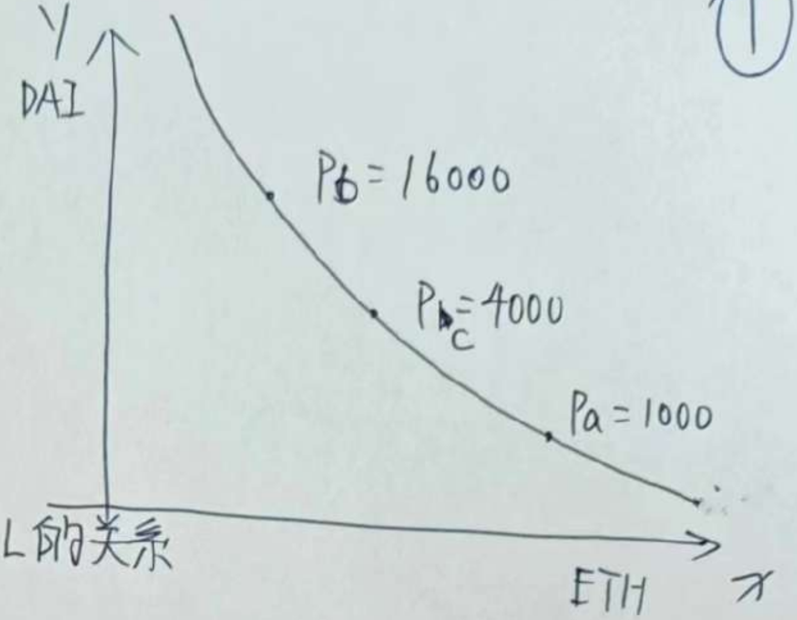
前提

$$x\cdot y = k = L^2$$

$$P = \frac{y}{x}$$

$$\left(x_r + \frac{L}{\sqrt{P_b}}\right)\cdot\left(y_r + L\sqrt{P_a}\right) = L^2$$




求：在不同价格区间 $P \le P_a$，
$P \ge P_b$ 和 $P_a < P < P_b$ 时. $x_r$. $y_r$ 和 $L$ 的关系

1. 当 $P \le P_a$ 时. $y_r = 0$.

$$\left(x_r + \frac{L}{\sqrt{P_b}}\right)\cdot L\sqrt{P_a} = L^2 \Rightarrow x_r = L\frac{\sqrt{P_b}-\sqrt{P_a}}{\sqrt{P_a}\cdot\sqrt{P_b}}$$

$$L = x_r\frac{\sqrt{P_a}\cdot\sqrt{P_b}}{\sqrt{P_b}-\sqrt{P_a}}$$

2. 当 $P \ge P_b$ 时. $x_r = 0$

$$\frac{L}{\sqrt{P_b}}\left(y_r + L\sqrt{P_a}\right) = L^2 \Rightarrow y_r = L\left(\sqrt{P_b}-\sqrt{P_a}\right)$$

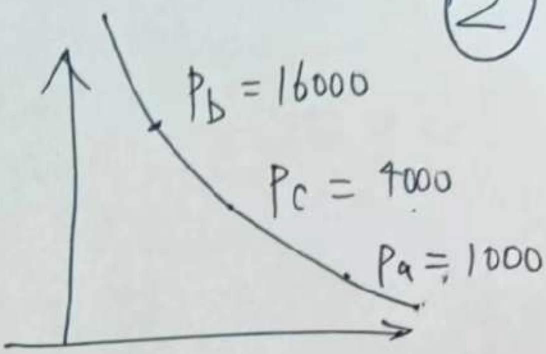
$$L = \frac{y_r}{\sqrt{P_b}-\sqrt{P_a}}$$

3. 当 $P_a < P < P_b$ 时. 在 $(P_a, P)$ 区间. $L$ 的贡献都由 $y_r$ 来做出
在 $(P, P_b)$ 区间. $L$ 的贡献都由 $x_r$ 来做出.

$$L = \frac{y_r}{\sqrt{P}-\sqrt{P_a}} \Rightarrow y_r = L\cdot\left(\sqrt{P}-\sqrt{P_a}\right)$$

$$L = x_r\frac{\sqrt{P}\cdot\sqrt{P_b}}{\sqrt{P_b}-\sqrt{P}} \Rightarrow x_r = L\frac{\sqrt{P_b}-\sqrt{P}}{\sqrt{P}\cdot\sqrt{P_b}}$$

已知. $L=20\sqrt{10}$. 求不同价格区间 $x_r$、$x_v$、$y_r$、$y_v$ 的值.




