工科数学分析

贺丹(东南大学)

第四节 含参变量的积分与反常重积分

第四节 含参变量的积分与反常重积分

本节主要内容：

第四节 含参变量的积分与反常重积分

本节主要内容:

第四节 含参变量的积分与反常重积分

本节主要内容:

- 含参变量的积分

第四节 含参变量的积分与反常重积分

本节主要内容:

- 含参变量的积分
- 反常重积分*

4.1 含参变量的积分

4.1 含参变量的积分

记 $D=[a,b]\times[c,d]$.

4.1 含参变量的积分

记 $D=[a,b]\times[c,d]$. 若 $f\in C(D)$, 则对任一固定的 $y\in[c,d]$,

4.1 含参变量的积分

记 $D=[a,b]\times[c,d]$. 若 $f\in C(D)$, 则对任一固定的 $y\in[c,d]$, 积分 $F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在, 且将随 y 的改变而变化, 这个积分称为含参变量 y 的积分, 它是自变量 y 的函数.

4.1 含参变量的积分

记 $D=[a,b]\times[c,d]$. 若 $f\in C(D)$, 则对任一固定的 $y\in[c,d]$, 积分 $F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在, 且将随 y 的改变而变化, 这个积分称为**含参变量 y 的积分**, 它是自变量 y 的函数.

同样, 对任一 $x\in[a,b]$, 积分 $G(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 称为**含参变量 x 的积分**, 它是自变量 x 的函数.

含参变量积分的性质

含参变量积分的性质

定理4.1 (连续性)

若 $f \in C(D)$，则 $F(y) = \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \in C([c, d])$.

含参变量积分的性质

定理4.1 (连续性)

若 $f \in C(D)$，则 $F(y) = \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \in C([c, d])$.

含参变量积分的性质

定理4.1 (连续性)

若 $f \in C(D)$，则 $F(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \in C([c,d])$.

- 定理表明: 当$f \in C(D)$ 时, 极限运算与积分号可以交换顺序,

含参变量积分的性质

定理4.1 (连续性)

若 $f\in C(D)$，则 $F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\in C([c,d])$.

- 定理表明: 当$f\in C(D)$ 时, 极限运算与积分号可以交换顺序,

  即 $$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{y\to y_0}F(y)=F(y_0)$$

含参变量积分的性质

定理4.1 (连续性)

若 $f \in C(D)$，则 $F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \in C([c,d])$.

- 定理表明: 当$f \in C(D)$ 时, 极限运算与积分号可以交换顺序,

即 $$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{y\to y_0}F(y)=F(y_0)$$

$$=\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

含参变量积分的性质

定理4.1 (连续性)

若 $f\in C(D)$，则 $F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\in C([c,d])$.

- 定理表明: 当 $f\in C(D)$ 时, 极限运算与积分号可以交换顺序,

$$\text{即}\quad \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{y\to y_0}F(y)=F(y_0)$$

$$=\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

- 定理中的闭区间 $[c,d]$ 可以改成任何形式的区间 I, 如 $(c,d]$, $(c,+\infty)$ 等.

例1. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\,\mathrm{d}x.$

例1. 求极限 $\lim\limits_{t \to 0} \int_0^2 x^2 \cos tx \mathrm{d}x.$

解： $\lim\limits_{t \to 0} \int_0^2 x^2 \cos tx \mathrm{d}x$

例1. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x.$

解：$\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x = \int_0^2 \lim\limits_{t\to 0} x^2\cos tx\mathrm{d}x$

例1. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x.$

解： $$\lim_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x=\int_0^2\lim_{t\to 0}x^2\cos tx\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

例1. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x.$

解： $$\lim_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x=\int_0^2\lim_{t\to 0}x^2\cos tx\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

例2. 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}.$

例1. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x$.

解: $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x=\int_0^2\lim\limits_{t\to 0}x^2\cos tx\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

例2. 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}$.

解: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}=\int_0^1\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}$

例1. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x$.

解: $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x = \int_0^2 \lim\limits_{t\to 0} x^2\cos tx\mathrm{d}x$

$$= \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

例2. 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}$.

