工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第八节 各种积分的关系及其在场论中的应用

本节主要内容：

- Green公式
- 平面线积分与积分路径无关的条件
- Gauss公式与散度
- Stokes公式与旋度
- 几种重要的特殊向量场

闭区域与其边界的定向

闭区域与其边界的定向

- 单连通区域与复连通区域

闭区域与其边界的定向

- 单连通区域与复连通区域

设D为一平面区域, 如果D内任一封闭曲线围成的部分都属于D, 则称D为单连通区域; 否则称为复连通区域.

闭区域与其边界的定向

- 单连通区域与复连通区域

设D为一平面区域, 如果D内任一封闭曲线围成的部分都属于D, 则称D为单连通区域; 否则称为复连通区域.

通俗地说, 单连通区域就是没有“洞”(包括点“洞”)的区域.

闭区域与其边界的定向

- 单连通区域与复连通区域

  设D为一平面区域, 如果D内任一封闭曲线围成的部分都属于D, 则称D为单连通区域; 否则称为复连通区域.

  通俗地说, 单连通区域就是没有“洞”(包括点“洞”)的区域.

- 区域D的边界曲线的定向

闭区域与其边界的定向

- 单连通区域与复连通区域

  设D为一平面区域, 如果D内任一封闭曲线围成的部分都属于D, 则称D为单连通区域; 否则称为复连通区域.

  通俗地说, 单连通区域就是没有“洞”(包括点“洞”)的区域.

- 区域D的边界曲线的定向

  规定区域D的边界曲线C的正向如下: 当观察者沿C的此方向行走时, D总在它前进的左侧.

闭区域与其边界的定向

- 单连通区域与复连通区域

设D为一平面区域, 如果D内任一封闭曲线围成的部分都属于D, 则称D为单连通区域; 否则称为复连通区域.

通俗地说, 单连通区域就是没有"洞"(包括点"洞")的区域.

- 区域D的边界曲线的定向

规定区域D的边界曲线C的正向如下: 当观察者沿C的此方向行走时, D总在它前进的左侧.

用记号∂D^+表示区域D的边界曲线且取正向.

Green 定理

定理8.1 (Green 定理)

Green 定理

定理8.1 (Green 定理)

设D是一个平面有界闭区域, 其边界∂D为光滑或分段光滑曲线, 函数$P(x,y), Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数, 则有

Green 定理

定理8.1 (Green 定理)

设D是一个平面有界闭区域，其边界∂D为光滑或分段光滑曲线，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 计算$\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=R^2$, 取顺时针方向.

例1. 计算 $\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=R^2$, 取顺时针方向.

解: 曲线L封闭, $P(x,y)=-x^2y, Q(x,y)=xy^2$满足格林公式条件, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$, 故

例1. 计算$\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=R^2$, 取顺时针方向.

解: 曲线L封闭, $P(x,y)=-x^2y, Q(x,y)=xy^2$满足格林公式条件, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$, 故

$$\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x = -\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 计算$\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=R^2$, 取顺时针方向.

解: 曲线L封闭, $P(x,y)=-x^2y, Q(x,y)=xy^2$满足格林公式条件, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$, 故

$$\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x = -\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \rho^3\mathrm{d}\rho = -\frac{\pi R^4}{2}.$$

例2. 计算 $\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y$, 其中$L$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$.

例2. 计算$\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y$, 其中$L$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$.

解： 曲线L不封闭, 故添加辅助线$\overline{OA}$, 则$L+\overline{OA}$是一条正向封闭的曲线,

例2. 计算$\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y$, 其中$L$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$.

解： 曲线L不封闭, 故添加辅助线$\overline{OA}$, 则$L+\overline{OA}$是一条正向封闭的曲线, $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y - my$, $Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y - m$满足格林公式条件, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=m$, 故

例2. 计算 $\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y$, 其中$L$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$.

解: 曲线L不封闭, 故添加辅助线$\overline{OA}$, 则$L+\overline{OA}$是一条正向封闭的曲线, $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y - my$, $Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y - m$满足格林公式条件, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=m$, 故

$$\int_{L+\overline{OA}} (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y = \iint_D m\mathrm{d}\sigma = \frac{m\pi}{8}a^2,$$

例2. 计算$\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y$, 其中$L$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$.

