Corrigé du contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ;
dictionnaire autorisé pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits,
ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
L'épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème indépendants.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner la décomposition LU de la matrice A ; on détaillera les calculs permettant d'obtenir les deux matrices L et U de la décomposition.

Corrigé

On sait que L est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux valent 1 et que U est une matrice triangulaire supérieure. Éliminons les termes de la première colonne de A situés sous la diagonale. Pour cela on multiplie la première ligne par –1 (respectivement 1 et –1) avant d'en ajouter le résultat à la deuxième (respectivement troisième et quatrième) ligne. En considérant l'opposé des coefficients par lesquels on multiplie la première ligne, on obtient les termes sous la diagonale de la première colonne de L. La matrice A devient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la première colonne de L vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On fait de même avec la deuxième colonne pour éliminer les termes sous la diagonale ; les coefficients multiplicateurs de la deuxième ligne sont respectivement 1 et 0. La matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la deuxième colonne de L vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice courante est maintenant triangulaire supérieure. Il n'y a donc plus rien à faire : la matrice courante donne U, et les autres colonnes de L sont les colonnes associées de la matrice identité. On obtient finalement :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

2. En déduire la solution du système linéaire $AX = b$ où $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$ est un vecteur donné de $\mathbf{R}^4$ (on exprimera les composantes de X à l'aide de celles de b).

Corrigé

En utilisant la décomposition LU, le système $AX = b$ s'écrit $LUX = b$. Posons $Y = UX$. On est amené à résoudre successivement les deux systèmes $LY = b$ puis $UX = Y$. En posant $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$ et $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$, le premier système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_1 + y_2 = b_2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 = b_3 \\ y_1 + y_4 = b_4 \end{cases}.$$

La méthode dite de remontée (ici, il s'agit plutôt d'une descente...) permet de résoudre le système de proche en proche. On obtient $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_2 + b_3 \\ b_4 - b_1 \end{pmatrix}$. On résout ensuite $UX = Y$. En posant $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, ce système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = y_1 \\ 2x_2 - 2x_3 = y_2 \\ -2x_3 = y_3 \\ 2x_4 = y_4 \end{cases}.$$

La méthode de remontée permet là aussi de résoudre le système de proche en proche :

$$X = \begin{pmatrix} (b_2 + b_4)/2 \\ -(b_1 + b_3)/2 \\ -(b_2 + b_3)/2 \\ (b_4 - b_1)/2 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

3. Si A est inversible, déduire de ce qui précède l'expression de A^{-1} ; sinon, justifier la non-inversibilité de A.

Corrigé

Le déterminant de A est obtenu en multipliant entre eux les termes diagonaux de U (puisque ceux de L valent 1). Il vaut donc –8, ce qui n'est pas nul : A est inversible.

Pour obtenir A^{-1}, il suffit de considérer les quatre systèmes linéaires $AX = e_i$, où e_i $(1 \le i \le 4)$ est le i^e vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

À l'aide de ce qui précède, on obtient immédiatement l'expression de A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & -11 & -6\sqrt{2} \\ -11 & 16 & 6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 34 \end{pmatrix}$.

1. En appliquant la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice A.

Indication. On rappelle que les premiers carrés d'entiers sont les nombres suivants : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900...

Corrigé

On constate d'abord que la matrice A est réelle symétrique, ce qui permet d'appliquer la méthode de Jacobi pour en déterminer les valeurs propres.

On reprend les notations du cours.

Faisons apparaître un terme nul en position $p = 1$ et $q = 2$ (terme actuellement égal à –11, plus grand terme non diagonal en valeur absolue). Pour cela, on pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/2a_{pq} = 0$. On a alors $t = 1$, $c = s = 1/\sqrt{2}$. Puis on calcule les termes de la nouvelle matrice $B = (b_{ij})$. Seuls les termes en position (i, j) avec $i = p$ ou $j = p$ ou $i = q$ ou $j = q$ peuvent changer ; ici, 34 ne change pas. Par ailleurs, on aura $b_{12} = b_{21} = 0$. On calcule les autres termes à l'aide des formules du cours :

$b_{13} = c.a_{13} - s.a_{23} = -12$

$b_{23} = s.a_{13} + c.a_{23} = 0$

$b_{11} = a_{11} - t.a_{12} = 27$

$b_{22} = a_{22} + t.a_{12} = 5$.

