Corrigé du contrôle de connaissances de MDI 210 – P3

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ; dictionnaires pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.

Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé
On élimine les deux termes de la première colonne situés sous la diagonale en multipliant la première ligne par 1 avant de la retrancher à la deuxième et par –1 avant de la retrancher de la troisième. On obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On fait pareil avec le terme de la deuxième colonne situé sous la diagonale en multipliant la deuxième ligne par 2 avant de la retrancher à la troisième. On obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, qui est la matrice triangulaire supérieure U.

La matrice L s'obtient en considérant les coefficients par lesquels on a multiplié les lignes à chaque étape : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. D'où finalement la décomposition LU de A :

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

2. À l'aide de la décomposition LU de A, déterminer l'inverse de A sans calculer explicitement les inverses de L et de U.
Indication : l'inverse de A fait intervenir des fractions rationnelles de dénominateur égal à 7.
Corrigé

Constatons d'abord que, d'après la question 1, le déterminant de A vaut 7 ; A est donc inversible.

L'obtention de la matrice inverse s'obtient en résolvant les trois systèmes linéaires $A.X_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq 3$, e_i désignant le i^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On réécrit ces systèmes de la façon suivante : $LU.X_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. Dans un premier temps, on pose $Y_i = U.X_i$ et on résout simultanément les systèmes $L.Y_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq 3$ à l'aide de la méthode dite de remontée :

$$\begin{cases} y_1 & = & 1 & | & 0 & | & 0 \\ y_1 + y_2 & = & 0 & | & 1 & | & 0 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 & = & 0 & | & 0 & | & 1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} y_1 & = & 1 & | & 0 & | & 0 \\ y_2 & = & -1 & | & 1 & | & 0 \\ y_3 & = & 3 & | & -2 & | & 1 \end{cases}.$$

Puis on résout simultanément les systèmes $Y_i = U.X_i$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 1 & | & 0 & | & 0 \\ \quad - x_2 + 4x_3 & = & -1 & | & 1 & | & 0 \\ \qquad\quad - 7x_3 & = & 3 & | & -2 & | & 1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 & | & 0 & | & 1 \\ x_2 & = & -5/7 & | & 1/7 & | & -4/7 \\ x_3 & = & -3/7 & | & 2/7 & | & -1/7 \end{cases}$$

Et donc $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Fin de corrigé

Exercice 2 (3 points)

1. En appliquant la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -20 \\ 12 & 8 & 15 \\ -20 & 15 & -8 \end{pmatrix}$. Avec les notations du cours, on traitera les couples (p, q) dans l'ordre naturel : (1, 2), (1, 3), etc., pour les couples pour lesquels un tel examen est pertinent. On rappelle que 144 est le carré de 12 et 625 celui de 25.

Corrigé

On constate d'abord que la matrice A est réelle symétrique, ce qui permet d'appliquer la méthode de Jacobi pour en déterminer les valeurs propres.

On reprend les notations du cours.

Faisons apparaître un terme nul en position $p = 1$ et $q = 2$ (terme actuellement égal à 12). Pour cela, on pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/2a_{pq} = 7/24$. On résout l'équation $t^2 + 2xt - 1 = 0$. La racine appartenant à l'intervalle]–1, 1] est $t = 3/4$. D'où $c = 4/5$ et $s = 3/5$. Puis on calcule les termes de la nouvelle matrice $B = (b_{ij})$. Seuls les termes en position (i, j) avec $i = p$ ou $j = p$ ou $i = q$ ou $j = q$ peuvent changer ; ici, –8 ne change pas. Par ailleurs, on aura $b_{12} = b_{21} = 0$. On calcule les autres termes à l'aide des formules du cours :

$b_{13} = c.a_{13} - s.a_{23} = -25$

$b_{23} = s.a_{13} + c.a_{23} = 0$

$b_{11} = a_{11} - t.a_{12} = -8$

$b_{22} = a_{22} + t.a_{12} = 17$.

