工科数学分析

贺 丹 (东南大学)

第六节 第一型线积分与面积分

本章主要内容：

- 第一型曲线积分
- 第一型曲面积分

第一型曲线积分的定义

第一型曲线积分的定义

定义

设L为Oxy面内的一条光滑(或分段光滑)曲线弧，是$f(x,y)$在L上有界. 任取点列$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$, 把$L$分成$n$小段$\Delta s_i$, 同时以$\Delta s_i$表示第$i$小段弧长. 记$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$,

第一型曲线积分的定义

定义

设L为Oxy面内的一条光滑(或分段光滑)曲线弧, 是$f(x,y)$在L上有界. 任取点列$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$, 把$L$分成$n$小段$\Delta s_i$, 同时以$\Delta s_i$表示第$i$小段弧长. 记$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 任取点$(\xi_i, \eta_i) \in \Delta s_i$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$, 如果无论将$L$如何分割, 点$(\xi_i, \eta_i)$如何选取, 当$d \to 0$时, 和式有确定的极限, 则称函数$f$在$L$上可积, 极限值为$f$在$L$上的第一型曲线积分, 或对弧长的曲线积分, 记为$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$, 即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

其中$f(x,y)$称为被积函数, L称为积分弧段.

说明

说明

- 当$f(x,y)$在光滑曲线L上连续时，f的第一型曲线积分存在;

说明

- 当$f(x,y)$在光滑曲线L上连续时，f的第一型曲线积分存在；
- 将上述定义推广，可得空间曲线L上的第一型曲线积分：

说明

- 当$f(x,y)$在光滑曲线L上连续时, f的第一型曲线积分存在;
- 将上述定义推广, 可得空间曲线L上的第一型曲线积分:

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

说明

- 当$f(x,y)$在光滑曲线L上连续时, f的第一型曲线积分存在;
- 将上述定义推广, 可得空间曲线L上的第一型曲线积分:

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

- 若L是闭曲线, 则$f(x,y)$在L上的第一型曲线积分记为

说明

- 当$f(x,y)$在光滑曲线L上连续时，f的第一型曲线积分存在;
- 将上述定义推广，可得空间曲线L上的第一型曲线积分:

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

- 若L是闭曲线，则$f(x,y)$在L上的第一型曲线积分记为

$$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

第一型曲线积分的计算方法

第一型曲线积分的计算方法

1. 积分曲线L为参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中$x(t), y(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续导数, 则弧微分为

第一型曲线积分的计算方法

1. 积分曲线L为参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中$x(t), y(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续导数, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

第一型曲线积分的计算方法

1. 积分曲线L为参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中$x(t), y(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续导数, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

故

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s =$$

第一型曲线积分的计算方法

1. 积分曲线L为参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 其中$x(t), y(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续导数, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

故

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

2. (1) 积分曲线L的方程为$y = y(x)(a \leqslant x \leqslant b)$, 则弧微分为

2. (1) 积分曲线L的方程为$y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

2. (1) 积分曲线L的方程为$y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

故

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

2. (1) 积分曲线L的方程为$y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

故

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

(2) 积分曲线L的方程为$x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$, 则弧微分为

2. (1) 积分曲线L的方程为$y=y(x)(a \leqslant x \leqslant b)$, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

故

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

(2) 积分曲线L的方程为$x=x(y)(c \leqslant y \leqslant d)$, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

2. (1) 积分曲线L的方程为$y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

故

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$$

(2) 积分曲线L的方程为$x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$, 则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

故

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f\left(x(y),y\right)\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$$

3. 积分曲线L的方程为极坐标方程$\rho = \rho(\varphi)$, 即

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad (\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta),$$

则弧微分为

3. 积分曲线L的方程为极坐标方程$\rho=\rho(\varphi)$, 即

$$\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad (\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta),$$

则弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

3. 积分曲线L的方程为极坐标方程$\rho = \rho(\varphi)$, 即

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad (\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta),$$

则弧微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

故

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

4. 曲线L为空间曲线, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \\ z = z(t) \end{cases}$$

4. 曲线L为空间曲线, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \\ z = z(t) \end{cases}$$

则弧微分为

4. 曲线L为空间曲线, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \\ z = z(t) \end{cases}$$