D'où la nouvelle matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 27 & 0 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & 34 \end{pmatrix}.$$

On remplace A par B pour continuer d'appliquer la méthode de Jacobi.

On élimine maintenant le terme en position $p = 1$ et $q = 3$ (terme maintenant égal à –12).

On pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/2a_{pq} = -7/24$. On résout l'équation $t^2 + 2xt - 1 = 0$. La racine appartenant à l'intervalle $]-1, 1]$ est $t = -3/4$. D'où $c = 4/5$ et $s = -3/5$. On calcule les termes qui peuvent changer :
$b_{12} = c.a_{12} - s.a_{32} = 0$
$b_{32} = s.a_{12} + c.a_{32} = 0$
$b_{11} = a_{11} - t.a_{13} = 18$
$b_{33} = a_{33} + t.a_{13} = 43$.
D'où la nouvelle matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix}.$$

La matrice obtenue est diagonale, la méthode de Jacobi s'arrête. Les valeurs propres de A sont 18, 5 et 43.
Pour obtenir les vecteurs propres, on considère les matrices de passage. La première vaut $\Omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la seconde $\Omega_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Le produit $\Omega_1.\Omega_2$ donne, en colonnes, une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice A initiale. On obtient ici :

$$\Omega_1.\Omega_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3\sqrt{2} & 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre normé associé à la valeur propre 18, $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est un associé à 5 et $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$ à 43.

Fin de corrigé

2. Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse au système linéaire $AX = b$. Donner la valeur du conditionnement de ce système pour la norme $\| \|_2$.
Corrigé
On sait que, pour une matrice normale inversible, le conditionnement pour la norme $\| \|_2$ est donné par le rapport entre la plus grande valeur propre en valeur absolue et la plus petite en valeur absolue. Ici, A est inversible puisque ses valeurs propres sont non nulles. Elle est de plus normale puisqu'elle est symétrique. Le conditionnement pour la norme $\| \|_2$ vaut donc $43/5 = 8{,}6$.
Fin de corrigé

3. Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse au minimum global sur $\mathbf{R}^3$ de la forme quadratique Q définie par $Q(X) = \frac{1}{2} X^t AX + bX$. Pour quelles valeurs de b la forme Q atteint-elle une valeur qui soit un minimum global sur $\mathbf{R}^3$? Pour ces valeurs, peut-il exister plusieurs vecteurs X atteignant ce minimum global ou un tel vecteur est-il nécessairement unique ? Pour quels vecteurs b existe-t-il des minima locaux qui ne soient pas le minimum global ?

Corrigé

La matrice A ayant toutes ses valeurs propres strictement positives, elle est définie positive. Par conséquent, Q est strictement convexe (cette propriété étant indépendante du vecteur b). Les résultats du cours nous indiquent alors que, pour tout b, Q admet une valeur qui est le minimum global et que cette valeur est atteinte par exactement un vecteur X (donné par l'équation $AX = -b$). Par ailleurs, toujours dans le cas de la convexité, tout minimum local est global ; par conséquent, il n'existe aucun vecteur b pour lequel il y aurait des minima locaux qui ne soient pas le minimum global.

Fin de corrigé

Exercice 3

On s'intéresse au problème (P) d'optimisation linéaire suivant :

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Résoudre le problème (P) à l'aide de l'algorithme du simplexe (on rencontrera des fractions dont le dénominateur ne contient qu'un chiffre). On notera $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ la solution qui donne l'optimum du problème.

