Contrôle de connaissances de MDI 210 – P3

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ; dictionnaires pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.

Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. À l'aide de la décomposition LU de A, déterminer l'inverse de A sans calculer explicitement les inverses de L et de U.
Indication : l'inverse de A fait intervenir des fractions rationnelles de dénominateur égal à 7.

Exercice 2 (3 points)

1. En appliquant la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -20 \\ 12 & 8 & 15 \\ -20 & 15 & -8 \end{pmatrix}$. Avec les notations du cours, on traitera les couples (p, q) dans l'ordre naturel : (1, 2), (1, 3), etc., pour les couples pour lesquels un tel examen est pertinent. On rappelle que 144 est le carré de 12 et 625 celui de 25.

2. On pose $b = (-1 \;\; -12 \;\; 20)^t$ et on considère, pour $X \in \mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par $Q(X) = \frac{1}{2} X^t AX + b^t X$. La forme Q atteint-elle un minimum sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 3 (7 points)
Soit a un paramètre réel. On considère le problème (P_a) suivant :

$$\text{Maximiser } z_a = ax_1 + 8x_2$$

$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 16 & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 5 & (2) \\ x_1 - x_2 \leq 3 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Dans cette question, on considère $a = 7$.
   a. Résoudre (P_7) à l'aide de l'algorithme du simplexe.
   b. En déduire toutes les valeurs de a pour lesquelles la solution déterminée à la question 1.a reste optimale.
2. Donner l'expression du problème dual (D_a) de (P_a).
3. On revient au cas $a = 7$.
   a. Déduire de la question 1.a une solution optimale de (D_7) ; on précisera comment on obtient cette solution.
   b. Dans les contraintes (1), (2) et (3), on remplace 16, 5 et 3 respectivement par $16 + \alpha$, $5 + \beta$ et $3 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels donnés. Comment la valeur optimale de z_7 varie-t-elle en fonction de α, β et γ si on suppose que les valeurs de ces paramètres sont suffisamment petites en valeur absolue ?
4. En appliquant le théorème des écarts complémentaires, indiquer les valeurs de a pour lesquelles (1, 4) est solution optimale de (P_a).
5. On considère enfin le cas $a = 8$. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions optimales de (P_8) ?

Exercice 4 (7 points)
On considère le problème P consistant à minimiser la fonction f à deux variables définie par :

$$f(x, y) = \ln x + 3x^2 + 2y^2 - 4xy$$

avec les contraintes $x \geq 1$ et $y \geq -1$. On appelle D le domaine réalisable, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x \geq 1$ et $y \geq -1$.

1. La fonction f est-elle strictement convexe sur D ?
2. Indiquer en quels points de D les contraintes sont qualifiées.
3. Que donne l'application de la condition de Karush, Kuhn et Tucker au point (1, –1) ?
4. Appliquer la méthode de plus grande descente vue en cours à partir du point (1, 0) (on détaillera les calculs ; on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions à suivre).
5. Montrer, à l'aide de la condition de Karush, Kuhn et Tucker, que le point déterminé à la question précédente est (au moins) un minimum local de P. Ce minimum est-il global ? Y a-t-il unicité du minimum global ? Y a-t-il d'autres minima locaux ?