数字滤波器设计

7. 数字滤波器设计

7.1 数字滤波器设计的整体考虑

7.1.0 理想滤波器的频率响应

7.1.1 因果性及其含义

7.1.2 实际选频滤波器的特性

7.1.3 线性相位FIR滤波器

7.2 FIR滤波器设计

7.2.1 窗函数法

7.2.2 频率采样法

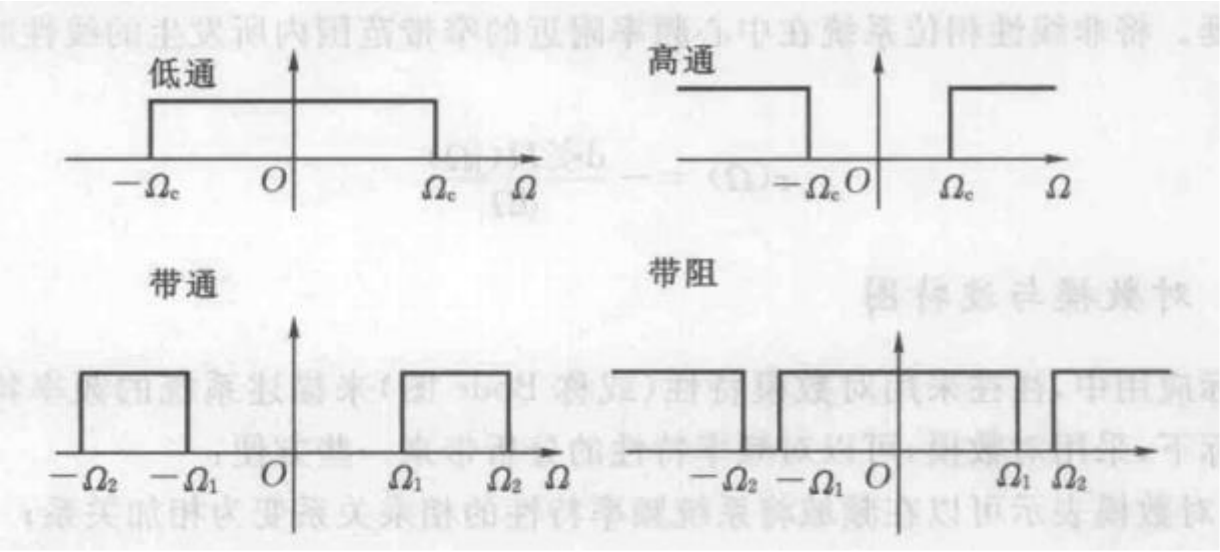
7.3 基于FFT的信号滤波

7.1 数字滤波器设计的整体考虑

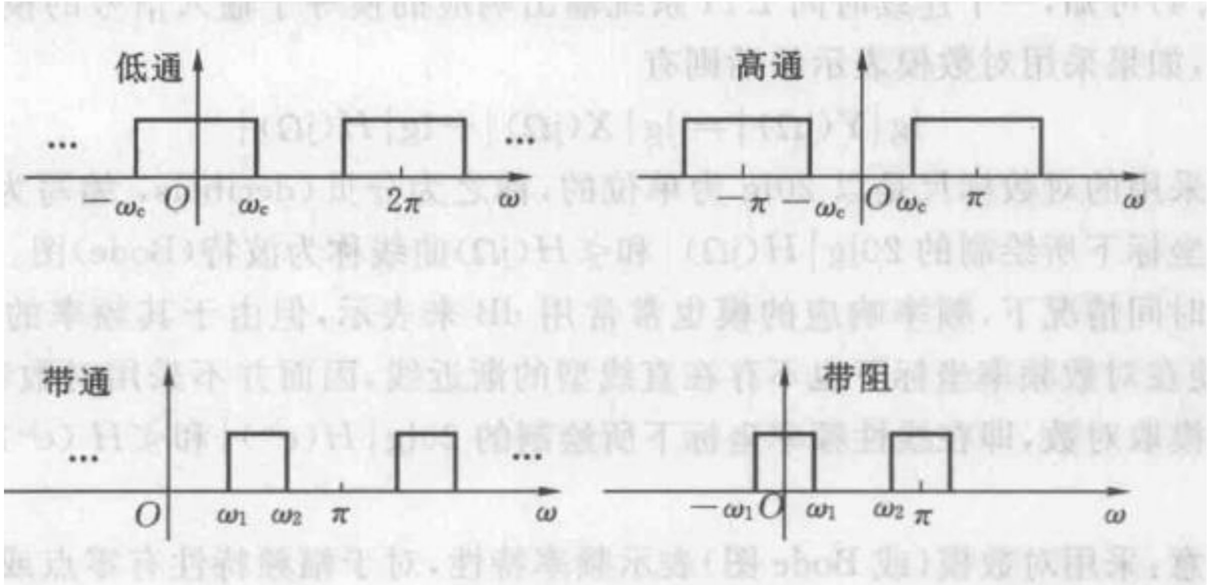
7.1.0 理想滤波器的频率响应

理想滤波器的频率响应在某一个或某几个频段内为常数，而在其它频段内为零。

理想连续滤波器的频率响应特性：



理想离散滤波器的频率特性：



理想滤波器的相位特性假定为零。因此，这些滤波器只对信号的各频率分量的幅度起作用，属于频率选择性滤波器。

信号传输不失真条件：如果理想滤波器的相位特性不为零，即使信号频谱全部位于滤波器通带内，也会在信号通过滤波器时产生相位失真。

但是，当滤波器具有线性相位特性时，这种相位失真不会使原信号包含的信息发生改变，而只会引起信号的延时。

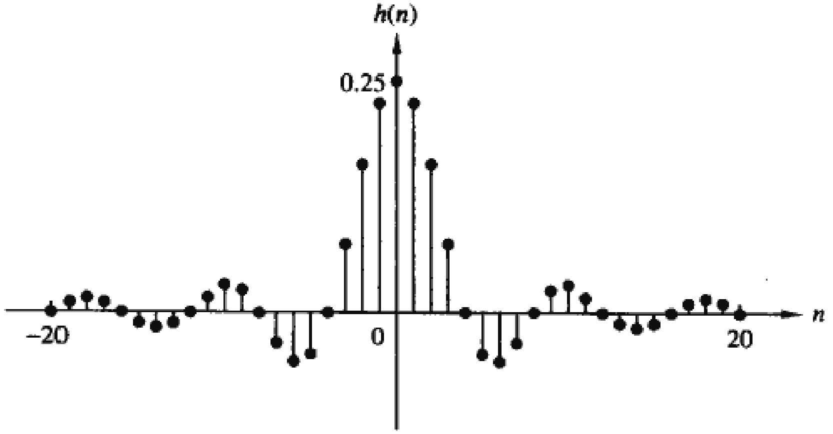
7.1.1 因果性及其含义

理想离散低通滤波器的频率响应特性：

$$H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

该滤波器的单位脉冲响应为：

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}, & n=0\\ \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}, & n\ne 0\end{cases}$$



$\omega_c=\pi/4$

该滤波器非因果，物理上不可实现。

问题：为了使滤波器是因果的，频率响应特性 $H(\omega)$ 需要满足什么条件？

Paley-Wiener 定理： $\boxed{\text{物理可实现滤波器频率响应的必要条件}}$

如果$h(n)$能量有限并且当$n<0$时$h(n)=0$，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|H(e^{j\omega})\right|\right|d\omega<\infty$$

