

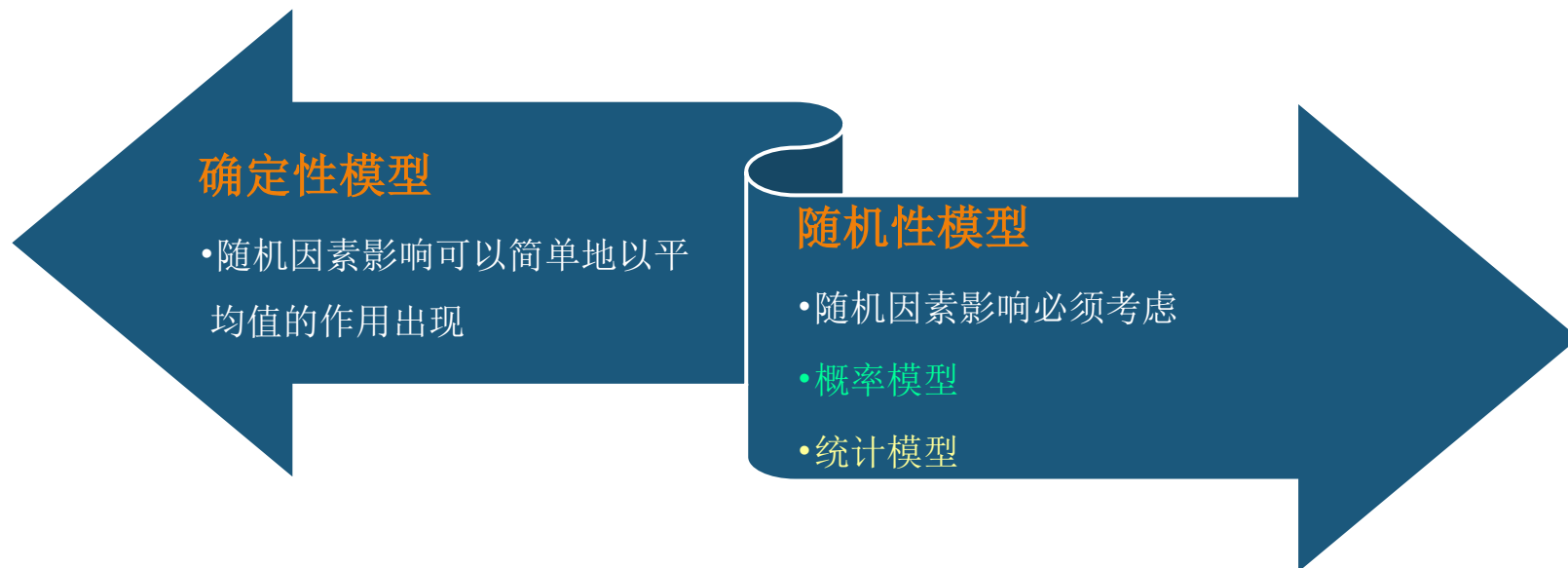


中國海洋大學

数学模型

专题：概率模型

研究对象受到**确定性因素**和**随机性因素**的影响。



概率模型 (Statistical Model, 也称为Probabilistic Model) 是用来描述不同**随机变量之间关系**的数学模型, 通常情况下刻画了一个或多个随机变量之间的相互非确定性的概率关系。从数学上讲, 该模型通常被表达为 (Y, P) , 其中 Y 是观测集合用来描述可能的观测结果, P 是 Y 对应的概率分布函数集合。若使用概率模型, 一般而言需假设存在一个确定的分布 P 生成观测数据 Y 。

