第五节　连续时间系统的频域分析

1* 熟练掌握系统的频域分析方法

2　理解并掌握无失真传输系统的频响特性

3　理解理想低通滤波器的非因果性

4　理解吉布斯现象

一、信号通过系统的频域分析

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

$$H(\Omega) = \left| H(\Omega) \right| e^{j\varphi(\Omega)} \qquad \begin{cases} \left| H(\Omega) \right| & \text{幅频响应} \\ \varphi(\Omega) & \text{相频响应} \end{cases}$$

频率响应函数

满足狄里赫利条件： $\int_{-\infty}^{\infty} | h(t) | \, dt < \infty$ 稳定系统

系统的频域分析方法:

1. 将激励信号分解为不同频率分量

$$x(t) \to X(\Omega)$$

2. 确定系统频率响应函数

$$H(\Omega)$$

3. 求取每一频率分量的响应

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

4. 对响应频谱函数求傅立叶反变换得到系统的响应函数

$$Y(\Omega) \to y(t)$$

如何确定系统频率响应函数？

n 阶线性时不变连续系统： $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$

根据傅立叶变换的时域微分特性

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k}$$

例1：某线性时不变系统的微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

求该系统的单位冲激响应。

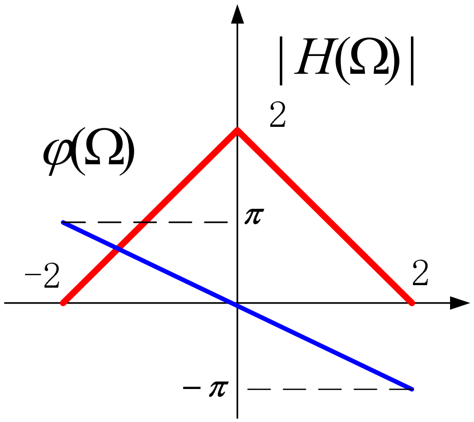
解：频率响应函数 $$H(\Omega)=\frac{j\Omega+3}{(j\Omega)^2+3(j\Omega)+2}$$

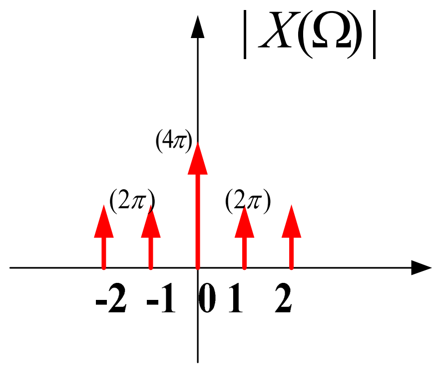
$$=\frac{j\Omega+3}{(j\Omega+1)(j\Omega+2)}$$

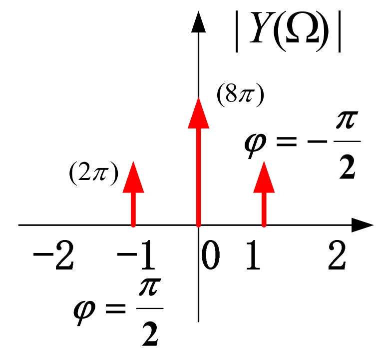
$$=\frac{2}{j\Omega+1}-\frac{1}{j\Omega+2}$$

单位冲激响应： $H(\Omega)\rightarrow h(t)=2e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$

例2：一线性系统的频响曲线如下图所示，求激励信号为 **x(t)=2+2cos(t)+2cos(2t)** 的零状态响应。







$$1: X(\Omega)=4\pi\delta(\Omega)+2\pi\delta(\Omega-1)+2\pi\delta(\Omega+1)+2\pi\delta(\Omega-2)+2\pi\delta(\Omega+2)$$

$$2: H(\Omega)=\begin{cases}(2-|\Omega|)e^{-j\frac{\pi}{2}\Omega} & |\Omega|<2\\ 0 & |\Omega|\geq 2\end{cases}$$

$$\mathbf{1}\leftrightarrow \boldsymbol{2\pi\delta}(\Omega)$$
$$\boldsymbol{e^{-jt}}\leftrightarrow \boldsymbol{2\pi\delta}(\Omega+\mathbf{1})$$
$$\boldsymbol{e^{jt}}\leftrightarrow \boldsymbol{2\pi\delta}(\Omega-\mathbf{1})$$

$$3: Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)\ \ =8\pi\delta(\Omega)+2\pi\delta(\Omega+1)e^{j\pi/2}+2\pi\delta(\Omega-1)e^{-j\pi/2}$$

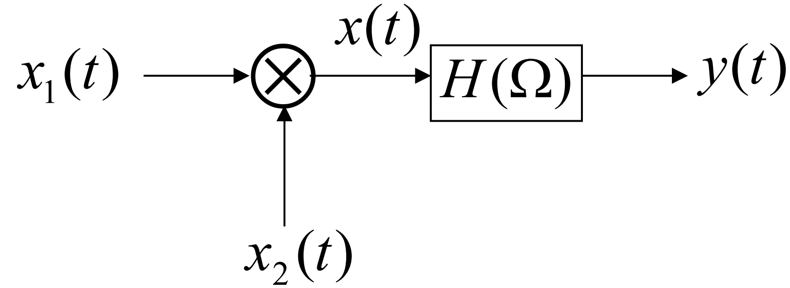
$$4: Y(\Omega)\rightarrow y(t)=4+2\cos(t-\pi/2)$$

例3: 如图所示系统, 已知

$$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jnt}, \quad -\infty<t<\infty$$

$$x_2(t)=\cos t, \quad -\infty<t<\infty$$

$$H(\Omega)=\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{3}\Omega} & |\Omega|<1.5 \\ 0 & |\Omega|>1.5 \end{cases}$$



求该系统的输出 $y(t)$

解: $x(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)$

$$X_1(\Omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n)$$

$$X_2(\Omega)=\pi\left[\delta(\Omega+1)+\delta(\Omega-1)\right]$$

$$X(\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)$$

$$=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\Omega-n+1)+\delta(\Omega-n-1)\right]$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n)$$

$$Y(\Omega)=X(\Omega)\cdot H(\Omega)$$

$$=2\pi\delta(\Omega)+2\pi\delta(\Omega+1)e^{j\frac{\pi}{3}}+2\pi\delta(\Omega-1)e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$y(t)=1+e^{-j(t-\frac{\pi}{3})}+e^{j(t-\frac{\pi}{3})} \quad =1+2\cos(t-\tfrac{\pi}{3})$$

二、 无失真传输系统的频响特性

信号通过系统的频域分析:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = |H(\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$$

信号不失真传输条件: $H(\Omega)$ 满足的条件

1、 失真产生的原因

(1) 系统对各个子信号幅度放大或衰减的程度不一样，造成幅度失真

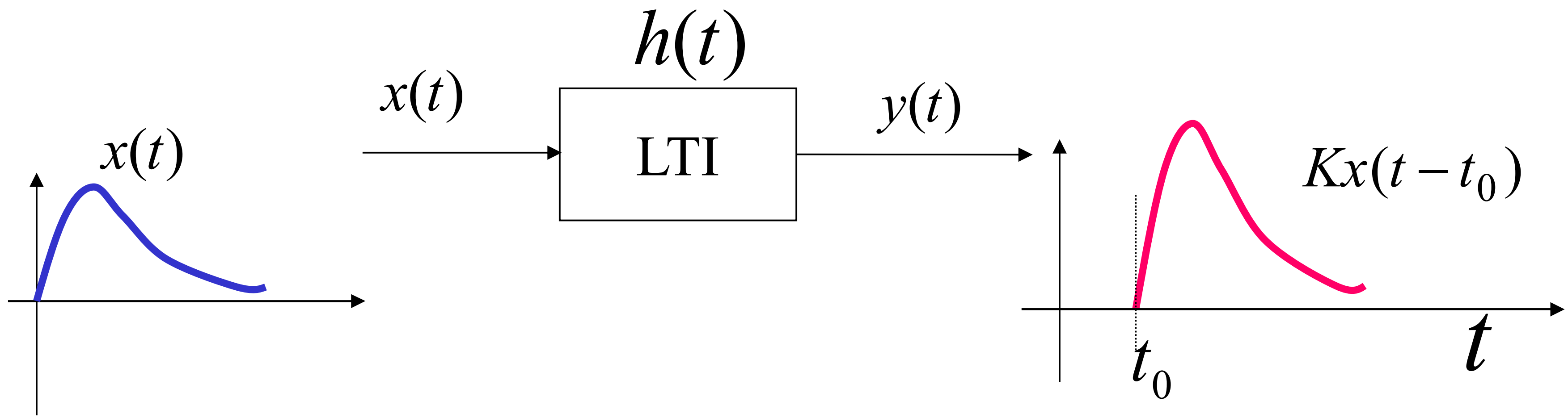
(2) 系统对各个子信号延时t_0不一样，使子信号之间相对位置发生变化，造成相位失真