反之，如果$\left|H(e^{j\omega})\right|$平方可积，且$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|H(e^{j\omega})\right|\right|d\omega<\infty$，

那么，滤波器是因果的，其频率响应为： $H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

重要结论：

在一些频率点，$H(\omega)$ 可以是零，但是在任何有限频带上 $H(\omega)$ 不为零，否则积分将变成无限的。

因此，任何理想滤波器都是非因果的。

显而易见，因果性将一些严格的约束加到了线性时不变系统上。除了**Paley-Wiener** 条件外，因果系统也意味着频率响应$H(e^{j\omega})$的实部 $H_R(e^{j\omega})$和虚部 $H_I(e^{j\omega})$ 存在密切的关系。

$$h(n)=h_e(n)+h_o(n) \qquad \begin{aligned} h_e(n)&=\frac{1}{2}[h(n)+h(-n)], \quad 0\le n\le\infty \\ h_o(n)&=\frac{1}{2}[h(n)-h(-n)], \quad 1\le n\le\infty \end{aligned}$$

如果$h(n)$是因果的，$h(n)$可以从其偶序列$h_e(n)$或奇序列$h_o(n)$恢复。

$$h(n)=2h_e(n)u(n)-h_e(0)\delta(n), \quad n\ge 0$$

$$h(n)=2h_o(n)u(n)+h_o(0)\delta(n), \quad n\ge 1$$

由于$h_o(0)=0$，故无法从$h_o(n)$恢复出$h(0)$，所以必须知道$h(0)$。

但是，$n\ge 1$，$h_e(n)=h_o(n)$，故$h_e(n)$和$h_o(n)$存在密切关系。

如果$h(n)$是绝对可和的， $H(e^{j\omega})=H_R(\omega)+jH_I(\omega)$

如果$h(n)$是实值的，且是因果的，$h_e(n)\xrightarrow{F}H_R(\omega) \quad h_o(n)\xrightarrow{F}H_I(\omega)$

$$H(e^{j\omega})=H_R(\omega)+jH_I(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_R(\lambda)U(\omega-\lambda)d\lambda-h_e(0) \qquad （1）$$

$$U(e^{j\omega})=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{1-e^{-j\omega}}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\cos\frac{\omega}{2}, \quad -\pi\le\omega\le\pi \qquad （2）$$

将(2)代入(1)，可得：

$$H_I(\omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_R(\lambda)\cos\frac{\omega-\lambda}{2}d\lambda$$

离散希尔伯特变换

$$H_R(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_I(\lambda)\cos\frac{\omega-\lambda}{2}d\lambda$$

结论： 如果系统是因果的, $H_R(\omega)$ 和 $H_I(\omega)$ 是相互依存的，不能单独被确定。也就是说，因果系统的幅度响应和相位响应是相互依存的，不能单独被确定。

因果性在选频滤波器设计方面具有非常重要的含义：

（1）频率响应除了在频域有限点集外，不能为零；

（2）幅度响应在任何有限频率区间内不能是常数，并且从通带向阻带的过渡不能是突变的；（Gibbs现象的结果）

（3）频率响应的实部和虚部互相依存并通过希尔伯特变换联系起来，**因此不能随意选择频率响应的幅度和相位**。

线性时不变系统：

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k(n-k)$$

该系统是因果的并且是物理上可实现的。

该系统的频率响应：

$$H(e^{j\omega})=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j\omega k}}$$

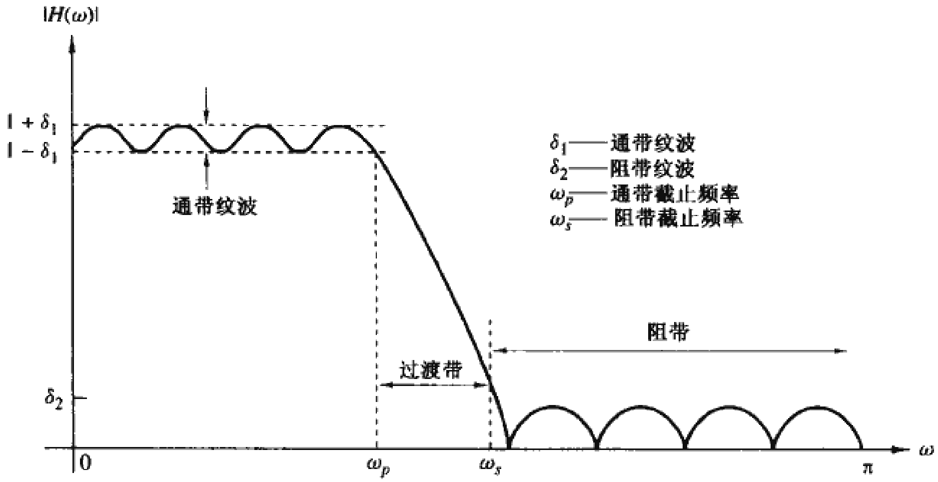
数字滤波器的设计的基本问题：

通过适当地选择系数$\{a_k\}$、$\{b_k\}$来逼近任何理想频率响应特性。

如果a_k不全为零，则系统是一个IIR数字滤波器。

如果a_k全部为零，则系统是一个FIR数字滤波器。

7.1.2 实际选频滤波器的特性



物理上可实现滤波器的幅度特性

在任何滤波器设计问题中，可以规定技术指标：

（1）最大允许的通带纹波：$20\lg\delta_1 \mathrm{dB}$

（2）最大允许的阻带纹波：$20\lg\delta_2 \mathrm{dB}$

（3）通带截止频率：ω_p

（4）阻带截止频率：ω_s

$H(e^{j\omega})$逼近技术指标的程度取决于滤波器系数的个数 (M,N) 之外，还部分取决于滤波器系数$\{a_k\}$、$\{b_k\}$ 的选取准则。

无限长脉冲响应滤波器：IIR

IIR滤波器的设计，通常是先设计一个**模拟滤波器**，再按一定的规则将模拟滤波器的系统函数 $H(s)$ 转变成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。这样做的好处在于能够利用完善的模拟滤波器的设计理论、方法及丰富的图表资料。

IIR滤波器由于继承了模拟滤波器设计的成果，因而可以很简单、有效地完成其设计。但是，IIR滤波器的相位特性不好控制。即使模拟滤波器具有线性相位特性，由于设计过程中存在频率响应的非线性变换，设计的数字滤波器也不会再保持线性相位特性。然而在涉及如图像处理、数据传输等波形传输的系统中，越来越多地要求信道或系统具有线性相位特性，因此IIR系统不适用于这些场合。

有限长脉冲响应滤波器：FIR

FIR滤波器可以在幅频特性任意设计的同时，始终保持严格、精确的线性相位特性。由于FIR系统具有有限长的单位脉冲响应，因而这种系统永远是稳定的。当然，FIR系统也没有因果性的困难。任何非因果的有限长序列，经过足够延时后，总能成为一个因果序列，从而可以在非实时处理的情况下，用一个因果系统去实现。

由于FIR系统通常采用非递归结构，在有限精度运算下，不会出现极限环振荡等不稳定现象，其运算误差也较小。 在用软件实现FIR系统时，还可以通过FFT算法在频域处理信号。正是由于这些特点，FIR滤波器越来越引起人们的关注，也得到越来越广泛的应用。

7.1.3 线性相位FIR滤波器

以$x(n)$为输入、$y(n)$为输出的长度为 N 的FIR滤波器：

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_{N-1}x(n-N+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}b_kx(n-k) \qquad \{b_k\}\text{是滤波器系数的集合}$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k) \qquad b_k=h(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)z^{-k} \qquad H(z)\text{为滤波器的系统函数}$$