概率模型基础知识

概率分布

期望

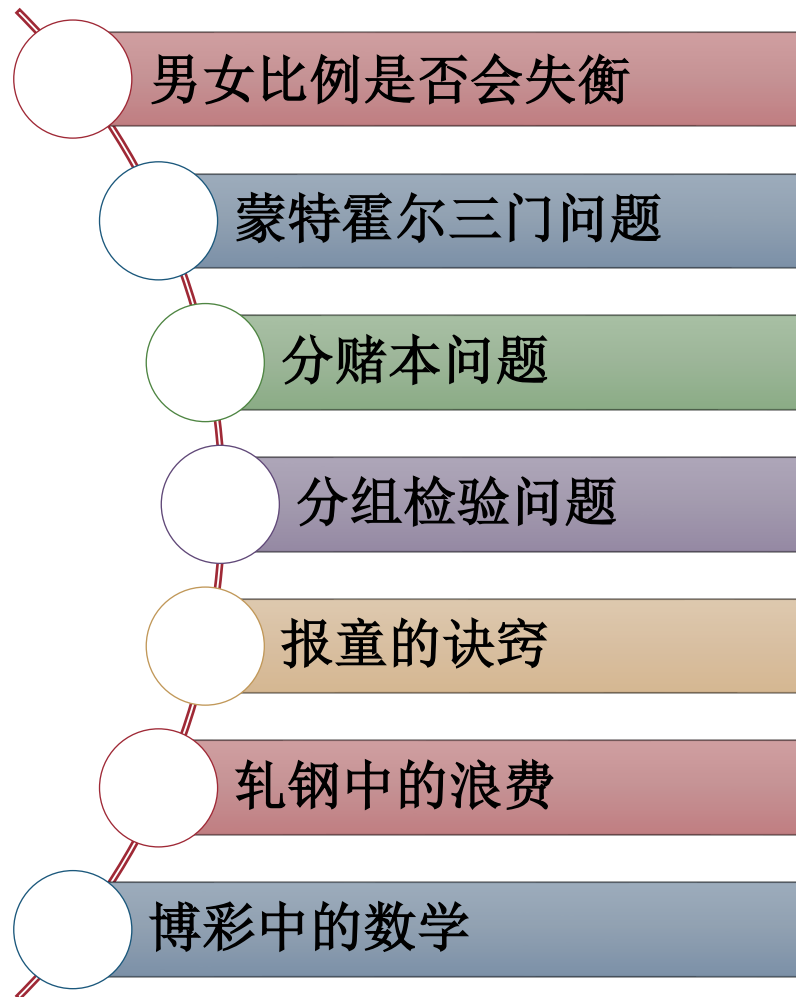
方差

协方差和相关系数

大数定律及中心极限定理



概率模型



1、男女比例失衡问题

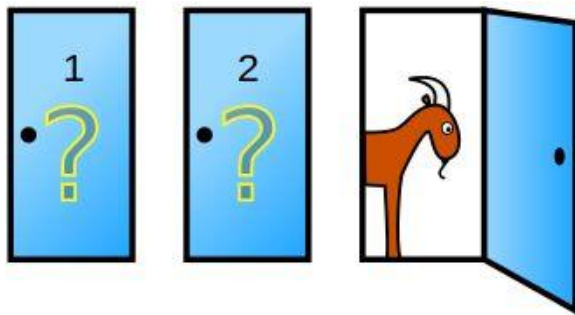
生育政策、生育意愿等是否会引起男女比例失衡？

例如：初始比例为1:1，重男轻女现象会不会引起男女比例失衡？



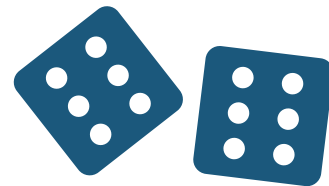
2、蒙特霍尔三门问题

游戏规则： 参赛者会看见三扇关闭的门，其中一扇的后面有一辆汽车，选中后面有车的那扇门就可以赢得该汽车，另两扇门后则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，知道门后情形的节目主持人会开启剩下两扇门的其中一扇，露出一只山羊。主持人其后会问参赛者要不要换另一扇仍然关上的门。如果你是参赛者，你是选择更换还是不选择？



3、分赌本问题

两人各出1000元进行某一赌局，约定5局3胜，获胜者将获得所有2000元赌金，假设两人赌技相同。当赌局进行到2:1时，由于某些不可抗的因素，赌局不得不终止，问应该如何分配赌金？如果约定是11局6胜呢？



4、分组检验问题

某市因出现新冠阳性病例需要全员进行核酸检测，预估阳性患者的概率为0.0001。核酸检测过程中，为加快核酸检测的速度和节约检测成本，采取分组检测的形式，即每 n 个人一组进行采样，混合以后进行检验，若是阴性，则这 n 个人都是阴性，不需要进一步检验；若混合样本检验呈阳性，则需要对这 n 个人单独进行检验，应如何确定 n 才能使得检测成本最低？

4、分组检验问题

5、报童的诀窍

问题：

报童售报：买进价2元，零售价4元，退回价1元. 售出一份赚 2元；退回一份赔 1元. 每天买进多少份报纸零售才能使收入最大？

5、报童的诀窍

问题

报童售报：买进价2元，零售价4元，退回价1元. 售出一份赚 2元；退回一份赔 1元. 每天买进多少份报纸零售才能使收入最大？

分析

- 买进太多→卖不完退回→赔钱
- 买进太少→不够销售→赚钱少
- 存在一个合适的买进量
- 取决于每天卖出多少份报纸.
- 每天需求量随机
- 每天收入随机
- 可得到需求量的随机规律
- 优化问题的目标函数应是长期的日平均收入
- 等于每天收入的期望

与报童售报相同类型的实际问题

- 面包店每天清晨烘烤一定数量的面包出售，卖出一只获利若干，未卖出的面包因处理而赔钱. 已知需求量的概率分布，确定每天烘烤面包的数量，以得到最高的日均利润.
- 出版社每年都要重印一次教科书，按照过去的销售记录，可以给出今年需求量的概率分布. 供过于求会因占用资金及廉价处理而蒙受损失，若供不应求，为保证学生用书必须临时加印导致成本增加. 怎样确定今年的印刷数量.
- 已知某种商品在供过于求和供不应求时所带来的收益或损失，已知需求量的概率分布，确定商品的数量使得平均利润最高.

5、报童的诀窍

离散型需求下的报童售报模型

售出100份报纸获利200元，退回100份损失100元.

