

周志华 著

MACHINE
LEARNING

机器学习

清华大学出版社

本章课件致谢..

马健

本课件版权所有©LAMD A, 为本书教学目的可免费使用, 其他目的需征得本书作者同意



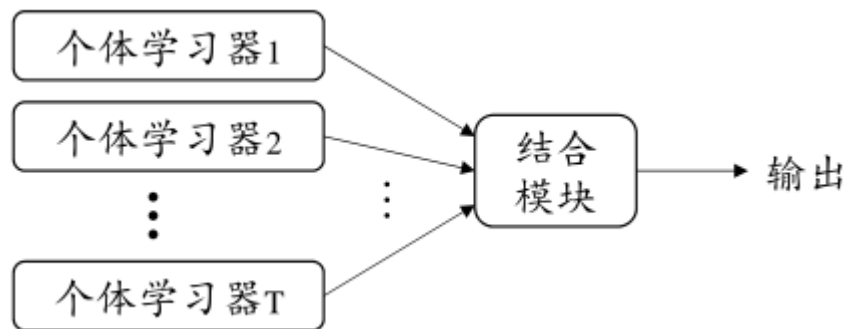
第八章：集成学习

集成学习

- 个体与集成
- Boosting
 - Adaboost
- Bagging与随机森林
- 结合策略
 - 平均法
 - 投票法
 - 学习法
- 多样性
 - 误差-分歧分解
 - 多样性度量
 - 多样性扰动

个体与集成

- 集成学习(ensemble learning)通过构建并结合多个学习器来提升性能



个体与集成

- 考虑一个简单的例子，在二分类问题中，假定3个分类器在三个样本中的表现如下图所示，其中√表示分类正确，X号表示分类错误，集成的结果通过投票产生。

测试例1 测试例2 测试例3				测试例1 测试例2 测试例3				测试例1 测试例2 测试例3			
h_1	✓	✓	×	h_1	✓	✓	×	h_1	✓	×	×
h_2	×	✓	✓	h_2	✓	✓	×	h_2	×	✓	×
h_3	✓	×	✓	h_3	✓	✓	×	h_3	×	×	✓
集群	✓	✓	✓	集群	✓	✓	×	集群	×	×	×
(a) 集群提升性能				(b) 集群不起作用				(c) 集群起负作用			

- 集成个体应：好而不同

个体与集成 – 简单分析

- 考虑二分类问题，假设基分类器的错误率为：

$$P(h_i(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x})) = \epsilon$$

- 假设集成通过简单投票法结合 T 个分类器，若有超过半数的基分类器正确则分类就正确

$$H(\mathbf{x}) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^T h_i(\mathbf{x}) \right)$$

个体与集成 – 简单分析

- 假设基分类器的错误率相互独立，则由Hoeffding不等式可得集成的错误率为：

$$\begin{aligned} P(H(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x})) &= \sum_{k=0}^{\lfloor T/2 \rfloor} \binom{T}{k} (1-\epsilon)^k \epsilon^{T-k} \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2}T(1-2\epsilon)^2\right) \end{aligned}$$

- 上式显示，在一定条件下，随着集成分类器数目的增加，集成的错误率将指数级下降，最终趋向于0

个体与集成 – 简单分析

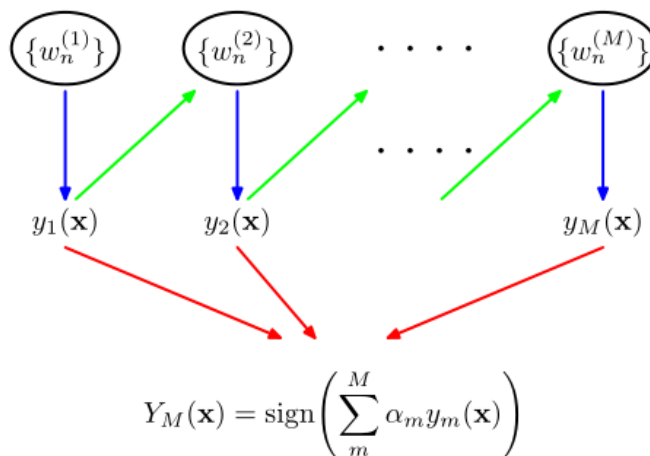
- 上面的分析有一个关键假设：基学习器的误差相互独立
- 现实任务中，个体学习器是为解决同一个问题训练出来的，显然不可能互相独立
- 事实上，个体学习器的“准确性”和“多样性”本身就存在冲突
- 如何产生“好而不同”的个体学习器是集成学习研究的核心
- 集成学习大致可分为两大类

集成学习

- 个体与集成
- Boosting
 - Adaboost
- Bagging与随机森林
- 结合策略
 - 平均法
 - 投票法
 - 学习法
- 多样性
 - 误差-分歧分解
 - 多样性度量
 - 多样性扰动

Boosting

- 个体学习器存在强依赖关系,
- 串行生成
- 每次调整训练数据的样本分布



Boosting - Boosting算法

Input: Sample distribution \mathcal{D} ;
Base learning algorithm \mathcal{L} ;
Number of learning rounds T .