如果FIR滤波器的单位脉冲响应$h(n)$是实序列，且满足偶对称或奇对称，即：

$$h(n)=\pm h(N-1-n),\quad n=0,1,\cdots N-1$$

则该FIR滤波器具有严格的**线性相位特性**。

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)z^{-k}\quad=\pm\sum_{k=0}^{N-1}h(N-1-k)z^{-k}$$

$$\overset{m=N-1-k}{=}\quad\pm\sum_{m=0}^{N-1}h(m)z^{m}z^{-(N-1)}\quad=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$$

(a) $h(n)=h(N-1-n)$，即$h(n)$关于$n=\frac{N-1}{2}$呈偶对称情况：

$$H(z)=\frac{1}{2}\left[H(z)+z^{-(N-1)}H(z^{-1})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\left[z^{-k}+z^{-(N-1)}z^{k}\right]$$

$$=\frac{1}{2}z^{-(N-1)/2}\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\left[z^{-(k-(N-1)/2)}+z^{+(k-(N-1)/2)}\right]\qquad(z=e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{k=0}^{N-1}2h(k)\cos\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right]=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\boxed{H(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\cos\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right]}\qquad\boxed{\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega}$$

(b)　$h(n)=-h(N-1-n)$，即$h(n)$关于$n=\dfrac{N-1}{2}$呈奇对称情况：

$$H(e^{j\omega})=-je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\sin\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right]=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$H(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\sin\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right]$$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega$$

很明显，这两类FIR滤波器都具有严格的线性相位特性，且相位特性不受$h(n)$各点的影响。

因此，这类滤波器可以在始终保持严格线性相位的情况下，根据需要独立地设计其幅频特性，从而实现幅频特性与相频特性的兼容。

这是FIR滤波器最诱人的优点。

考虑到 $h(n)$长度N为奇数或偶数，FIR可分为以下四种情况：

(1)偶对称：　$h(n)=h(N-1-n)$，　N为奇数

$h(n)$关于$n=\dfrac{N-1}{2}$呈偶对称，且$h(\dfrac{N-1}{2})$是$h(n)$中的一个点。

(2)偶对称：　$h(n)=h(N-1-n)$，　N为偶数

$h(n)$关于$n=\dfrac{N-1}{2}$呈偶对称，但$(\dfrac{N-1}{2})$不对应$h(n)$中的一个点。

(3)奇对称：　$h(n)=-h(N-1-n)$，　N为奇数

$h(n)$关于$n=\dfrac{N-1}{2}$呈奇对称，$h(\dfrac{N-1}{2})=0$，且是$h(n)$中的一个点。

(4)奇对称：　$h(n)=-h(N-1-n)$，　N为偶数

$h(n)$关于$n=\dfrac{N-1}{2}$呈奇对称,$(\dfrac{N-1}{2})$不对应$h(n)$中的一个点。

四种线性相位FIR滤波器的幅频特性：

(1)偶对称： $h(n)=h(N-1-n)$， N为奇数

$$H(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\cos\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right]$$

$$\overset{N-1-k替代k}{=}\sum_{k=0}^{N-1}h(N-1-k)\cos\left[(\frac{N-1}{2}-k)\omega\right]=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\cos\left[(k-\frac{N-1}{2})(-\omega)\right]=H(-\omega)$$

$h(k)$关于$k=\frac{N-1}{2}$呈偶对称,$\cos(k-\frac{N-1}{2})$也是关于$k=\frac{N-1}{2}$偶对称。

$$H(\omega)=h(\frac{N-1}{2})+2\sum_{k=(N+1)/2}^{N-1}h(k)\cos\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right]$$

$$\overset{m=k-\frac{N-1}{2}}{=}h(\frac{N-1}{2})+2\sum_{m=1}^{(N-1)/2}h(m+\frac{N-1}{2})\cos m\omega=\sum_{m=0}^{(N-1)/2}a_m\cos m\omega$$

其中，$a_0=h(\frac{N-1}{2})$； $a_m=2h(m+\frac{N-1}{2})$， $1\le m\le\frac{N-1}{2}$。

可见，$H(\omega)$可以由$h(n)$的后一半序列点的值来决定。

且$H(\omega)$具有关于$\omega=0$， π， 2π， $\cdots$偶对称的特性。

(2)偶对称：$h(n)=h(N-1-n)$，N为偶数

$$H(\omega)=2\sum_{k=N/2}^{N-1}h(k)\cos(k-\frac{N-1}{2})\omega$$

$$\overset{k-(\frac{N}{2}-1)=m}{=}\quad 2\sum_{m=1}^{N/2}h(\frac{N}{2}-1+m)\cos(m-\frac{1}{2})\omega$$

$$=\sum_{m=1}^{N/2}b_m\cos(m-\frac{1}{2})\omega$$

其中，$b_m=2h(m+\frac{N}{2}-1)$，$1\leq m\leq N/2$。

这表明，$H(\omega)$可以由$h(n)$的后一半序列点的值来表征。

且$H(\omega)$关于$\omega=0$，2π为偶对称，关于$\omega=\pi$为奇对称。

或者说$H(\pi)=0, H(z)$在$z=-1$处必有零点。

(3)奇对称： $h(n) = -h(N-1-n)$， N为奇数

$$H(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)\sin\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right] = \sum_{k=0}^{N-1}-h(N-1-k)\sin\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}-h(k)\sin\left[(k-\frac{N-1}{2})(-\omega)\right]=-H(-\omega)$$

将偶对称项两两合并：

$$H(\omega)=2\sum_{k=(N+1)/2}^{N-1}h(k)\sin\left[(k-\frac{N-1}{2})\omega\right] \qquad h(\frac{N-1}{2})=0$$

$$\overset{k-\frac{N-1}{2}=m}{=} \quad 2\sum_{m=1}^{(N-1)/2}h(\frac{N-1}{2}+m)\sin m\omega = \sum_{m=1}^{(N-1)/2}c_m \sin m\omega$$

其中，$c_m = 2h(\frac{N}{2}-1+m)$， $1 \le m \le (N-1)/2$。

这表明，$H(\omega)$可以由$h(n)$的后一半序列点的值来表征。

且$H(\omega)$具有关于$\omega=0$， π， 2π， $\cdots$奇对称的特性。

或者说$H(0)=H(\pi)=H(2\pi)=0, H(z)$在$z=\pm 1$处必有零点。

(4)奇对称： $h(n)=-h(N-1-n)$， N为偶数

$$H(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}-h(k)\sin\left[(k-\frac{N-1}{2})(-\omega)\right]=-H(-\omega)$$