Corrigé

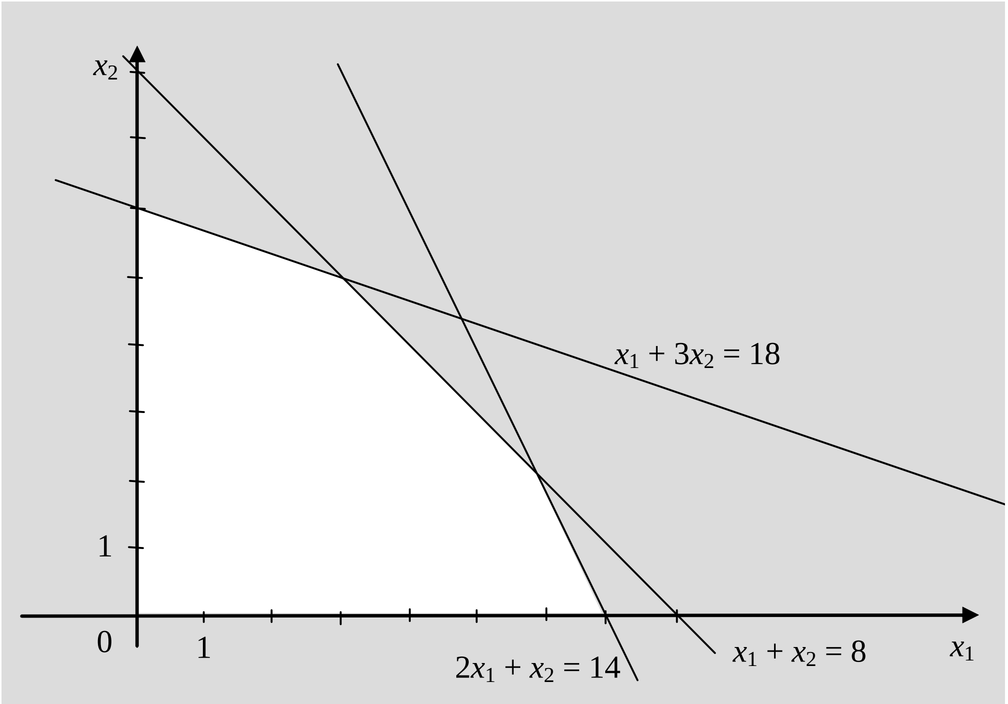
La figure ci-dessous représente le domaine réalisable.

Introduisons les variables d'écart :

$x_3 = 14 - 2\,x_1 - x_2$
$x_4 = 8 - x_1 - x_2$
$x_5 = 18 - x_1 - 3x_2$

Chacune des deux variables x_1 et x_2 est candidate pour entrer en base. Faisons entrer x_2, qui est ici à la fois la variable pourvue du plus grand coefficient dans z et celle qui fait le plus croître z. On constate que la croissance est limitée par la positivité de x_5, qui sort donc de la base. On obtient le dictionnaire suivant :

$x_2 = 6 - x_1/3 - x_5/3$
$x_3 = 8 - 5x_1/3 + x_5/3$
$x_4 = 2 - 2x_1/3 + x_5/3$
$z = 18 + x_1 - x_5$



Maintenant, x_1 est la seule variable candidate pour entrer en base. Sa croissance est limitée par la positivité de x_4, qui sort donc de la base. On obtient le nouveau dictionnaire suivant :

$$x_1 = 3 + x_5/2 - 3x_4/2$$
$$x_2 = 5 - x_5/2 + x_4/2$$
$$x_3 = 3 - x_5/2 + 5x_4/2$$
$$z = 21 - x_5/2 - 3x_4/2$$

Tous les coefficients des variables dans z sont désormais négatifs ou nuls : on atteint le maximum de z en annulant les variables hors base x_4 et x_5, ce qui donne $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$, $z = 21$. D'où $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (3, 5)$.

Fin de corrigé

2. Écrire le problème dual du problème (P) et en donner la solution optimale (on précisera comment on obtient la valeur optimale des variables duales).

Corrigé

Le problème (P) étant sous forme standard, on obtient directement le problème dual (D) :

$$(D) \quad \begin{array}{l} \text{Minimiser } w = 14y_1 + 8y_2 + 18y_3 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

La solution de ce problème est donnée par l'opposé des coefficients dans z des variables d'écart, c'est-à-dire $y = (0, 3/2, 1/2)$. On vérifie qu'on a bien alors $w = 21$.