2、线性系统不失真的条件

(1) 系统对所有子信号的幅度放大或衰减相同

(2) 系统对所有子信号的延时一样

线性时不变系统不失真条件的推导:



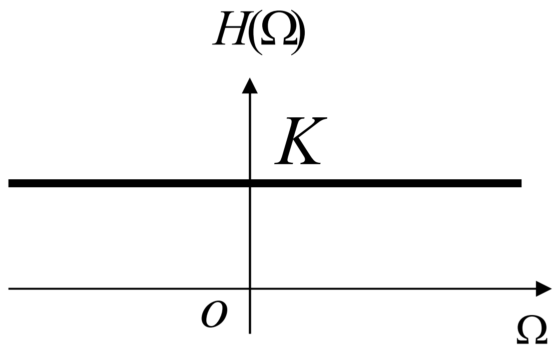
不失真的系统必然满足: $\boxed{y(t) = Kx(t-t_0)}$

$$\therefore Y(\Omega) = KX(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$$

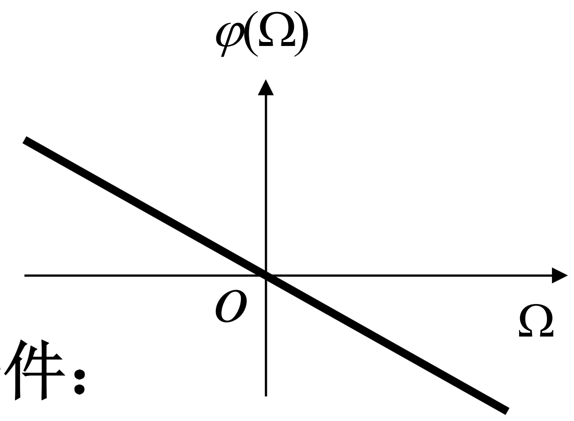
$$\therefore H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = Ke^{-j\Omega t_0}$$

理想传输系统的系统函数：

$$H(\Omega) = Ke^{-j\Omega t_0}$$



$$\begin{cases} |H(\Omega)| = K \\ \varphi(\Omega) = -\Omega t_0 \end{cases}$$



信号通过系统不产生失真的理想条件：

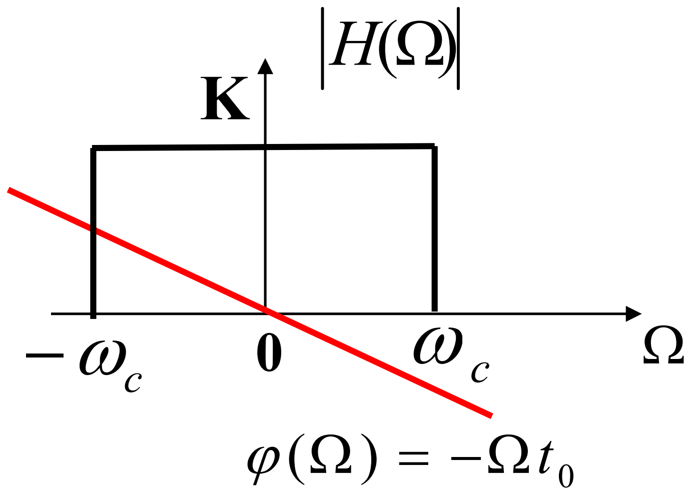
1. 系统的幅频特性在整个频率范围内为一常数

2. 系统的相频特性应是过原点的一条直线

$$H(\Omega) = Ke^{-j\Omega t_0} \Longrightarrow h(t) = K\delta(t - t_0)$$ 难以实现

三、 理想低通滤波器

1 理想低通滤波器的频率特性



$$H(\Omega) = \begin{cases} Ke^{-j\Omega t_0} & |\Omega| < \omega_c \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$\boxed{H(\Omega) = Ke^{-j\Omega t_0}[u(\Omega + \omega_c) - u(\Omega - \omega_c)]}$$

$$\begin{cases} \omega_c: & 截止频率 \\ 0 \leftrightarrow \omega_c: & 通带 \\ t_0: & 群延时 \end{cases}$$

2 理想低通滤波器的单位冲激响应

$$H(\Omega) = Ke^{-j\Omega t_0}[u(\Omega + \omega_{c0}) - u(\Omega - \omega_{c0})]$$

傅立叶反变换

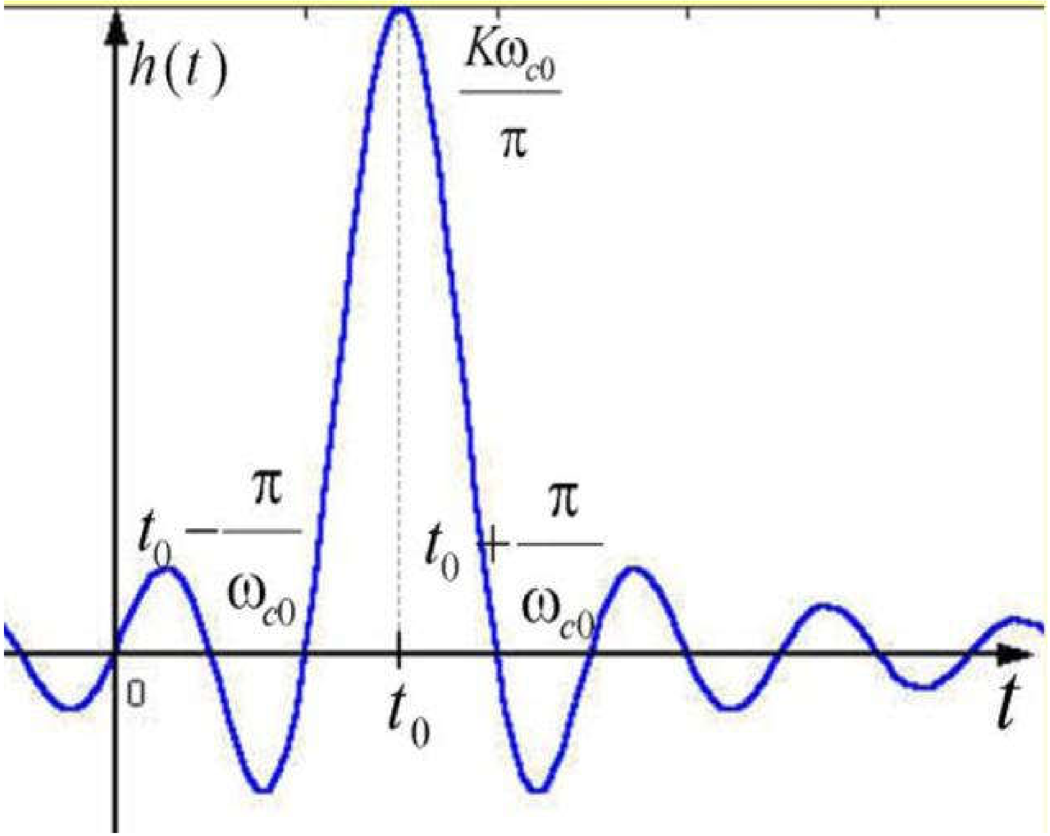
$$h(t) = \frac{K\omega_{c0}}{\pi} Sa(\omega_{c0}(t - t_0))$$

$$H_1(\Omega) = K[u(\Omega + \omega_{c0}) - u(\Omega - \omega_{c0})]$$

由对偶性质： $h_1(t) = \frac{K\omega_{c0}}{\pi} Sa(\omega_{c0} t)$

由延时性质： $h(t) = h_1(t - t_0)$

$$h(t)=\frac{K\omega_{c0}}{\pi}Sa(\omega_{c0}(t-t_0))$$



理想低通滤波器

单位冲激响应的特点：

1、波形失真

2、延时t_0时刻

3、非因果性

—物理不可实现系统

3 理想低通滤波器的单位阶跃响应

$$x(t)=u(t)$$

$$u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$$

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)$$

$$=\begin{cases} K\left[\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{j\Omega}\right]e^{-j\Omega t_0} & |\Omega|<\omega_{c0} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} K\pi\delta(\Omega)e^{j\Omega(t-t_0)}d\Omega+\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}}\frac{Ke^{j\Omega(t-t_0)}}{j\Omega}d\Omega\right]$$