将偶对称项两两合并，并令 $k-\frac{N-1}{2}=m$

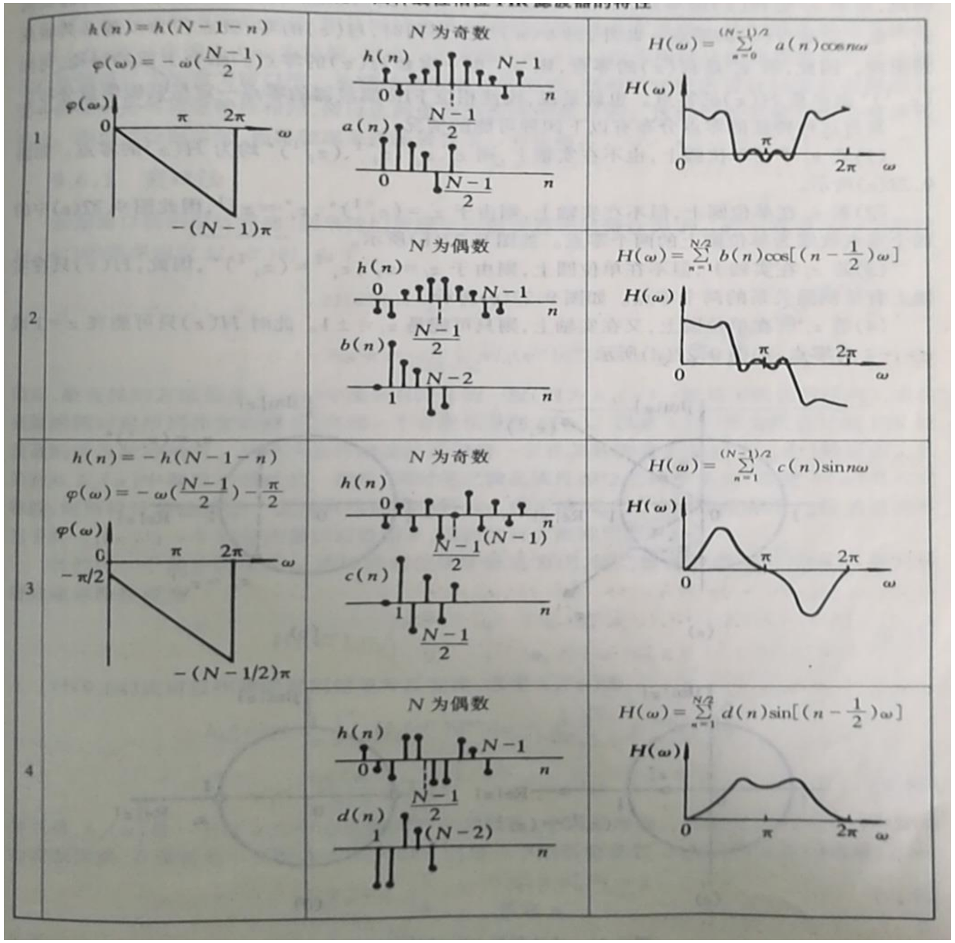
$$H(\omega)=2\sum_{k=0}^{N-1}h(k+\frac{N}{2}-1)\sin\left[(m-\frac{1}{2})\omega\right]=\sum_{k=1}^{N/2}d_m\sin\left[(k-\frac{1}{2})\omega\right]$$

其中，$d_m=2h(\frac{N}{2}-1+m)$， $1\le m\le N/2$。

这表明，$H(\omega)$可以由$h(n)$的后一半序列点的值来表征。

且$H(\omega)$关于$\omega=0$， 2π为奇对称，关于$\omega=\pi$为偶对称。

或者说$H(0)=H(2\pi)=0, H(z)$在$z=1$处必有零点。



第1种：适合构成低通、高通、带通、带阻滤波器；

第2种：适合构成低通、带通滤波器；

第3种：适合构成带通滤波器

第4种：适合构成高通、带通滤波器

可见，FIR滤波器的设计问题简化为由一个指定的期望频率响应函数$H_d(\omega)$的FIR滤波器来确定N个系数$h(n)$，$n=0,1,\ldots,N-1$。

在实际使用时，根据需要选择其中合适的滤波器类型，并在设计时遵循其约束条件。

7.2 FIR数字滤波器设计

FIR数字滤波器设计的实质：寻求一个有限长序列作为FIR系统的单位脉冲响应 $h(n)$ ，使其频率响应 $H(e^{j\omega})$逼近期望的特性$H_d(e^{j\omega})$。

两种逼近途径：

1、从**时域**角度逼近途径：**窗口法**

以$H_d(e^{j\omega})$所对应的 $h_d(n)$ 为目标，构建一个有限长的 $h(n)$ 作为所设计滤波器的单位脉冲响应。

2、从**频域**角度逼近途径：**频率采样法**

使所设计的滤波器的频率响应在某些采样点处与理想特性相同，借以达到逼近理性特性的目的。

1、窗口法

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n} \qquad h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$h_d(n)$ 一般是无限长序列，可通过截取获得有限长序列，以此作为所设计的FIR滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$。

如果在从 $h_d(n)$ 中截取有限长的一段时，同时使之**满足线性相位的约束条件**，即使 $h(n)$ **具有对称性**，则所设计的滤波器一定拥有线性相位特性。

由于从 $h_d(n)$ 中截取有限长一段的过程相当于将$h_d(n)$ 与一个相应的**窗口函数**相乘，称这种方法为**窗口法**。

以一个截至频率为ω_c的线性相位**数字低通滤波器**为例，假定该滤波器的时延为α，则其理想的频率特性应为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\alpha\omega}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{\pi(n-\alpha)} = \frac{\omega_c}{\pi}Sa[(n-\alpha)\omega_c]$$

显然，$h_d(n)$是一个以α为中心呈偶对称的无限长、非因果序列。

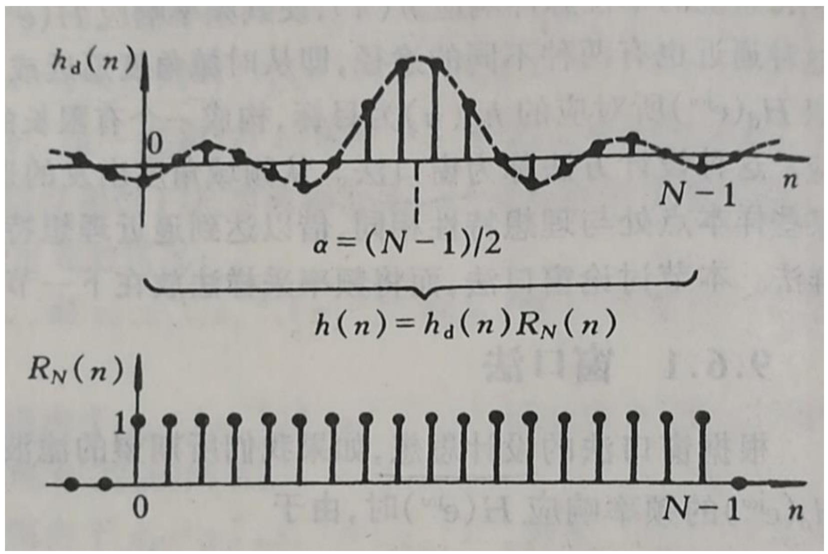
$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

$$h(n) = h_d(n)w_R(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

如果在截取时，保证满足线性相位约束条件，即保证 $h(n)$ 以 $(N-1)/2$ 偶对称，则必须要求 $\alpha=(N-1)/2$。

这样得到的 $h(n)$ 可作为所设计的滤波器的单位脉冲响应。

通过矩形窗截取 $h(n)$ 的过程如图所示：



一般来说，用于从 $h(n)$ 中截取的窗函数不一定是矩形窗。可以在截取的同时对序列 $h_d(n)$ 作一定的加权处理，以便获得对 $h_d(n)$ 理想幅频特性的更好逼近。

窗口法设计线性相位FIR滤波器的一般步骤：

（1）根据需要确定理想滤波器的特性$H_d(e^{j\omega})$；

（2）由$H_d(e^{j\omega})$求出 $h_d(n)=F^{-1}[H_d(e^{j\omega})]$；

（3）选择适当的窗口函数，并根据线性相位的条件确定滤波器长度 N ；

（4）由 $h(n)=h_d(n)w_R(n)$，$0\le n\le N-1$, 得出单位脉冲响应$h(n)$ ；

对于此例，可得到：$N=2\alpha+1$

$$h(n)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[(n-\frac{N-1}{2})\omega_c]=\frac{\sin[(n-\frac{N-1}{2})\omega_c]}{\pi(n-\frac{N-1}{2})},\quad 0\le n\le N-1$$