1. 当 $P\le P_a$ 时. $y_r=0$

$$x_r = L\frac{\sqrt{P_b}-\sqrt{P_a}}{\sqrt{P_b}\cdot\sqrt{P_a}} = 20\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{16000}-\sqrt{1000}}{\sqrt{16000}\cdot\sqrt{1000}}$$

$$=20\sqrt{10}\ \frac{40\sqrt{10}-10\sqrt{10}}{\cancel{40\sqrt{10}}\cdot 10\sqrt{10}}$$

$$=\cancel{20}\ \frac{30\sqrt{10}}{20\sqrt{10}} = 1.5$$

$$x_v = \frac{L}{\sqrt{P_b}} = \frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{16000}} = \frac{20\sqrt{10}}{40\sqrt{10}} = 0.5$$

$$y_v = L\sqrt{P_a} = 20\sqrt{10}\cdot\sqrt{1000} = 20\cdot 100 = 2000$$

$$\begin{cases} x_r: 1.5 \\ x_v: 0.5 \\ y_r: 0 \\ y_v: 2000 \end{cases}$$

2. 当 $P\ge P_b$ 时. $x_r=0$.

$$y_r = L(\sqrt{P_b}-\sqrt{P_a}) = 20\sqrt{10}\cdot(\sqrt{16000}-\sqrt{1000}) = 20\sqrt{10}\cdot 30\sqrt{10} = 6000.$$

$$\begin{cases} x_r: 0 \\ x_v: 0.5 \\ y_r: 6000 \\ y_v: 2000 \end{cases}$$

3. 当 $P_a<P<P_b$ 时. $P_c$ 点.

$$x_r = L\frac{\sqrt{P_b}-\sqrt{P_c}}{\sqrt{P_b}\cdot\sqrt{P_c}} = 20\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{16000}-\sqrt{4000}}{\sqrt{16000}\cdot\sqrt{4000}} = 20\sqrt{10}\cdot\frac{40\sqrt{10}-20\sqrt{10}}{40\sqrt{10}\cdot 20\sqrt{10}} = 0.5$$

$$y_r = L(\sqrt{P_c}-\sqrt{P_a}) = 20\sqrt{10}\cdot(\sqrt{4000}-\sqrt{1000}) = 20\sqrt{10}\cdot 10\sqrt{10} = 2000$$

$$\begin{cases} x_r: 0.5 \\ x_v: 0.5 \\ y_r: 2000 \\ y_v: 2000 \end{cases}$$

习题1：用户有 $x_r=2$ ETH. 在 ETH/DAI 添加流动性.

当前 ETH 价格 $P=2000$. 目标价格区间 $P_a=1500$. $P_b=2500$.

求：需要多少 $y_r$？

③

当 $P$ 在 $(P_a, P_b)$ 之间波动. 价格变化对 $x_r$ 和 $y_r$ 的影响？

由 $L=\sqrt{xy}$ 和 $P=\frac{y}{x}$. 可以得出

$$x=\frac{L}{\sqrt{P}}, \quad y=L\cdot\sqrt{P}.$$

此时 $x=x_r+x_v$. $y=y_r+y_v$

$x_v$. $y_v$. 不变. $x_r'=x_r+\Delta x$. $y_r'=y_r+\Delta y$

$$\Delta x=x_r-x_r'=(x_r+x_v)-(x_r'+x_v)$$

$$=\frac{L}{\sqrt{P}}-\frac{L}{\sqrt{P'}}=\Delta\frac{1}{\sqrt{P}}\cdot L$$

$$\Delta y=y_r-y_r'=(y_r+y_v)-(y_r'+y_v)$$

$$=L\sqrt{P}-L\sqrt{P'}=L\cdot\Delta\sqrt{P}=\Delta\sqrt{P}\cdot L$$

习题2：在习题1的案例中. 当价格变为 $P=2500$. 此时移除流动性.
用户可以得到多少 ETH 和 DAI？

$$\sqrt{P'}=\frac{L\sqrt{P}}{\Delta x\sqrt{P}+L} \qquad \sqrt{P'}=\frac{\Delta y}{L}+\sqrt{P_0}$$

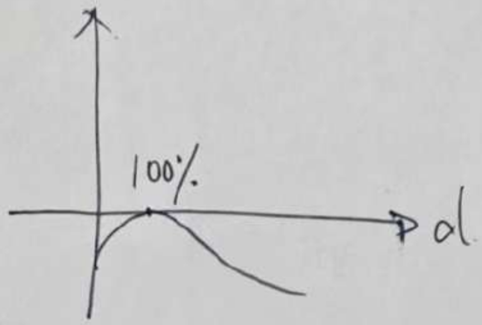
习题3：在上面的流动性中. 用户卖出 1个 ETH. 可以得到多少 DAI？

# Uniswap V3 里的无常损失

复习 uniswap V2.

