工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第二节 二重积分的计算

第二节 二重积分的计算

本章主要内容：

- 二重积分的几何意义
- 直角坐标系下的二重积分的计算
- 极坐标系下二重积分的计算
- 曲线坐标下二重积分的计算(二重积分的换元法)

曲线坐标下二重积分的计算方法

曲线坐标下二重积分的计算方法

定理

设函数f在有界闭区域D上连续, 变换$T: x = x(u,v), y = y(u,v)$

将Oxy平面上的闭区域(D)变为Ouv平面上的(D'), 且满足:

曲线坐标下二重积分的计算方法

定理

设函数f在有界闭区域D上连续, 变换$T: x = x(u, v), y = y(u, v)$将$Oxy$平面上的闭区域$(D)$变为$Ouv$平面上的$(D')$, 且满足:

(1) $x(u, v), y(u, v)$在D'上具有一阶连续偏导数;

曲线坐标下二重积分的计算方法

定理

设函数f在有界闭区域D上连续，变换$T: x = x(u,v), y = y(u,v)$将$Oxy$平面上的闭区域$(D)$变为$Ouv$平面上的$(D')$，且满足:

(1) $x(u,v), y(u,v)$在D'上具有一阶连续偏导数;

(2) 在(D')上，Jacobi行列式$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$;

曲线坐标下二重积分的计算方法

定理

设函数f在有界闭区域D上连续，变换$T: x = x(u,v), y = y(u,v)$将$Oxy$平面上的闭区域$(D)$变为$Ouv$平面上的$(D')$，且满足:

(1) $x(u,v), y(u,v)$在D'上具有一阶连续偏导数;

(2) 在(D')上，Jacobi行列式$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$;

(3) 变换$T: (D) \to (D')$是一对一的，

曲线坐标下二重积分的计算方法

定理

设函数f在有界闭区域D上连续，变换$T: x=x(u,v), y=y(u,v)$将Oxy平面上的闭区域(D)变为Ouv平面上的(D')，且满足：

(1) $x(u,v), y(u,v)$在D'上具有一阶连续偏导数；

(2) 在(D')上，Jacobi行列式$J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$；

(3) 变换$T:(D)\to(D')$是一对一的，

则有

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(D')} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

.

广义极坐标变换

广义极坐标变换

变换$T: x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi,$

广义极坐标变换

变换$T: x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$, 将$Oxy$平面上的闭区域

$$(D) = \{(x,y) \big| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

变换为极坐标区域

广义极坐标变换

变换$T: x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$, 将$Oxy$平面上的闭区域

$$(D) = \{(x,y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

变换为极坐标区域

$$(D') = \{(\rho,\varphi) | 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

广义极坐标变换

变换$T: x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$, 将$Oxy$平面上的闭区域

$$(D) = \{(x,y)\Big|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$$

变换为极坐标区域

$$(D') = \{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$$

且Jacobi行列式为$J(\rho,\varphi) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} =$

广义极坐标变换

变换$T: x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$, 将$Oxy$平面上的闭区域

$$(D) = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

变换为极坐标区域

$$(D') = \{(\rho, \varphi) | 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

且Jacobi行列式为$J(\rho, \varphi) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix}$

广义极坐标变换

变换$T: x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$, 将$Oxy$平面上的闭区域

$$(D) = \{(x,y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

变换为极坐标区域

$$(D') = \{(\rho,\varphi) | 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

且Jacobi行列式为$J(\rho,\varphi) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho$

广义极坐标变换

变换$T: x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi$, 将$Oxy$平面上的闭区域

$$(D) = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

变换为极坐标区域

$$(D') = \{(\rho, \varphi) | 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

且Jacobi行列式为$J(\rho, \varphi) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho$

即广义极坐标变换下，面积元素为$ab\rho$.

例1. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

其中D为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的区域.

例1. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中D为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围成的区域.

解: 作广义极坐标变换$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$, 在此变换下$D$对应为

例1. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中D为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的区域.

解: 作广义极坐标变换$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$, 在此变换下$D$对应为

$$D' = \{(\rho,\varphi) | 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

例1. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中D为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的区域.

解: 作广义极坐标变换$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$，在此变换下$D$对应为

$$D' = \{(\rho,\varphi)|0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

故 $\iint\limits_{D} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例1．计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中D为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围成的区域.

解: 作广义极坐标变换$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi \end{cases}$，在此变换下$D$对应为

$$D'=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$$

故 $$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\cdot ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

例1. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 D 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的区域.

解: 作广义极坐标变换 $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$, 在此变换下 D 对应为

$$D' = \{(\rho,\varphi)|0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

故 $$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} \sqrt{1-\rho^2}\cdot ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

例1. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中D为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围成的区域.

解: 作广义极坐标变换$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi \end{cases}$，在此变换下$D$对应为

$$D'=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$$

故 $\displaystyle\iint\limits_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\cdot ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$

$\displaystyle=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3}\pi ab.$

例2. 计算 $\iint\limits_{(\sigma)} xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$(\sigma) = \{(x, y)|(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 1\}$.

例2. 计算 $\iint\limits_{(\sigma)} xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$(\sigma)=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 1\}$.

解: 作变换$\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-2 \end{cases}$, 在此变换下$(\sigma)$对应为

例2. 计算 $\iint\limits_{(\sigma)} xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$(\sigma)=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 1\}$.

解: 作变换$\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-2 \end{cases}$, 在此变换下$(\sigma)$对应为

$$(\sigma')=\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 1\},\text{ 且}|J(u,v)|=1,$$

例2. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$(\sigma)=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 1\}$.

解: 作变换$\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-2 \end{cases}$, 在此变换下$(\sigma)$对应为

$$(\sigma')=\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 1\},\ 且|J(u,v)|=1,$$

故 $$\iint\limits_{(\sigma)} xy\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma')}(u+1)(v+2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

例2. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$(\sigma)=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 1\}$.

解: 作变换$\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-2 \end{cases}$, 在此变换下$(\sigma)$对应为

$$(\sigma')=\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 1\}, \text{ 且} |J(u,v)|=1,$$

故 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} xy\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma')}(u+1)(v+2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\pi.$

例3. 计算 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

例3. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2 = x, y^2 = 2x, xy = 2, xy = 3$ 围成.

解 作变换

例3. 计算 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$，则

例3. 计算$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$，则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$，且变换将区域

D变换为

例3. 计算 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$,

例3. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

例3. 计算$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

例3. 计算 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

解 作变换$T: \begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

例3. 计算 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}}$$

例3. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$，则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$，且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{1}{-\dfrac{3y^2}{x}}=-\frac{1}{3u},$$

例3. 计算 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{1}{-\dfrac{3y^2}{x}}=-\frac{1}{3u},$$

故 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} v\cdot\left|-\dfrac{1}{3u}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

例3. 计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{1}{-\dfrac{3y^2}{x}}=-\frac{1}{3u},$$

故$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} v\cdot\left|-\frac{1}{3u}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{u}\mathrm{d}u\int_2^3 v\mathrm{d}v$$

例3. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$(D)$由$y^2=x, y^2=2x, xy=2, xy=3$ 围成.

解 作变换$T:\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x} \\ v=xy \end{cases}$, 则$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, 且变换将区域

D变换为$D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$, Jacobi行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{1}{-\dfrac{3y^2}{x}}=-\frac{1}{3u},$$

故 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} v\cdot\left|-\frac{1}{3u}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{u}\mathrm{d}u\int_2^3 v\mathrm{d}v=\frac{5}{6}\ln 2.$