由于所得的$h(n)$必然是以$\frac{N-1}{2}$偶对称，因此所设计的滤波器在N为奇数时，属于第1种，N为偶数时，属于第2种。

窗函数对期望的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的影响：

$$h(n)=h_d(n)w_R(n)=\begin{cases} h_d(n), & 0\le n\le N-1 \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}H_d(e^{j\omega})\otimes W_R(e^{j\omega})$$

$W_R(e^{j\omega})$是矩形窗函数的频谱。

这表明用窗口法设计的滤波器，其频率响应逼近理性特性的程度，取决于窗函数的特性。

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega n}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

令$W_R(e^{j\omega})=W_R(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，则其

幅度响应函数为： $$W_R(\omega)=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)},\quad -\pi\le\omega\le\pi$$

相位响应函数为： $$\varphi(\omega)=\begin{cases} -\frac{N-1}{2}\omega, & \sin(\omega N/2)\ge 0 \\ -\frac{N-1}{2}\omega+\pi, & \sin(\omega N/2)<0 \end{cases}$$

若将$H_d(e^{j\omega})$表示为$H_d(e^{j\omega})=H_d(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，则对理想低通滤波器有:

$$H_d(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

则：$H(e^{j\omega})=e^{j\varphi(\omega)}\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$

所设计滤波器的幅度响应函数为:

$$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$$

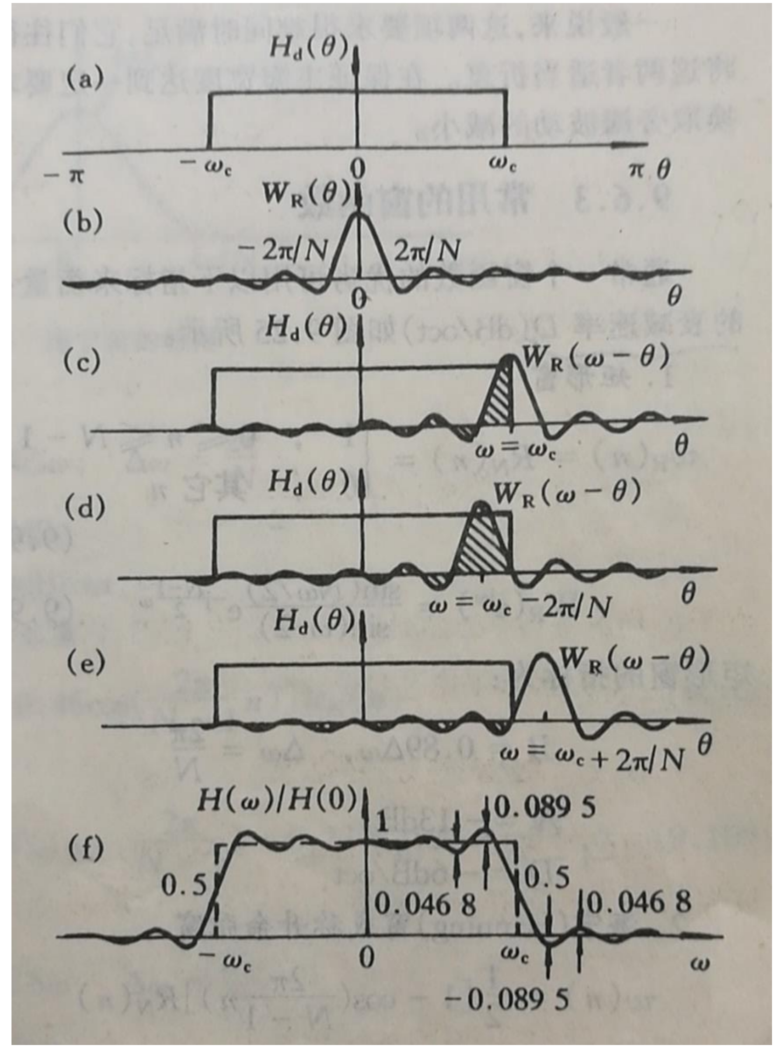
假定N充分大，使得$\dfrac{\pi}{N}<<\omega_c$，则可认为

$$W_R(\omega)=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\approx\frac{\sin(\omega N/2)}{\omega/2}=NSa(\frac{\omega N}{2})$$

$$H(0)=1\qquad H(\omega_c)=\frac{1}{2}$$

$\omega=\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}$，$H(\omega)$取得最大值

$\omega=\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}$，$H(\omega)$取得最小值,且为负值

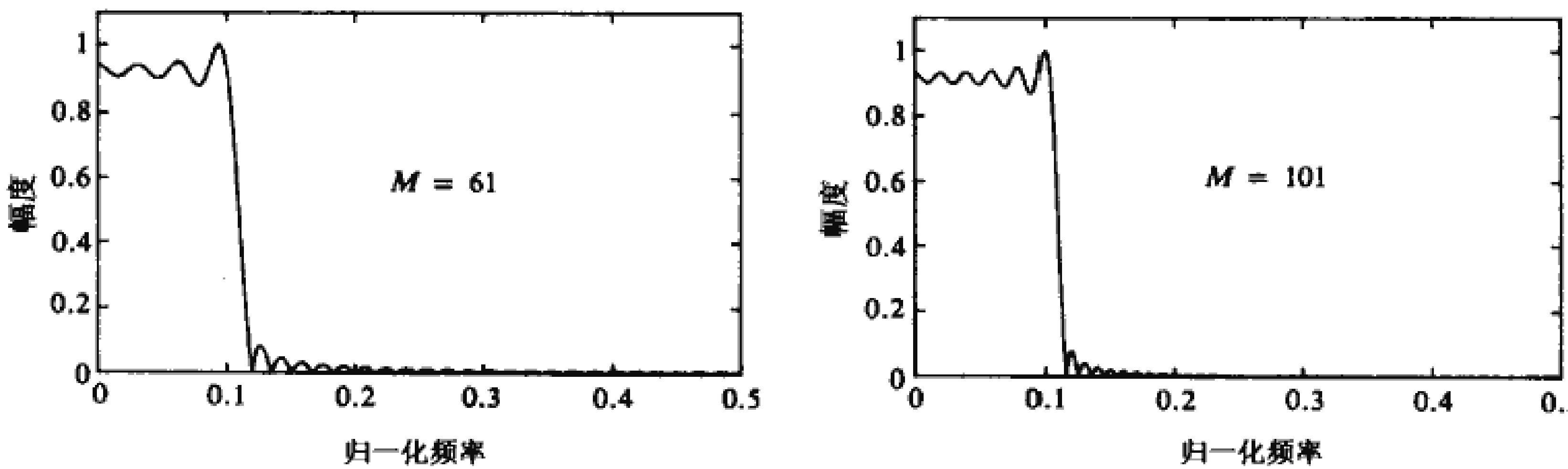


$H_d(\omega)$与矩形窗$W_R(\omega)$的卷积过程

可见,$H(\omega)$是有肩峰和振荡的。这正是Gibbs现象。

因为$H_d(e^{j\omega})$是以2π为周期的连续函数，$H_d(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)e^{-j\omega n}$ 正是它的傅里叶级数展开式。