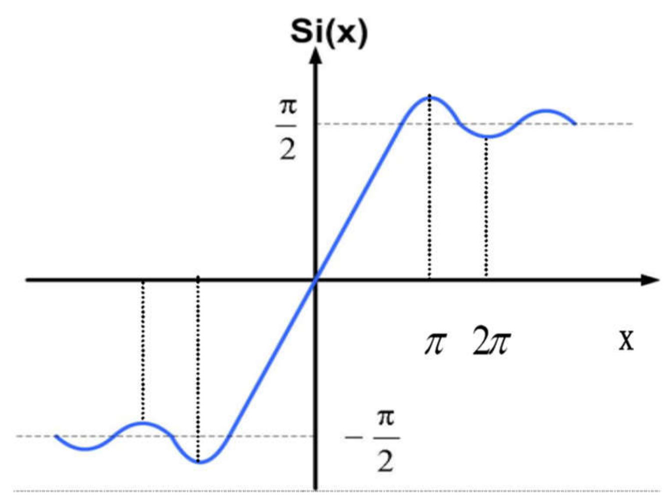
$$=\frac{K}{2}+\frac{K}{2\pi}\left[\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}}\left\{\frac{\cos[\Omega(t-t_0)]}{j\Omega}+\frac{\sin[\Omega(t-t_0)]}{\Omega}\right\}d\Omega\right]$$

$$=\frac{K}{2}+\frac{K}{\pi}\left[\int_{0}^{\omega_{c0}(t-t_0)}\left\{\frac{\sin[\Omega(t-t_0)]}{\Omega(t-t_0)}\right\}d\Omega(t-t_0)\right]$$

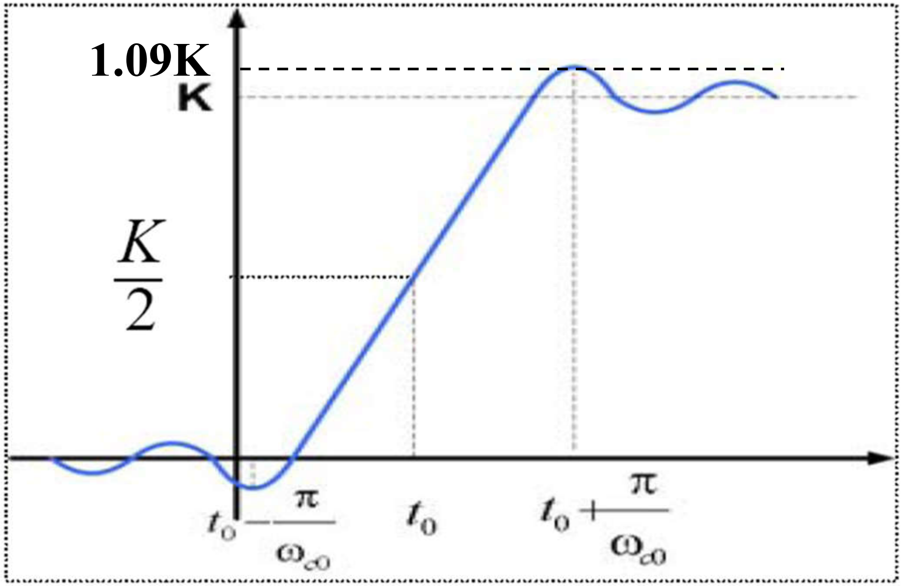
$$=\frac{K}{2}+\frac{K}{\pi}Si[\omega_{c0}(t-t_0)]$$

$$Si(x)=\int_0^x\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

正弦积分函数



理想低通的阶跃响应： $y(t)=\frac{K}{2}+\frac{K}{\pi}Si[\omega_{c0}(t-t_0)]$



1 信号边沿变缓

2 信号波形发生了失真

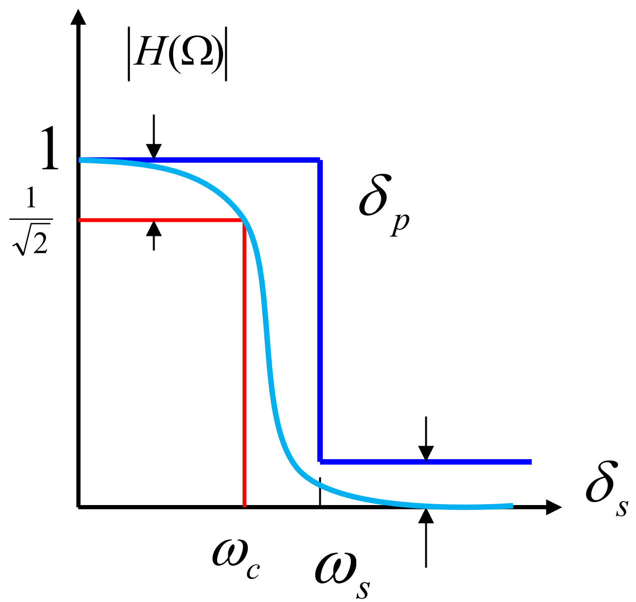
3 信号有延时

4 系统响应超前于激励（非因果性）

5 间断点两边有最大为9% 的超量起伏

理想滤波器 ⟶ 违反了因果律，是物理不可实现系统

实际滤波器 ⟶ 接近于理想滤波器的特性



低通滤波器容限图

ω_c :通带边界频率

ω_s :阻带边界频率

$\omega_c - \omega_s$:过渡带

$\boldsymbol{\delta_p}$, $\boldsymbol{\delta_s}$: 通带、阻带起伏

最平坦滤波器：**Butterworth**滤波器

$$H_B(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\omega_{c0}}\right)^{2n}}}$$

通带等起伏滤波器：**Chebyshev**滤波器

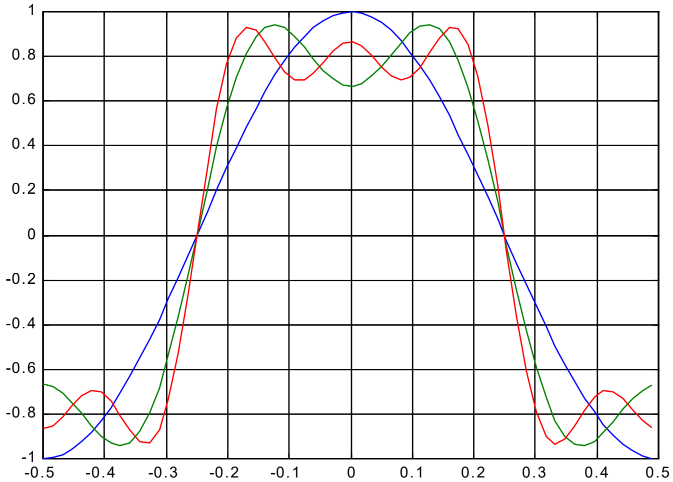
$$H_C(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}(\Omega)}}$$

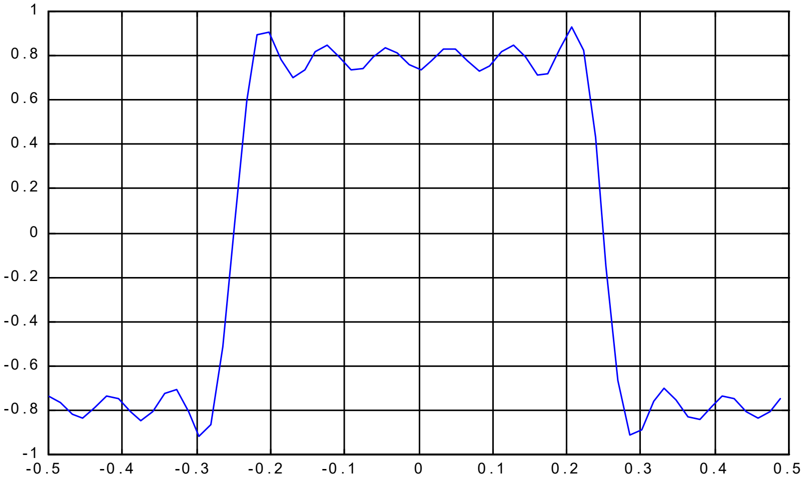
$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n\cos^{-1}\Omega) & |\Omega| \le 1 \\ \cosh(n\cosh^{-1}\Omega) & |\Omega > 1| \end{cases}$$