解： 曲线L不封闭, 故添加辅助线$\overline{OA}$, 则$L+\overline{OA}$是一条正向封闭的曲线, $P(x,y)=\mathrm{e}^x \sin y - my$, $Q(x,y)=\mathrm{e}^x \cos y - m$满足格林公式条件, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=m$, 故

$$\int_{L+\overline{OA}} (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y = \iint\limits_D m\mathrm{d}\sigma = \frac{m\pi}{8}a^2,$$

直线$\overline{OA}: y=0$, x从0到a, 则$\int_{\overline{OA}} = \int_0^a 0\mathrm{d}x = 0$,

例2. 计算$\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y$, 其中$L$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$.

解: 曲线L不封闭, 故添加辅助线$\overline{OA}$, 则$L+\overline{OA}$是一条正向封闭的曲线, $P(x,y)=\mathrm{e}^x \sin y - my$, $Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y - m$满足格林公式条件, 且$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=m$, 故

$$\int_{L+\overline{OA}} (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y = \iint\limits_D m\mathrm{d}\sigma = \frac{m\pi}{8}a^2,$$

直线$\overline{OA}: y=0$, x从0到a, 则$\int_{\overline{OA}} = \int_0^a 0\mathrm{d}x = 0$,

故原式$=\int_{L+\overline{OA}} - \int_{\overline{OA}} = \frac{m\pi}{8}a^2 - 0 = \frac{m\pi}{8}a^2.$

例3. 计算$\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$L$为

(1) 不包围原点O的分段光滑闭曲线, 取逆时针方向;

(2) 圆周$x^2+y^2=a^2$, 取逆时针方向;

(3) 包围原点O的分段光滑闭曲线C, 取逆时针方向.

例3. 计算$\displaystyle\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$L$为

(1) 不包围原点O的分段光滑闭曲线, 取逆时针方向;

(2) 圆周$x^2+y^2=a^2$, 取逆时针方向;

(3) 包围原点O的分段光滑闭曲线C, 取逆时针方向.

答案: (1) 0 (由$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$及格林公式易得).

例3. 计算 $\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$L$为

(1) 不包围原点O的分段光滑闭曲线, 取逆时针方向;

(2) 圆周$x^2+y^2=a^2$, 取逆时针方向;

(3) 包围原点O的分段光滑闭曲线C, 取逆时针方向.

答案： (1) 0 (由$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$及格林公式易得).

(2) 2π (曲线方程$x = a\cos t, y = a\sin t$, 参数t从0到2π, 根据第二型曲线积分计算方法可求得).

例3. 计算$\displaystyle\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$L$为

(1) 不包围原点O的分段光滑闭曲线, 取逆时针方向;

(2) 圆周$x^2+y^2=a^2$, 取逆时针方向;

(3) 包围原点O的分段光滑闭曲线C, 取逆时针方向.

答案: (1) 0 (由$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$及格林公式易得).

(2) 2π (曲线方程$x=a\cos t, y=a\sin t$, 参数t从0到2π, 根据第二型曲线积分计算方法可求得).

(3) 2π (注意: P,Q在原点不满足格林公式条件, 需要把填补曲线挖去原点).

(3) 在光滑闭曲线 C 的内部添加曲线$C_\varepsilon : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 取顺时针方向, 则$C + C_\varepsilon$围成了一个正向的复连通区域, 在该复连通区域内满足格林公式条件, 故有

(3) 在光滑闭曲线 C 的内部添加曲线$C_\varepsilon : x^2+y^2=\varepsilon^2$, 取顺时针方向, 则$C+C_\varepsilon$围成了一个正向的复连通区域, 在该复连通区域内满足格林公式条件, 故有

$$\int_{C+C_\varepsilon} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

(3) 在光滑闭曲线 C 的内部添加曲线$C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$, 取顺时针方向, 则$C+C_\varepsilon$围成了一个正向的复连通区域, 在该复连通区域内满足格林公式条件, 故有

$$\int_{C+C_\varepsilon}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$

因为C_ε是顺时针方向, 所以根据(2)的结论可得: $\displaystyle\int_{C_\varepsilon}=-2\pi$,

(3) 在光滑闭曲线 C 的内部添加曲线 $C_\varepsilon : x^2+y^2=\varepsilon^2$, 取顺时针方向, 则 $C+C_\varepsilon$ 围成了一个正向的复连通区域, 在该复连通区域内满足格林公式条件, 故有

$$\int_{C+C_\varepsilon}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$

因为 C_ε 是顺时针方向, 所以根据(2)的结论可得: $\displaystyle\int_{C_\varepsilon}=-2\pi$,

或者:
$$\int_{C_\varepsilon}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma=-2\pi.$$