报童售报离散型需求的概率分布

需求量(100份)	0	1	2	3	4	5
概率	0	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1

报童应买进多少份报纸，才能获得最高的日均利润

假设

- 每天买进 q ($\times 100$)份报纸.
- 售出100份获利 s_1 ，退回100份损失 s_2 .
- 每天需求量(100份) r 的概率 $f(r)$, $r = 0,1, \dots, n$

离散型需求下的报童售报模型

建模

供不应求 $\Rightarrow q < r \Rightarrow$ 售出获利 qs_1 没有损失

供过于求 $\Rightarrow r < q$ 售出获利 s_1r , 退回损失 $s_2(q-r)$

一天的利润

$$s(r, q) = \begin{cases} s_1r - s_2(q - r), & r \leq q \\ s_1q, & r > q \end{cases}$$

$$E(q) = \sum_{r=0}^n s(r, q)f(r) = \sum_{r=0}^q [s_1r - s_2(q - r)]f(r) + \sum_{r=q+1}^n s_1qf(r)$$

已知 $s_1, s_2, f(r)$, 求买进数量 q 使日均利润 $E(q)$ 最大.

离散型需求下的报童售报模型

求解

分析 q 增加时 从 $E(q)$ 到 $E(q + 1)$ 的变化

- 若 $q < r$, $E(q + 1) - E(q) = s_1$
- 若 $q \geq r$, $E(q + 1) - E(q) = -s_2$

$$\begin{aligned} E(q + 1) - E(q) &= s_1 P(r > q) - s_2 P(r \leq q) \\ &= s_1 - (s_1 + s_2) P(r \leq q) \end{aligned}$$

$E(q)$ 的最大值在 $E(q + 1) - E(q)$ 由正变负时达到.

不等式

$$P(r \leq q) \geq \frac{s_1}{s_1 + s_2}$$

成立的最小 q 使 $E(q)$ 达到最大.

离散型需求下的报童售报模型

不等式 $P(r \leq q) \geq \frac{s_1}{s_1 + s_2}$ 成立的最小 q 使 $E(q)$ 达到最大.

售出100份获利 $s_1 = 200$, 退回100份损失 $s_2 = 100$.

$$\Rightarrow \frac{s_1}{s_1 + s_2} = \frac{2}{3}$$

需求量 r	0	1	2	3	4	5
概率 $f(r)$	0	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1

使 $P(r \leq q) \geq 2/3$ 成立的最小值是 $q = 3$.

每天购进300份报纸可使日均利润 $E(q)$ 达到最大

将 $q = 3$ 代入 $E(q)$ 表达式计算, 得最大值 $E(q)=450$ 元.

连续型需求下的报童售报模型

问题

- 如果报纸需求量以1份为单位，份数很多时将其视为连续型随机变量，用概率密度描述更为方便.
- 设需求量服从正态概率分布 $N(260,502)$.
- 报童售出1份报纸获利2元，退回1份损失1元.

报童应买进多少份报纸，才能获得最高的日均利润？

连续型需求下的报童售报模型

建模

$p(r) \sim$ 报纸需求量的概率密度函数.

$q \sim$ 买进数量, $s_1 = 2, s_2 = 1$.

$$E(q) = \sum_{r=0}^q [s_1 r - s_2 (q - r)] f(r) + \sum_{r=q+1}^n s_1 q f(r)$$

$$E(q) = \int_{-\infty}^q [s_1 r - s_2 (q - r)] p(r) dr + \int_q^{\infty} s_1 q p(r) dr$$

已知 $s_1, s_2, p(r)$, 求买进数量 q 使日均利润 $E(q)$ 最大.

连续型需求下的报童售报模型

求解

$$E(q) = \int_{-\infty}^q [s_1 r - s_2 (q - r)] p(r) dr + \int_q^{\infty} s_1 q p(r) dr$$
$$\frac{dE}{dq} = 0$$

求导数注意： $E(q)$ 的被积函数和上下限均含变量 q 。

r 的概率分布函数

$$F(q) = \int_{-\infty}^q p(r) dr = P(r \leq q)$$

同理

$$F(q) = \frac{s_1}{s_1 + s_2}, \text{ 与离散型 } P(r \leq q) \geq \frac{s_1}{s_1 + s_2} \text{ 一致.}$$

连续型需求下的报童售报模型

求解

$$F(q) = \frac{s_1}{s_1 + s_2}, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 1 \Rightarrow F(q) = 2/3$$

已知需求量服从正态概率分布 $N(260, 50^2)$.

利用Matlab软件的逆正态分布函数命令

$$x = \text{norminv}(p, \mu, \sigma)$$

$$p = 2/3, \mu = 260, \sigma = 50 \Rightarrow x = 281.5409$$

每天购进282份报纸能获得最高的日均利润.