Fin de corrigé

3. On suppose dans cette question que la fonction z s'écrit en fait :

$$z(x_1, x_2) = ax_1 + 3x_2$$

où a est un paramètre réel. Indiquer pour quelles valeurs de a la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste optimale (on ne s'appuiera pas sur un raisonnement graphique).

Corrigé
Par rapport au problème initial, on a en fait ajouté $(a-2)x_1$ à l'expression initiale de z. Il suffit de modifier le dernier dictionnaire obtenu à la question 1 en ajoutant cette quantité à z. On obtient :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 + x_5/2 - 3x_4/2\\
x_2 &= 5 - x_5/2 + x_4/2\\
x_3 &= 3 - x_5/2 + 5x_4/2\\
z &= 21 - x_5/2 - 3x_4/2 + (a-2)x_1\\
&= 21 - x_5/2 - 3x_4/2 + (a-2)(3 + x_5/2 - 3x_4/2)\\
&= 21 + 3(a-2) + x_5(a-3)/2 + 3(1-a)x_4/2
\end{aligned}$$

Cet ajout n'affectant pas les expressions des variables en base, la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste basique et réalisable. Mais elle ne reste optimale que s'il n'y a pas de variable hors base entrante. Pour cela, il faut et suffit que tous les coefficients de z soient négatifs ou nuls. La solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste donc optimale si et seulement si on a $1 \leq a \leq 3$ (intervalle qui contient bien sûr la valeur 2...).

On peut aussi répondre à la question à l'aide du théorème des écarts complémentaires. La solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste réalisable puisque les contraintes ne changent pas. La première contrainte primale reste non saturée, d'où, en reprenant les notations du cours, $y_1 = 0$. Par ailleurs, puisque x_1^* et x_2^* sont non nuls, y_1, y_2 et y_3 doivent vérifier le système

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 = a \\ y_1 + y_2 + 3y_3 = 3 \end{cases}$$

dont la solution est $y_1 = 0$, $y_2 = 3(a-1)/2$ et $y_3 = (3-a)/2$ (qui ne sont autres que l'opposé des coefficients de x_4 et x_5 respectivement dans l'expression de z ci-dessus). Comme il faut encore avoir la positivité (au sens large) de y_1, y_2 et y_3, on conclut que la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste optimale si et seulement si on a $1 \leq a \leq 3$.
Fin de corrigé

Exercice 4
Soit α est un paramètre réel de signe quelconque. On considère le problème (P_α) suivant :

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiser} \quad f_\alpha(x, y) = x^2 + y^2 + xy + \alpha x\\
&\text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

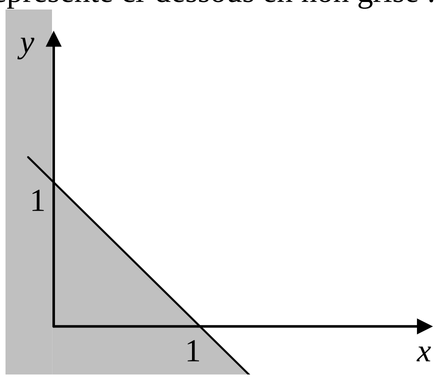
On admettra que, pour tout α, tout minimum local de (P_α) est global. On ne fera donc pas la distinction dans cet exercice.

1. Indiquer, en fonction de α, les points du domaine réalisable où les contraintes sont qualifiées.

Corrigé
Commençons par écrire le problème comme dans le cours. Pour cela, posons $g_1(x, y) = 1 - x - y$ et $g_2(x, y) = -x$. Le problème s'écrit alors : minimiser f_α avec les contraintes $g_1(x, y) \leq 0$ et $g_2(x, y) \leq 0$.