D'où la nouvelle matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -25 \\ 0 & 17 & 0 \\ -25 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la matrice de passage vaut $\Omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remplace A par B pour continuer d'appliquer la méthode de Jacobi.

On élimine maintenant le terme en position $p = 1$ et $q = 3$ (terme maintenant égal à –25).

On pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/2a_{pq} = 0$. On a alors $t = 1$, $c = s = 1/\sqrt{2}$. On calcule les termes qui peuvent changer :

$b_{12} = c.a_{12} - s.a_{32} = 0$

$b_{32} = s.a_{12} + c.a_{32} = 0$

$b_{11} = a_{11} - t.a_{13} = 17$

$b_{33} = a_{33} + t.a_{13} = -33$.

D'où la nouvelle matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & -33 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage vaut quant à elle $\Omega_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

La matrice obtenue est diagonale, la méthode de Jacobi s'arrête. Les valeurs propres de A sont 17, 17 et –33.

Pour obtenir les vecteurs propres, on considère les matrices de passage. Le produit $\Omega_1 . \Omega_2$ donne, en colonnes, une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice A initiale. On obtient ici :

$$\Omega_1 . \Omega_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} & 4 \\ -3 & 4\sqrt{2} & -3 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre normé associé à la valeur propre 17, $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est un associé à 17 et $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ à –33.

Fin de corrigé

2. On pose $b = (-1 \;\; -12 \;\; 20)^t$ et on considère, pour $X \in \mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par $Q(X) = \frac{1}{2} X^t AX + b^t X$. La forme Q atteint-elle un minimum sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Corrigé

On sait qu'une condition nécessaire de minimalité de Q en un point X^* est que la matrice hessienne de Q en X^* soit positive, c'est-à-dire de valeurs propres positives ou nulles. Or, la matrice hessienne de Q vaut A dont une valeur propre est négative. La forme quadratique Q n'atteint donc pas de minimum sur $\mathbb{R}^3$.

Fin de corrigé

Exercice 3 (7 points)

Soit a un paramètre réel. On considère le problème (P_a) suivant :

$$\text{Maximiser } z_a = ax_1 + 8x_2$$

$$\text{avec les contraintes} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 16 & (1) \\ x_1 + x_2 \le 5 & (2) \\ x_1 - x_2 \le 3 & (3) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1. Dans cette question, on considère $a = 7$.

   a. Résoudre (P_7) à l'aide de l'algorithme du simplexe.

Corrigé

Introduisons les variables d'écart :

$$x_3 = 16 - 4\,x_1 - 3x_2$$
$$x_4 = 5 - x_1 - x_2$$
$$x_5 = 3 - x_1 + x_2$$

Chacune des deux variables x_1 et x_2 est candidate pour entrer en base. Faisons entrer x_2, qui est ici à la fois la variable pourvue du plus grand coefficient dans z_7 et celle qui fait le plus croître z_7. On constate que la croissance est limitée par la positivité de x_4, qui sort donc de la base. On obtient le dictionnaire suivant :

$$x_2 = 5 - x_1 - x_4$$
$$x_3 = 1 - x_1 + 3x_4$$
$$x_5 = 8 - 2x_1 - x_4$$
$$z_7 = 40 - x_1 - 8x_4$$

Les coefficients de x_1 et de x_4 étant négatifs ou nuls, la solution courante est optimale. Celle-ci vaut donc (0, 5) et le maximum de z_7 vaut 40.

Fin de corrigé

b. En déduire toutes les valeurs de a pour lesquelles la solution déterminée à la question 1.a reste optimale.

Corrigé

On peut écrire z_a sous la forme :

$$z_a = z_7 + (a - 7)x_1 = 40 - x_1 - 8x_4 + (a - 7)x_1 = 40 - (a - 8)x_1 - 8x_4.$$

La solution courante (0, 5) reste optimale si et seulement si les coefficients de x_1 et de x_4 restent négatifs ou nuls, autrement dit si et seulement si on a $a \geq 8$.

