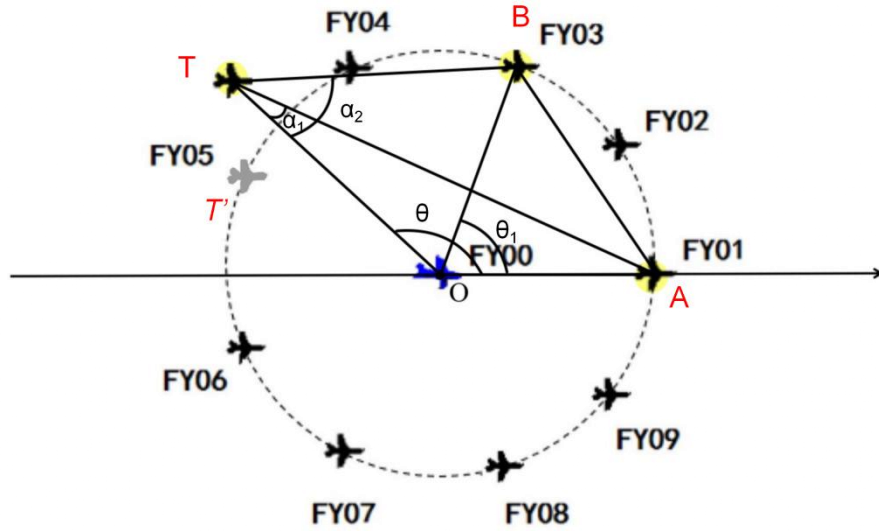


图 4 位置偏离的无人机接收到的方向信息示意图

基于 $\triangle OAT$ ， $\triangle OBT$ 使用正弦定理

$$\begin{cases} \frac{r}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin(\theta - \alpha_1 - \pi)} \\ \frac{r}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin[\pi - (\theta - \theta_1) - \alpha_2]} \end{cases} \quad (5.16)$$

两式联立化简后可得

$$\frac{1}{\tan \alpha_1} \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sin(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \cos \theta + \frac{\cos(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \sin \theta \quad (5.17)$$

又 r, α_1, α_2 均为已知量，得出如下定位模型

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{k_3 - 1}{k_1 - k_2} + k\pi \\ \rho = \frac{r}{\sin \alpha_1} \cdot \sin(\theta - \alpha_1 - \pi) \end{cases} \quad (k = 0 \text{ 或 } 1) \quad (5.18)$$

其中,

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{\tan \alpha_1} \\ k_2 = \frac{\cos(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \\ k_3 = \frac{\sin(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (5.19)$$

(4) 劣弧 \widehat{AB} , 优弧 $\widehat{AT'B}$, $\theta \in (\pi, 2\pi)$;

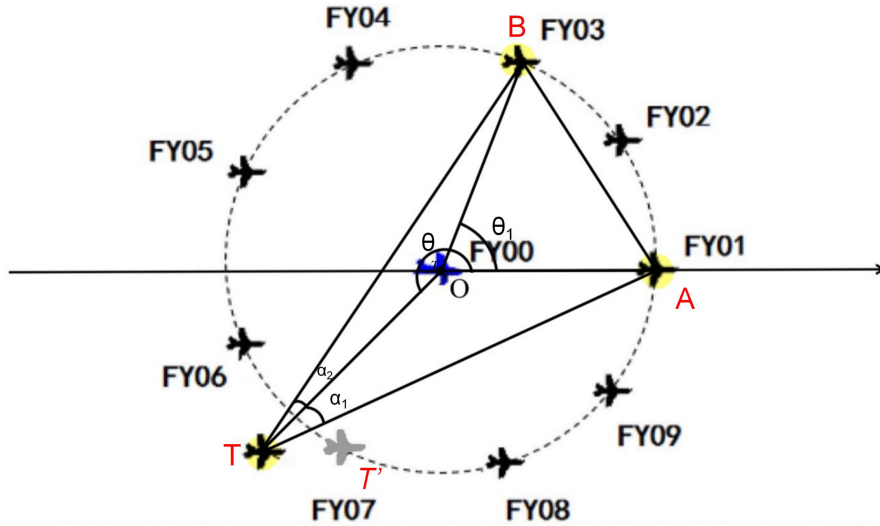


图 5 位置偏离的无人机接收到的方向信息示意图

同上, 在 $\triangle OAT$, $\triangle OBT$ 中, 由正弦定理得

$$\begin{cases} \frac{r}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin [\pi - (\theta - \theta_1) - \alpha_2]} \\ \frac{r}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (\theta - \alpha_1 - \pi)} \end{cases} \quad (5.20)$$

两式联立化简可得

$$\cos \theta - \frac{1}{\tan \alpha_1} \sin \theta = \frac{\cos(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \sin \theta + \frac{\sin(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \cos \theta \quad (5.21)$$

最终可得化简后的定位模型为

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{k_3 - 1}{-k_1 - k_2} + k\pi \\ \rho = \frac{r}{\sin \alpha_2} \cdot \sin(\theta - \alpha_1 - \pi) \end{cases} \quad (k = 0 \text{ 或 } 1) \quad (5.22)$$

其中,

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{\tan \alpha_1} \\ k_2 = \frac{\cos(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \\ k_3 = \frac{\sin(\alpha_2 - \theta_1)}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (5.23)$$

(二) 问题（1）纯方位无源定位模型的检验

对上述定位模型进行检验, 采用问题（3）中部分坐标, 分别选取 [FY03, FY01], [FY04, FY01], [FY07, FY01] 与 FY00 无人机成为 3 架发射信号的无人机组合。

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ \overrightarrow{AC} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1) \end{aligned} \quad (5.24)$$

利用向量夹角公式, 可得

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \arccos \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

当发射信号的无人机组合为 [FY07, FY01] 与 FY00 时, 每个点对应的 α_1, α_2 如下

表 1 坐标与对应角度

极坐标 (r, θ)	α_1	α_2
(98, 40.10)	71.5338	71.5338
(98, 159.86)	10.1700	50.6208
(112, 199.96)	9.4080	61.1518
(112, 320.28)	61.2320	46.0200

带入上述模型中进行求解得出各点对应的极坐标, 三种组合求解得结果如下:

表 2 问题（1）验证结果

极坐标 (r, θ)	[FY03, FY01]	[FY04, FY01]	[FY07, FY01]
(98, 40.10)	(98, 40.10)	(98, 40.10)	(98, 40.10)

(98, 159.86)	(98, 159.86)	(98, 159.86)	(98, 159.86)
(112, 199.96)	(112, 199.96)	(112, 199.96)	(112, 199.96)
(112, 320.28)	(112, 320.28)	(112, 320.28)	(112, 320.28)