则弧微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

4. 曲线L为空间曲线, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \\ z = z(t) \end{cases}$$

则弧微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

故

$$\int_L f(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

例1. 计算$\displaystyle\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y = x^2$、直线$x = 1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

例1. 计算$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: 设$A(1,0), B(1,1)$, 则

例1. 计算$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: 设$A(1,0), B(1,1)$, 则 $\overline{OA}: y=0(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}x,$

例1. 计算$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: 设$A(1,0), B(1,1)$, 则 $\overline{OA}: y=0(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$,

$\overline{AB}: x=1(0\leqslant y\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}y$,

例1. 计算$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: 设$A(1,0), B(1,1)$, 则 $\overline{OA}: y=0(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$,

$\overline{AB}: x=1(0\leqslant y\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}y$,

$\widehat{OB}: y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$,

例1. 计算$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: 设$A(1,0), B(1,1)$, 则 $\overline{OA}: y=0(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$,

$\overline{AB}: x=1(0\leqslant y\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}y$,

$\widehat{OB}: y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$,

于是 $\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}} \sqrt{y}\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}} \sqrt{y}\mathrm{d}s+\int_{\widehat{BO}} \sqrt{y}\mathrm{d}s$

例1. 计算 $\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: 设$A(1,0), B(1,1)$, 则 $\overline{OA}: y=0(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$,

$\overline{AB}: x=1(0\leqslant y\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}y$,

$\widehat{OB}: y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$,

于是 $$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}}\sqrt{y}\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}}\sqrt{y}\mathrm{d}s+\int_{\widehat{BO}}\sqrt{y}\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{y}\mathrm{d}y+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=$$

例1. 计算 $\displaystyle\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: 设$A(1,0), B(1,1)$, 则 $\overline{OA}: y=0(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$,

$\overline{AB}: x=1(0\leqslant y\leqslant 1), \mathrm{d}s=\mathrm{d}y$,

$\widehat{OB}: y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1), \mathrm{d}s=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$,

于是
$$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}}\sqrt{y}\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}}\sqrt{y}\mathrm{d}s+\int_{\widehat{BO}}\sqrt{y}\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{y}\mathrm{d}y+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{5\sqrt{5}+7}{12}.$$

例2. 计算$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中$L$是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$到$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的一段劣弧.

例2. 计算$\int_L xe^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中$L$是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$到$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的一段劣弧.

法一： $L: x=\sqrt{1-y^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant 1, \mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, 于是

例2. 计算$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中$L$是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$

到$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的一段劣弧.

法一: $L: x=\sqrt{1-y^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant 1, \mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, 于是

$$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\cdot\mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

例2. 计算 $\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中$L$是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$ 到$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的一段劣弧.

法一: $L: x=\sqrt{1-y^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant 1$, $\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, 于是

$$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\cdot\mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

法二: $L: x=\cos t, y=\sin t, -\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$, 于是

例2. 计算 $\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中$L$是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$到$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的一段劣弧.

法一： $L: x=\sqrt{1-y^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant 1$, $\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, 于是

$$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\cdot\mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

法二： $L: x=\cos t, y=\sin t, -\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$, 于是

$$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\mathrm{e}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

例2. 计算$\int_L xe^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中$L$是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$到$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的一段劣弧.

法一： $L: x=\sqrt{1-y^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant 1$, $\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, 于是

$$\int_L xe^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\cdot \mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

法二： $L: x=\cos t, y=\sin t, -\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$, 于是

$$\int_L xe^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\mathrm{e}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

法三： $L: \rho=1, -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\varphi$, 于是

例2. 计算 $\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中$L$是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$到$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的一段劣弧.

法一： $L: x=\sqrt{1-y^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant 1$, $\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$, 于是

$$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\cdot\mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

法二： $L: x=\cos t, y=\sin t, -\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$, 于是

$$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\mathrm{e}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

法三： $L: \rho=1, -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\varphi$, 于是

$$\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\mathrm{e}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{e}.$$

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $$m=\int_L |y|\mathrm{d}s$$

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $$m=\int_L |y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s,$$

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $m=\int_L |y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s$, 其中$L_1$ 为L 在第一象限的部分.

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $m=\int_L |y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s$, 其中$L_1$ 为L 在第一象限的部分.