4 吉布斯现象（**Gibbs**）

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega_0 t}$$

（1）用有限项傅立叶级数表征方波信号时



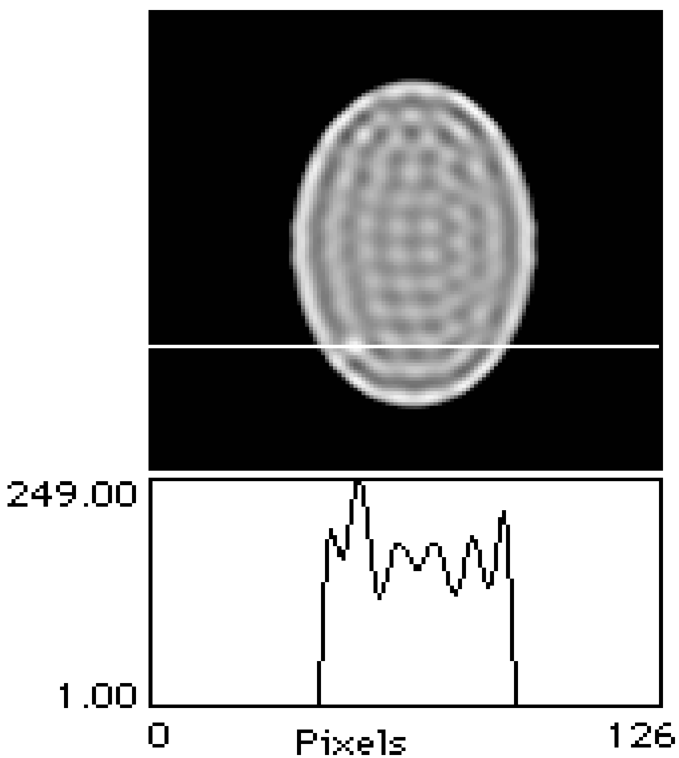


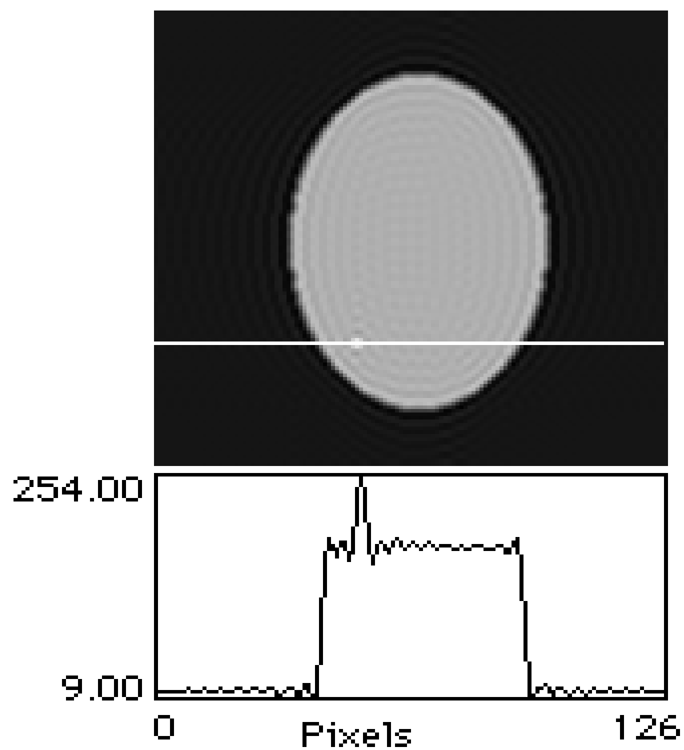
① 在连续点处完全收敛于原来的信号。

② 在不连续点处出现 9% 的超量起伏，
随着项数的增加，收敛于间断点左右极限的平均值。

（2）用理想滤波器对非周期信号的频谱进行截取时

$$\left.\begin{aligned} &X(\Omega)W(\Omega) \to x(t) * w(t) \\ &w(t) = \frac{K\omega_{c0}}{\pi} Sa(\omega_{c0}(t-t_0)) \\ &x(t) = u(t+\tau) - u(t-\tau) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \hat{x}(t) &= A \cdot \int_{-\tau}^{\tau} Sa(\omega_{c0}(t-t_0))dt \\ &= 2A \cdot Si(\omega_{c0}(t-t_0)) \end{aligned}$$





第六节 调制与解调

教学要求:

1. 了解调制的必要性、调制与解调的概念及类型
2. 掌握双边带正弦幅度调制与同步解调的原理
3. 掌握带载波的正弦幅度调制与包络解调的原理
4. 熟练掌握调制与解调系统的频谱分析方法
5. 了解脉冲幅度调制原理
6. 了解频分复用与时分复用的基本思想

A. 调制的必要性

根据电磁场理论，发射天线的尺度与信号的波长满足一定的关系式时，信号才能得到有效的发射。

$$l = \frac{\lambda}{10} \qquad \lambda = \frac{c}{f}$$

$$f = 3\,KHz \ , \lambda = \frac{3\times 10^{8}}{3\times 10^{3}} = 10^{5}\,m \, , l = 10^{4}\,m$$

$$f_c = 30\ MHz \ , \lambda = \frac{3\times 10^{8}}{3\times 10^{7}} = 10\ m \, , l = 1m$$

手机的工作频段为 **900/1800MHz** $l = 0.03m$

B. 调制的概念

调制：用待传输的低频信号控制某个高频振荡信号幅度、频率或相位等参数的变化过程

调制信号、载波、已调波

C. 调制的类型

- 正弦调制：
  - *幅度调制**(AM)**
  - 频率调制**(FM)**
  - 相位调制**(PM)**
- 脉冲调制：*脉冲幅度**(PAM)**、脉冲宽度、脉冲位置或脉冲编码组合

D. 解调的概念

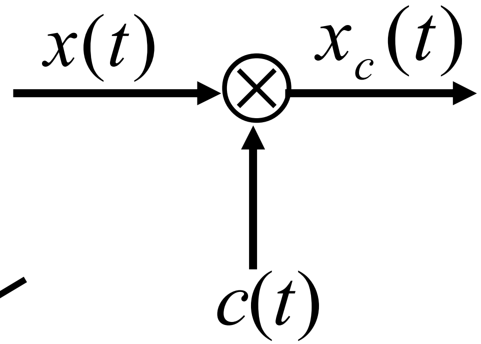
解调：从已调波中恢复或提取调制信号的过程

E. 解调的类型

- *检波: 对调幅信号的解调
- 鉴频: 对调频信号的解调
- 鉴相: 对调相信号的解调

（一）双边带正弦幅度调制与同步解调

1：调制

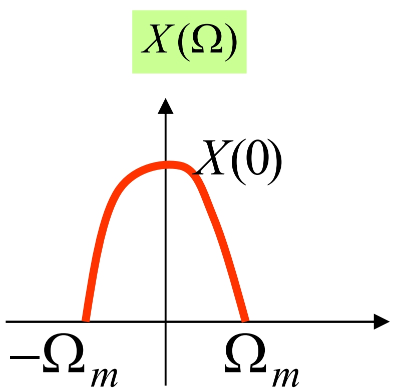


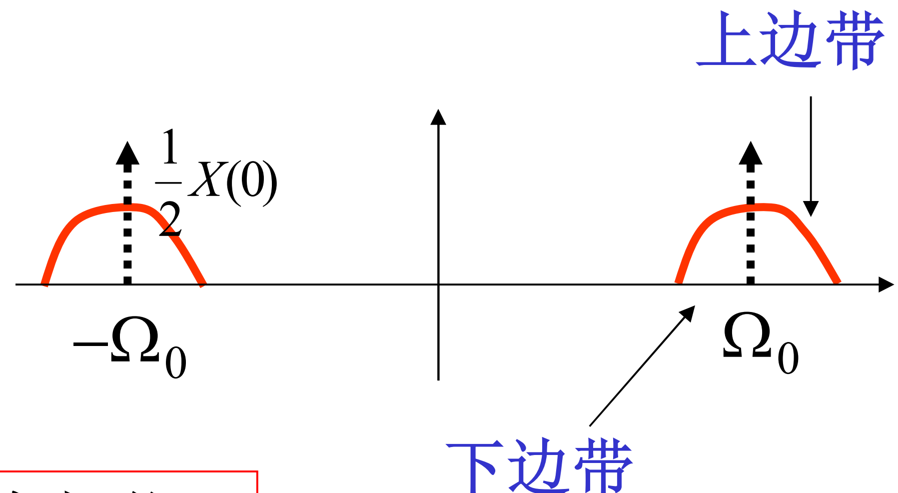
高频正弦信号

$\cos\Omega_0 t$

$$x_c(t) = x(t)\cos\Omega_0 t$$

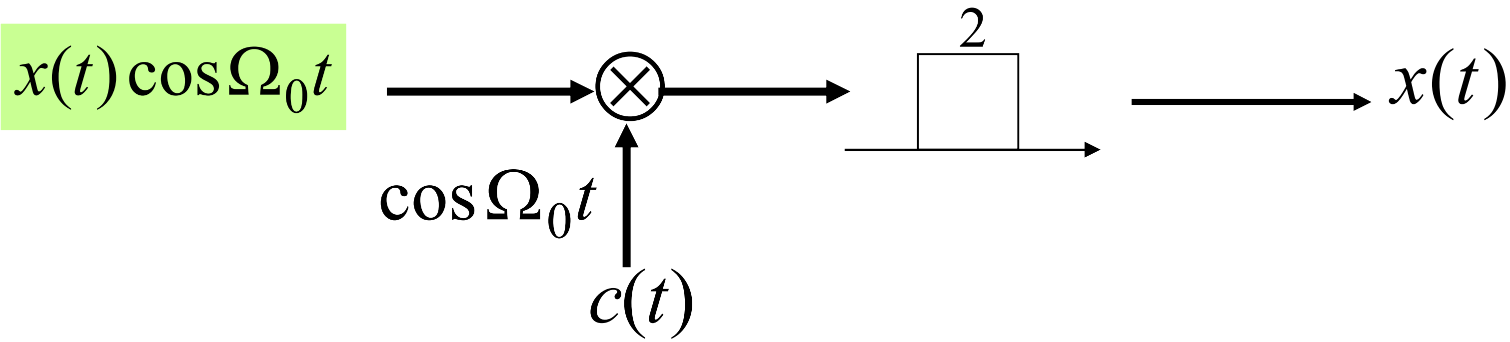
$$X_c(\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(\Omega) * C(\Omega)$$