由表可知，求解得坐标与实际坐标基本无偏差，证明问题（1）中纯方位无源定位模型较为精确，可为后续的定位求解使用。

5.1.2 问题（2）模型的建立与求解

由问题（1）的定位模型，考虑除了 FY00 和 FY01，只有 1 架发射信号的无人机在圆周上，

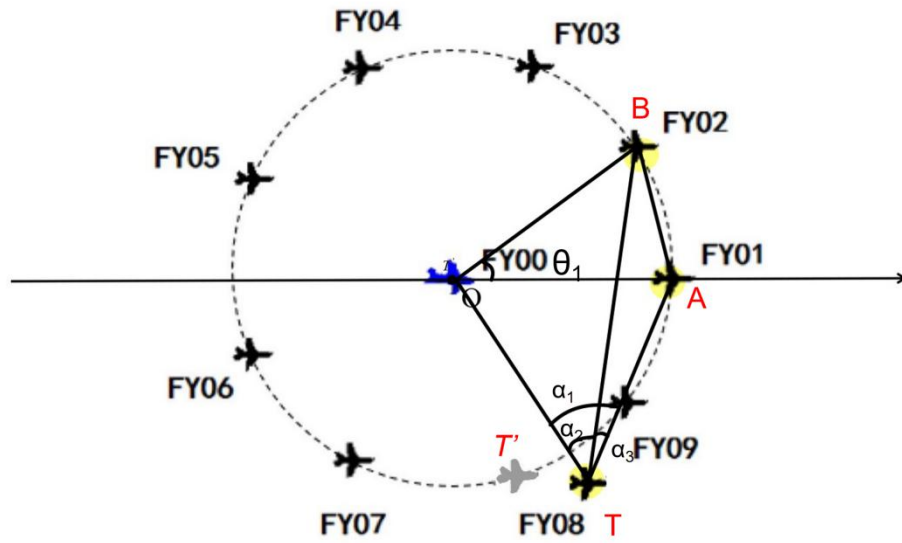


图 6 无人机位置示意图

由分析得，下列方程组

$$\begin{cases} \frac{R}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (2\pi - \theta + \alpha_1)} \\ \frac{R}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin (2\pi - \theta + \alpha_2)} \end{cases} \quad (5.26)$$

由于方程组只有两个方程，但是有 ρ, θ, θ_1 三个未知数，不能解出方程组的解。由下图所示，有平面几何的定理，优弧所对的圆周角等于圆心角的一半，即

$$2\angle BAC = \angle BOC \quad (5.27)$$

定位模型中

$$\theta = 2\alpha_3 \quad (5.28)$$

由于模型中接受信号的无人机可以获得 θ 的大小，则在微小的误差范围内，也即是 $|\theta| < 10^\circ$ ，可以将 $\frac{\theta}{20^\circ}$ 进行四舍五入，可以获得位置未知无人机和 FY01 的极角的差值，

即有

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0 \quad (5.29)$$

将上式带入原方程可以解出方程的解，则在这种情况下可以可以解出方程的解，此时只需要一架无人机即可。

但是，在不能确定极角的差值时，定位模型变得不适用了。现在根据隐圆定理，定边所对的角不变的动点轨迹是圆或圆弧，提出一个基于隐圆定理的定位模型。

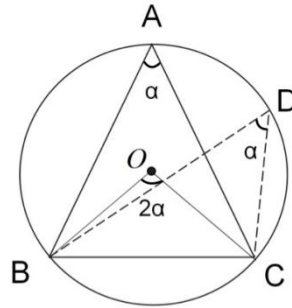
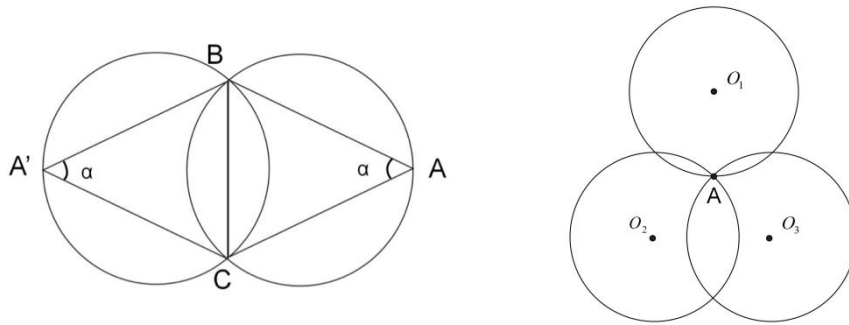


图 7 隐圆定理示意图

由一个定边和一个定角可以确定一个圆，从下图可以看出，想要唯一确定一个点，只有两个圆相切的时候才能唯一确定一个点，但是满足这个条件比较困难；如图（a）所示两个圆相交时，有两个交点，不满足唯一性。因此，如图（b）所示可以使用三个圆来唯一确定一个点，从而实现定位。



图（a）

图（b）

图 8 隐圆定位示意图

情形一:若除了 FY00 和 FY01，只有 1 架发射信号的无人机，可做如下分析：

例如，令 FY08 为接受信号的无人机（如下图所示），设未知的发射信号的无人机的坐标为 (R, θ_1) 。

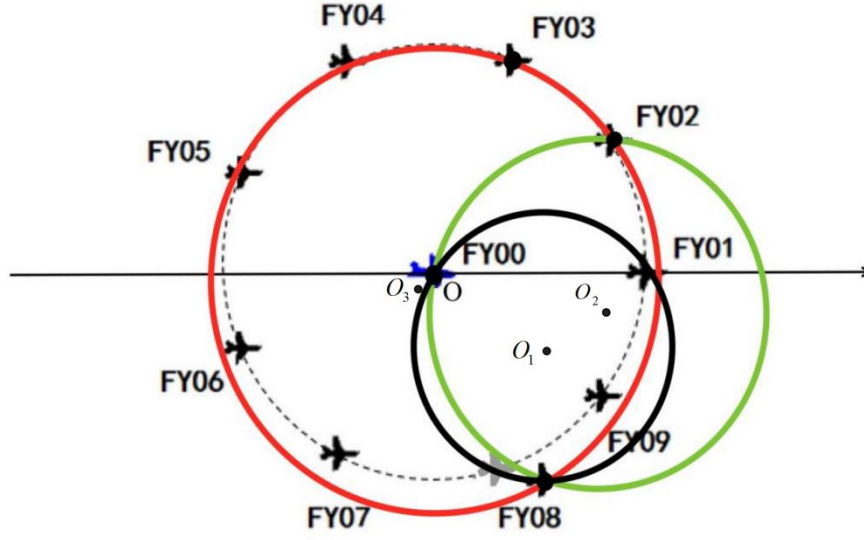


图9 情形一无人机位置示意图

设圆的方程为:

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = R_i^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.30)$$

圆 1 满足方程:

$$\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = R_1^2 \\ (R - a_1)^2 + b_1^2 = R_1^2 \\ 2R_1 = \frac{R}{\sin \alpha_3} \end{cases} \quad (5.31)$$

联立方程, 解得:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}R \\ b_1^2 = \frac{R^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \\ R_1 = \frac{R}{2\sin \alpha_3} \end{cases} \quad (5.32)$$