$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}h_d(n)e^{-j\omega n}$ 是截取了傅里叶级数展开式中的有限项之和，因此必然出现Gibbs现象。随着截取长度 N 的增大，只会使起伏向两边压缩，其振荡的密度变大，而最大肩锋始终保持9%。



矩形窗的低通滤波器：(a) $M=61$ 和(b) $M=101$

从频域角度看，造成这些影响的主要原因是：

（1）由于窗函数频谱的主瓣有一定宽度，它使 $H(e^{j\omega})$产生了过渡带，而且过渡带的宽度主要取决于主瓣的宽度；

（2）此外由于窗函数频谱的众多旁瓣使得 $H(e^{j\omega})$ 产生了肩峰和余振，这种起伏会使滤波器的阻带衰减减小。

（3）$H(e^{j\omega})$ 的起伏取决于窗函数频谱的旁瓣，窗函数频谱旁瓣越多，余振越多；旁瓣的相对值越大，肩峰越明显。

（4）增大窗口的宽度 N，只能缩小窗函数频谱的主瓣宽度，从而改善过渡带，但不会减小旁瓣的相对值，因此不能减少肩峰和余振。

要想更好地改善滤波器的频率特性，只能从改善窗函数的形状上找出路。

实际上，为了抑制在通带和阻带出现大振荡，使用的窗函数应该是锥形且衰落逐渐趋于0，而不是矩形窗函数那样徒变的。

综上所述，合乎要求的窗函数的频率响应应该符合以下标准：

（1）主瓣宽度应尽量窄，以期获得较陡峭的过渡带特性；
（2）旁瓣应尽量少，且其幅度与主瓣相比应尽可能小。也就是说，窗口频谱的能量应尽量集中于主瓣，借以减少肩峰与余振，从而增大阻带衰减。

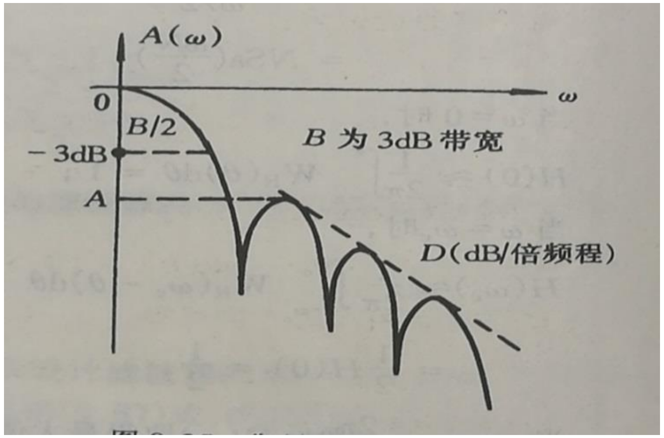
一般来说，这两项要求很难同时满足，它们之间往往是互相矛盾的。在实际中采用的窗函数常将这两者适当折衷。**在保证主瓣宽度达到一定要求的情况下，往往通过适当增大主瓣宽度来换取旁瓣波动的减小。**

衡量窗函数优劣的指标：

3dB带宽B;

最大旁瓣的衰减A(dB);

旁瓣的衰减速率D(dB/oct)



常用窗函数：

1 矩形窗：

$$w_R(n) = R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

矩形窗的指标：

$$B = 0.89\Delta\omega, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{N}; \qquad A = -13\text{dB}; \qquad D = -6\text{dB/oct}$$

2 海宁窗（Hanning）或升余弦窗:

$$w(n)=\frac{1}{2}[1-\cos(\frac{2\pi}{N-1}n)]R_N(n)$$

$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{2}W_R(e^{j\omega})+\frac{1}{4}W_R(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N-1})})+\frac{1}{4}W_R(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N-1})})$$

其中，$W_R(e^{j\omega})$为矩形窗频谱

$$W(\omega)=\frac{1}{2}W_R(\omega)+\frac{1}{4}W_R(\omega-\frac{2\pi}{N-1})+\frac{1}{4}W_R(\omega+\frac{2\pi}{N-1})$$

当$N>>1$时， $W(\omega)\approx\frac{1}{2}W_R(\omega)+\frac{1}{4}W_R(\omega-\frac{2\pi}{N})+\frac{1}{4}W_R(\omega+\frac{2\pi}{N})$

海宁窗的指标：

$B=1.44\Delta\omega$， $\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}$; $A=-32\text{dB}$; $D=-18\text{dB/oct}$

3 汉明窗（Hamming）或称改进的升余弦窗:

$$w(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{2\pi}{N-1}n)]R_N(n)$$

$$W(\omega)=0.54W_R(\omega)+0.23W_R(\omega-\frac{2\pi}{N-1})+0.23W_R(\omega+\frac{2\pi}{N-1})$$

汉明窗的指标:

$$B=1.3\Delta\omega,\quad \Delta\omega=\frac{2\pi}{N};\qquad A=-43\text{dB};\qquad D=-6\text{dB/oct}$$

4 布莱克曼窗（Blackman）或二阶升余弦窗:

$$w(n)=[0.42-0.5\cos(\frac{2\pi}{N-1}n)+0.08\cos(\frac{4\pi}{N-1}n)]R_N(n)$$

$$W(\omega)=0.42W_R(\omega)+0.25W_R(\omega-\frac{2\pi}{N-1})+0.25W_R(\omega+\frac{2\pi}{N-1})$$

$$+0.04W_R(\omega-\frac{4\pi}{N-1})+0.04W_R(\omega+\frac{4\pi}{N-1})$$

布莱克曼窗的指标:

$$B=1.68\Delta\omega,\quad \Delta\omega=\frac{2\pi}{N};\qquad A=-58\text{dB};\qquad D=-18\text{dB/oct}$$

5 凯塞窗（Kaiser）：

$$w(n)=\frac{I_0(\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}=\frac{I_0[\beta\sqrt{1-(1-n/\alpha)^2}]}{I_0(\beta)}$$

其中：$\alpha=(N-1)/2;\beta$为波形系数；$I_0(x)$是零阶贝塞尔函数，其定义为：

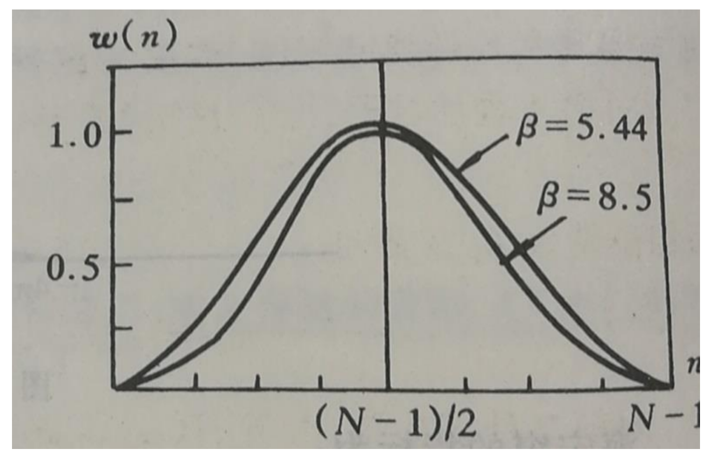
$$I_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k!}(\frac{x}{2})^k]^2$$