因为 $L_1: \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $m=\int_L |y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s$, 其中$L_1$ 为L 在第一象限的部分.

因为 $L_1:\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi,$$

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $m=\int_L |y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s$, 其中$L_1$ 为L 在第一象限的部分.

因为 $L_1:\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi,$$

且 $x=a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi},\ y=a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$,

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $m=\int_L |y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s$, 其中$L_1$ 为L 在第一象限的部分.

因为 $L_1:\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi,$$

且 $x=a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi},\ y=a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$,

所以 $m=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$

例3. 求双纽线$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$的质量$m$, 各点处的密度为该点处纵坐标$y$的绝对值.

解: $m=\int_L |y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s$, 其中$L_1$ 为L 在第一象限的部分.

因为 $L_1:\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi,$$

且 $x=a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi},\ y=a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$,

所以 $m=4\int_{L_1} y\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

例4. 计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$ 的交线.

例4. 计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$ 的交线.

解: $$L:\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sin t \\ z=1-x=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

例4. 计算$\displaystyle\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$ 的交线.

解: $$L:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sin t \\ z=1-x=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

且 $\mathrm{d}s=2\mathrm{d}t$,

例4. 计算 $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$ 的交线.

解: $L:\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sin t \\ z=1-x=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$

且 $\mathrm{d}s=2\mathrm{d}t$,

于是 $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_L \frac{9}{2}\mathrm{d}s$

例4. 计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$ 的交线.

解:

$$L:\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sin t \\ z=1-x=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

且 $\mathrm{d}s=2\mathrm{d}t$,

于是 $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_L \frac{9}{2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}\cdot 2\mathrm{d}s=18\pi.$

说明

说明

- 无论曲线的方程是什么形式, 总有$\mathrm{d}s > 0$, 故在第一型曲线积分化为定积分时, 上限必须大于下限.

说明

- 无论曲线的方程是什么形式, 总有$\mathrm{d}s > 0$, 故在第一型曲线积分化为定积分时, 上限必须大于下限.
- 对第一型曲线积分, 被积函数$f(x, y)$是定义在L上的, 应满足曲线L的方程, 故可以利用L的方程来化简被积函数.

说明

- 无论曲线的方程是什么形式, 总有$\mathrm{d}s > 0$, 故在第一型曲线积分化为定积分时, 上限必须大于下限.
- 对第一型曲线积分, 被积函数$f(x, y)$是定义在L上的, 应满足曲线L的方程, 故可以利用L的方程来化简被积函数.
- 若积分曲线是平面曲线, 则第一型曲线积分具有和二重积分一样的对称性;

说明

- 无论曲线的方程是什么形式, 总有$\mathrm{d}s > 0$, 故在第一型曲线积分化为定积分时, 上限必须大于下限.
- 对第一型曲线积分, 被积函数$f(x, y)$是定义在L上的, 应满足曲线L的方程, 故可以利用L的方程来化简被积函数.
- 若积分曲线是平面曲线, 则第一型曲线积分具有和二重积分一样的对称性; 若积分曲线是空间曲线, 则第一型曲线积分具有和三重积分一样的对称性.

说明

- 无论曲线的方程是什么形式, 总有$\mathrm{d}s > 0$, 故在第一型曲线积分化为定积分时, 上限必须大于下限.
- 对第一型曲线积分, 被积函数$f(x,y)$是定义在L上的, 应满足曲线L的方程, 故可以利用L的方程来化简被积函数.
- 若积分曲线是平面曲线, 则第一型曲线积分具有和二重积分一样的对称性; 若积分曲线是空间曲线, 则第一型曲线积分具有和三重积分一样的对称性.

例5. $\displaystyle\int_{x^2+y^2=1}(x^2+y^2-3x)\,\mathrm{d}s =$ ________.

说明

- 无论曲线的方程是什么形式，总有$\mathrm{d}s > 0$，故在第一型曲线积分化为定积分时，上限必须大于下限.
- 对第一型曲线积分，被积函数$f(x, y)$是定义在L上的，应满足曲线L的方程，故可以利用L的方程来化简被积函数.
- 若积分曲线是平面曲线，则第一型曲线积分具有和二重积分一样的对称性；若积分曲线是空间曲线，则第一型曲线积分具有和三重积分一样的对称性.