圆 2 满足方程:

$$\begin{cases} a_2^2 + b_2^2 = R_2^2 \\ (R \cos \theta_1 - a_2)^2 + (R \sin \theta_1 - b_2)^2 = R_2^2 \\ 2R_2 = \frac{1}{\sin \alpha_1} \end{cases} \quad (5.33)$$

联立方程, 解得:

$$\begin{cases} b_{21,2} = \frac{R \sin \theta_1 \pm R \cos \theta_1 \sqrt{-1 + \csc^2 \alpha_1}}{2} \\ a_2^2 = \frac{\left(-R^2 + R^2 \sin \theta_1 \pm \frac{1}{2} R \sin 2\theta_1 \sqrt{-1 + \csc^2 \alpha_1} \right)^2}{4 \cos^2 \theta_1} \\ R_2 = \frac{R}{2 \sin \alpha_1} \end{cases} \quad (5.34)$$

圆 3 满足方程：

$$\begin{cases} (R - a_3)^2 + b_3^2 = R_3^2 \\ (R \cos \theta_1 - a_3)^2 + (R \sin \theta_1 - b_3)^2 = R_3^2 \\ R_3 = \frac{R}{2 \sin \alpha_2} \end{cases} \quad (5.35)$$

联立方程，解得：

$$\begin{cases} a_{21,2} = \frac{2R \pm 2R \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha_2}\right) \left[\frac{(\cos \theta_1 - 1)^2}{\sin^2 \theta_1} + 1 \right]}}{2 \left[\frac{(\cos \theta_1 - 1)^2}{\sin^2 \theta_1} + 1 \right]} \\ b_{21,2} = \sin \theta_1 (\cos \theta_1 - 1) \cdot \frac{R \pm R \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha_2}\right) \left[\frac{(\cos \theta_1 - 1)^2}{\sin^2 \theta_1} + 1 \right]}}{(\cos \theta_1 - 1)^2 + \sin^2 \theta_1} \\ R_3 = \frac{R}{2 \sin \alpha_2} \end{cases} \quad (5.36)$$

为了解出三个圆的交点，得出接收信号的无人机位置，联立如下方程：

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2 \\ (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = R_3^2 \end{cases} \quad (5.37)$$

方程组可以解出 x, y 关于 θ 的解的形式，但是 θ 未知，故不能实现定位的功能。

情形二：现考虑额外发射信号的无人机的数量为 2 架(如图所示)，仍以 FY08 做为接受信号的无人机，另两架无人机的坐标设为 (R, θ_1) ， (R, θ_2) 。

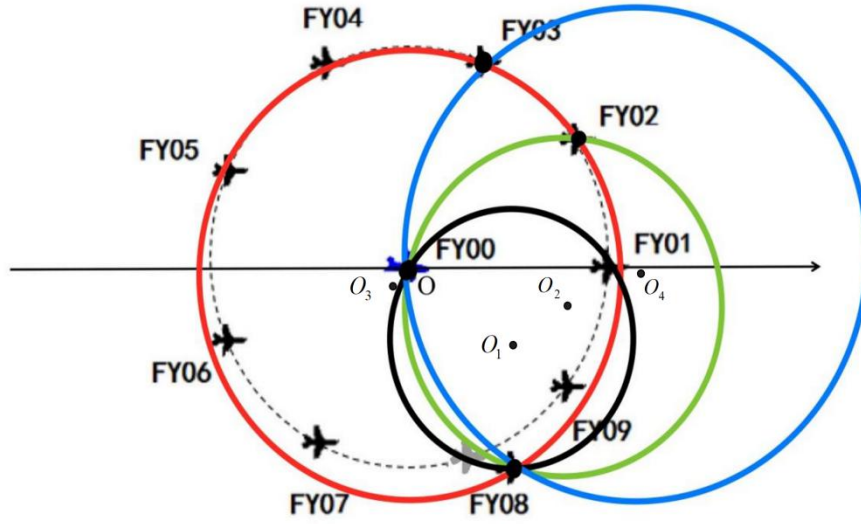


图 10 情形二无人机位置示意图

则需要在上述模型中，加入另一方程组，具体如下：

$$\begin{cases} a_4^2 + b_4^2 = R_4^2 \\ (R \cos \theta_2 - a_4)^2 + (R \sin \theta_2 - b_4)^2 = R_4^2 \\ R_4 = \frac{R}{2 \sin \alpha_4} \end{cases} \quad (5.38)$$

上述方程组解得：

$$\begin{cases} b_{41,2} = \frac{R \sin \theta_2 \pm R \cos \theta_2 \sqrt{\csc^2 \alpha_4 - 1}}{2} \\ a_4^2 = \frac{R - R \sin^2 \theta_2 \pm \frac{1}{2} R \sin 2\theta_2 \sqrt{\csc^2 \alpha_4 - 1}}{4 \cos^2 \theta_2} \\ R_4 = \frac{R}{2 \sin \alpha_4} \end{cases} \quad (5.39)$$

为确定接收信号的无人机位置，需求解得出四个圆的交点，故联立方程如下：

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2 \\ (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = R_3^2 \\ (x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 = R_4^2 \end{cases} \quad (5.40)$$

选择方程 (1, 2, 3), (1, 3, 4) 和 (1, 2, 4) 每组方程都能解出 x, y 关于 θ_1 ,

θ_2 的解的形式，由于每个方程的 x 与 y 分别相等，则可以消去 θ_1, θ_2 ，最终得到 x, y 与 θ_1, θ_2 无关的表达式，则最终需要 2 架无人机，才能完成有效定位。

5.1.3 问题（3）模型的建立与求解

（一）圆周编队无人机动态调整模型的建立

设理想点坐标分别为 (x_s, y_s) ，极坐标 (R_s, θ_s) 。设总调整次数为 n ，第 i 次调整后编号为 k 的无人机极坐标变为 (R_{ik}, θ_{ik}) ，则对应笛卡尔坐标变为 (x_{ik}, y_{ik}) 。

目标函数为使得无人机编队均匀分布在半径为 100 的圆周上，且保证无人机集群尽可能少的发射信号。

$$\min \sum_{k=1}^9 (x_{nk} - x_s)^2 + (y_{nk} - y_s)^2 \quad (1)$$

min n

决策变量为每次每架无人机的坐标变化 $\Delta r_{ik-1}, \Delta \theta_{i,k-1}$ 以及圆周上发射信号的无人机的选取 $z_{ik} (i=1,2,\dots,n) (k=1,2,\dots,9)$ 。其中 $\Delta r_{ik-1}, \Delta \theta_{i,k-1}$ 分别表示编号为 k 的无人机第 i 次的极角和极径的调整量。

$$z_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{第 } i \text{ 次调整时，第 } k \text{ 架无人机发射信号} \\ 1 & \text{第 } i \text{ 次调整时，第 } k \text{ 架无人机被动接收信号} \end{cases} \quad (2)$$