β越大，其频谱的旁瓣越小，但主瓣宽度相应越宽。

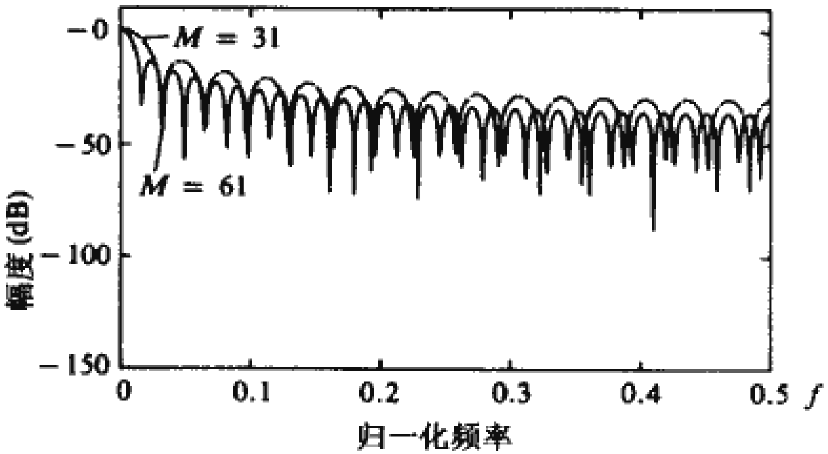
$\beta=0$，蜕变为矩形窗；

$\beta=5.44$，接近于汉明窗；

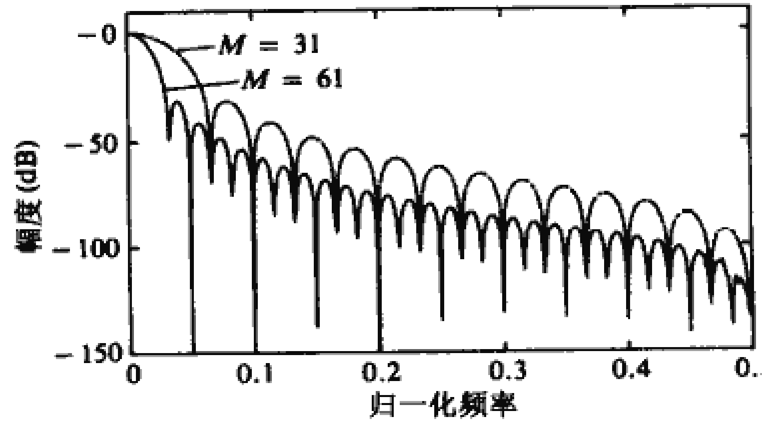
$\beta=8.5$，接近于布莱克曼窗。



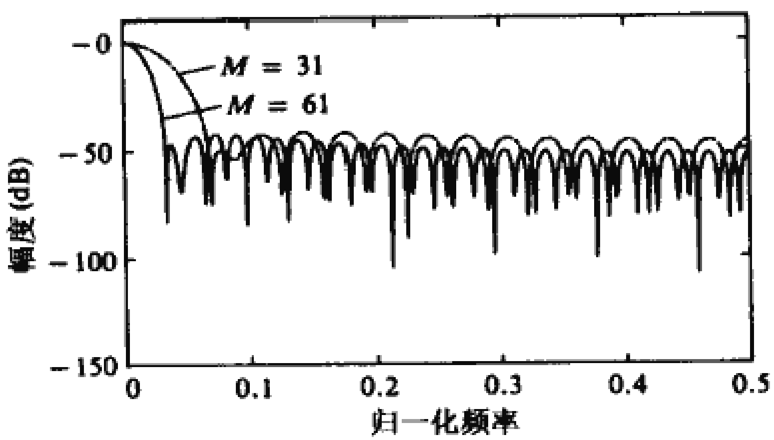
凯塞窗函数



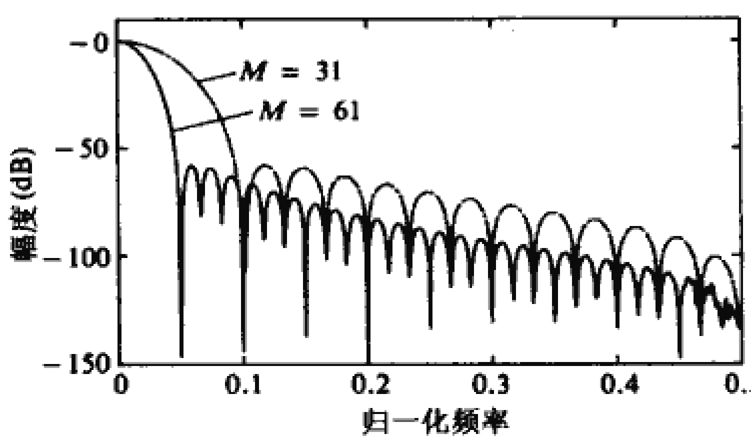
矩形窗的频率响应



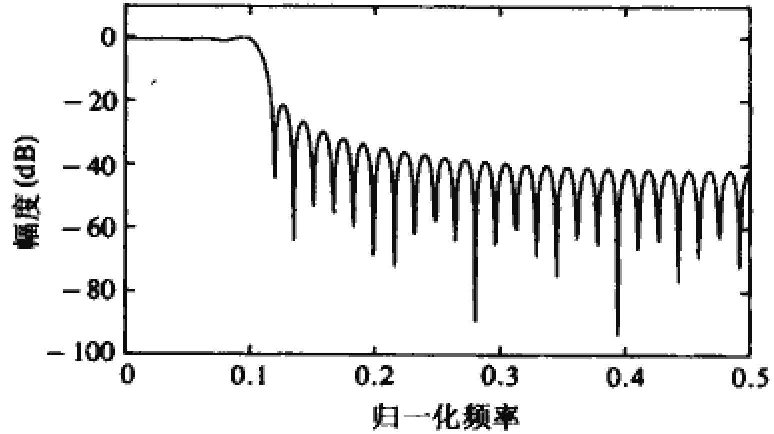
汉宁窗的频率响应



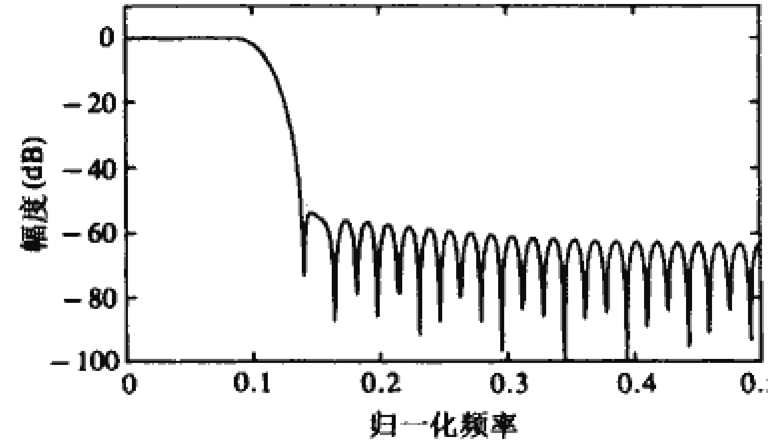
汉明窗的频率响应



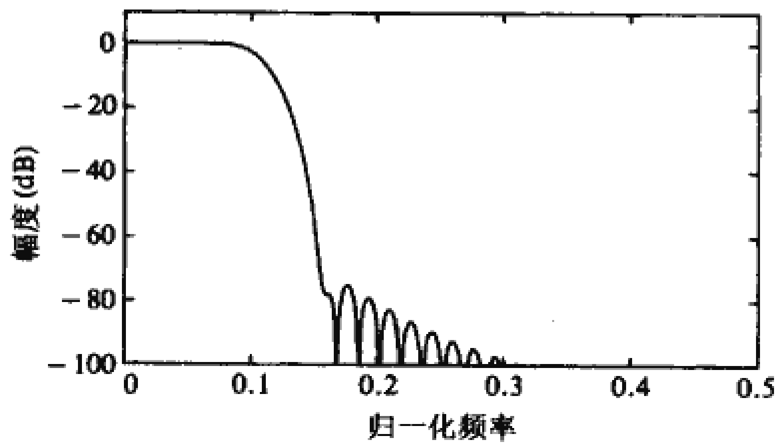
布莱克曼窗的频率响应



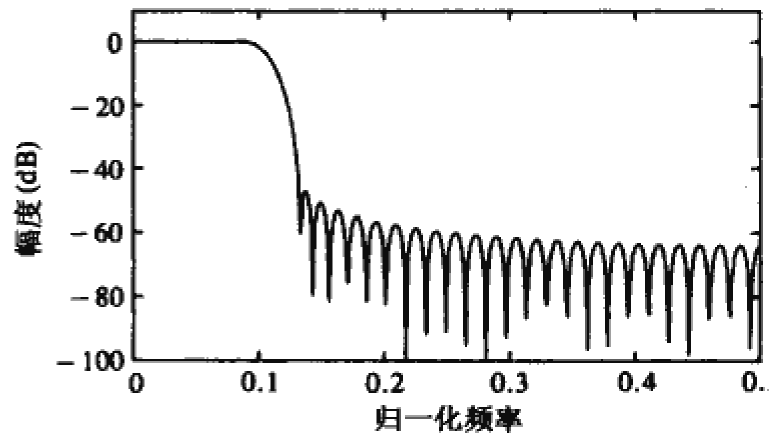
矩形窗的低通 FIR 滤波器($M=61$)



汉明窗的低通 FIR 滤波器($M=61$)



布莱克曼窗的低通
FIR滤波器($M=61$)



$\alpha=4$ 时 凯泽窗的低通
FIR 滤 波 器 ($M=61$)

通过增大滤波器的过渡带，窗函数的确削弱了在频带边界处的振铃效果，并产生了更低的旁瓣。

2、频率采样法

从频域出发，使所设计的滤波器的频率响应在某些采样点处与理想特性相同，借以达到逼近理性特性的目的。

设设计的FIR滤波器的单位脉冲响 $h(n)$ 的离散傅里叶变换为 $H(k)$，理想滤波器的频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$，在采样点处有：

$$H(k)=H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N}$$

其它地方的频率响应由频域内插公式决定。

$$H(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j2\pi k/N}e^{-j\omega}}$$

若用z变换表示，则有

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

其中， $W_N=e^{-j2\pi/N}$ $\quad H(k)=H(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=H(e^{j2\pi k/N})$

如果直接对理想的频率响应采样，即令

$$H(k)=H_d(e^{j2\pi k/N})$$

当设计的滤波器是线性相位FIR滤波器时，必须保证$H(k)$的幅度和相位满足线性相位的约束条件。令

$$H(k)=H_k e^{j\theta_k}$$

对第1种滤波器，由于$H(\omega)$关于$\omega=0,\pi,2\pi$偶对称，应有：

$$H_k=H_{N-k} \qquad \theta_k=-\frac{N-1}{2}\omega\Big|_{\omega=2\pi k/N}=-k\pi(1-\frac{1}{N})$$

对第2种滤波器，由于$H(\omega)$关于$\omega=\pi$奇对称，应有：