(3) 在光滑闭曲线 C 的内部添加曲线 $C_\varepsilon : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 取顺时针方向, 则 $C + C_\varepsilon$ 围成了一个正向的复连通区域, 在该复连通区域内满足格林公式条件, 故有

$$\int_{C+C_\varepsilon} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

因为 C_ε 是顺时针方向, 所以根据(2)的结论可得: $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} = -2\pi$,

或者:
$$\int_{C_\varepsilon} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D 2\mathrm{d}\sigma = -2\pi.$$

因此, $\displaystyle\int_C = \int_{C+C_\varepsilon} - \int_{C_\varepsilon} = 0 - (-2\pi) = 2\pi.$

用Green公式求平面图形的面积

用Green公式求平面图形的面积

若在Green公式$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中，

用Green公式求平面图形的面积

若在Green公式$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中,

取$P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$, 则

用Green公式求平面图形的面积

若在Green公式$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中，

取$P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$, 则

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

用Green公式求平面图形的面积

若在Green公式$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中,

取$P(x,y) = -y,\ Q(x,y) = x$, 则

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\text{区域}D\text{的面积}A = \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

例. 求由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的面积$A$.

例. 求由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的面积$A$.

解: 面积$A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$,

例. 求由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的面积$A$.

解: 面积$A=\dfrac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$,

其中曲线$L:\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ 其中t从0到2π, 故

例. 求由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的面积$A$.

解： 面积$A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$,

其中曲线$L:\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ 其中t从0到2π, 故

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

例. 求由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的面积$A$.

解: 面积$A=\dfrac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$,

其中曲线$L:\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ 其中t从0到2π, 故

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\mathrm{d}(a\sin^3 t)-a\sin^3 t\mathrm{d}(a\cos^3 t)]
\end{aligned}
$$

例. 求由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的面积$A$.

解: 面积$A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$,

其中曲线$L:\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ 其中t从0到2π, 故

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\mathrm{d}(a\sin^3 t)-a\sin^3 t\mathrm{d}(a\cos^3 t)] \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{3\pi a^2}{8}.
\end{aligned}
$$

8.2 平面曲线积分与路径无关的条件

定义

8.2 平面曲线积分与路径无关的条件

定义

设D是一个平面区域, 如果对D内任何两条以A为起点、以B为终点的分段光滑曲线L_1、L_2, 都有

8.2 平面曲线积分与路径无关的条件

定义

设D是一个平面区域, 如果对D内任何两条以A为起点、以B为终点的分段光滑曲线L_1、L_2, 都有

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

8.2 平面曲线积分与路径无关的条件

定义

设D是一个平面区域，如果对D内任何两条以A为起点、以B为终点的分段光滑曲线L_1、L_2，都有

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则称曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在D内与路径无关.

8.2 平面曲线积分与路径无关的条件

定义

设D是一个平面区域，如果对D内任何两条以A为起点、以B为终点的分段光滑曲线L_1、L_2，都有

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则称曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在D内与路径无关.

此时，可以省略积分路径L，只指出路径L的起点和终点，表示为

$$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

8.2 平面曲线积分与路径无关的条件

定义

设D是一个平面区域，如果对D内任何两条以A为起点、以B为终点的分段光滑曲线L_1、L_2，都有

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则称曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在D内与路径无关.

此时，可以省略积分路径L，只指出路径L的起点和终点，表示为

$$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

并称$\boldsymbol{F}(M) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$为保守场.