约束条件为

每次选择的圆周上无人机的架数不超过三架

$$\sum_{j=1}^9 z_{ij} \leq 3 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_{i,k} = R_{i,k} \cos \theta_{i,k} \\ y_{i,k} = R_{i,k} \sin \theta_{i,k} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) (k = 1, 2, \dots, 9) \quad (4)$$

又

$$\begin{cases} R_{i,k} = R_{i,k-1} + \Delta r_{i,k-1} \\ \theta_{i,k} = \theta_{i,k-1} + \Delta \theta_{i,k-1} \end{cases} \quad (5)$$

其中，

$$\begin{cases} \Delta_{i,k} = f(R_{i-1,k}, R_s, z_{ik}) \\ \Delta \theta_{i,k} = g(\theta_{i-1,k}, \theta_s, z_{ik}) \end{cases} \quad (6)$$

f, g 表示为问题（1）中所建立的定位模型， $\Delta_{i,k}, \Delta \theta_{i,k}$ 的选取由

$R_{i-1,k}, R_s, z_{ik}, \theta_{i-1,k}, \theta_s, z_{ik}$ 共同决定。

（二）模型的求解算法

由于上述多目标规划模型约束条件较为复杂，若想求得全局最优解，仅依靠模型直接求解无法实现。因此，考虑每次选取与理想位置偏差最小的无人机发射信号的启发信息，使用贪心策略求解当前最优，且保证每次调整中所有被动接收信号的无人机

均进行调整，以此求得近似全局最优解。

Step1 计算理想点坐标及其与初始位置坐标偏差；

Step2 根据坐标偏差值定义精度 e ；

此处定义 $e=1$ 。

Step3 找出当前与理想点偏差最小的无人机，与 FY00、FY01 组成 3 架无人机遂行发射信号；

Step4 其余无人机被动接收方向信息，利用（1）中所得纯方位无源定位模型进行定位，据此调整至该无人机自身对应的理想位置；

Step5 计算调整后的位置坐标及总偏差 S ；

Step6 判断，若 $S < e$ ，则结束；反之，则返回 Step3。

基于上述步骤，可求得无人机集群的位置调整方案（见表 3）。

表 3 无人机集群具体调整方案

编号	初始位置	第一次调整后	第二次调整后	第三次调整后
0	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
1	(100, 0)	(100, 0)	(100, 0)	(100, 0)
2	(98, 40.10)	(98, 40.1013)	(99.9977, 40.0039)	(99.9977, 40.0039)
3	(112, 80.21)	(97.1109, 82.0647)	(99.8499, 80.0995)	(99.9998, 80.0021)
4	(105, 119.75)	(96.2554, 121.2321)	(99.6519, 120.1149)	(100.0052, 120.0003)
5	(98, 159.86)	(97.5407, 160.2506)	(99.4699, 160.0558)	(100.0113, 159.9985)
6	(112, 199.96)	(99.3832, 199.9394)	(99.3832, 199.9394)	(100.0154, 200.0024)
7	(105, 240.07)	(101.3565, 240.4417)	(99.5801, 239.8631)	(100.0156, 240.0063)
8	(98, 280.17)	(102.2107, 281.4827)	(99.9131, 279.9414)	(100.0117, 280.0102)
9	(112, 320.28)	(100.9819, 322.3461)	(100.0219, 320.0370)	(100.0055, 320.0084)

其中，将红色坐标对应编号的无人机，作为调整时发射信号的无人机。为形象演绎编队调整过程，做出更为直观的呈现，做出每一次位置调整的示意图如下。

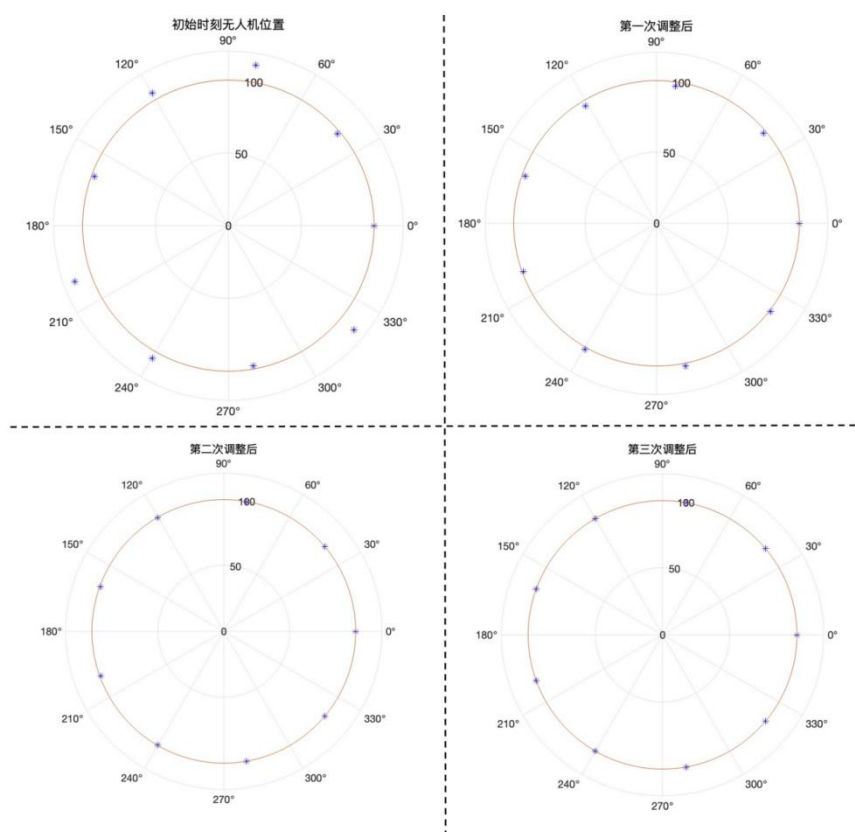


图 10 无人机调整方案示意图

此外，在每一次调整后进行偏差分析，并与初始值对比，查看调整效果，可得如下结果。

表 4 偏差分析结果

初始值	第一次调整后	第二次调整后	第三次调整后
494.8136	82.2208	1.1526	0.0014

综上，由图 10 与表 3,4 可以看出，经 3 次调整后，9 架无人机整体基本均匀分布于半径为 100 的圆周上，且误差很小，至此，该调整方案的可行性与精确性得到充分体现，具有较高的应用价值。

5.2 问题二模型的建立与求解

（一）锥形编队无人机动态调整模型的建立

问题二将飞行编队推广为锥形编队，问题一（3）中我们建立了圆周上均匀分布的无人机编队调度模型，考虑到锥形编队队形（见图 11），其相邻两架无人机的间距相等。考虑以 FY05 为圆心，以 FY03 方向为极轴正方向建立极坐标系，由图可知，理想状态下，锥形编队中 FY02,FY03,FY04,FY06,FY08,FY09 均匀分布在以 FY05 为圆心，50 为半径的圆上。因此，设计无人机位置调整方案如下：