Les fonctions g_1 et g_2 sont affines donc convexes. De plus, le domaine réalisable possède un intérieur strict non vide (celui-ci contient par exemple le point (1, 1)). Un résultat du cours permet alors d'affirmer que les contraintes sont qualifiées en tout point, indépendamment des valeurs de α.
Fin de corrigé

2. En appliquant la condition de Karush, Kuhn et Tucker, déterminer en fonction de α les coordonnées du point où f_α atteint son minimum sur le domaine considéré.
Corrigé
Le domaine réalisable est représenté ci-dessous en non grisé :



La matrice hessienne de f_α vaut :

$$\nabla^2 f_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ;$$

ses valeurs propres valent 3 et 1, qui sont strictement positives. La fonction f_α est donc strictement convexe pour toute valeur de α. Les contraintes étant affines donc convexes, la condition de Karush, Kuhn et Tucker est nécessaire et suffisante pour avoir un minimum.

* Cherchons si le minimum peut se trouver à l'intérieur du domaine. Lorsqu'aucune contrainte n'est saturée, la condition de Karush, Kuhn et Tucker est l'annulation du gradient. Or on a :

$$\nabla f_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + \alpha \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Le gradient s'annule si et seulement si on a $\begin{cases} 2x + y + \alpha = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, autrement dit si on a $x = -2\alpha/3$, $y = \alpha/3$. Ce point appartient à l'intérieur du domaine réalisable de notre problème si et seulement si on a $2\alpha/3 < 0$ et $-2\alpha/3 + \alpha/3 > 1$, c'est-à-dire pour $\alpha < -3$.

* Cherchons maintenant quand la condition de Karush, Kuhn et Tucker est satisfaite en un point du bord d'équation :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Seule la contrainte liée à g_1 étant saturée, la condition de Karush, Kuhn et Tucker s'écrit : $\nabla f_\alpha(x, y) = -\lambda_1 \nabla g_1(x, y)$, où λ_1 est un coefficient positif ou nul.

Pour $x + y = 1$, on a $\nabla f_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - y + \alpha \\ y + 1 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On doit donc avoir :

$$\begin{cases}\lambda_1 = 2 - y + \alpha = y + 1\\ \lambda_1 = y + 1 \geq 0\\ x = 1 - y\\ x > 0\end{cases}, \text{ ou encore } \begin{cases}x = \dfrac{1-\alpha}{2}\\ y = \dfrac{\alpha+1}{2}\\ \dfrac{\alpha+1}{2} + 1 \geq 0\\ \alpha < 1\end{cases} \text{ et donc } \begin{cases}x = \dfrac{1-\alpha}{2}\\ y = \dfrac{\alpha+1}{2}\\ -3 \leq \alpha < 1\end{cases}.$$

* Considérons désormais l'autre bord :

$$\begin{cases}x + y > 1\\ x = 0\end{cases}.$$

Seule la contrainte liée à g_2 étant saturée, la condition de Karush, Kuhn et Tucker s'écrit : $\nabla f_\alpha(x, y) = -\lambda_2 \nabla g_2(x, y)$, où λ_2 est un coefficient positif ou nul.

Pour $x = 0$, on a $\nabla f_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} y + \alpha \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On doit donc avoir $y = 0$: le point obtenu est l'origine, qui n'est pas réalisable. Quelle que soit la valeur de α, il n'y a donc pas de solution optimale sur ce bord.

* Regardons enfin à quelle condition sur α le minimum est au point (0, 1) où les deux contraintes sont saturées. La condition de Karush, Kuhn et Tucker s'écrit :
$\nabla f_\alpha(x, y) = -\lambda_1 \nabla g_1(x, y) - \lambda_2 \nabla g_2(x, y)$, où λ_1 et λ_2 sont des coefficients positifs ou nuls. En ce point, on a : $\nabla f_\alpha(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On calcule λ_1 et λ_2 par : $\begin{cases}1 + \alpha = \lambda_1 + \lambda_2\\ 2 = \lambda_1\end{cases}$, ce qui donne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \alpha - 1$; la condition de Karush, Kuhn et Tucker est vérifiée si et seulement si λ_1 et λ_2 sont positifs ou nuls, c'est-à-dire pour $\alpha \geq 1$.