平面曲线积分与路径无关的等价条件

定理8.2

平面曲线积分与路径无关的等价条件

定理8.2

设区域$D \subseteq \mathbf{R}^2$, 函数$P(x,y), Q(x,y)$在D上连续, 则以下面三个命题等价:

平面曲线积分与路径无关的等价条件

定理8.2

设区域$D \subseteq \mathbf{R}^2$, 函数$P(x,y), Q(x,y)$在D上连续, 则以下面三个命题等价:

(1) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有

平面曲线积分与路径无关的等价条件

定理8.2

设区域$D \subseteq \mathbf{R}^2$, 函数$P(x,y), Q(x,y)$在D上连续, 则以下面三个命题等价:

(1) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有$\displaystyle\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$;

平面曲线积分与路径无关的等价条件

定理8.2

设区域$D \subseteq \mathbf{R}^2$, 函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上连续, 则以下面三个命题等价:

(1) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有$\displaystyle\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$;

(2) 曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$D$内与路径无关, 只与位于$D$内的起点和终点有关;

平面曲线积分与路径无关的等价条件

定理8.2

设区域$D \subseteq \mathbf{R}^2$, 函数$P(x,y), Q(x,y)$在D上连续, 则以下面三个命题等价:

(1) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$;

(2) 曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$D$内与路径无关, 只与位于$D$内的起点和终点有关;

(3) 被积表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$D$内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分, 即存在二元函数$u(x,y)$使得$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

结合格林公式, 可得下面结论:

结合格林公式，可得下面结论：

定理8.3

结合格林公式, 可得下面结论:

定理8.3

设区域 D 为一平面单连通区域, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在D上有一阶连续偏导数, 则定理 8.2 中三个命题成立的充要条件为:

结合格林公式，可得下面结论：

定理8.3

设区域 D 为一平面单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在D上有一阶连续偏导数，则定理 8.2 中三个命题成立的充要条件为：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\ \text{在 } D \text{ 内任意点都成立.}$$

综合定理8.2和8.3, 可以得到如下四个等价命题:

综合定理8.2和8.3, 可以得到如下四个等价命题:

结论

综合定理8.2和8.3，可以得到如下四个等价命题：

结论

设D为平面一单连通区域，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数，则以下四个命题等价：

综合定理8.2和8.3, 可以得到如下四个等价命题：

结论

设D为平面一单连通区域, 函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数, 则以下四个命题等价：

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内任意点都成立;

综合定理8.2和8.3, 可以得到如下四个等价命题：

结论

设D为平面一单连通区域, 函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数, 则以下四个命题等价：

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内任意点都成立;

(2) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有

综合定理8.2和8.3，可以得到如下四个等价命题：

结论

设D为平面一单连通区域，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数，则以下四个命题等价：

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内任意点都成立；

(2) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L，有$\displaystyle\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$；

综合定理8.2和8.3, 可以得到如下四个等价命题:

结论

设D为平面一单连通区域, 函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数, 则以下四个命题等价:

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内任意点都成立;

(2) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有$\displaystyle\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$;

(3) 曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内与路径无关;

综合定理8.2和8.3, 可以得到如下四个等价命题:

结论

设D为平面一单连通区域, 函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数, 则以下四个命题等价:

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内任意点都成立;

(2) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有$\displaystyle\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$;

(3) 曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内与路径无关;

(4) 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分,

综合定理8.2和8.3, 可以得到如下四个等价命题：

结论

设D为平面一单连通区域, 函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数, 则以下四个命题等价：

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内任意点都成立;

(2) 对于D内任意一条分段光滑闭曲线L, 有$\displaystyle\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$;

(3) 曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内与路径无关;

(4) 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分, 即存在二元函数$u(x,y)$使得$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

注意: 定理8.3中的区域D必须是单连通区域, 若D为复连通区域, 定理8.3就不一定成立.

注意： 定理8.3中的区域D必须是单连通区域, 若D为复连通区域, 定理8.3就不一定成立.

例：求曲线积分$\oint_L \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中$L$为圆周$x^2+y^2=1$的正向.

注意： 定理8.3中的区域D必须是单连通区域，若D为复连通区域，定理8.3就不一定成立.

例：求曲线积分$\oint_L \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中$L$为圆周$x^2+y^2=1$的正向.

此时，$P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$在区域$D: \dfrac{1}{2} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，但是

注意： 定理8.3中的区域D必须是单连通区域, 若D为复连通区域, 定理8.3就不一定成立.

例：求曲线积分$\oint_L \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中$L$为圆周$x^2+y^2=1$的正向.