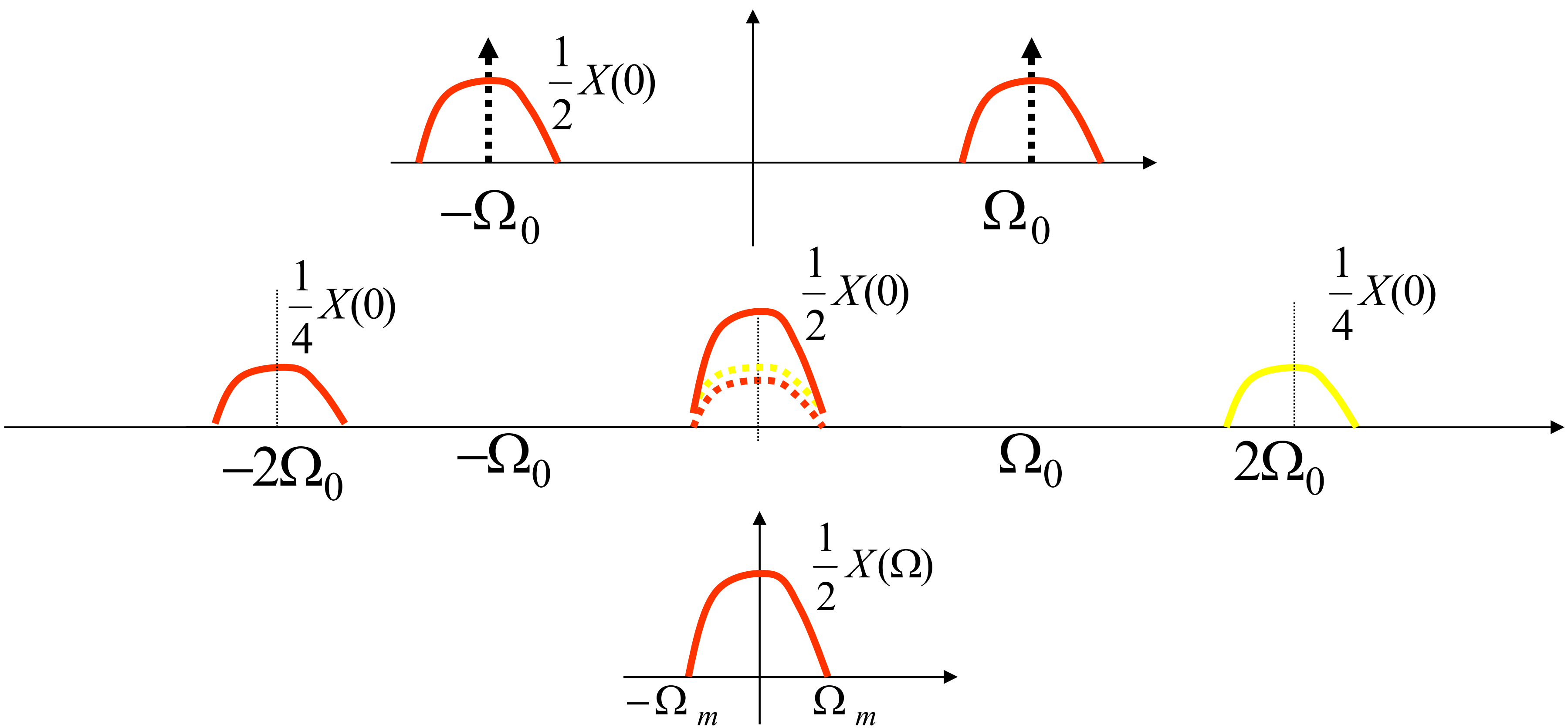


已调波频谱：幅度减半，带宽加倍

2：解调

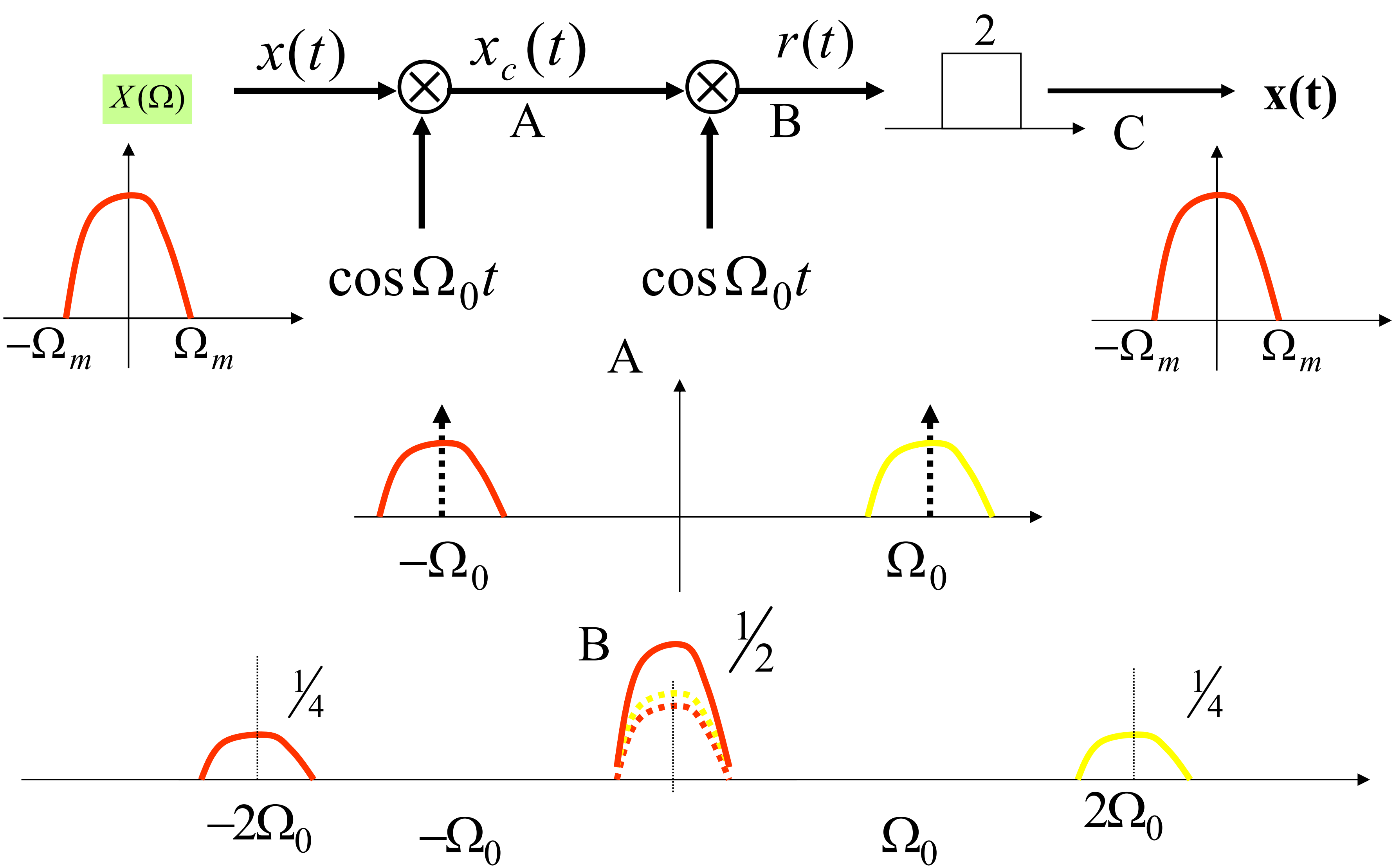


$x(t)\cos\Omega_0 t$
2
$x(t)$
$\cos\Omega_0 t$
$c(t)$



$\frac{1}{2}X(0)$
$-\Omega_0$
Ω_0
$\frac{1}{4}X(0)$
$\frac{1}{2}X(0)$
$\frac{1}{4}X(0)$
$-2\Omega_0$
$-\Omega_0$
Ω_0
$2\Omega_0$
$\frac{1}{2}X(\Omega)$
$-\Omega_m$
Ω_m

抑制载频调幅（AM－SC）



思考：　$r(t) = x_c(t)\cos\Omega_1 t = x(t)\cos\Omega_0 t\cos\Omega_1 t$　　$\Omega_0 \neq \Omega_1$