Step1 采用问题一（1）中无人机编队纯方位无源定位模型，即将问题一（1）中九架无人机改为六架，选取圆心 FY05 与圆周上两架无人机发射信号，其余无人机被动接收信号，依据方位角进行定位。模型如下

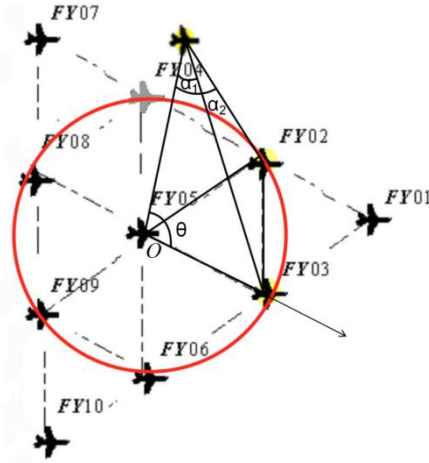


图 11 FY04 定位方法示意图

由正弦定理可得

$$\begin{cases} \frac{R}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (\theta + \alpha_1)} \\ \frac{\rho_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin (\alpha_2 + \theta - \theta_2)} \end{cases} \quad (1)$$

联立化简，求解得

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{l_2 \sin (\alpha_2 - \theta_2) - l_1 \sin \alpha_1}{l_2 \cos \alpha_1 - l_2 \cos (\alpha_2 - \theta_2)} \\ \rho = l_1 \sin (\theta + \alpha_1) \end{cases} \quad (2)$$

其中，

$$\begin{cases} l_1 = \frac{R}{\sin \alpha_1} \\ l_2 = \frac{R}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (3)$$

Step2 仍采用问题一（3）中无人机编队位置调整模型与算法，使得锥形编队中 FY02, FY03, FY04, FY06, FY08, FY09 均匀分布在以 FY05 为圆心，50 为半径的圆上。

Step3 在问题一（3）中加入对 FY01, FY07, FY10 三架无人机的定位及调整，具体如下

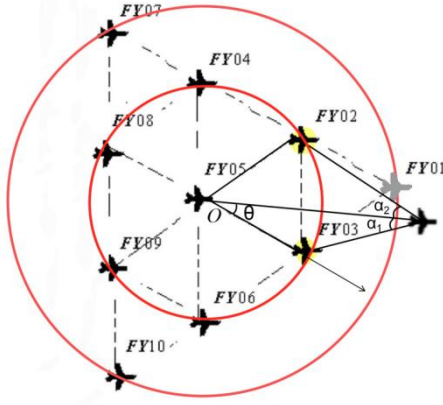


图 12 FY01 定位方法示意图

由正弦定理可得

$$\begin{cases} \frac{R}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (\theta + \alpha_1)} \\ \frac{\rho_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin (\alpha_2 + \theta_2 - \theta)} \end{cases} \quad (4)$$

联立化简，求解得

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{l_2 \sin (\alpha_2 + \theta_2) - l_1 \sin \alpha_1}{l_2 \cos (\alpha_2 + \theta_2) + l_1 \cos \alpha_2} \\ \rho = l_1 \sin (\theta + \alpha_1) \end{cases} \quad (5)$$

其中，

$$\begin{cases} l_1 = \frac{R}{\sin \alpha_1} \\ l_2 = \frac{R_2}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (6)$$

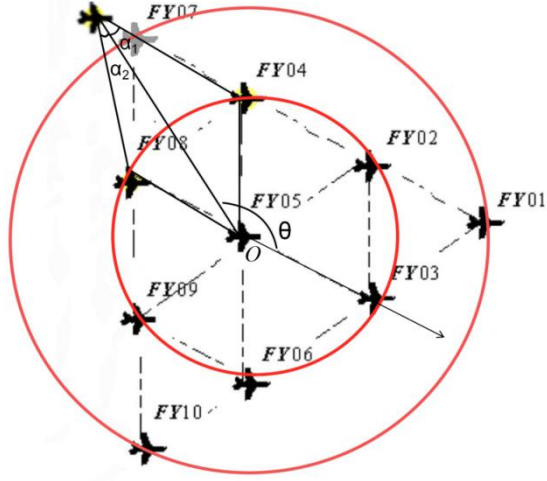


图 13 FY07 定位方法示意图

由正弦定理可得

$$\begin{cases} \frac{R}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (\theta + \alpha_1)} \\ \frac{\rho}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin (\alpha_2 + \theta - \theta_2)} \end{cases} \quad (7)$$

联立化简，求解得

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{l_2 \sin (\alpha_2 + \theta_8) - l_1 \sin (\alpha_1 - \theta_4)}{l_2 \cos (\alpha_2 + \theta_8) + l_1 \cos (\alpha_1 - \theta_4)} \\ \rho = l_1 \sin (\alpha_1 + \theta - \theta_4) \end{cases} \quad (8)$$

其中，

$$\begin{cases} l_1 = \frac{\rho_4}{\sin \alpha_1} \\ l_2 = \frac{\rho_8}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (9)$$

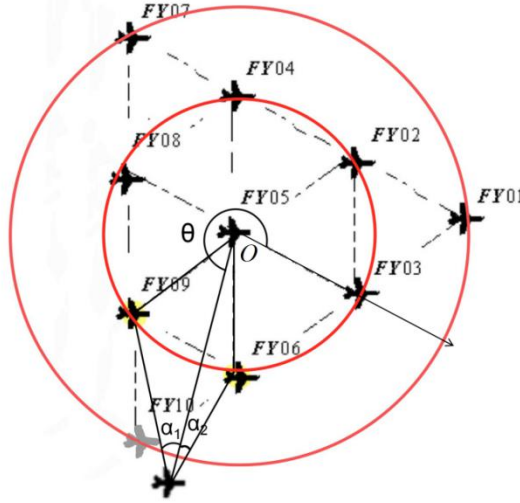


图 14 FY10 定位方法示意图

同上，基于正弦定理，可列出如下两式

$$\begin{cases} \frac{\rho_9}{\sin \alpha_1} = \frac{\rho}{\sin (\alpha_1 + \theta - \theta_9)} \\ \frac{\rho_6}{\sin \alpha_2} = \frac{\rho}{\sin (\alpha_2 + \theta_6 - \theta)} \end{cases} \quad (10)$$

联立化简，求解得

$$\begin{cases} \theta = \arctan \frac{l_2 \sin (\alpha_2 + \theta_8) - l_1 \sin (\alpha_1 - \theta_4)}{l_2 \cos (\alpha_2 + \theta_8) + l_1 \cos (\alpha_1 - \theta_4)} \\ \rho = l_1 \sin (\alpha_1 + \theta - \theta_4) \end{cases} \quad (11)$$