此时, $P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$在区域$D: \dfrac{1}{2} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$ 具有一阶连续偏导数, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 但是

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 2\pi \neq 0.$$

例1. 计算$I=\int_L (x^2y+3xe^x)\mathrm{d}x+(\frac{1}{3}x^3-y\sin y)\mathrm{d}y$, 其中$L$为摆线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$从点$A(2\pi,0)$到点$O(0,0)$的一段弧.

例1. 计算$I=\int_L (x^2y+3xe^x)\mathrm{d}x+(\frac{1}{3}x^3-y\sin y)\mathrm{d}y$, 其中$L$为摆线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$从点$A(2\pi,0)$到点$O(0,0)$的一段弧.

解： $P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=x^2$,

例1. 计算$I = \int_L (x^2 y + 3x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\frac{1}{3}x^3 - y\sin y)\mathrm{d}y$, 其中$L$为摆线$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$从点$A(2\pi, 0)$到点$O(0,0)$的一段弧.

解: $P(x,y), Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2$,

故曲线积分与路径无关. 于是积分路径改为直线段

$$\overline{AO} : y = 0, \quad x\text{从}2\pi\text{到}0,$$

例1. 计算$I=\int_L (x^2y+3x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\frac{1}{3}x^3-y\sin y)\mathrm{d}y$, 其中$L$为摆线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 从点$A(2\pi,0)$到点$O(0,0)$的一段弧.

解： $P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=x^2$,

故曲线积分与路径无关. 于是积分路径改为直线段

$$\overline{AO}: y=0,\quad x从2\pi到0,$$

故 $I=\int_{2\pi}^{0} 3xe^x\mathrm{d}x=3[e^{2\pi}(1-2\pi)-1].$

例1. 计算$I=\int_L (x^2y+3xe^x)dx+(\frac{1}{3}x^3-y\sin y)dy$, 其中$L$为摆线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 从点$A(2\pi,0)$到点$O(0,0)$的一段弧.

解: $P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=x^2$,

故曲线积分与路径无关. 于是积分路径改为直线段

$$\overline{AO}: y=0,\quad x从2\pi到0,$$

$$故\ I=\int_{2\pi}^{0} 3xe^x dx=3[e^{2\pi}(1-2\pi)-1].$$

说明: 也可以补线用格林公式来计算此题.

例2. 计算$\displaystyle\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$L$为是沿$y=\pi\cos x$从点$A(\pi,-\pi)$到点$B(-\pi,-\pi)$的曲线弧.

例2. 计算$\displaystyle\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$为是沿$y=\pi\cos x$从点$A(\pi,-\pi)$到点$B(-\pi,-\pi)$的曲线弧.

答案： $-\dfrac{3\pi}{2}$.

例2. 计算 $\displaystyle\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$L$为是沿$y=\pi\cos x$从点$A(\pi,-\pi)$到点$B(-\pi,-\pi)$的曲线弧.

答案: $-\dfrac{3\pi}{2}$.

提示: 可选择圆的优弧$\widehat{AB}$: $\begin{cases} x=\sqrt{2}\pi\cos t, \\ y=\sqrt{2}\pi\sin t. \end{cases}$, t从$-\dfrac{\pi}{4}$到$\dfrac{5\pi}{4}$.

练习： 计算曲线积分$\displaystyle\int_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$, 其中$L$为是由点$A(1,0)$经半圆周$y=\sqrt{1-x^2}$到点$B(-1,0)$再沿直线$x+y=-1$到点$E(1,-2)$的路径.

练习： 计算曲线积分$\displaystyle\int_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$, 其中$L$为是由点$A(1,0)$经半圆周$y=\sqrt{1-x^2}$到点$B(-1,0)$再沿直线$x+y=-1$到点$E(1,-2)$的路径.

答案： $\dfrac{7\pi}{8}$.

练习： 计算曲线积分 $\int_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$, 其中$L$为是由点$A(1,0)$经半圆周$y=\sqrt{1-x^2}$到点$B(-1,0)$再沿直线$x+y=-1$到点$E(1,-2)$的路径.

答案： $\frac{7\pi}{8}$.

注意： 此题虽然满足$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 但是不能选择直线$EA$路径来求, 因为填补直线段$EA$之后, 形成的区域包围了原点.