连续型需求下的报童售报模型

分析

$p(r)$: 需求概率密度曲线

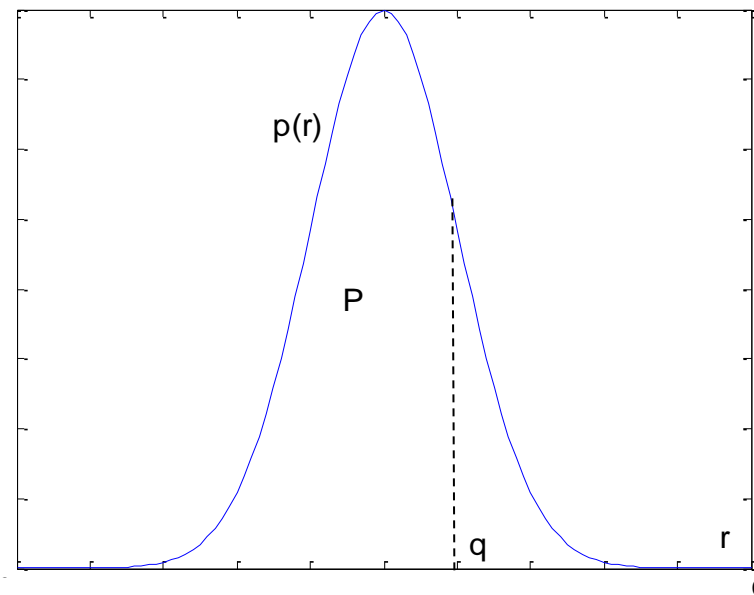
P : 虚线 $r = q$ 左边曲线下的面积

$$P = \int_{-\infty}^q p(r) dr = F(q)$$

$E(q)$ 达到最大的 q 值应使曲线 $p(r)$ 下的面积满足

$$F(q) = \frac{s_1}{s_1 + s_2}$$

获利 s_1 变大, 虚线 $r = q$ 右移. 损失 s_2 变大, 虚线 $r = q$ 左移.