其中，

$$\begin{cases} l_1 = \frac{\rho_9}{\sin \alpha_1} \\ l_2 = \frac{\rho_9}{\sin \alpha_2} \end{cases} \quad (12)$$

Step4 对锥形编队中的无人机进行动态调整，使得最终与理想位置距离偏差最小。

（二）锥形编队无人机动态调整的仿真实验

利用 matlab 进行仿真，取直线上相邻两架无人机得间距为 50m，同问题一，仍取编队中无人机架数为 10。按上述坐标系计算得出理想坐标点的位置（见附录），然后利用 rand 函数对坐标位置进行随机扰动，使得每架无人机坐标极角的偏移量不超过 1° ，极径偏移量不超过 10m。

随机偏差产生方法如下

$$r' = 20 \cdot \text{rand} - 10$$

$$t' = 2 \cdot \text{rand} - 1$$
(13)

生成的锥形无人机编队中各架无人机坐标见下表（每次运行结果不唯一）。

表 5 无人机集群具体坐标

无人机编号	极坐标 (m,rad)
FY01	(88.9001, 0.5283)
FY02	(58.0170, 1.0384)
FY03	(50.000,0)
FY04	(51.4932,2.1002)
FY05	(0,0)
FY06	(51.7197,5.2416)
FY07	(90.5101,2.6194)
FY08	(56.9036,3.1271)
FY09	(54.7728,4.1932)
FY10	(91.4265,4.7199)

采用纯方位无源定位模型（类似问题一（1）和问题（3）），求解的调整方案如下

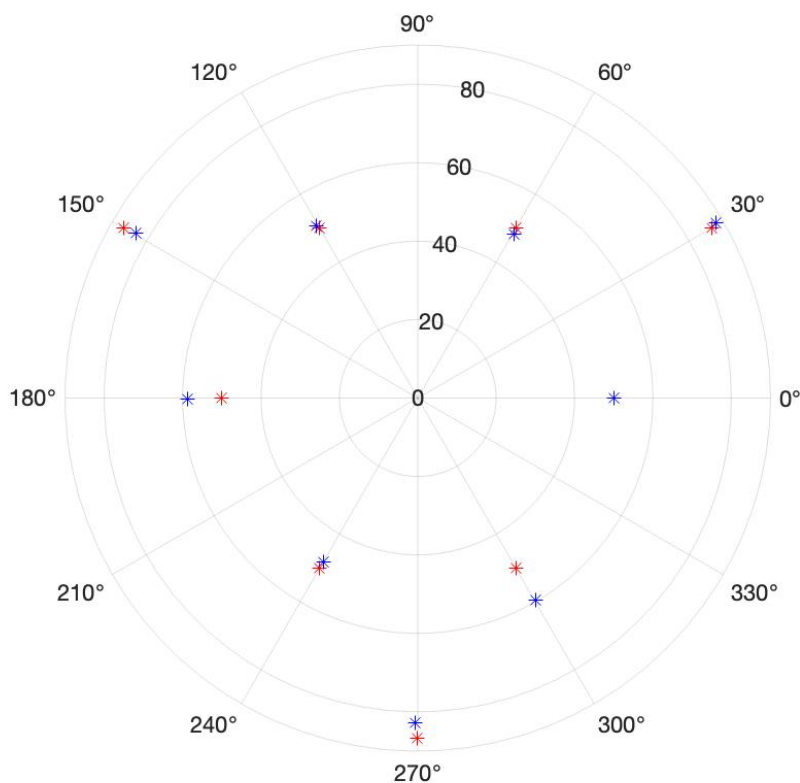


图 15 调整方案示意图

表 6 无人机集群调整方案

无人 机编 号	极坐标 (m,rad)	第一次调整	第二次调整	第三次调整
FY01	(88.9001, 0.5283)	(88.2465, 0.5270)	(87, 7125, 0.5281)	(88.9001, 0.5283)
FY02	(58.0170, 1.0384)	(58.7687, 1.0164)	(49.6879, 1.0587)	(58.0170, 1.0384)
FY03	(50.000,0)	(50, 0)	(50, 0)	(50.000,0)
FY04	(51.4932,2.100 2)	(51.4932, 2.1002)	(49.4894, 2.1002)	(51.4932,2.1002)
FY05	(0,0)	(0, 0)	(0, 0)	(0,0)
FY06	(51.7197,5.241 6)	(50.1617, 5.2418)	(50.1617, 5.2418)	(51.7197,5.2416)
FY07	(90.5101,2.619 4)	(91.4200, 2.6193)	(90.3078, 2.6180)	(90.5101,2.6194)
FY08	(56.9036,3.127 1)	(51.8026, 3.1413)	(59.6341,3.1415)	(56.9036,3.1271)
FY09	(54.7728,4.193 2)	(50.0566, 4.2006)	(50.0028,4.1888)	(54.7728,4.1932)
FY10	(91.4265,4.719 9)	(90.4270, 4.7523)	(88.4457,4.7230)	(91.4265,4.7199)

六、 模型的评价、改进与推广

6.1 模型的优点

问题（1）中进行分类讨论，求解多种情况下的定位模型，分类标准选取合理，不仅使得模型能较为全面地覆盖无人机位置分布的多种可能性，且分类情况条分缕析、呈现方式简洁明了，避免了繁杂重复的分类所带来的冗余问题。此外，经过检验，定位模型较为精确，可行性强、实用性高；

问题（3）中通过贪心策略进行求解近似最优解，较为简单直接。

6.2 模型的缺点

仅仅在二维空间中考虑定位模型，满足应用场景多样化的能力尚有欠缺。

6.3 模型的改进

忽略了调整位置的时间，因而无法判断定位效率。因而，可以将更多的与位置调整相关的因素加入模型中，使得模型可以更为精准地衡量定位效率，实现更好的编队调整效果。

6.4 模型的推广

本模型基于纯方位无源定位技术构建而成，在无人机遂行编队领域，可以实现多种编队队形，通过独具创新的编队方式呈现出空前的视觉盛宴，满足用户的差异化需求。

此外，无源定位技术借助其高度隐蔽性的优势，在军事技术领域也有着较高的实际应用价值，该模型也可应用于海上侦察船等船舶跟踪与定位之中。

七、 参考文献

本论文没有用到参考文献。

附录

附录 1

介绍：计算坐标值 r

```
function t=polar_coordinates_t(a1,a2,id,x)

%根据角度计算极坐标

%a1,a2 为角度 id 为发射信号的无人机序号

%接受信号的无人机编号为 x

theta1=2/9*pi*(id-1); %发射信号的无人机角度

k1=1/tan(a1);

%theta1,a1,a2 为已知

if id==2
if x<=5
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1-k2);
elseif x>6
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);
else
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
end
elseif id==9
if x>=6
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);
elseif x<5
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1-k2);
else
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
end
```



```

elseif id==3
if x>3&&x<=5
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1-k2);
elseif x==2
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);
elseif x>7
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);
else
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
end
elseif id==8
if x==6||x==7
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);
elseif x<4
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1-k2);
elseif x==9
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
else
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);
end
elseif id==4
if x==2||x==3
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);
elseif x==5
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);