$$H_k=-H_{N-k} \qquad \theta_k==-k\pi(1-\frac{1}{N})$$

对第3种滤波器，由于$H(\omega)$关于$\omega=0,\pi,2\pi$奇对称，应有：

$$H_k=-H_{N-k} \qquad \theta_k==-k\pi(1-\frac{1}{N})-\frac{\pi}{2}$$

对第4种滤波器，由于$H(\omega)$关于$\omega=\pi$偶对称，应有：

$$H_k=H_{N-k} \qquad \theta_k==-k\pi(1-\frac{1}{N})-\frac{\pi}{2}$$

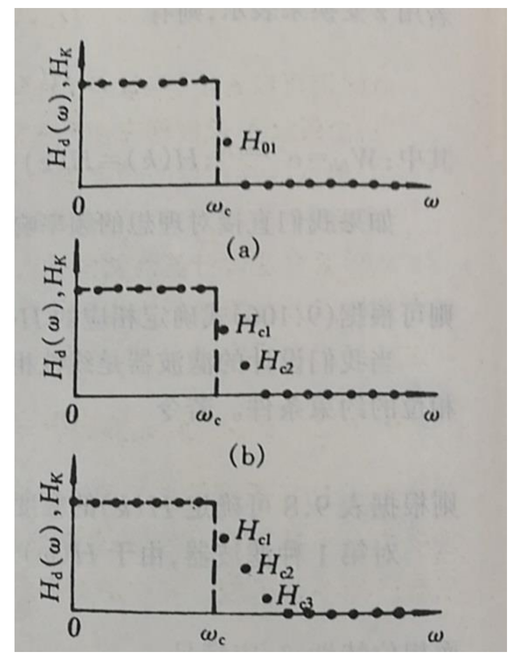
因此，所设计滤波器的频率响应为：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

其中频域内插函数：$\varphi(\omega)=\dfrac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$

由于频域内插函数$\varphi(\omega)$正是矩形窗函数的频谱，因此当$H_d(e^{j\omega})$是理想特性时，在其幅度特性的不连续点处会产生Gibbs现象。在变化较平缓的地方，逼近的效果会更好。

为了减轻Gibbs效应，常对理想特性加以修正，在其不连续点处加入过渡采样点，使设计的滤波器具有一定的过渡带。从而换得肩峰和起伏的减小及阻带衰减的增大。



增设过渡点

表 9.9 过渡点数与阻带最小衰减的关系

过渡点数	阻带最小衰减(dB)
0	−20dB 左右
1	−44～−54dB 左右
2	−65～−75dB 左右
3	−85～−95dB 左右

频率采样法设计线性相位FIR滤波器的一般步骤：

（1）根据设计要求选择滤波器种类；
（2）根据线性相位约束条件，确定 H_k和θ_k，进而得到 $H(k)$；
（3）由 $H(k)$得到所要求的 $h(n)$ 。

频率采样法设计FIR滤波器的优点：

可以直接从频域出发，至少可保证所设计的滤波器在采样点处精确逼近理想特性。且设计方法简单，适合于优化设计。但由于截止频率不一定恰好落在采样点上，因而设计的滤波器截止频率不易精确保证。

7.3 基于FFT的信号滤波涉及的matlab函数

1. y=wavred(file)：读取file所规定的.wav文件，返回采样值放在向量y中。

   [y,fs,nbits]=wavred(file)：采样值放在向量y中，fs表示采样频率（Hz），nbits表示采样位数。

   y=wavred(file,N)：读取前N点采样值放在向量y中。

   y=wavred(file,N1，N2)：读取从N1点到N2点的采样值放在向量y中。

2.sound(x,fs,bits)：将x数据通过声卡转化为声音。

3.w=boxcar(N)：产生长度为N的矩形窗。

   w=hanning(N)：产生长度为N的海宁窗。

   w=hamming(N)：产生长度为N的哈明窗。

   w=blackman(N)：产生长度为N的布莱克曼窗。

   w=kaiser(N,beta)：产生长度为N的凯泽窗。

4.h=fir1()：窗函数法设计FIR滤波器。

5.h=fir2()：频率采样法设计FIR滤波器。

6.fftfilt()：FIR滤波器实现滤波。