Process:

1. $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$. % Initialize distribution
2. **for** $t = 1, \dots, T$:
3. $h_t = \mathcal{L}(\mathcal{D}_t)$; % Train a weak learner from distribution \mathcal{D}_t
4. $\epsilon_t = P_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t}(h_t(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}))$; % Evaluate the error of h_t
5. $\mathcal{D}_{t+1} = \text{Adjust_Distribution}(\mathcal{D}_t, \epsilon_t)$
6. **end**

Output: $H(\mathbf{x}) = \text{Combine_Outputs}(\{h_1(\mathbf{x}), \dots, h_t(\mathbf{x})\})$

□ Boosting族算法最著名的代表是AdaBoost

Boosting – AdaBoost算法

输入: 训练集 $D = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\}$;
基学习算法 \mathcal{L} ;
训练轮数 T .

过程:

- 1: $\mathcal{D}_1(\mathbf{x}) = 1/m$.
- 2: **for** $t = 1, 2, \dots, T$ **do**
- 3: $h_t = \mathcal{L}(D, \mathcal{D}_t)$;
- 4: $\epsilon_t = P_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t}(h_t(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}))$;
- 5: **if** $\epsilon_t > 0.5$ **then break**
- 6: $\alpha_t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \epsilon_t}{\epsilon_t} \right)$;
- 7:
$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{t+1}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathcal{D}_t(\mathbf{x})}{Z_t} \times \begin{cases} \exp(-\alpha_t), & \text{if } h_t(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \\ \exp(\alpha_t), & \text{if } h_t(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}) \end{cases} \\ &= \frac{\mathcal{D}_t(\mathbf{x}) \exp(-\alpha_t f(\mathbf{x}) h_t(\mathbf{x}))}{Z_t} \end{aligned}$$
- 8: **end for**

输出: $H(\mathbf{x}) = \text{sign} \left(\sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(\mathbf{x}) \right)$

Boosting – AdaBoost推导

□ 基学习器的线性组合

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(\mathbf{x})$$

□ 最小化指数损失函数

$$\ell_{\text{exp}}(H \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}}[e^{-f(\mathbf{x})H(\mathbf{x})}]$$

Boosting – AdaBoost推导

□ 若 $H(x)$ 能令指数损失函数最小化，则上式对 $H(x)$ 的偏导值为0，即

$$\frac{\partial \ell_{\text{exp}}(H \mid \mathcal{D})}{\partial H(\mathbf{x})} = -e^{-H(\mathbf{x})} P(f(\mathbf{x}) = 1 \mid \mathbf{x}) + e^{H(\mathbf{x})} P(f(\mathbf{x}) = -1 \mid \mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} \text{sign}(H(\mathbf{x})) &= \text{sign}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{P(f(x) = 1 \mid \mathbf{x})}{P(f(x) = -1 \mid \mathbf{x})}\right) & H(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \ln \frac{P(f(x) = 1 \mid \mathbf{x})}{P(f(x) = -1 \mid \mathbf{x})} \\ &= \begin{cases} 1, & P(f(x) = 1 \mid \mathbf{x}) > P(f(x) = -1 \mid \mathbf{x}) \\ -1, & P(f(x) = 1 \mid \mathbf{x}) < P(f(x) = -1 \mid \mathbf{x}) \end{cases} \\ &= \arg \max_{y \in \{-1, 1\}} P(f(x) = y \mid \mathbf{x}), \end{aligned}$$

$\text{sign}(H(x))$ 达到了贝叶斯最优错误率，

说明指数损失函数是分类任务原来0/1

损失函数的一致的替代函数。

Boosting – AdaBoost推导

- 当基分类器 h_t 基于分布 D_t 产生后, 该基分类器的权重 α_t 应使得 $\alpha_t h_t$ 最小化指数损失函数

$$\begin{aligned}\ell_{\text{exp}}(\alpha_t h_t \mid \mathcal{D}_t) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t} \left[e^{-f(\mathbf{x}) \alpha_t h_t(\mathbf{x})} \right] \\&= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t} \left[e^{-\alpha_t} \mathbb{I}(f(\mathbf{x}) = h_t(\mathbf{x})) + e^{\alpha_t} \mathbb{I}(f(\mathbf{x}) \neq h_t(\mathbf{x})) \right] \\&= e^{-\alpha_t} P_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t}(f(\mathbf{x}) = h_t(\mathbf{x})) + e^{\alpha_t} P_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t}(f(\mathbf{x}) \neq h_t(\mathbf{x})) \\&= e^{-\alpha_t} (1 - \epsilon_t) + e^{\alpha_t} \epsilon_t \quad \epsilon_t = P_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t}(h_t(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

- 令指数损失函数的导数为0, 即

$$\frac{\partial \ell_{\text{exp}}(\alpha_t h_t \mid \mathcal{D}_t)}{\partial \alpha_t} = -e^{-\alpha_t} (1 - \epsilon_t) + e^{\alpha_t} \epsilon_t \quad \alpha_t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \epsilon_t}{\epsilon_t} \right)$$