```

```

tant=(k3-1)/(k1-k2);
elseif x>=6&&x<=8
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
else
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);
end
elseif id==7
if x==8||x==9
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
elseif x==6
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);
elseif x==2
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1-k2);
else
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);
end
elseif id==5
if x>=2&&x<=4
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);
else
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
end
elseif id==6
if x>=7&&x<=9
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
else

```

```

k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);
end
end
if x<=3
t=atan(tant);
elseif x==8||x==9
t=atan(tant)+2*pi;
else
t=atan(tant)+pi;
end
end
end
本论文没有用到参考文献。

```

附录 2

介绍:

```

function r=polar_coordinates_r(a1,a2,t,id,x)
R=100;
if id==2
if x<=5
r=R/sin(a1)*sin(a1+t);
else
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
end
elseif id==9
if x>=6
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
else
r=R/sin(a1)*sin(a1+t);
end
elseif id==3
if x>3&& x<=5
r=R/sin(a1)*sin(a1+t);
elseif x==2
r=R/sin(a1)*sin(pi-t-a1);
else
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
end
elseif id==8
if x==6||x==7||x==9
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
else

```

```

r=R/sin(a1)*sin(pi-a1-t);
end
elseif id==4
if x==2||x==3
r=R/sin(a1)*sin(pi-t-a1);
elseif x==5
r=R/sin(a1)*sin(a1+t);
else
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
end
elseif id==7
if x==6||x==8||x==9
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
else
r=R/sin(a1)*sin(pi-a1-t);
end
elseif id==5
if x==2||x==3||x==4
r=R/sin(a1)*sin(pi-t-a1);
else
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
end
elseif id==6
if x==7||x==8||x==9
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
else
r=R/sin(a1)*sin(pi-a1-t);
end
end
end
end

```

附录 3

介绍：计算夹角

```

function [a1,a2]=azimuth2(Rid1,Tid1,Rid2,Tid2,Ri,Ti)

%计算 a1,a2 用于仿真

x0=Rid2*cos(Tid2);
y0=Rid2*sin(Tid2);
xid=Rid1*cos(Tid1);
yid=Rid1*sin(Tid1);
xi=Ri*cos(Ti);
yi=Ri*sin(Ti);

```

```

cosa1=(-xi*(x0-xi)-yi*(y0-yi))/sqrt((xi^2+yi^2)*((x0-xi)^2+(y0-yi)^2));
cosa2=(-xi*(xid-xi)-yi*(yid-yi))/sqrt((xi^2+yi^2)*((xid-xi)^2+(yid-yi)^2));
a1=acos(cosa1);
a2=acos(cosa2);
end

```

附录 4

介绍：验证问题一

```

%%问题一验证

x=[2,5,6,9];
R=[98,98,112,112];

theta=[40.10,159.86,199.96,320.28]; %初始坐标

theta=deg2rad(theta);
% [a1,a2]=azimuth_test(100,2*pi/3,R(1),theta(1));

%%
for i=1:length(R)
[a1(i),a2(i)]=azimuth_test(100,12*pi/9,R(i),theta(i));
disp([a1(i),a2(i)])
t(i)=polar_coordinates_t(a1(i),a2(i),7,x(i));
t2s(i) = rad2deg(t(i));
r(i) = polar_coordinates_r(a1(i),a2(i),t(i),7,x(i));
end

```

附录 5

介绍：问题三仿真

```

clear
clc
R=[100,98,112,105,98,112,105,98,112];

theta=[0,40.10,80.21,119.75,159.86,199.96,240.07,280.17,320.28]; %初始坐标

theta=deg2rad(theta);

```

```

polarplot([theta,2*pi],[R,100],'b*');
thetas=0:2/9*pi:2*pi; %无人机按标号极坐标角度大小

Rs=100*ones(1,9); %标准坐标

hold on;
th=0:0.01*pi:2*pi;
Rs2=100*ones(1,length(th));
polarplot(th,Rs2);
title('初始时刻无人机位置')

thetas=thetas(1:end-1); %标准角度
xs = Rs.*cos(thetas);
ys=Rs.*sin(thetas); %标准坐标
x0=R.*cos(theta);
y0=R.*sin(theta); %初始坐标

errors=(xs-x0).^2+(ys-y0).^2; %初始坐标与标准坐标的偏差

[error,id]=min(errors(2:end)); %找出从第 2 个到第 i 个偏差最小值, 作为 c

```

发射信号的无人机

```

id=id+1;% 初始发射无人机的序号

e=1;
j=0;

%固定 FY01 和 FY00 不动

a1=zeros(1,9);
a2=zeros(1,9);
thetam=zeros(1,9);
t=zeros(1,9);
Rm=zeros(1,9);
dR=zeros(1,9);
dth=zeros(1,9);
while sum(errors)>e

%根据 a1,a2 计算当前坐标

disp(id);
disp(sum(errors))
for i=2:id-1

```

```

[a1(i),a2(i)]=azimuth(R(id),theta(id),R(i),theta(i),id,i);
t(i)=polar_coordinates_t(a1(i),a2(i),id,i);
Rm(i)=polar_coordinates_r(a1(i),a2(i),t(i),id,i);

dR(i)=100-Rm(i); %需要调整的量

dth(i)=2*pi*(i-1)/9-t(i);
R(i)=R(i)+dR(i);
theta(i)=theta(i)+dth(i);
end
for i=id+1:9
[a1(i),a2(i)]=azimuth(R(id),theta(id),R(i),theta(i),id,i);
t(i)=polar_coordinates_t(a1(i),a2(i),id,i);
Rm(i)=polar_coordinates_r(a1(i),a2(i),t(i),id,i);
dR(i)=100-Rm(i);
dth(i)=2*pi*(i-1)/9-t(i);
R(i)=R(i)+dR(i);
theta(i)=theta(i)+dth(i);
end
x0=R.*cos(theta);

y0=R.*sin(theta); %计算当前坐标

errors=(xs-x0).^2+(ys-y0).^2; %初始坐标与标准坐标的偏差

[error,id]=min(errors(2:end)); %找出从第 2 个到第 i 个偏差最小值，作为
下次发射信号的无人机

id=id+1;% 初始发射无人机的序号

j=j+1;
disp(R);
disp(theta);
end