6、轧钢中的浪费

背景

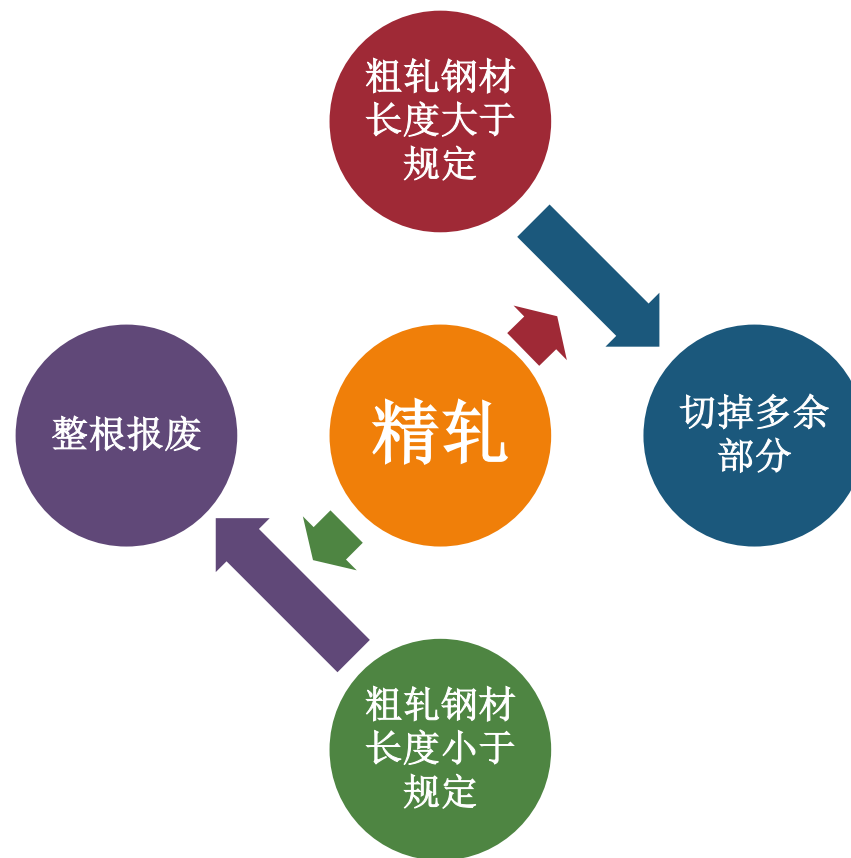
轧制钢材两道工序

- 粗轧(热轧) ~ 形成钢材的雏形
- 精轧(冷轧) ~ 得到钢材规定的长度



均值可以调整方差由设备精度确定

问题： 如何调整粗轧的**均值**，使精轧的浪费最小。



设已知精轧后钢材的规定长度为 l ，粗轧后钢材长度的均方差为 σ 。

记粗轧时可以调整的均值为 m ，则粗轧得到的钢材长度为正态随机变量，记作 $x \sim N(m, \sigma^2)$ 。

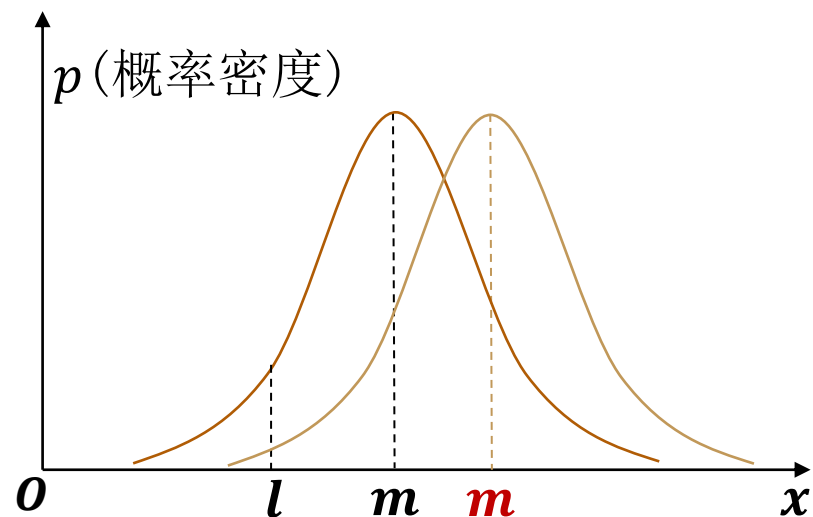
$P = P(x \geq l)$ 切掉多余部分的概率

$P' = P(x < l)$ 整根报废的概率

$$m \uparrow \Rightarrow P \uparrow, P' \downarrow$$

$$m \downarrow \Rightarrow P \downarrow, P' \uparrow$$

存在最佳的 m 使总的浪费最小



选择合适的目标函数

总浪费 = 切掉多余部分的浪费 + 整根报废的浪费

$$W = \int_l^{\infty} (x - l)p(x)dx + \int_{-\infty}^l xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx - \int_l^{\infty} lp(x)dx = m - lp$$

直接方法

$$\begin{array}{ccc} \text{粗轧 } N \text{ 根} & \Rightarrow & \text{成品材 } PN \text{ 根} \\ \Downarrow & & \\ \text{总长度 } mN & \Rightarrow & \text{成品材长度 } lPN \end{array}$$

粗轧一根钢材平均浪费长度

$$\frac{mN - lPN}{N} = m - lP$$

共浪费长度 $mN - lPN$

选择合适的目标函数

粗轧一根钢材平均浪费长度: $\frac{mN-lPN}{N} = m - lP$

粗轧 N 根得成品材 PN 根

得到一根成品材平均浪费长度: $\frac{mN-lPN}{PN} = \frac{m}{P} - l$

略去常数 l , 记

$$J(m) = \frac{m}{P(m)}$$

更合适的目标函数

$$P(m) = \int_l^{\infty} p(x)dx, \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

优化模型: 已知 l, σ , 求 m 使 $J(m)$ 最小.

做变换

$$y = \frac{x - m}{\sigma}, \mu = \frac{m}{\sigma}, \lambda = \frac{l}{\sigma} z = \lambda - \mu$$

$$J(m) = \frac{m}{P(m)}, \quad P(m) = \int_l^\infty p(x) dx, \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$J(z) = \frac{\sigma(\lambda - z)}{1 - \Phi(z)}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(y) dy, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

问题变为：已知 λ ，求 z 使 $J(z)$ 最小

$$J(z) = \frac{\sigma(\lambda - z)}{1 - \Phi(z)} \quad \xrightarrow{\frac{dJ}{dz}=0} \quad 1 - \Phi(z) - \Phi'(z)(\lambda - z) = 0$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(y) dy \quad \Downarrow$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \frac{1 - \Phi(z)}{\varphi(z)} = (\lambda - z)$$

$$F(z) = \frac{1 - \Phi(z)}{\varphi(z)}$$

$J(z)$ 的最小值应满足方程: $F(z) = \lambda - z$

用MATLAB软件求出方程的根 z , 代入: $z = \lambda - \mu$, $\mu = \frac{m}{\sigma}$, $\lambda = \frac{l}{\sigma}$

得到 m 的最优值.

例 设已知精轧后钢材的规定长度为 $l = 2(m)$, 粗轧后钢材长度的均方差为 $\sigma = 20(cm)$, 求粗轧时调整的**均值** m , 使一根成品材的**平均浪费长度最小**.

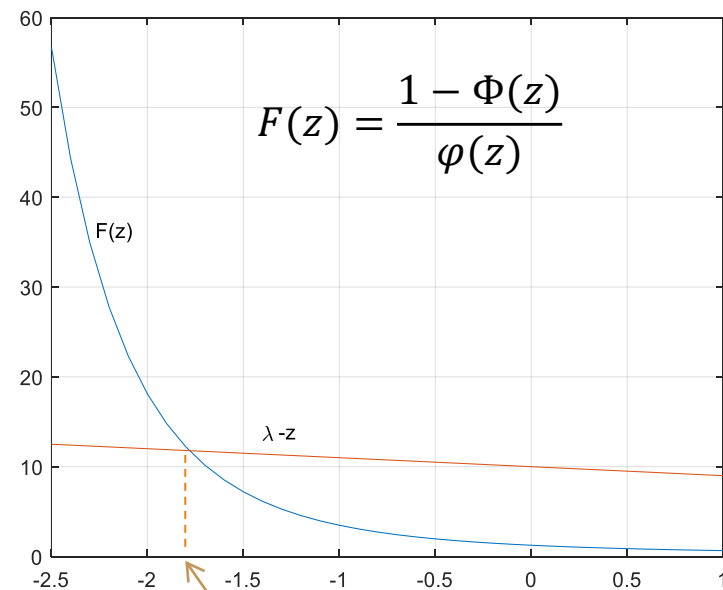
解 $\lambda = l/\sigma = 10$

用MATLAB作图求解

$$z = \lambda - \mu \Rightarrow \mu = \lambda - z = 11.78$$

$$\mu = m/\sigma \Rightarrow m = \mu\sigma = 2.36(m)$$

平均浪费长度为0.45(m)



$$F(z) = \lambda - z \Rightarrow z = -1.78$$

模型假定：粗轧钢材长度小于规定长度 $l \rightarrow$ 整根报废

改为新的假定(训练题5)：

1. 粗轧钢材长度在规定长度 $[l_1, l]$ 内 \rightarrow 降级使用
2. 粗轧钢材长度小于规定长度 $l_1 \rightarrow$ 整根报废

