Télécom ParisTech 31 octobre 2017 Année 2017-2018

Contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ;
dictionnaire autorisé pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits,
ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner la décomposition LU de la matrice A ; on détaillera les calculs permettant d'obtenir les deux matrices L et U de la décomposition.
2. En déduire la solution du système linéaire $AX = b$ où $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$ est un vecteur donné de $\mathbf{R}^4$ (on exprimera les composantes de X à l'aide de celles de b).
3. Si A est inversible, déduire de ce qui précède l'expression de A^{-1} ; sinon, justifier la non-inversibilité de A.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & -11 & -6\sqrt{2} \\ -11 & 16 & 6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 34 \end{pmatrix}$.

1. En appliquant la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice A.

Indication. On rappelle que les premiers carrés d'entiers sont les nombres suivants : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900...

2. Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse au système linéaire $AX = b$. Donner la valeur du conditionnement de ce système pour la norme $\| \|_2$.

3. Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse au minimum global sur $\mathbf{R}^3$ de la forme quadratique Q définie par $Q(X) = \frac{1}{2} X^t AX + bX$. Pour quelles valeurs de b la forme Q atteint-elle une valeur qui soit un minimum global sur $\mathbf{R}^3$? Pour ces valeurs, peut-il exister plusieurs vecteurs X atteignant ce minimum global ou un tel vecteur est-il nécessairement unique ? Pour quels vecteurs b existe-t-il des minima locaux qui ne soient pas le minimum global ?

Exercice 3

On s'intéresse au problème (P) d'optimisation linéaire suivant :

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Résoudre le problème (P) à l'aide de l'algorithme du simplexe (on rencontrera des fractions dont le dénominateur ne contient qu'un chiffre). On notera $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ la solution qui donne l'optimum du problème.
2. Écrire le problème dual du problème (P) et en donner la solution optimale (on précisera comment on obtient la valeur optimale des variables duales).
3. On suppose dans cette question que la fonction z s'écrit en fait :

$$z(x_1, x_2) = ax_1 + 3x_2$$

où a est un paramètre réel. Indiquer pour quelles valeurs de a la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste optimale (on ne s'appuiera pas sur un raisonnement graphique).

Exercice 4

Soit α est un paramètre réel de signe quelconque. On considère le problème (P_α) suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Minimiser } f_\alpha(x, y) = x^2 + y^2 + xy + \alpha x \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

On admettra que, pour tout α, tout minimum local de (P_α) est global. On ne fera donc pas la distinction dans cet exercice.

1. Indiquer, en fonction de α, les points du domaine réalisable où les contraintes sont qualifiées.
2. En appliquant la condition de Karush, Kuhn et Tucker, déterminer en fonction de α les coordonnées du point où f_α atteint son minimum sur le domaine considéré.
3. On considère maintenant le problème (P_1) obtenu pour $\alpha = 1$. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant la méthode des directions admissibles de plus grande pente à pas optimal à partir du point (1, 0). On fera un dessin représentant clairement la situation et sur lequel on s'appuiera pour justifier les directions suivies ou, à la fin, l'arrêt de la méthode.