Boosting – AdaBoost推导

- 在获得 H_{t-1} 之后的样本分布进行调整, 使得下一轮的基学习器 h_t 能纠正 H_{t-1} 的一些错误. 理想的 h_t 能纠正全部错误

$$\begin{aligned}\ell_{\text{exp}}(H_{t-1} + h_t \mid \mathcal{D}) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}}[e^{-f(\mathbf{x})(H_{t-1}(\mathbf{x}) + h_t(\mathbf{x}))}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}}[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})} e^{-f(\mathbf{x})h_t(\mathbf{x})}]\end{aligned}$$

- 泰勒展开近似为

$$\begin{aligned}\ell_{\text{exp}}(H_{t-1} + h_t \mid \mathcal{D}) &\simeq \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} \left[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})} \left(1 - f(\mathbf{x})h_t(\mathbf{x}) + \frac{f^2(\mathbf{x})h_t^2(\mathbf{x})}{2} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} \left[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})} \left(1 - f(\mathbf{x})h_t(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

Boosting – AdaBoost推导

□ 于是，理想的基学习器：

$$\begin{aligned}h_t(\mathbf{x}) &= \arg \min_h \ell_{\text{exp}}(H_{t-1} + h \mid \mathcal{D}) \\&= \arg \min_h \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} \left[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})} \left(1 - f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \right) \right] \\&= \arg \max_h \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} \left[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) \right] \\&= \arg \max_h \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} \left[\frac{e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}}{\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}}[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}]} f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) \right],\end{aligned}$$

□ 注意到 $\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}}[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}]$ 是一个常数，令 \mathcal{D}_t 表示一个分布：

$$\mathcal{D}_t(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{D}(\mathbf{x})e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}}{\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}}[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}]}$$

Boosting – AdaBoost推导

□ 根据数学期望的定义，这等价于令：

$$\begin{aligned} h_t(\mathbf{x}) &= \arg \max_h \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} \left[\frac{e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}}{\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}}[e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}]} f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) \right] \\ &= \arg \max_h \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t} [f(\mathbf{x})h(\mathbf{x})] . \end{aligned}$$

□ 由 $f(x), h(x) \in \{-1, +1\}$ 有：

$$f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) = 1 - 2 \mathbb{I}(f(\mathbf{x}) \neq h(\mathbf{x}))$$

Boosting – AdaBoost推导

□ 则理想的基学习器

$$h_t(\mathbf{x}) = \arg \min_h \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}_t} [\mathbb{I}(f(\mathbf{x}) \neq h(\mathbf{x}))]$$

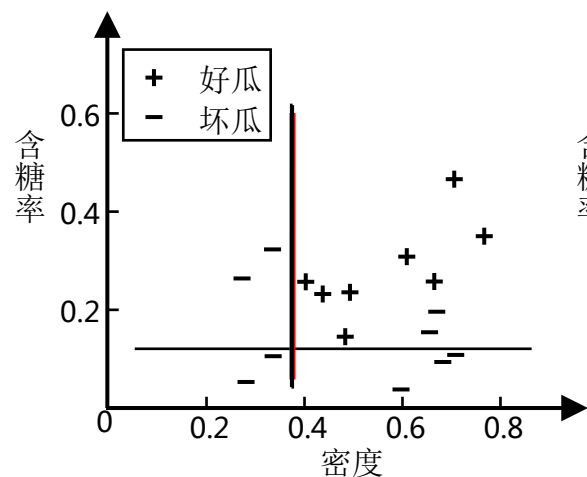
□ 最终的样本分布更新公式

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{t+1}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathcal{D}(\mathbf{x}) e^{-f(\mathbf{x})H_t(\mathbf{x})}}{\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} [e^{-f(\mathbf{x})H_t(\mathbf{x})}]} \\ &= \frac{\mathcal{D}(\mathbf{x}) e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})} e^{-f(\mathbf{x})\alpha_t h_t(\mathbf{x})}}{\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} [e^{-f(\mathbf{x})H_t(\mathbf{x})}]} \\ &= \mathcal{D}_t(\mathbf{x}) \cdot e^{-f(\mathbf{x})\alpha_t h_t(\mathbf{x})} \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} [e^{-f(\mathbf{x})H_{t-1}(\mathbf{x})}]}{\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim \mathcal{D}} [e^{-f(\mathbf{x})H_t(\mathbf{x})}]} \end{aligned}$$