日常生产、生活中的类似问题：

在随机因素影响下过程有两种结果，其损失(或收益)各有不同，综合考虑来确定应采取的决策，在统计意义下使总损失最小(或总收益最大)。

6、博彩中的数学



彩票



动物赛跑



体育竞猜



当前世界上博彩业的
4种主要经营方式

6、博彩中的数学

- 博彩起源于赌博，后有人看出生财之道，为赌客提供物质条件并居中抽头，成为今天赌场的雏形。
- 随着赌博名声越来越坏，人们为它找到了一个好听的名字——博彩。
- 博彩~对一个不确定的结果作出预测判断，并以押上的钱来为自己的决策承担后果——博彩词典。
- 博彩三大要素：有赌注、有对手、碰运气。

6、博彩中的数学

- 我国目前只有一部分彩票发行和体育竞猜合法，在政府监督下由相关机构管理.
- 彩票与轮盘等赌台游戏的数学模型基本相同.
- 两种博彩方式的数学模型
- 轮盘~从玩家和庄家两方面介绍赌台建模.
- 球赛竞猜~研究开盘、下注以及收益中的模型.

轮盘游戏中的数学

- **轮盘** (roulette) 由一个轮盘，一个白色小球和一张赌桌构成.
- 美式轮盘有 **38个沟槽**，编号1至36，红、黑色各一半，加上绿色沟槽0和00.
- **玩家**对一个数字、数字组合、单双数字、红色或黑色**下注**；庄家让转轮和小球按相反方向旋转.
- 以小球停在沟槽的数字或颜色与下注是否相同**决定玩家输赢**.



概率和赔率

轮盘有38个沟槽（1至36, 红黑各半, 0和00）.

玩家下注方式	玩家赢钱概率	真实赔率
对1至36一个数字下注	$p = 1/38$	$y = 37$ (1赔37)
对红或黑一种颜色下注	$p = 18/38$	$y = 1.11$ (1赔1.11)

真实赔率 (true odds) y

玩家下注1元, 玩家赢 (概率 p) 庄家赔 y 元; 玩家输 (概率 $1-p$) 失去下注的1元

$$\text{玩家庄家不赔不赚} \Leftrightarrow p \times y = (1 - p) \times 1 \Leftrightarrow y = \frac{1 - p}{p} \Leftrightarrow p = \frac{1}{y + 1}$$

概率和赔率

真实赔率 y ：玩家庄家不赔不赚

赌场老板不会以真实赔率 y 赔付给赢钱的赌客.

对一种游戏选择一个比 y 稍低一点的赔率赔付.

支付赔率 (payoff odds) x

玩家下注方式	真实赔率	支付赔率
对1至36一个数字下注	$y = 37$ (1赔37)	$x = 35$ (1赔35)
对红或黑一种颜色下注	$y = 1.11$ (1赔1.11)	$x = 1$ (1赔1)

赌场上赌客总是要输的！

- 对一个数字下注1元，玩家赢 ($p = 1/38$) 庄家赔35元 (赔率 $x = 35$)；玩家输失去下注的1元.
- 玩家多次下注的平均收益

$$35 \times (1/38) + (-1) \times (37/38) = -2/38 = -0.0526$$

输掉下注金额的5.26%

玩家劣势为5.26%

玩家期望收益：

$$EV_1 = xp + [-(1 - p)] = (x + 1)p - 1 < 0$$

玩家劣势和庄家优势

玩家的期望收益:

$$EV_1 = xp + [-(1 - p)] = (x + 1)p - 1$$

对一种颜色下注 ($p = 18/38, x = 1$)

$$EV_1 = -0.0526$$

玩家劣势仍是5.26%

游戏有 n 种结果, p_i, a_i 出现结果 i 的概率, 收益.

玩家期望收益: $EV_1 = \sum_{i=1}^n a_i p_i < 0$

玩家劣势: $|EV_1|$

庄家的期望收益: $EV_2 = -EV_1$

庄家优势: EV_2

庄家早就安排好的!

玩家劣势和庄家优势

玩家的加倍下注策略

对一种颜色下注赔率 $x = 1$

玩家赢钱概率 $p = 18/38 = 0.4737$, 输钱概率 $q = 0.5263$.

加倍下注策略~从最低金额1元开始下注, 输了加倍下注, 再输再加倍, **直到赢了为止**.

只要赢一次就把输全部捞回来, 而且**净赚1元**.

假定玩家有1万元, 首次下注1元.

够他连输多少次?

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{12} = 2^{13} - 1 = 8191 \quad \text{13次!}$$

连输13次的概率多大?

$$q^{13} = 0.0002378 \quad \text{很小啊!}$$

玩家劣势和庄家优势

玩家的加倍下注策略(是稳赢不输的下注策略吗?)

连输13次输掉8191元的概率: $q^{13} = 0.0002378$

赢其中1次净赚1元的概率: $1 - q^{13} = 0.9997622$

期望收益: $-8191 q^{13} + (1 - q^{13}) = -0.9480$

结论: 长期按照这种策略下注, 玩家还是会输的.