抑制载频调幅波的解调：

$$r(t) = x_c(t)\cos\Omega_0 t = x(t)\cos\Omega_0 t \cdot \cos\Omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2}\left[x(t) + x(t)\cos(2\Omega_0 t)\right]$$

要求：接收端解调器所加的载频信号必须与发送端调制器中所加的载频信号严格地同频同相——同步解调。

如果调制器所加的载波为： $\cos(\Omega_0 t + \theta_0)$

如果解调器所加的载波为： $\cos(\Omega_1 t + \theta_1)$

1. 设： $\Omega_0 \neq \Omega_1 \qquad \theta_0 = \theta_1 = 0$

$$x_c(t) = x(t)\cos\Omega_0 t$$

$$r(t) = x_c(t)\cos\Omega_1 t = x(t)\cos\Omega_0 t\cos\Omega_1 t$$

2. 设： $\Omega_0 = \Omega_1 \qquad \theta_0 \neq \theta_1$

那么： $r(t)=x_c(t)\cdot\cos(\Omega_0 t+\theta_1)$

$$=x(t)\cos(\Omega_0 t+\theta_0)\cos(\Omega_0 t+\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}x(t)\left[\cos(\theta_0-\theta_1)+\cos(2\Omega_0 t+\theta_0+\theta_1)\right]$$

经过低通滤波后： $c(t)=\dfrac{1}{2}x(t)\cos(\theta_0-\theta_1)$

只要 $\theta_0-\theta_1=K$， $K\neq\dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ $n=1,2,\ldots$