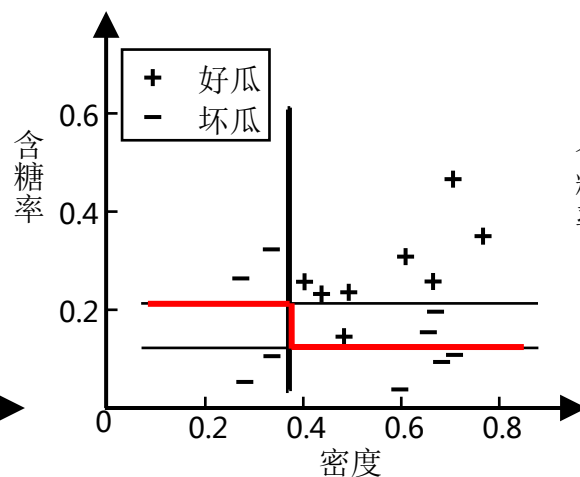
Boosting – AdaBoost注意事项

- 数据分布的学习
 - 重赋权法
 - 重采样法
- 重启动，避免训练过程过早停止

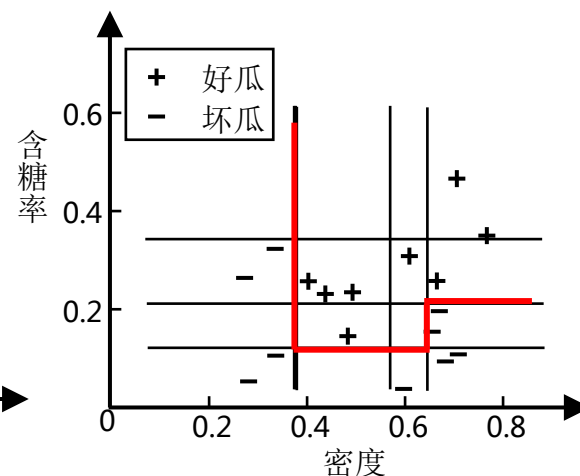
Boosting – AdaBoost实验



(a) 3个基学习器



(b) 5个基学习器



(c) 11个基学习器

□ 从偏差-方差的角度：降低偏差，可对泛化性能相当弱的学习器构造出很强的集成

集成学习

- 个体与集成
- Boosting
 - Adaboost
- Bagging与随机森林
- 结合策略
 - 平均法
 - 投票法
 - 学习法
- 多样性
 - 误差-分歧分解
 - 多样性度量
 - 多样性扰动

Bagging与随机森林

- 个体学习器不存在强依赖关系
- 并行化生成
- 自助采样法

Bagging与随机森林 - Bagging算法

输入: 训练集 $D = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\}$;
基学习算法 \mathcal{L} ;
训练轮数 T .

过程:

```
1: for  $t = 1, 2, \dots, T$  do  
2:    $h_t = \mathcal{L}(D, \mathcal{D}_{bs})$   
3: end for
```

输出: $H(\mathbf{x}) = \arg \max_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}(h_t(\mathbf{x}) = y)$

Bagging与随机森林 - Bagging算法特点

□ 时间复杂度低

- 假定基学习器的计算复杂度为 $O(m)$ ，采样与投票/平均过程的复杂度为 $O(s)$ ，则bagging的复杂度大致为 $T(O(m) + O(s))$
- 由于 $O(s)$ 很小且 T 是一个不大的常数
- 因此训练一个bagging集成与直接使用基学习器的复杂度同阶

□ 可使用包外估计

Bagging与随机森林 - 包外估计

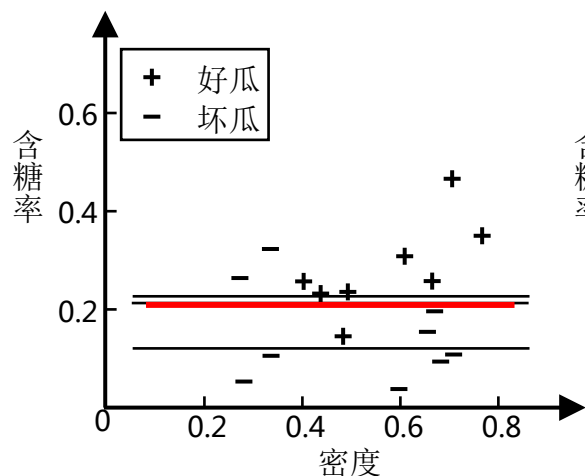
- $H^{oob}(x)$ 表示对样本 x 的包外预测，即仅考虑那些未使用样本 x 训练的基学习器在 x 上的预测

$$H^{oob}(\mathbf{x}) = \arg \max_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}(h_t(\mathbf{x}) = y) \cdot \mathbb{I}(\mathbf{x} \notin D_t)$$

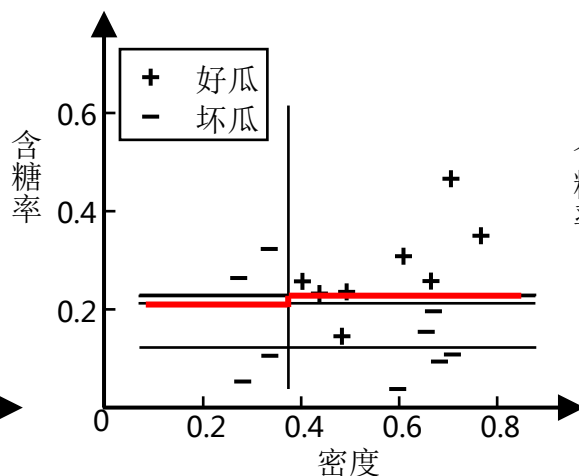
- Bagging泛化误差的包外估计为：

$$\epsilon^{oob} = \frac{1}{|D|} \sum_{(\mathbf{x}, y) \in D} \mathbb{I}(H^{oob}(\mathbf{x}) \neq y)$$