例5. $\displaystyle\int_{x^2+y^2=1} (x^2 + y^2 - 3x)\mathrm{d}s =$ ________. (2π)

例6. 计算$I = \int_L (x^2 + z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面$x + y + z = 0$的交线.

例6. 计算$I=\int_L(x^2+z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线.

解: 由轮换对称性知: $\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s$,

例6. 计算$I=\int_L(x^2+z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线.

解: 由轮换对称性知: $\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s$,

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s,$$

例6. 计算$I=\int_L (x^2+z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线.

解: 由轮换对称性知: $\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s$,

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s,$$

则 $\int_L z\mathrm{d}s$

例6. 计算$I=\int_L (x^2+z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线.

解： 由轮换对称性知: $\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s$,

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s,$$

则 $\int_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L (x+y+z)\mathrm{d}s=0$,

例6. 计算$I=\int_L (x^2+z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线.

解： 由轮换对称性知: $\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s$,

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s,$$

则 $\int_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L (x+y+z)\mathrm{d}s=0$,

故 $I=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

例6. 计算$I=\int_L (x^2+z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线.

解: 由轮换对称性知: $\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s$,

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s,$$

则 $\int_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L (x+y+z)\mathrm{d}s=0$,

故 $I=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L a^2\mathrm{d}s$

例6. 计算$I=\int_L (x^2+z)\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$的交线.

解: 由轮换对称性知: $\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s$,

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s,$$

则 $\int_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L (x+y+z)\mathrm{d}s=0$,

故 $I=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L a^2\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi a^3.$

平面曲线上第一型曲线积分的几何意义

平面曲线上第一型曲线积分的几何意义

设L为Oxy面上的光滑曲线，其方程为$\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$

平面曲线上第一型曲线积分的几何意义

设L为Oxy面上的光滑曲线，其方程为$\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$

在L上定义连续函数$f(x,y)\geqslant 0$,

它的图形是空间曲线

平面曲线上第一型曲线积分的几何意义

设L为Oxy面上的光滑曲线, 其方程为$\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$

在L上定义连续函数$f(x,y)\geqslant 0$,

它的图形是空间曲线

$$\Gamma:\begin{cases} z=f(x,y), \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

平面曲线上第一型曲线积分的几何意义

设L为Oxy面上的光滑曲线，其方程为$\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$

在L上定义连续函数$f(x,y)\geqslant 0$，

它的图形是空间曲线

$$\Gamma:\begin{cases} z=f(x,y), \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

则当$f(x,y)\geqslant 0$时，$\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$

表示以L为准线，母线平行于z轴，

高为$f(x,y)$的柱面面积.

平面曲线上第一型曲线积分的几何意义

设L为Oxy面上的光滑曲线，其方程为$\begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$

在L上定义连续函数$f(x,y)\geqslant 0$，

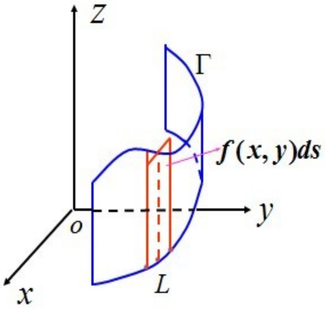
它的图形是空间曲线

$$\Gamma:\begin{cases} z=f(x,y), \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

则当$f(x,y)\geqslant 0$时，$\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$

表示以L为准线，母线平行于z轴，

高为$f(x,y)$的柱面面积.



例7. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分的侧面积.

例7. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分的侧面积.

解: 由第一型曲面积分的几何意义知, 所求侧面积为

例7. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分的侧面积.

解： 由第一型曲面积分的几何意义知, 所求侧面积为

$$S=\int_L y\mathrm{d}s,$$

例7. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分的侧面积.

解: 由第一型曲面积分的几何意义知, 所求侧面积为

$$S=\int_L y\mathrm{d}s,$$

其中L为圆弧$x^2+y^2=1\ (y\geqslant 0)$, 故

例7. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分的侧面积.

解: 由第一型曲面积分的几何意义知, 所求侧面积为

$$S=\int_L y\mathrm{d}s,$$

其中L为圆弧 $x^2+y^2=1\ (y\geqslant 0)$, 故

$$S=\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2.$$