期望下注金额

$$1 + 2q + 2^2 q^2 + \dots + 2^{12} q^{12} = \frac{(2q)^{13} - 1}{2q - 1} = 18.0087$$

每下注1元的期望收益

$$-0.9480 / 18.0087 = -0.0526$$

与通常的下注方法相比, 没有占到任何便宜!

赌场游戏的设计方法和步骤

庄家设计游戏的要求：

制定玩法、确定赔率、估计收益、规避风险.

1. 概率计算：游戏设计的基础
2. 赔率确定

$$\text{真实赔率: } y = \frac{1 - p}{p}$$

根据 y 将支付赔率 x 调整到一个简单、合理的数值(一般取整数).

3. 庄家优势的调整

$$\text{庄家优势: } EV_2 = -EV_1 = 1 - (x + 1)p$$

用降低或提高赔率 x 的方法调整庄家优势.

4. 最低和最高下注额——**限红**——的设定

设定**最低限红**(兑换最小面额的筹码)

- 防止个别玩家零敲碎打地下注，节约服务成本.
- 设定**最高限红**(如10万元的筹码)
- 防止个别财大气粗的玩家过分高额地下注，给赌场带来**瞬间的威胁**.
- 鼓励财大气粗的**土豪长期赌**下去，亿万财富早晚会落入赌场老板的囊中.

赌场游戏的设计方法和步骤

赌场的收益及其波动，赌场总的收益应加以控制。

1. 收益太高监管部门会干预，也不利于行业竞争。
2. 收益太低会影响扣除税收、成本及慈善捐赠等支出后的利润。

下注1元的收益标准差

$$SD_2 = \sqrt{x^2p + (1 - p) - EV_2^2}$$

对一种颜色下注： $x = 1, p = 18/38, EV_2 = 0.0526, SD_2 = 0.9986$

对一个数字下注： $x = 35, p = 1/38, EV_2 = 0.0526, SD_2 = 5.7628$

n 人次下注收益标准差

$$SD_2(n) = SD_2/\sqrt{n}$$

n 很大！

- 庄家(博彩公司)在比赛开始前组织玩家**预测结局并下注**，结束后根据**实际结果决定**玩家的**输赢**.
- 玩家或庄家对比赛双方胜负的**概率**只能根据两队的实力、状态等因素做出**大致估计**.
- 竞猜对庄家技术水平、经营技巧和经验积累要求很高，也给内行的玩家提供了赢钱的机会.

在博彩业中风险最大,也最容易产生职业赌客.

开盘、押注、玩家劣势和庄家优势

- 在A,B两队比赛前庄家为竞猜**开盘**——开出两队胜负的**赔率**，让玩家**押注**。

开盘-160/+140	结果A胜B负	结果A负B胜
玩家押 A队胜 ，赔率为 1.6赔1 ，一注押 160元 。	玩家获赔 100元 （押金退还）	玩家押金归庄家
玩家押 B队胜 ，赔率为 1赔1.4 ，一注押 100元	玩家押金归庄家	玩家获赔 140元 （押金退还）
庄家预计A强（押多赔少）B弱（押少赔多）		

开盘、押注、玩家劣势和庄家优势

开盘-160/+140

加线盘或独赢盘(不考虑平局或将平局归为弱队胜).

单位下注额的
玩家劣势

假定庄家估计强队A的胜率0.6

押强队A胜的玩家期望收益

$$100 \times 0.6 - 160 \times 0.4 = -4, 4/160 = 2.5\%$$

押弱队B胜的玩家期望收益

$$140 \times 0.4 - 100 \times 0.6 = -4, 4/100 = 4\%$$

若押强队A胜和押弱队B胜的玩家数量相等, 单位下注额的整体庄家优势:

$$(4 + 4)/(160 + 100) = 3.08\%$$

加线盘的设计方法和步骤

1. 估计获胜概率、开出公平盘

庄家组织专家(开盘手)估计强队A的胜率 p .

$$\text{开盘} - \frac{100p}{1-p} / + \frac{100p}{1-p}$$

$$p = 0.6 \text{ 开盘} - 150 / + 150$$

$$p = 0.8 \text{ 开盘} - 400 / + 400$$

$$\text{押强队A胜的玩家劣势: } 100p - \frac{100p}{1-p} (1-p) = 0$$

$$\text{押弱队B胜的玩家劣势: } \frac{100p}{1-p} (1-p) - 100p = 0$$

开盘的庄家优势也等于零——公平盘.

加线盘的设计方法和步骤

2. 调整公平盘、开出加线盘

庄家有利可图——在公平盘上加线.