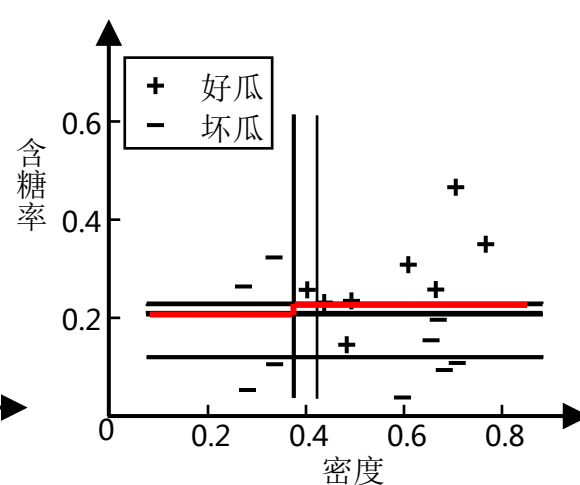
Bagging与随机森林- Bagging实验



(a) 3个基学习器



(b) 5个基学习器



(c) 11个基学习器

□ 从偏差-方差的角度：降低方差，在不剪枝的决策树、神经网络等易受样本影响的学习器上效果更好

Bagging与随机森林-随机森林

- 随机森林(Random Forest, 简称RF)是bagging的一个扩展变种
- 采样的随机性
- 属性选择的随机性

Bagging与随机森林 – 随机森林算法

□ 随机森林算法

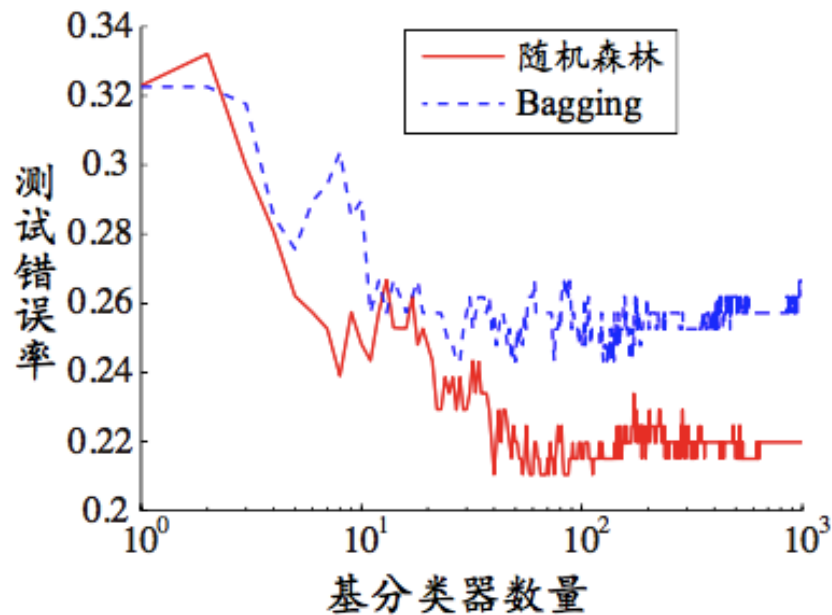
Input: Data set $D = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\}$;
Feature subset size K .

Process:

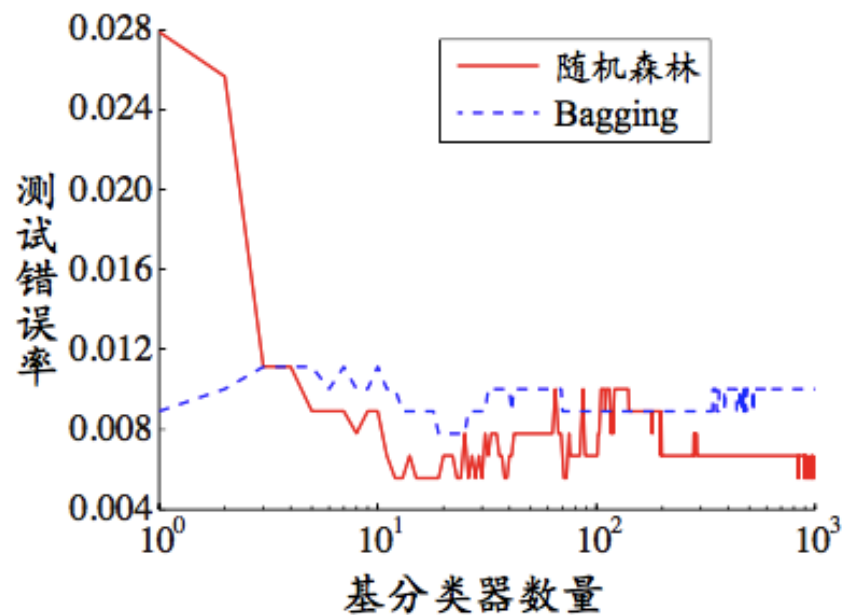
1. $N \leftarrow$ create a tree node based on D ;
2. **if** *all instances in the same class* **then return** N
3. $\mathcal{F} \leftarrow$ the set of features that can be split further;
4. **if** \mathcal{F} *is empty* **then return** N
5. $\tilde{\mathcal{F}} \leftarrow$ select K features from \mathcal{F} randomly;
6. $N.f \leftarrow$ the feature which has the best split point in $\tilde{\mathcal{F}}$;
7. $N.p \leftarrow$ the best split point on $N.f$;
8. $D_l \leftarrow$ subset of D with values on $N.f$ smaller than $N.p$;
9. $D_r \leftarrow$ subset of D with values on $N.f$ no smaller than $N.p$;
10. $N_l \leftarrow$ call the process with parameters (D_l, K) ;
11. $N_r \leftarrow$ call the process with parameters (D_r, K) ;
12. **return** N