$x\cdot y=k.\quad p=y/x.\quad P_1=P_0 d.$

$$IL(d)=\frac{V_1-V_{hold}}{V_{hold}}=\frac{V_1}{V_{hold}}-1=\frac{2\sqrt{d}}{d+1}-1$$



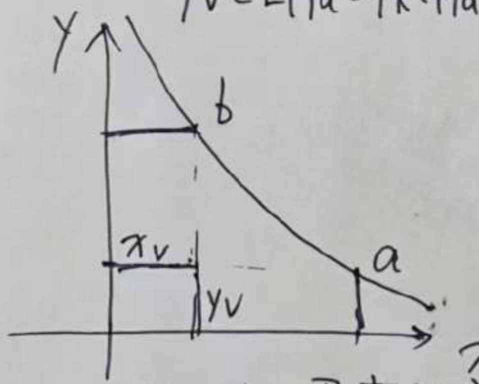

---

$x\cdot y=k.\ p=\frac{y}{x} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\sqrt{k}/\sqrt{p} \\ y=\sqrt{k}\cdot\sqrt{p} \end{array}$ 其中 $x_v=\frac{L}{\sqrt{P_b}}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_b}}$

$y_v=L\sqrt{P_a}=\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_a}$

$x=x_r+x_v$ 起始价格 $P_0=y_0/x_0$

$y=y_r+y_v$ 最终价格 $P_1=y_1/x_1$




$x_v$、$y_v$ 固定不变

1. 当 $P_a < P_0, P_1 < P_b$

$t_0$ 时刻：$(x_0, y_0)$ $\quad P_0=y_0/x_0$

$t_1$ 时刻：$(x_1, y_1)$ $\quad P_1=y_1/x_1$

$t_{hold}$ ： $(x_0, y_0)$ $\quad P_1=y_1/x_1$

$$\begin{aligned} V_1 = x_r\cdot P_1+y_r &= (x_1-x_v)\cdot P_1+(y_1-y_v) \\ &= \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_1}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_b}}\right)\cdot P_1+(\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_1}-\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_a}) \\ &= 2\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_1}-\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_a}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_b}}\cdot P_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{hold} = x_r\cdot P_1+y_r &= (x_0-x_v)\cdot P_1+(y_0-y_v) \\ &= \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_0}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_b}}\right)\cdot P_1+(\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_0}-\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_a}) \\ &= \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}}\right)\cdot P_1+(\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a})\cdot\sqrt{k} \end{aligned}$$

$$IL(\alpha)=f(\alpha)=\frac{V_1}{V_{hold}}-1=\frac{2\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_1}-\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_a}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_b}}\cdot P_1}{\sqrt{k}\cdot(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1+(\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a})\cdot\sqrt{k}}-1$$ ⑤

$$=\frac{2\sqrt{P_1}-\sqrt{P_a}-\frac{P_1}{\sqrt{P_b}}}{(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1+\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a}}-1$$

2. 当 $P_a<P<P_b$、$P_1<P_a$ 时、$y_r=0$

$$V_1=x_r\cdot P_1+y_r=(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_1}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1$$

$$IL(\alpha)=f(\alpha)=\frac{(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_1}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1}{\sqrt{k}\cdot(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1+(\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a})\cdot\sqrt{k}}-1$$

$$=\frac{(\frac{1}{\sqrt{P_1}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1}{(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1+(\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a})}-1$$

3. 当 $P_a<P<P_b$. $P_1>P_b$ 时. $x_r=0$

$$V_1=x_r\cdot P_1+y_r=0+(\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_1}-\sqrt{k}\cdot\sqrt{P_a})=\sqrt{k}(\sqrt{P_1}-\sqrt{P_a})$$

$$IL(\alpha)=f(\alpha)=\frac{\sqrt{k}\cdot(\sqrt{P_1}-\sqrt{P_a})}{\sqrt{k}(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1+(\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a})\cdot\sqrt{k}}-1$$

$$=\frac{\sqrt{P_1}-\sqrt{P_a}}{(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1+(\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a})}-1$$

当 $P_a\to 0$. $P_b\to\infty$ 时.

$$IL(\alpha)=\frac{2\sqrt{P_1}-\sqrt{P_a}-\frac{P_1}{\sqrt{P_b}}}{(\frac{1}{\sqrt{P_0}}-\frac{1}{\sqrt{P_b}})\cdot P_1+\sqrt{P_0}-\sqrt{P_a}}-1=\frac{2\sqrt{P_1}}{\frac{P_1}{\sqrt{P_0}}+\sqrt{P_0}}-1$$

$P_1=P_0\cdot\alpha$. 则 $IL(\alpha)=\frac{2\sqrt{P_0\cdot\alpha}}{\frac{P_0\alpha}{\sqrt{P_0}}+\sqrt{P_0}}-1=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}-1$. 和 $V_2$ 中一致