Fin de corrigé

2. Donner l'expression du problème dual (D_a) de (P_a).

Corrigé

Le problème (P_a) étant sous forme standard, l'expression de (D_a) vient immédiatement :

$$\text{Minimiser } w_a = 16y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

$$\text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} 4y_1 + y_2 + y_3 \geq a \\ 3y_1 + y_2 - y_3 \geq 8 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Fin de corrigé

3. On revient au cas $a = 7$.

a. Déduire de la question 1.a une solution optimale de (D_7) ; on précisera comment on obtient cette solution.

Corrigé

On sait qu'une solution optimale de (D_7) est donnée par l'opposé des coefficients de x_3, x_4 et x_5 dans le dernier dictionnaire de la résolution de (P_7). On obtient donc ici (0, 8, 0) comme solution optimale de (D_7) (on peut d'ailleurs facilement vérifier que cette solution est réalisable pour $a = 7$ et donne à w_7 la valeur 40).

Fin de corrigé

b. Dans les contraintes (1), (2) et (3), on remplace 16, 5 et 3 respectivement par $16 + \alpha$, $5 + \beta$ et $3 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels donnés. Comment la valeur optimale de z_7 varie-t-elle en fonction de α, β et γ si on suppose que les valeurs de ces paramètres sont suffisamment petites en valeur absolue ?

Corrigé

En reprenant les notations du cours, on sait qu'une petite variation δb de b entraîne une variation de z_7 égale à $\delta b.Y$, où Y est une solution optimale de (D_7). D'après ce qui précède, on a ici $Y = (0, 8, 0)$. La variation de z_7 vaut donc 8β.
Fin de corrigé

4. En appliquant le théorème des écarts complémentaires, indiquer les valeurs de a pour lesquelles (1, 4) est solution optimale de (P_a).
Corrigé
On constate d'abord que (1, 4) est bien une solution réalisable de (P_a). On cherche donc trois variables y_1, y_2 et y_3 vérifiant l'énoncé du théorème des écarts complémentaires.
La contrainte (3) n'étant pas saturée par (1, 4), on doit avoir $y_3 = 0$.
Par ailleurs, x_1 et x_2 étant non nulles dans la solution proposée, les deux contraintes duales doivent être saturées : $\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 = a \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 8 \end{cases}$. Avec $y_3 = 0$, il vient $y_1 = a - 8$ et $y_2 = 32 - 3a$.
Ces valeurs devant être positives, on conclut que a doit être compris entre 8 et 32/3 pour que (1, 4) soit solution optimale de (P_a).
Fin de corrigé

5. On considère enfin le cas $a = 8$. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions optimales de (P_8) ?
Corrigé
Ce qui précède montre que $S_1 = (0, 5)$ et $S_2 = (1, 4)$ sont deux solutions optimales de (P_8). Or, d'après le fonctionnement de l'algorithme du simplexe, ces points sont deux sommets du polygone des solutions réalisables. On en déduit que l'ensemble des solutions optimales de (P_8) est exactement le segment $[S_1, S_2]$: on est dans le cas pour lequel la fonction objectif z_8 est parallèle à un côté du polygone des solutions réalisables, côté par lequel « on sort » quand on fait croître z_8.
Fin de corrigé

Exercice 4 (7 points)
On considère le problème P consistant à minimiser la fonction f à deux variables définie par :

$$f(x, y) = \ln x + 3x^2 + 2y^2 - 4xy$$

avec les contraintes $x \geq 1$ et $y \geq -1$. On appelle D le domaine réalisable, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x \geq 1$ et $y \geq -1$.