练习： 计算曲线积分$\displaystyle\int_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$, 其中$L$为是由点$A(1,0)$经半圆周$y=\sqrt{1-x^2}$到点$B(-1,0)$再沿直线$x+y=-1$到点$E(1,-2)$的路径.

答案： $\dfrac{7\pi}{8}$.

注意： 此题虽然满足$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 但是不能选择直线$EA$路径来求, 因为填补直线段$EA$之后, 形成的区域包围了原点.

可以采用格林公式来求此积分, 但是需要填补直线EA段以及区域内的一个椭圆$C_\varepsilon: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$.

一些相关的物理概念

- 如果把向量场$\{P(x,y),Q(x,y)\}$看做是一平面流速场$\boldsymbol{v}(x,y)$,

一些相关的物理概念

- 如果把向量场$\{P(x,y),Q(x,y)\}$看做是一平面流速场$\boldsymbol{v}(x,y)$，

则 $$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{s})=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_T\mathrm{d}s.$$

一些相关的物理概念

- 如果把向量场$\{P(x,y),Q(x,y)\}$看做是一平面流速场$\boldsymbol{v}(x,y)$,

  则 $$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}(s)=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{e}_T\mathrm{d}s.$$

由于$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_T$ 表示流速场在曲线L的切线方向的分速度, 设流体密度为1, 于是积分$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_T\mathrm{d}s$ 表示单位时间内, 流速场$\boldsymbol{v}$沿闭曲线L流动流体的流量, 力学上称其为沿L的环流量. 它给出了流速场$\boldsymbol{v}$ 绕曲线L旋转趋势大小的度量.

一些相关的物理概念

- 如果把向量场$\{P(x,y),Q(x,y)\}$看做是一平面流速场$\boldsymbol{v}(x,y)$,

则
$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}(s)=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{e}_T\mathrm{d}s.$$

由于$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_T$ 表示流速场在曲线L的切线方向的分速度, 设流体密度为1, 于是积分$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_T\mathrm{d}s$ 表示单位时间内, 流速场$\boldsymbol{v}$沿闭曲线L流动流体的流量, 力学上称其为沿L的环流量. 它给出了流速场$\boldsymbol{v}$ 绕曲线L旋转趋势大小的度量.

- 一般地, 对于向量场$\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$, 称其沿闭曲线$L$的第二型曲线积分为向量场$\boldsymbol{A}$沿闭曲线$L$的环量.

- 若向量场$\boldsymbol{A}$沿平面区域D内的任一分段光滑简单闭曲线的线积分均为0, 则表明$\boldsymbol{A}$在D内围绕任一点均无旋转趋势, 称向量场$\boldsymbol{A}$为无旋场.

- 若向量场$\boldsymbol{A}$沿平面区域D内的任一分段光滑简单闭曲线的线积分均为0, 则表明$\boldsymbol{A}$在D内围绕任一点均无旋转趋势, 称向量场$\boldsymbol{A}$为无旋场.
- 若向量场$\boldsymbol{A}$沿平面区域D内的第二型曲线积分与积分路径无关, 称向量场$\boldsymbol{A}$为保守场.

- 若向量场$\boldsymbol{A}$沿平面区域D内的任一分段光滑简单闭曲线的线积分均为0, 则表明$\boldsymbol{A}$在D内围绕任一点均无旋转趋势, 称向量场$\boldsymbol{A}$为无旋场.
- 若向量场$\boldsymbol{A}$沿平面区域D内的第二型曲线积分与积分路径无关, 称向量场$\boldsymbol{A}$为保守场.
- 给定一个可微的数量场$u(x,y)$ $((x,y)\in D)$, 它在D内每一点唯一确定了一个梯度$\nabla u(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$, 此向量值函数称为函数$u$的梯度场.

- 对给定的连续向量场$\boldsymbol{A}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, 若存在二元函数$u(x,y)$满足$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, 则称函数$u$为向量场$\boldsymbol{A}$的势函数或位函数, 向量场$\boldsymbol{A}$称为有势场.