Output: A random decision tree

Bagging与随机森林 – 随机森林实验



(a) glass 数据集



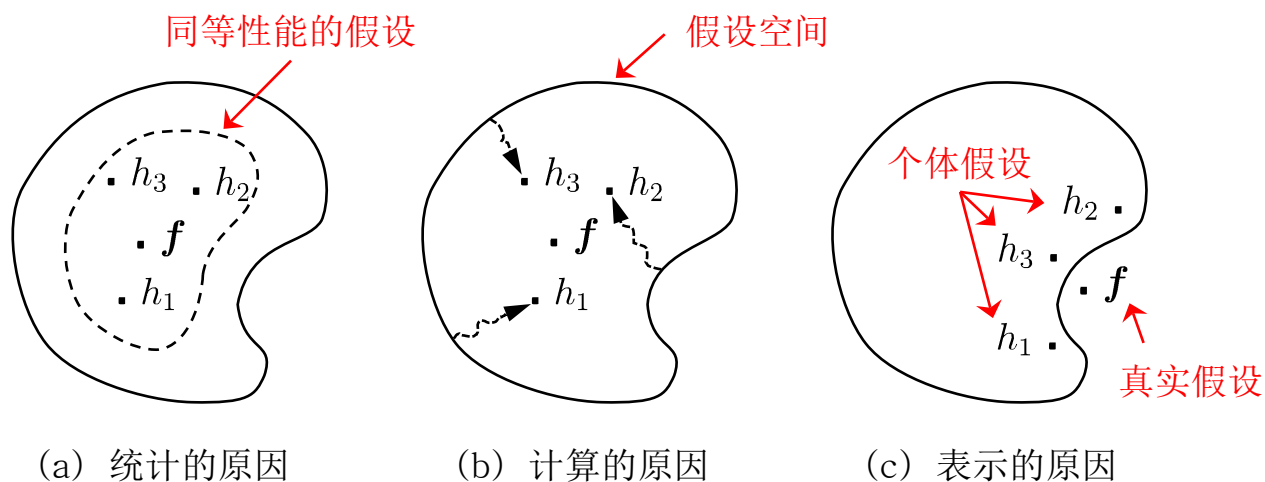
(b) auto-mpg 数据集

集成学习

- 个体与集成
- Boosting
 - Adaboost
- Bagging与随机森林
- 结合策略
 - 平均法
 - 投票法
 - 学习法
- 多样性
 - 误差-分歧分解
 - 多样性度量
 - 多样性扰动

结合策略

□ 学习器的组合可以从三个方面带来好处



结合策略 - 平均法

□ 简单平均法

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T h_i(\mathbf{x}).$$

□ 加权平均法

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^T w_i h_i(\mathbf{x}), \quad w_i \geq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^T w_i = 1.$$

结合策略 - 平均法

- 简单平均法是加权平均法的特例
- 加权平均法在二十世纪五十年代被广泛使用
- 集成学习中的各种结合方法都可以看成是加权平均法的变种或特例
- 加权平均法可认为是集成学习研究的基本出发点
- 加权平均法未必一定优于简单平均法

结合策略 - 投票法

□ 绝对多数投票法 (majority voting)

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_j & \text{if } \sum_{i=1}^T h_i^j(\mathbf{x}) > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^T h_i^k(\mathbf{x}) \\ \text{rejection} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□ 相对多数投票法 (plurality voting)

$$H(\mathbf{x}) = c_{\arg \max_j \sum_{i=1}^T h_i^j(\mathbf{x})}$$

□ 加权投票法 (weighted voting)

$$H(\mathbf{x}) = c_{\arg \max_j \sum_{i=1}^T w_i h_i^j(\mathbf{x})}$$

结合策略 - 学习法

□ Stacking是学习法的典型代表

Input: Data set $D = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\}$;
First-level learning algorithms $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_T$;
Second-level learning algorithm \mathcal{L} .