即可实现解调。

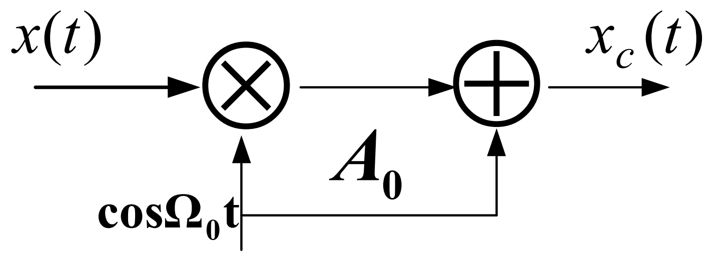
$\boxed{\text{频率相同、相位同步}}$

须采用频率合成技术和锁相环技术保证。

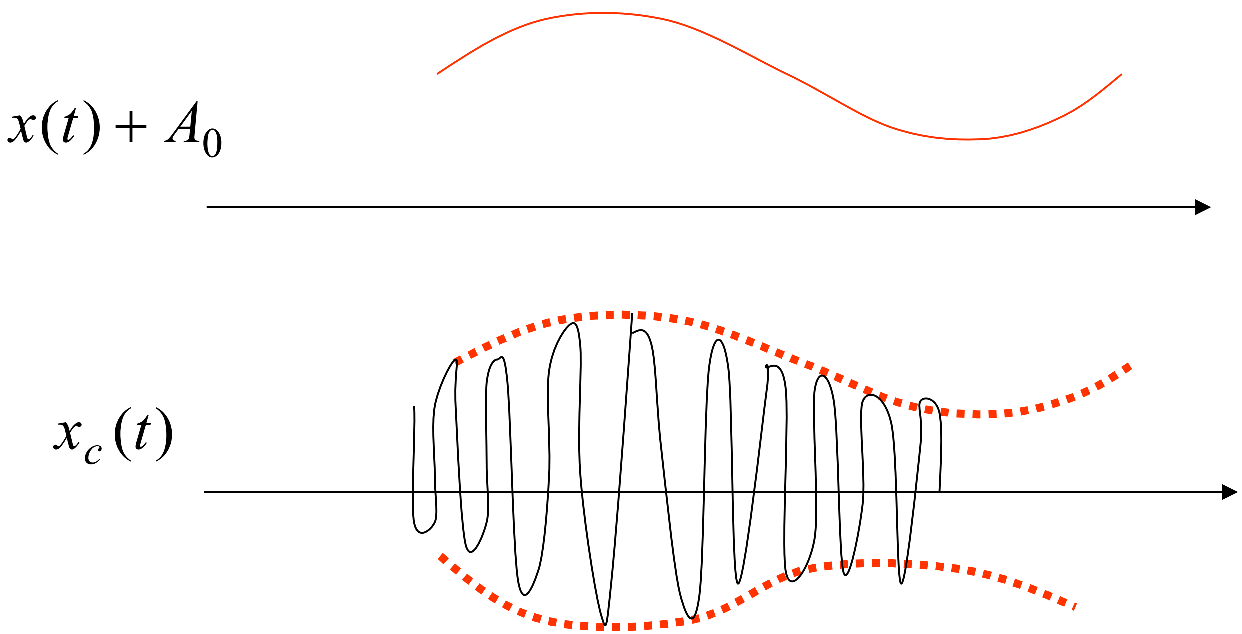
因此，同步解调适用于点对点通信。

（二）带载波的正弦幅度调制与包络解调

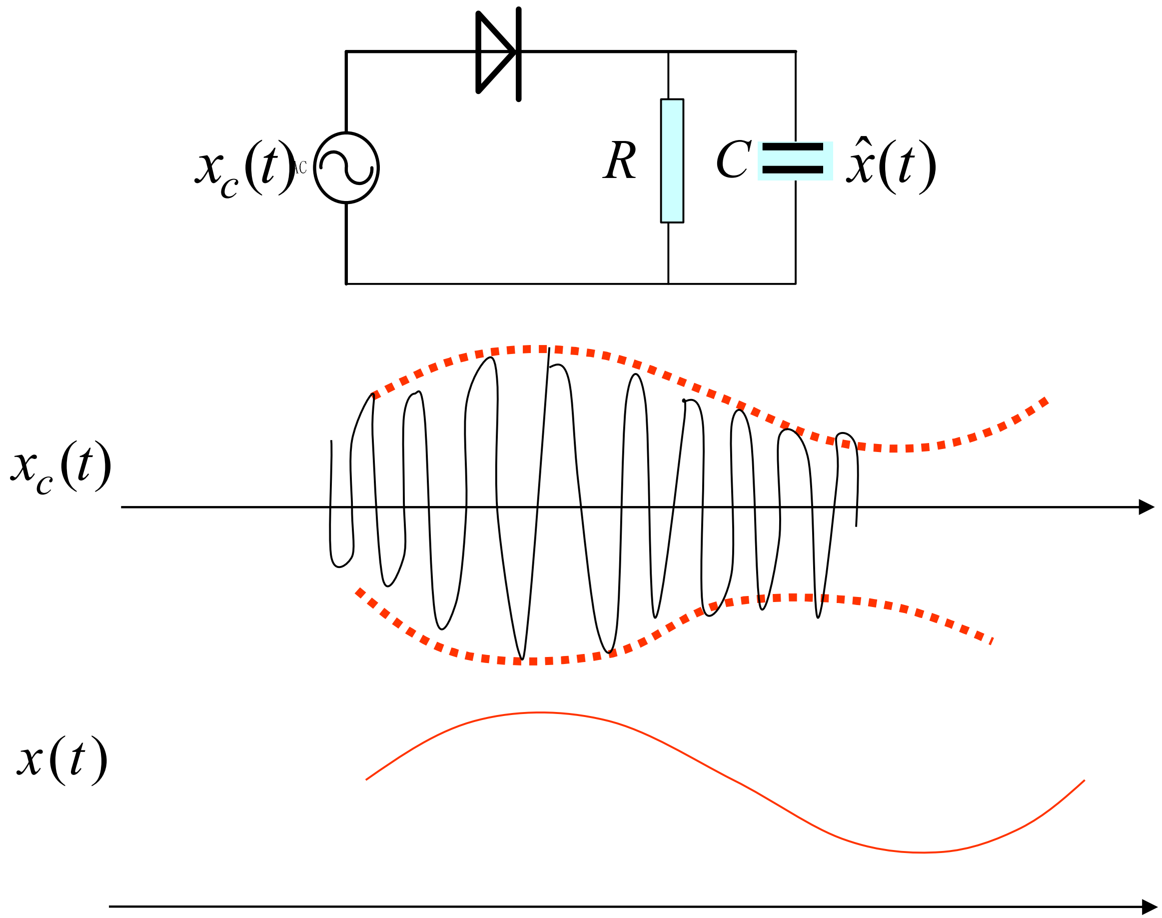
1. 调制模型



$$x_c(t) = (A_0 + x(t))\cos\Omega_0 t$$



2. 解调（包络检波器）



包络检波

$$RC >> \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

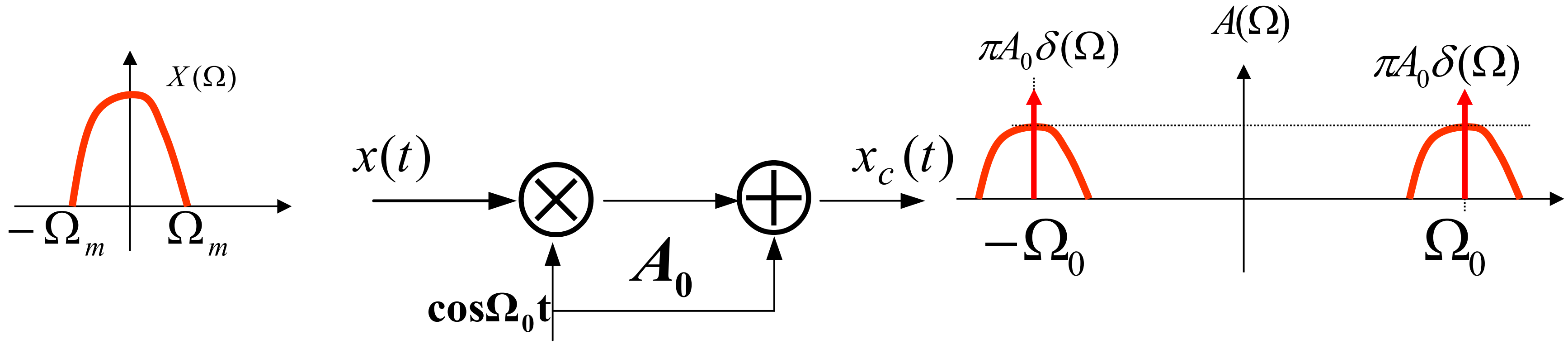
Flash

注意：为保证调幅信号的包络与调制信号变化规律一致

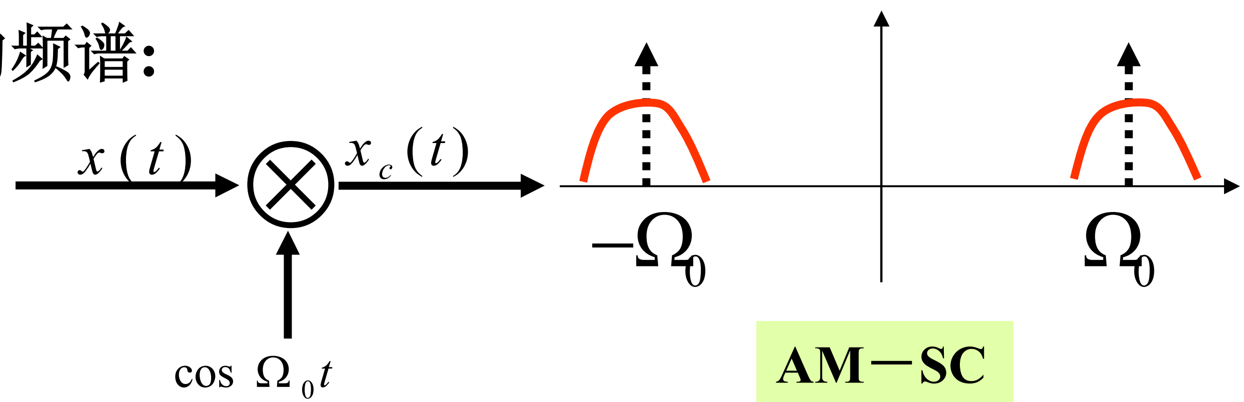
$\boxed{A_0 + x(t) \geq 0}$ 或 $\boxed{A_0 \geq |x(t)|_{max}}$ 否则，导致过调幅

带载波振幅调制信号的频谱：

AM



抑制载频调制信号的频谱：



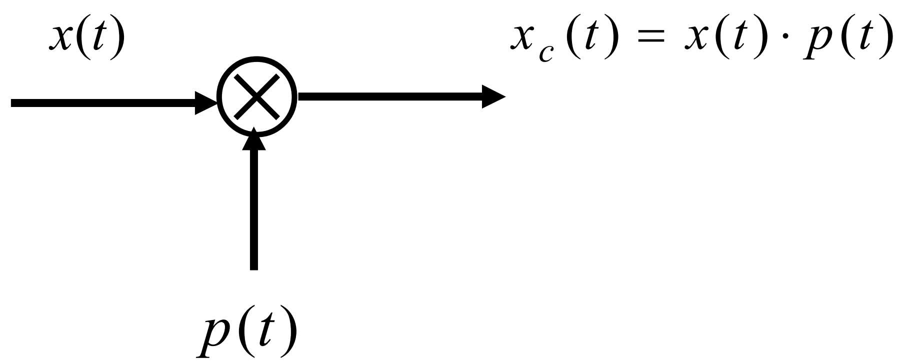
带载波的振幅调制与解调 ⟹ 适用于多用户的无线广播系统

优点：解调系统简单　　　　　　　　　一点对多点

缺点：解调系统的简化是以增加发射功率为代价的

抑制载频振幅调制与解调 ⟹ 适用于点对点卫星通信系统

（三）脉冲幅度调制



设调制信号 $x(t)$ 为一带限信号， 频谱为 $X(\Omega)$

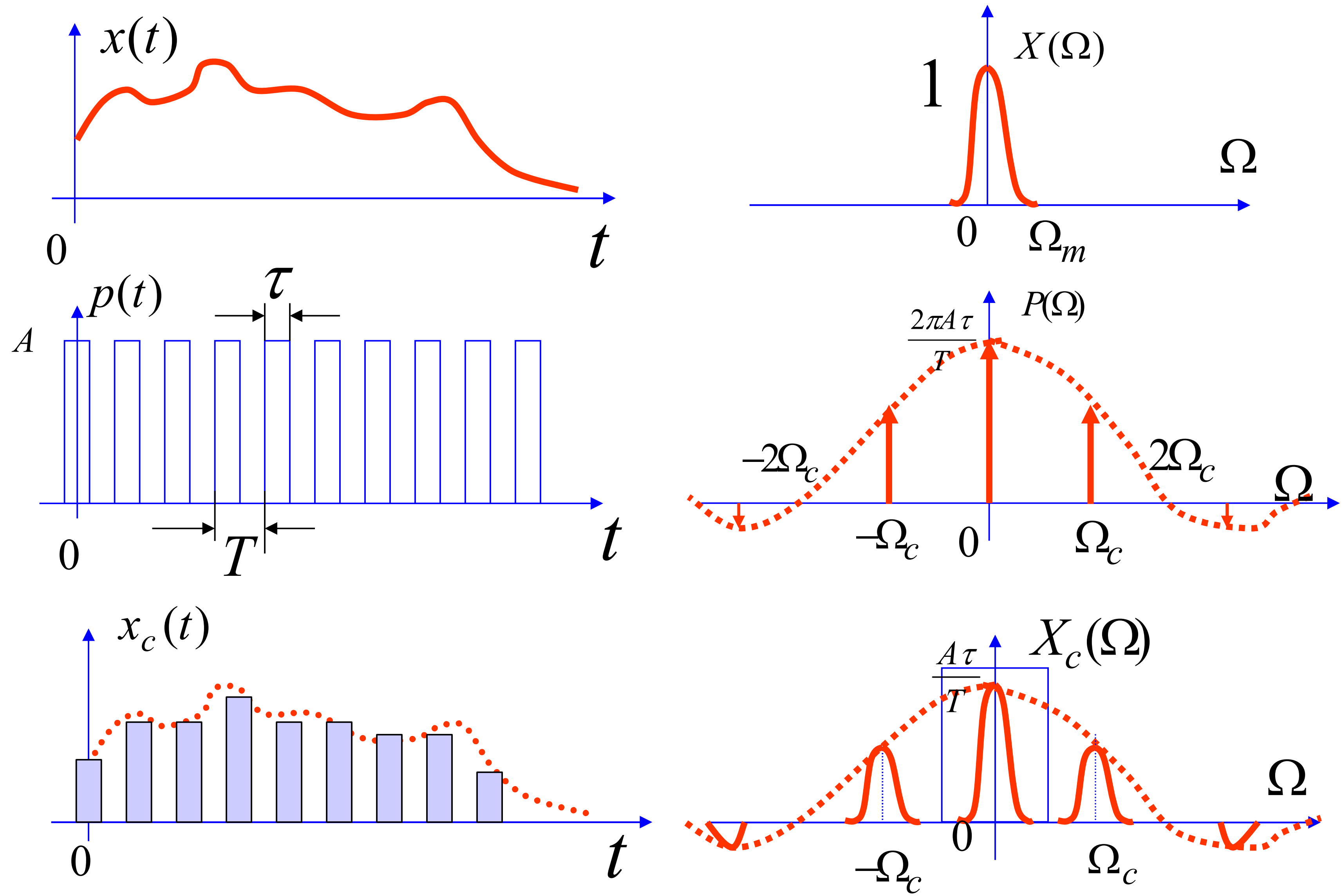
矩形脉冲串 $p(t)$ 的振幅为A、周期为T、脉宽为 τ

脉冲调幅信号的频谱:

$$P(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \delta(\Omega - k\Omega_c) \qquad \dot{A}_k = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{k\Omega_c \tau}{2}\right) \qquad \left(\Omega_c = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$X_c(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k X(\Omega - k\Omega_c)$$

$$= \frac{A\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{k\Omega_c \tau}{2}\right) X(\Omega - k\Omega_c)$$



$$\Omega_c > 2\Omega_m \Longleftarrow \Omega_c - \Omega_m > \Omega_m$$

(四) 频分复用与时分复用

在通信系统中,信道带宽往往要比信号带宽大很多

比如：一路光纤可以同时传输**1250**亿路电话；
若用来传电视信号可同时传输一亿路电视。

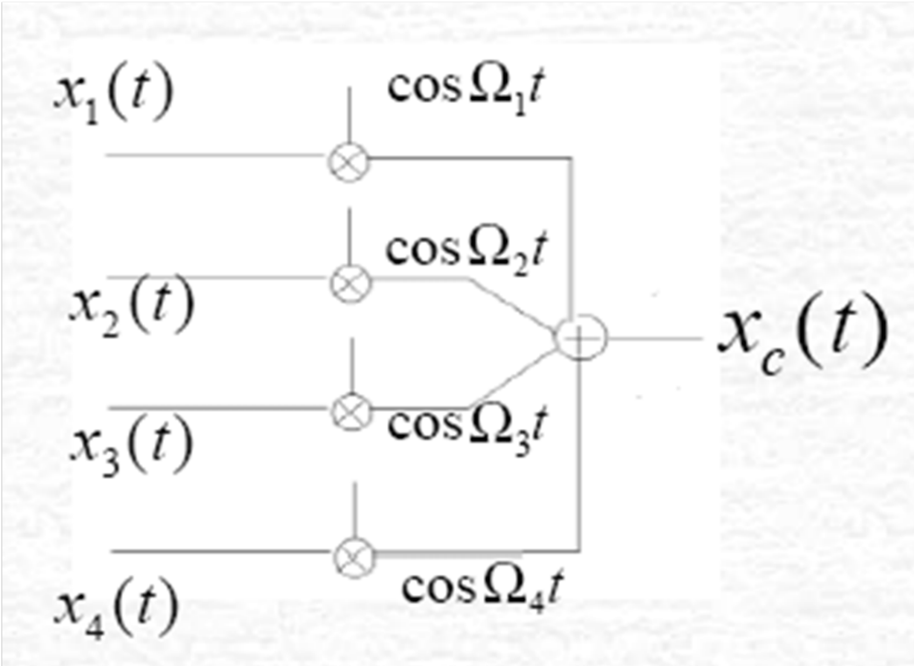
复用: 将若干个彼此独立的信号合并成可在同一信道上传输的复合信号的方法

复用方式: 频分复用 载频

时分复用 时间或时序

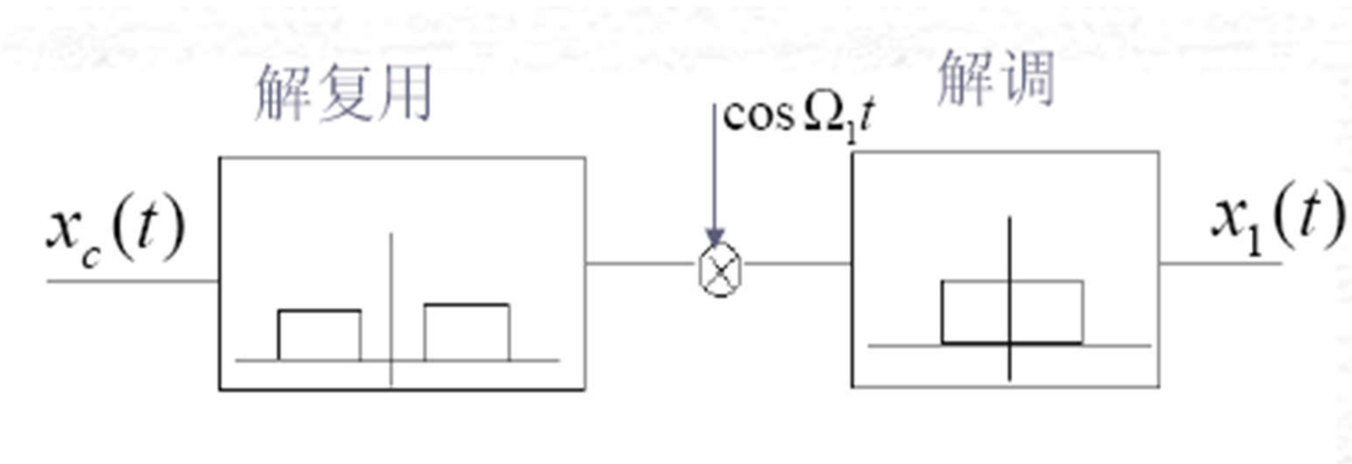
解复用: 从复用信道中解析出所需信号的过程

1 频分复用



频分复用原理

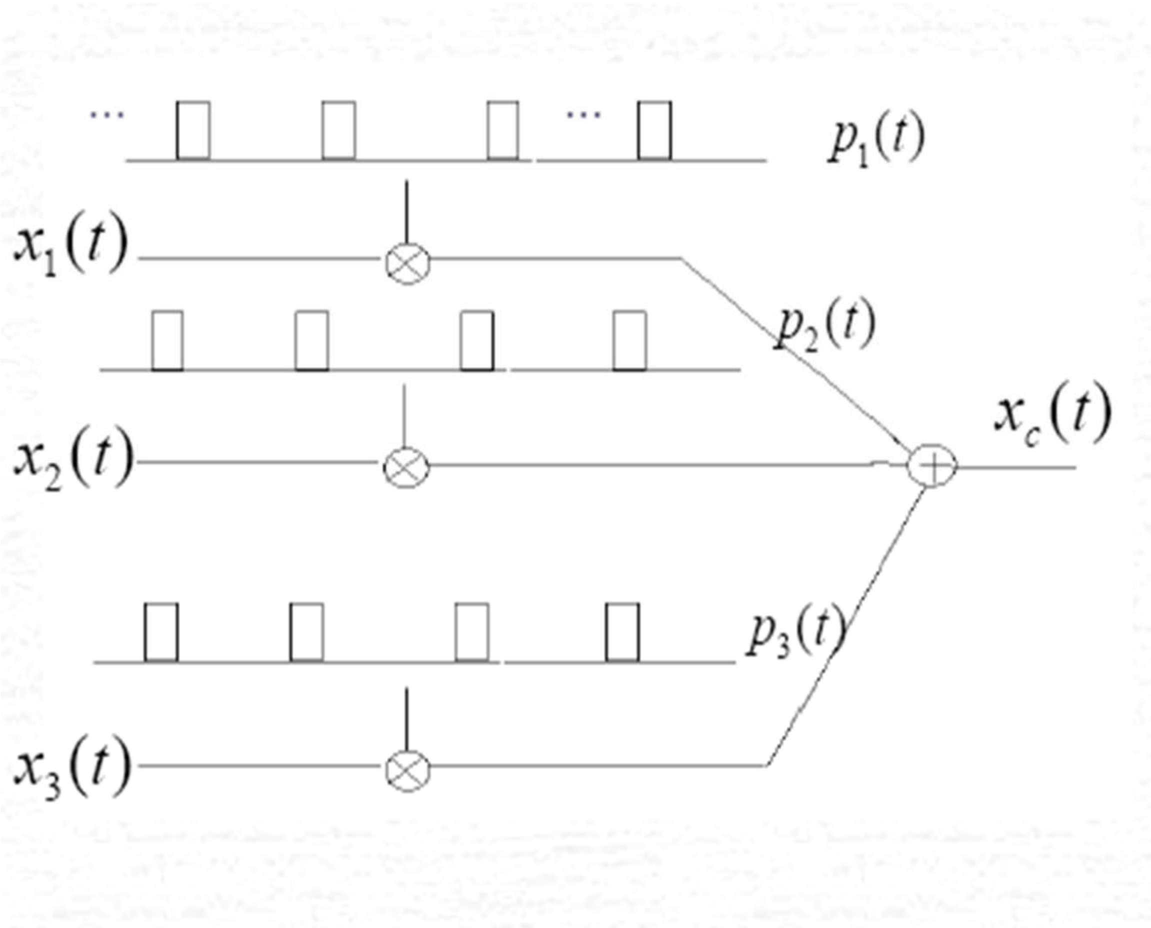
解复用原理



2 时分复用

建立在脉冲调制基础之上，
实际上是利用脉冲间隔传输多路信号

$$\frac{2\pi}{T} = \Omega_c > 2\Omega_m$$



时分复用原理

作业：**3.21**

3.27

3.28

作业：**5.4.**

5.18（1）

5.19