- 对给定的连续向量场$\boldsymbol{A}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, 若存在二元函数$u(x,y)$满足$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, 则称函数$u$为向量场$\boldsymbol{A}$的势函数或位函数, 向量场$\boldsymbol{A}$称为有势场.
- 定理8.2的结论表明:

- 对给定的连续向量场$\boldsymbol{A}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, 若存在二元函数$u(x,y)$满足$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, 则称函数$u$为向量场$\boldsymbol{A}$的**势函数**或**位函数**, 向量场$\boldsymbol{A}$称为**有势场**.

- 定理8.2的结论表明:

  对于一个连续的向量场$\boldsymbol{A}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, $(x,y)\in D$, 向量场$\boldsymbol{A}$是无旋场、保守场和有势场三者是相互等价的.

向量场的势函数的求法

向量场的势函数的求法

定义

向量场的势函数的求法

定义

若函数$u(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则称二元函数$u(x,y)$为表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的**原函数**.

向量场的势函数的求法

定义

若函数$u(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则称二元函数$u(x,y)$为表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的**原函数**.

- $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的原函数之间只相差一个常数;

向量场的势函数的求法

定义

若函数$u(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则称二元函数$u(x,y)$为表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的**原函数**.

- $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的原函数之间只相差一个常数;
- 由定理8.3知, 若P, Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数, 则

向量场的势函数的求法

定义

若函数$u(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, 则称二元函数$u(x,y)$为表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的**原函数**.

- $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的原函数之间只相差一个常数;
- 由定理8.3知, 若P,Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数, 则 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内存在原函数 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

向量场的势函数的求法

定义

若函数$u(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则称二元函数$u(x,y)$为表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的**原函数**.

- $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的原函数之间只相差一个常数;
- 由定理8.3知, 若P, Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数,

  则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$D$内存在原函数 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

  其所有的原函数为

向量场的势函数的求法

定义

若函数$u(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则称二元函数$u(x,y)$为表达式$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的**原函数**.

- $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的原函数之间只相差一个常数;
- 由定理8.3知, 若P, Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数,

  则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$D$内存在原函数 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

  其所有的原函数为
  $$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y + C$$
  其中(x_0, y_0)为D内一定点, C为常数.

- 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$原函数的求法：

- 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$原函数的求法：
  - 选择折线AMB来求，其中$A(x_0,y_0)$，$M(x,y_0)$，$B(x,y)$，则

- 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$原函数的求法：
  - 选择折线AMB来求，其中$A(x_0,y_0)$，$M(x,y_0)$，$B(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

- 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$原函数的求法：
  - 选择折线AMB来求，其中$A(x_0,y_0)$，$M(x,y_0)$，$B(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

- 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$原函数的求法：
  - 选择折线AMB来求，其中$A(x_0,y_0)$，$M(x,y_0)$，$B(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

  - 选择折线ANB来求，其中$A(x_0,y_0)$，$N(x_0,y)$，$B(x,y)$，则

- 表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$原函数的求法：
  - 选择折线AMB来求，其中$A(x_0,y_0)$, $M(x,y_0)$, $B(x,y)$, 则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

  - 选择折线ANB来求，其中$A(x_0,y_0)$, $N(x_0,y)$, $B(x,y)$, 则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x+C$$

- 若在单连通区域D内函数$u(x,y)$是表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的一个原函数, $A(x_1,y_1)$和$B(x_1,y_1)$是D内任意两点, 则

- 若在单连通区域D内函数$u(x,y)$是表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的一个原函数, $A(x_1,y_1)$和$B(x_1,y_1)$是D内任意两点, 则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

- 若在单连通区域D内函数$u(x,y)$是表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的一个原函数，$A(x_1,y_1)$和$B(x_1,y_1)$是$D$内任意两点，则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y_2)}$$

- 若在单连通区域D内函数$u(x,y)$是表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的一个原函数, $A(x_1,y_1)$和$B(x_1,y_1)$是D内任意两点, 则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y_2)}$$

例3. 验证$\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$在右半平面$(x>0)$内是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

- 若在单连通区域D内函数$u(x,y)$是表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的一个原函数, $A(x_1,y_1)$和$B(x_1,y_1)$是D内任意两点, 则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y_2)}$$

例3. 验证$\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$在右半平面$(x>0)$内是某个函数的全微分,
并求出一个这样的函数.

答案: 证明略. $u(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$为所求的一个函数.

例4. 已知$f(x)$具有一阶连续导数, $f(0)=-\dfrac{1}{2}$, 且曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 求函数$f(x)$并求此曲线积分的值.