Process:

```
1. for  $t = 1, \dots, T$ :    % Train a first-level learner by applying the
2.    $h_t = \mathcal{L}_t(D)$ ;    % first-level learning algorithm  $\mathcal{L}_t$ 
3. end
4.  $D' = \emptyset$ ;          % Generate a new data set
5. for  $i = 1, \dots, m$ :
6.   for  $t = 1, \dots, T$ :
7.     $z_{it} = h_t(\mathbf{x}_i)$ ;
8.   end
9.    $D' = D' \cup ((z_{i1}, \dots, z_{iT}), y_i)$ ;
10. end
11.  $h' = \mathcal{L}(D')$ ;      % Train the second-level learner  $h'$  by applying
                        % the second-level learning algorithm  $\mathcal{L}$  to the
                        % new data set  $D'$ .
```

Output: $H(\mathbf{x}) = h'(h_1(\mathbf{x}), \dots, h_T(\mathbf{x}))$

多响应线性回归(MLR)作为次级学习器的学习算法 效果较好

□ 贝叶斯模型平均(BMA)

集成学习

- 个体与集成
- Boosting
 - Adaboost
- Bagging与随机森林
- 结合策略
 - 平均法
 - 投票法
 - 学习法
- 多样性
 - 误差-分歧分解
 - 多样性度量
 - 多样性扰动

多样性 - 误差-分歧分解

□ 定义学习器 h_i 的分歧(ambiguity):

$$A(h_i | \mathbf{x}) = (h_i(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}))^2$$

□ 集成的分歧:

$$\begin{aligned}\bar{A}(h | \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^T w_i A(h_i | \mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^T w_i (h_i(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}))^2\end{aligned}$$

多样性 - 误差-分歧分解

- ❑ 分歧项代表了个体学习器在样本 \mathbf{x} 上的不一致性，即在一定程度上反映了个体学习器的多样性，个体学习器 h_i 和集成 H 的平方误差分别为

$$E(h_i \mid \mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}))^2$$

$$E(H \mid \mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}))^2$$

多样性 - 误差-分歧分解

□ 令 $\bar{E}(h | \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^T w_i \cdot E(h_i | \mathbf{x})$ 表示个体学习器误差的加权均值，有

$$\begin{aligned}\bar{A}(h | \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^T w_i E(h_i | \mathbf{x}) - E(H | \mathbf{x}) \\ &= \bar{E}(h | \mathbf{x}) - E(H | \mathbf{x}) .\end{aligned}$$

□ 上式对所有样本 \mathbf{x} 均成立，令 $p(\mathbf{x})$ 表示样本的概率密度，则在全样本上有

$$\sum_{i=1}^T w_i \int A(h_i | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^T w_i \int E(h_i | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int E(H | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

多样性 - 误差-分歧分解

- 个体学习器 h_i 在全样本上的泛化误差和分歧项分别为：

$$E_i = \int E(h_i | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$A_i = \int A(h_i | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- 集成的泛化误差为：

$$E = \int E(H | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- 令 $\overline{E} = \sum_{i=1}^T w_i E_i$ 表示个体学习器泛化误差的加权均值，
 $\overline{A} = \sum_{i=1}^T w_i A_i$ 表示个体学习器的加权分歧值，有

$$E = \overline{E} - \overline{A}$$

多样性 - 误差-分歧分解

- ❑ 这个漂亮的式子显示:个体学习器精确性越高、多样性越大, 则集成效果越好。称为误差-分歧分解
- ❑ 为什么不能直接把 $\bar{E} - \bar{A}$ 作为优化目标来求解?
 - 现实任务中很难直接对 $\bar{E} - \bar{A}$ 进行优化,
 - 它们定义在整个样本空间上
 - \bar{A} 不是一个可直接操作的多样性度量
 - 上面的推导过程只适用于回归学习, 难以直接推广到分类学习任务上去

多样性 - 多样性度量

- 多样性度量(diversity measure)用于度量集成中个体学习器的多样性
- 对于二分类问题，分类器 h_i 与 h_j 的预测结果联立表(contingency table)为

	$h_i = +1$	$h_i = -1$
$h_j = +1$	a	c
$h_j = -1$	b	d

$$a + b + c + d = m$$

多样性 - 多样性度量

□ 常见的多样性度量

- 不合度量 (Disagreement Measure)

$$dis_{ij} = \frac{b + c}{m}$$

- 相关系数 (Correlation Coefficient)

$$\rho_{ij} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a + b)(a + c)(c + d)(b + d)}}$$

多样性 - 多样性度量

□ 常见的多样性度量

- Q-统计量 (Q-Statistic)

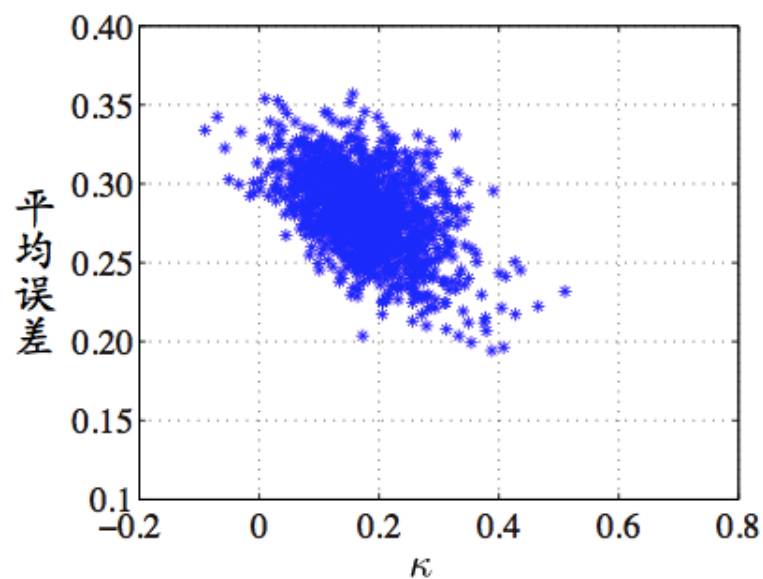
$$Q_{ij} = \frac{ad - bc}{ad + bc} \quad |Q_{ij}| \leq |\rho_{ij}|$$