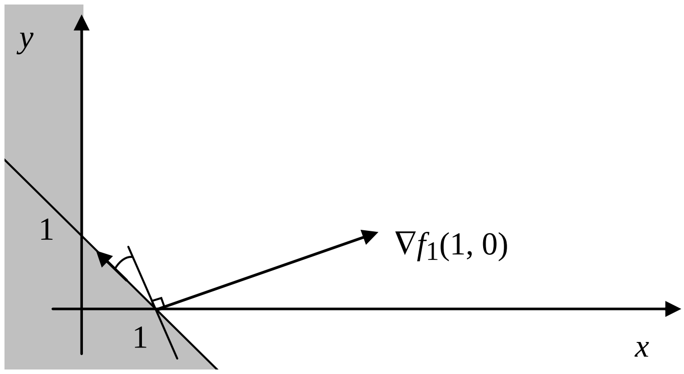
* Conclusion :
On a ainsi déterminé le minimum global du problème pour toutes les valeurs de α :
- pour $\alpha < -3$, le minimum est en $x = -2\alpha/3$, $y = \alpha/3$, à l'intérieur du domaine ;
- pour $-3 \leq \alpha < 1$, le minimum est en $x = (1 - \alpha)/2$, $y = (1 + \alpha)/2$, sur un des deux bords ;
- pour $\alpha \geq 1$, le minimum est en (0, 1).

Fin du corrigé

3. On considère maintenant le problème (P_1) obtenu pour $\alpha = 1$. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant la méthode des directions admissibles de plus grande pente à pas optimal à partir du point (1, 0). On fera un dessin représentant clairement la situation et sur lequel on s'appuiera pour justifier les directions suivies ou, à la fin, l'arrêt de la méthode.

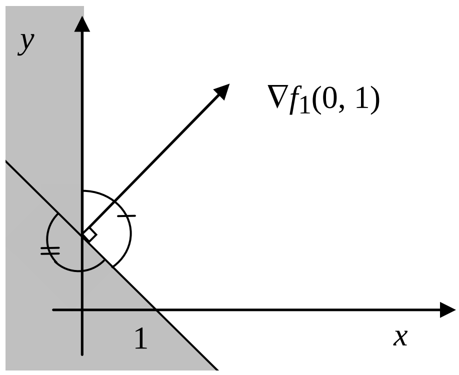
Corrigé

Au point (1, 0), le gradient de f_1 vaut $(3, 1)^t$. Il est ci-dessous. Les directions de descente étant celles faisant un angle supérieur à $\pi/2$ avec le gradient, les directions admissibles et de descente sont celles appartenant au secteur représenté sur le dessin.



Parmi ces directions admissibles et de descente, la direction de plus grande pente est celle qui s'éloigne (angulairement) le plus de $\nabla f_1(1, 0)$, c'est-à-dire la direction qui suit la droite d'équation $g_1(x, y) = 0$ en remontant vers le point (0, 1) (voir dessin). On se déplace donc dans la direction et le sens donnés par le vecteur $(-1, 1)^t$. Si s désigne l'amplitude du déplacement, le nouveau point cherché est de la forme $(1, 0)^t + s.(-1, 1)^t = (1 - s, s)^t$. Définissons la fonction γ à une variable s par $\gamma(s) = f_1(1 - s, s) = s^2 - 2s + 2$. Comme $\gamma'(s)$ vaut $2s - 2$, le minimum de g est obtenu pour $s = 1$. On atteint alors le point (0, 1), qui appartient bien au domaine réalisable.

Au point (0, 1), le gradient de f_1 vaut désormais $(2, 2)^t$ (voir dessin ci-dessous). On constate qu'il est orthogonal au bord délimitant le domaine (celui d'équation $g_1(x, y) = 0$). Aucune direction de descente n'est admissible. En effet, les directions admissibles sont celles appartenant au secteur marqué d'un seul petit trait dans le dessin ci-dessous, bords inclus, alors que les directions de descente sont les directions faisant avec $\nabla f_1(0, 1)$ un angle supérieur à $\pi/2$, c'est-à-dire les directions du secteur marqué de deux petits traits, bords exclus. On a atteint le minimum cherché : le point (0, 1). Il correspond bien au résultat obtenu à la question précédente.



Fin du corrigé