```

附录 6

介绍：问题四仿真

```
%%生成锥形编队
```

```
clear
```

```
clc
```

```

theta0=0:pi/3:2*pi-0.1;
R0=50*ones(1,6);
theta20=pi/6:2/3*pi:2*pi-0.1;
R20=50*sqrt(3)*ones(1,3);

polarplot([theta0,theta20],[R0,R20],'r*')
hold on;

%产生随机小扰动(角度偏差不超过 1 度，极径偏差不超过 10m)

r1=[0,20*rand(1,5)-10];
t1=[0,deg2rad(2*rand(1,5)-1)];
r2=10*rand(1,3)-5;
t2=deg2rad(rand(1,3)-1/2);

theta=theta0+t1;
R=R0+r1;
theta2=theta20+t2;
R2=R20+r2;
disp([R;theta])
disp([R2;theta2])
polarplot([theta,theta2],[R,R2],'b*');

%利用问题三方法调整【R1, theta1】均匀分布于圆周上

xs = R0.*cos(theta0);
ys=R0.*sin(theta0); %标准坐标

xs2=R20.*cos(theta20);
ys2=R20.*sin(theta20);

x0=R.*cos(theta);
y0=R.*sin(theta); %初始坐标

errors=(xs-x0).^2+(ys-y0).^2; %初始坐标与标准坐标的偏差

[error,id]=min(errors(2:end)); %找出从第 2 个到第 i 个偏差最小值，作为 c

发射信号的无人机

id=id+1;% 初始发射无人机的序号

e=0.5;

```



```

j=0;

%固定 FY01 和 FY00 不动

a1=zeros(1,9);
a2=zeros(1,9);
thetam=zeros(1,9);
t=zeros(1,9);
Rm=zeros(1,9);
dR=zeros(1,9);
dth=zeros(1,9);

error2=theta0-theta; %表示偏差角

s=sum(errors);
while sum(errors)>e

%根据 a1,a2 计算当前坐标

disp(id);
for i=2:id-1
[a1(i),a2(i)]=azimuth2(R(id),theta(id),50,0,R(i),theta(i));
t(i)=polar_coordinates_t_four(a1(i),a2(i),id,i,error2);
Rm(i)=polar_coordinates_r_four(a1(i),a2(i),t(i),id,i,error2);

dR(i)=50-Rm(i); %需要调整的量

dth(i)=pi*(i-1)/3-t(i);
R(i)=R(i)+dR(i);
theta(i)=theta(i)+dth(i);
end
for i=id+1:6
[a1(i),a2(i)]=azimuth2(R(id),theta(id),50,0,R(i),theta(i));
t(i)=polar_coordinates_t_four(a1(i),a2(i),id,i,error2);
Rm(i)=polar_coordinates_r_four(a1(i),a2(i),t(i),id,i,error2);
dR(i)=50-Rm(i);
dth(i)=pi*(i-1)/3-t(i);
R(i)=R(i)+dR(i);
theta(i)=theta(i)+dth(i);
end

% 将圆调整完后调整锥形上另外三点

x0=R.*cos(theta);

y0=R.*sin(theta); %计算当前坐标

errors=(xs-x0).^2+(ys-y0).^2; %初始坐标与标准坐标的偏差

```

```
[error,id]=min(errors(2:end)); %找出从第 2 个到第 i 个偏差最小值，作为下  
次发射信号的无人机
```

```
id=id+1;% 初始发射无人机的序号  
j=j+1;  
disp(R);  
disp(theta);  
error2=theta0-theta; %表示偏差角  
end
```

附录 7

介绍:

```
function r=polar_coordinates_r_four(a1,a2,t,id,x,error2)  
  
R=50;  
  
if id==2  
  
if x==3  
  
r=R/sin(a1)*sin(a1+t);  
  
elseif x==4  
  
if error2(4)>0  
  
r=R/sin(a1)*sin(a1+t);  
  
else  
  
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);  
  
end  
  
else  
  
r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);
```

```

end

elseif id==6

if x==5

r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);

elseif x==4

if error2(4)<0

r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);

else

r=R/sin(a1)*sin(a1+t);

end

else

r=R/sin(a1)*sin(a1+t);

end

elseif id==3

if x==2

r=R/sin(a1)*sin(pi-t-a1);

elseif x==4

if error2(4)>0

r=R/sin(a1)*sin(a1+t);

else

r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);

end

```

```

else

r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);

end

elseif id==5

if x==6

r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);

elseif x==4

if error2(4)<0

r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);

else

r=R/sin(a1)*sin(pi-a1-t);

end

else

r=R/sin(a1)*sin(pi-a1-t);

end

elseif id==4

if x==2||x==3

r=R/sin(a1)*sin(pi-t-a1);

else

r=R/sin(a1)*sin(t-a1-pi);

end

end

```

end

附录 8

介绍:

```
function t=polar_coordinates_t_four(a1,a2,id,x,error2)
```

```
%根据角度计算极坐标
```

```
%a1,a2 为角度 id 为发射信号的无人机序号
```

```
%接受信号的无人机编号为 x
```

```
theta1=pi/3*(id-1); %发射信号的无人机角度
```

```
k1=1/tan(a1);
```

```
if id==2
```

```
if x==3
```

```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(k1-k2);
```

```
elseif x==4
```

```
if error2(4)>0 %向上偏
```

```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(k1-k2);
```

```
else
```

```

k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
end

elseif x==5

if error2(5)>0 %向上偏移

k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(-k1-k2);

else

k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);

end

end

elseif id==6

if x==5

k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(1-k3)/(k1-k2);

elseif x==4

if error2(4)<0%向下偏移

```

```
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(1-k3)/(k1-k2);
```

```
else
```

```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
```

```
end
```

```
elseif x==3
```

```
if error2(3)>0 %向上偏移
```

```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(k1-k2);
```

```
else
```

```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
```

```
end
```

```
elseif x==2
```

```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(k1-k2);
```

```

end

elseif id==3

if x==2

k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);

k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);

tant=(k3-1)/(k1+k2);

elseif x==4

if error2(4)>0 %向上偏

k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);

k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);

tant=(k3-1)/(k1-k2);

else

k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);

k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);

tant=(k3-1)/(-k1-k2);

end

elseif x==5

k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);

k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);

tant=(k3-1)/(-k1-k2);

elseif x==6

if error2(6)<0 %向下偏

```



```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
```

```
else
```

```
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(1-k3)/(k1-k2);
```

```
end
```

```
end
```

```
elseif id==5
```

```
if x==6
```

```
k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(-k1-k2);
```

```
elseif x==3
```

```
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
```

```
tant=(k3-1)/(k1+k2);
```

```
elseif x==4
```

```
if error2(4)<0 %向下偏
```

```
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
```

```
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
```

```

tant=(1-k3)/(k1-k2);

else

k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);

end

else

if error2(2)<0 %向左偏
k2=cos(a2+theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2+theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1+k2);

else

k2=cos(a2-theta1)/sin(a2);
k3=sin(a2-theta1)/sin(a2);
tant=(k3-1)/(k1-k2);

end

end

elseif id==4

if x==2||x==3

tant=2/(1/tan(a2)-1/tan(a1));

else

tant=2/(1/tan(a1)-1/tan(a2));

```

```
end  
  
end  
  
if x==2  
    t=atan(tant);  
elseif x==6  
    t=atan(tant)+2*pi;  
else  
    t=atan(tant)+pi;  
end  
  
end
```