- K-统计量 (Kappa-Statistic)

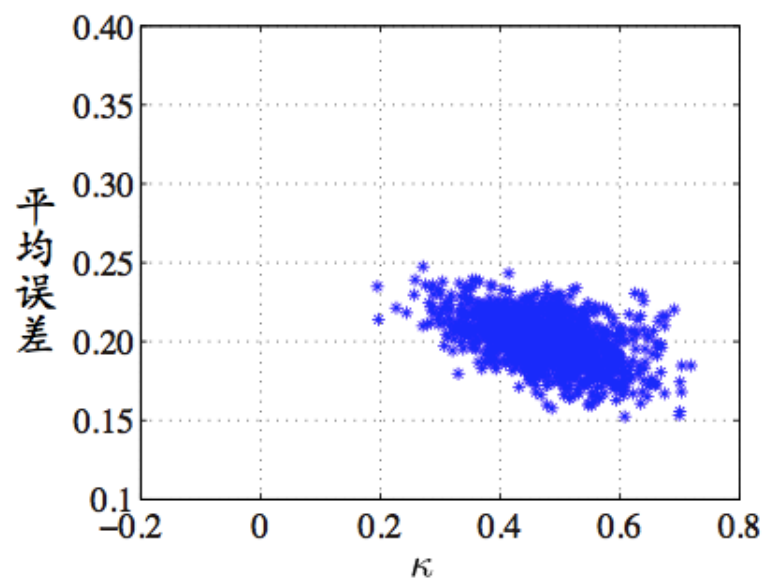
$$\kappa = \frac{p_1 - p_2}{1 - p_2} \quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{a + d}{m}, \\ p_2 &= \frac{(a + b)(a + c) + (c + d)(b + d)}{m^2} \end{aligned}$$

多样性 - 多样性度量

□ k -误差图



(a) AdaBoost 集成



(b) Bagging 集成

多样性 – 多样性增强

□ 常见的增强个体学习器的多样性的方法

- 数据样本扰动
- 输入属性扰动
- 输出表示扰动
- 算法参数扰动

多样性 - 多样性增强 - 数据样本扰动

□ 数据样本扰动通常是基于采样法

- Bagging中的自助采样法
- Adaboost中的序列采样

数据样本扰动对“不稳定基学习器”很有效

□ 对数据样本的扰动敏感的基学习器(不稳定基学习器)

- 决策树，神经网络等

□ 对数据样本的扰动不敏感的基学习器(稳定基学习器)

- 线性学习器，支持向量机，朴素贝叶斯，k近邻等

多样性 - 多样性增强 - 输入属性扰动

□ 随机子空间算法(random subspace)

输入: 训练集 $D = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\}$;
基学习算法 \mathcal{L} ;
基学习器数 T ;
子空间属性数 d' .

过程:

```
1: for  $t = 1, 2, \dots, T$  do  
2:    $\mathcal{F}_t = \text{RS}(D, d')$   
3:    $D_t = \text{Map}_{\mathcal{F}_t}(D)$   
4:    $h_t = \mathcal{L}(D_t)$   
5: end for
```

输出: $H(\mathbf{x}) = \arg \max_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}(h_t(\text{Map}_{\mathcal{F}_t}(\mathbf{x})) = y)$

多样性 - 多样性增强 - 输出表示扰动

- 翻转法(Flipping Output)
- 输出调剂法(Output Smearing)
- ECOC法

多样性 – 多样性增强 – 算法参数扰动

- 负相关法
- 不同的多样性增强机制同时使用

阅读材料

- 集成学习方面的主要推荐读物是[Zhou,2012]，本章提及的所有内容在该书中都有更深入的详细介绍。
[Kuncheva,2004; Rockach,2010b]可供参考，[Schapire and Freund,2012]则是专门关于Boosting的著作，集成学习方面有一些专门性的会议MCS(International Workshop on Multiple Classifier System).
- Boosting源于[Schapire,1990]对[Kearns and Valiant,1989]提出的“弱分类器是否等价于强学习”这个重要理论问题的构造性证明。最初的Boosting算法仅有理论意义，经数年努力后[Freund and Schapire,1997]提出Adaboost，并因此或得理论计算机科学方面的重要奖项—哥德尔奖。关于Boosting和Bagging已有的很多理论研究成果课参阅[Zhou,2012]第2-3章。