例4. 已知$f(x)$具有一阶连续导数, $f(0)=-\frac{1}{2}$, 且曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^{x}+f(x))y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 求函数$f(x)$并求此曲线积分的值.

解：因为积分与路径无关，故由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$可得微分方程

例4. 已知$f(x)$具有一阶连续导数, $f(0)=-\dfrac{1}{2}$, 且曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 求函数$f(x)$并求此曲线积分的值.

解: 因为积分与路径无关，故由$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$可得微分方程

$$f'(x)+f(x)=-\mathrm{e}^x,\ f(0)=-\frac{1}{2},$$

例4. 已知$f(x)$具有一阶连续导数, $f(0)=-\dfrac{1}{2}$, 且曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 求函数$f(x)$并求此曲线积分的值.

解: 因为积分与路径无关，故由$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$可得微分方程

$$f'(x)+f(x)=-\mathrm{e}^x,\ f(0)=-\frac{1}{2},$$

解上述一阶线性非齐次微分方程可得$f(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

例4. 已知$f(x)$具有一阶连续导数, $f(0)=-\dfrac{1}{2}$, 且曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 求函数$f(x)$并求此曲线积分的值.

解: 因为积分与路径无关，故由$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$可得微分方程

$$f'(x)+f(x)=-\mathrm{e}^x,\ \ f(0)=-\frac{1}{2},$$

解上述一阶线性非齐次微分方程可得$f(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

取折线OAB(其中$A(1,0),B(1,1)$)作为积分路线, 可得:

例4. 已知$f(x)$具有一阶连续导数, $f(0)=-\dfrac{1}{2}$, 且曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 求函数$f(x)$并求此曲线积分的值.

解: 因为积分与路径无关，故由$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$可得微分方程

$$f'(x)+f(x)=-\mathrm{e}^x,\ \ f(0)=-\frac{1}{2},$$

解上述一阶线性非齐次微分方程可得$f(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

取折线OAB(其中$A(1,0),B(1,1)$)作为积分路线, 可得:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y=\int_0^1[-f(1)]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}.$$

全微分方程

定义

全微分方程

定义

若一阶微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$的左端是某个二元函数$u(x,y)$ 的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则称该微分方程为全微分方程.

全微分方程

定义

若一阶微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$的左端是某个二元函数$u(x,y)$ 的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则称该微分方程为全微分方程.

- 若P,Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数，则：

全微分方程

定义

若一阶微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$的左端是某个二元函数$u(x,y)$ 的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则称该微分方程为**全微分方程**.

- 若P,Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数，则：

  方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程 $\Leftrightarrow$

全微分方程

定义

若一阶微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$的左端是某个二元函数$u(x,y)$ 的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则称该微分方程为全微分方程.

- 若P,Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数，则：

方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

全微分方程

定义

若一阶微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$的左端是某个二元函数$u(x,y)$ 的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则称该微分方程为全微分方程.

- 若P,Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数，则：

  方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

- 全微分方程的通解为

全微分方程

定义

若一阶微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$的左端是某个二元函数$u(x,y)$ 的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则称该微分方程为全微分方程.

- 若P,Q在单连通区域D内有一阶连续偏导数，则：

  方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

- 全微分方程的通解为 $u(x,y)=C$.

例5. 求解方程$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=0.$

例5. 求解方程$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=0.$

解: $P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以此方程为全微分方程. 由曲线积分可得:

例5. 求解方程$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=0.$

解：$P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以此方程为全微分方程. 由曲线积分可得：

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

例5. 求解方程$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=0$.

解: $P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以此方程为全微分方程. 由曲线积分可得:

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}$$

例5. 求解方程$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=0.$

解: $P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以此方程为全微分方程. 由曲线积分可得:

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}$$

故方程的通解为$\dfrac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\dfrac{y^3}{3}=C$ (C为任意常数).

例5. 求解方程$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=0$.

解: $P(x,y),Q(x,y)$在全平面上连续, 且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以此方程为全微分方程. 由曲线积分可得:

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}$$

故方程的通解为$\dfrac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\dfrac{y^3}{3}=C$ (C为任意常数).

说明: 此题也可以用“偏积分法”或者“凑微分法”来求解.