$p = 0.6$ 公平盘-150/+150

加线 \Rightarrow -160/+140

公平盘	加线 $a, b (> 0)$
$-\frac{100p}{1-p} / +\frac{100p}{1-p}$	$-\left(\frac{100p}{1-p} + a\right) / +\left(\frac{100p}{1-p} - b\right)$

押强队A胜的玩家劣势=庄家优势= $a(1 - p)$

押弱队B胜的玩家劣势=庄家优势= $b(1 - p)$

3. 加线的调整

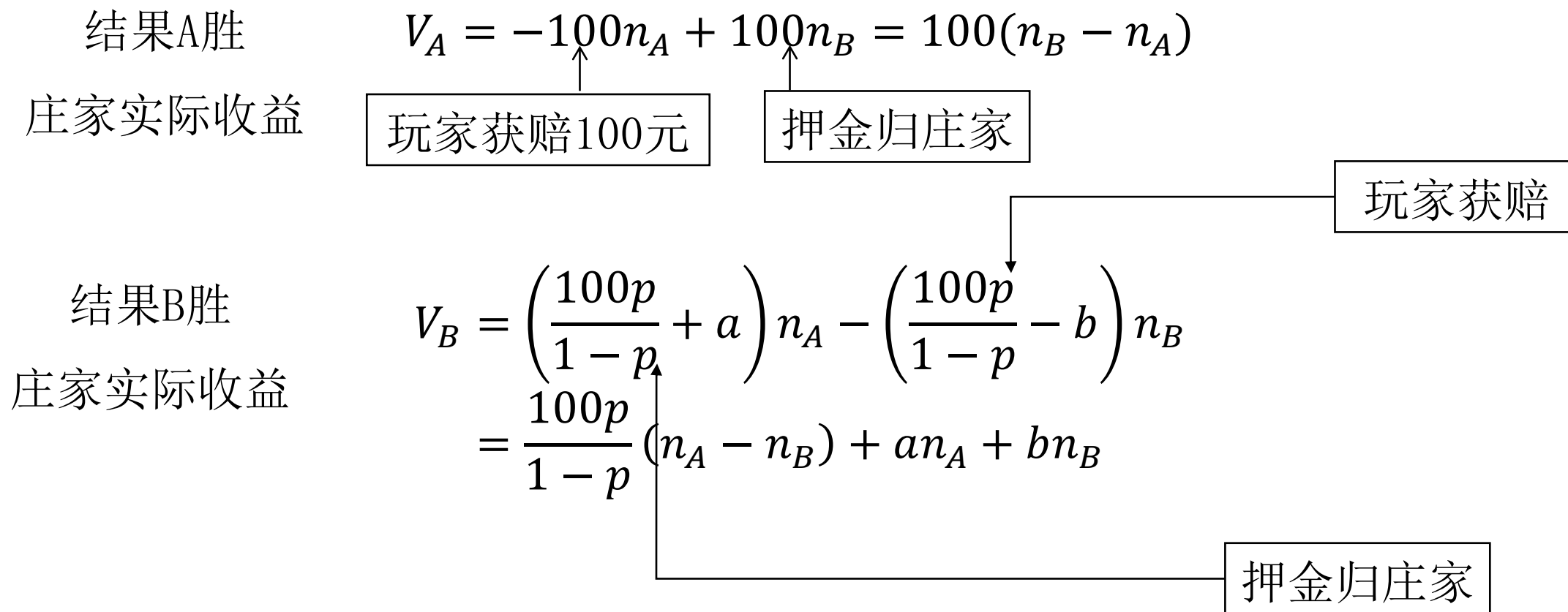
加线盘：

$$-(\frac{100p}{1-p} + a) / +(\frac{100p}{1-p} - b)$$

庄家实际收益取决于多少玩家押强队A胜，多少玩家押弱队B胜，结果是A还是B胜。

n_A, n_B : 押强队A胜，弱队B胜的玩家数量(每人一注)

加线盘的设计方法和步骤



加线盘的设计方法和步骤

3. 加线的调整

$p = 0.6, a = b = 10$ 即加线盘: $-160/+140$

庄家实际收益: $V_A = 100(n_B - n_A), V_B = 150(n_A - n_B) + 10(n_A + n_B)$

	n_A	n_B	获胜队	庄家收益	注释
1	100	100	A	0	
2	100	100	B	2000	
3	150	50	A	-10000	押A胜玩家多, 结果A胜
4	50	150	A	10000	押B胜玩家多, 结果A胜
5	150	50	B	17000	押A胜玩家多, 结果B胜
6	50	150	B	-13000	押B胜玩家多, 结果B胜

- $n_A = n_B$ 庄家不赔钱; n_A, n_B 相差很大可能暴赢或暴输.
- 为规避风险庄家需密切关注玩家下注走势, 适时调整 a, b 使 n_A, n_B 尽量接近.

赌台游戏

两种博彩均含三大要素又有明显区别

- 专为赌博人为设置的赌局, 需要一定的成本.
- 结果的概率可精确得到, 庄家和玩家不需要什么“技术”, 输赢完全碰运气.

体育竞猜

- 借用现实生活中不可预知又吸引眼球的事件开设的赌局, 成本很小.
- 结果的概率主要靠“技术”水平来估计, 内行的庄家和玩家有一定优势.

庄家是从来不赌的！

- 赌场游戏表面上是玩家与庄家对赌，玩家赢了向庄家讨取赔付，输了下注额归庄家.
- 实际上无数的筹码从大多数玩家的口袋经庄家之手转入少数赢钱赌客的囊中，庄家靠玩家对赌从中抽头牟利，自己绝不涉赌.
- 体育竞猜中博彩公司为促成玩家的对赌，开盘后一再调整加线，竭力均衡押注两队的玩家之间的角力，让自己抽身而退.