1. La fonction f est-elle strictement convexe sur D ?
Corrigé
Déterminons le gradient et la matrice hessienne de f :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} + 6x - 4y \\ 4y - 4x \end{pmatrix},\ \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} + 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On sait que f est strictement convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x, y)$ est une matrice définie positive, c'est-à-dire si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont strictement positives. Or le déterminant de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut $-\frac{4}{x^2} + 8$ et est strictement positif pour $x \geq 1$; les deux

valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont donc non nulles et de même signe. De plus, la trace de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut $-\frac{4}{x^2}+10$ et est aussi positive pour $x \geq 1$; les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont donc strictement positives. Par conséquent $\nabla^2 f(x, y)$ est une matrice définie positive et *f* est strictement convexe sur *D*.
Fin de corrigé

2. Indiquer en quels points de *D* les contraintes sont qualifiées.
Corrigé
Posons $g_1(x, y) = 1 - x$ et $g_2(x, y) = -1 - y$: les contraintes s'écrivent ainsi $g_1(x, y) \leq 0$ et $g_2(x, y) \leq 0$. Ces deux fonctions étant affines, elles sont convexes. De plus, *D* possède un intérieur non vide. Un résultat du cours permet d'affirmer que les contraintes sont qualifiées en tout point de *D*.
Fin de corrigé

3. Que donne l'application de la condition de Karush, Kuhn et Tucker au point (1, –1) ?
Corrigé
Le point (1, –1) est bien réalisable. En (1, –1), les deux contraintes sont saturées. L'application de la condition de Karush, Kuhn et Tucker au point (1, –1) indique que, pour que ce point soit un minimum de *P*, il faut qu'il existe deux réels positifs ou nuls λ_1 et λ_2 vérifiant $\nabla f(1,-1) = -\lambda_1 \nabla g_1(1,-1) - \lambda_2 \nabla g_2(1,-1)$. Or, on a $\nabla f(1,-1) = (11, -8)^t$, $\nabla g_1(1,-1) = (-1, 0)^t$, $\nabla g_2(1,-1) = (0, -1)^t$. On obtient donc $\lambda_1 = 11$ et $\lambda_2 = -8$. La condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas satisfaite, ce qui permet de conclure que le point (1, –1) n'est pas un minimum de *P*.
Fin de corrigé

4. Appliquer la méthode de plus grande descente vue en cours à partir du point (1, 0) (on détaillera les calculs ; on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions à suivre).
Corrigé
Au point (1, 0), la première contrainte est saturée. Or on a $\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$. La direction donnée par l'opposé du gradient n'est pas admissible puisqu'elle fait sortir de *D*. Il est facile de voir, à l'aide d'un dessin, que la direction admissible de plus forte descente est la direction $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche donc un point de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$, où *s* est un scalaire positif.
Posons $\gamma(s) = f(1, s) = 3 + 2s^2 - 4s$ et cherchons à minimiser γ sur *D*. La direction suivie longeant le bord de *D*, on ne peut pas sortir de *D* en suivant la direction *d*. On peut donc optimiser γ sans contrainte. Cherchons pour cela la valeur de *s* qui annule la dérivée de γ. Celle-ci vaut : $\gamma'(s) = 4s - 4$. Elle s'annule pour $s = 1$. On constate, en considérant les sens de variation de γ, que $s = 1$ correspond bien au minimum de γ. On obtient donc le point (1, 1). En ce point, le gradient de *f* vaut $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. On constate graphiquement que, $\nabla f(1, 1)$ étant orthogonal au bord de *D*, il n'y a plus de direction admissible qui soit en outre de stricte descente : la méthode s'arrête.
Fin de corrigé

5. Montrer, à l'aide de la condition de Karush, Kuhn et Tucker, que le point déterminé à la question précédente est (au moins) un minimum local de P. Ce minimum est-il global ? Y a-t-il unicité du minimum global ? Y a-t-il d'autres minima locaux ?

Corrigé

Au point (1, 1), seule la première contrainte est saturée. La condition de Karush, Kuhn et Tucker est satisfaite en (1, 1). En effet, on a $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3\,\nabla g_1(1,1)$. Or, la condition de Karush, Kuhn et Tucker est ici nécessaire et suffisante pour la minimalité globale, puisque les contraintes sont qualifiées en (1, 1) et que les fonctions f et g_1 sont convexes. De plus, f étant strictement convexe, un résultat du cours indique que tout minimum local est global et que le minimum global est unique. On peut donc conclure : (1, 1) est le seul minimum local et le seul minimum global de P.

Fin de corrigé