解: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x} = \int_0^1 \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

定理4.2（可导性）

若 $f \in C(D), f_y \in C(D)$，则 $F(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上有连续的导数，且求导与积分可交换顺序，即

$$F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

定理4.2（可导性）

若 $f \in C(D), f_y \in C(D)$，则 $F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上有连续的导数，且求导与积分可交换顺序，即

$$F'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

定理4.2（可导性）

若 $f\in C(D), f_y\in C(D)$，则 $F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上有连续的导数，且求导与积分可交换顺序，即

$$F'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

- 定理表明：求导运算与积分运算可以交换顺序

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例3. 求含参变量积分 $\int_0^1 \arctan \frac{x}{y} \mathrm{d}x \ (y \neq 0)$ 对参数 y 的导数.

例3. 求含参变量积分 $\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x\ (y\neq 0)$ 对参数y 的导数.

解: 当$y\neq 0$ 时, 由定理4.2得

例3. 求含参变量积分 $\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x\ (y\neq 0)$ 对参数 y 的导数.

解: 当 $y\neq 0$ 时, 由定理4.2得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x$$

例3. 求含参变量积分 $\int_0^1 \arctan \dfrac{x}{y} \mathrm{d}x \ (y \neq 0)$ 对参数y 的导数.

解：当$y \neq 0$ 时, 由定理4.2得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} \right) \mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x$$

例3. 求含参变量积分$\displaystyle\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x\ (y\neq 0)$ 对参数y 的导数.

解：当$y\neq 0$ 时, 由定理4.2得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.\end{aligned}$$

定理4.3（积分顺序交换性）

若 $f \in C(D)$，则 $F(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可积,

$$G(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 在 } [a,b] \text{ 上可积},$$

且 $\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

定理4.3（积分顺序交换性）

若 $f \in C(D)$，则 $F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可积,

$$G(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 在 } [a,b] \text{ 上可积,}$$

且 $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

定理4.3（积分顺序交换性）

若 $f\in C(D)$，则 $F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可积,

$$G(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 在 } [a,b] \text{ 上可积,}$$

且 $$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

- 定理表明：当 $f\in C(D)$ 时，对含参变量积分求积分可以在积分号内进行，即积分可以交换顺序.

例4. 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (a,b>0).$

例4. 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (a,b>0)$.

解：由于 $\int_a^b x^y \mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, 因此

例4. 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (a,b>0).$

解：由于 $\int_a^b x^y \mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, 因此

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_a^b x^y \mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y \mathrm{d}x$$

例4. 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (a,b>0)$.

解：由于 $\int_a^b x^y \mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$，因此

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

在把二重积分化为累次积分时, 更常碰到的含参变量的积分, 其上、下限也是含参变量的函数. 下面讨论这种含参变量积分的连续性和求导法.

在把二重积分化为累次积分时, 更常碰到的含参变量的积分, 其上、下限也是含参变量的函数. 下面讨论这种含参变量积分的连续性和求导法.

定理4.4

若 $f \in C(D), f_y \in C(D), x_i(y) \in C[c,d], i=1,2$，且其值域均为 $[a,b]$，

在把二重积分化为累次积分时, 更常碰到的含参变量的积分, 其上、下限也是含参变量的函数. 下面讨论这种含参变量积分的连续性和求导法.

定理4.4

若 $f \in C(D), f_y \in C(D), x_i(y) \in C[c,d], i = 1,2$，且其值域均为 $[a,b]$，

在把二重积分化为累次积分时，更常碰到的含参变量的积分，其上、下限也是含参变量的函数. 下面讨论这种含参变量积分的连续性和求导法.

定理4.4

若 $f \in C(D), f_y \in C(D), x_i(y) \in C[c,d], i=1,2$，且其值域均为 $[a,b]$，则

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

必在 $[c,d]$ 上连续.

定理4.5

若 $f \in C(D), f_y \in C(D), x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 的值域均为 $[a, b]$，且它们都在 $[c, d]$ 上可导，

定理4.5

若 $f \in C(D), f_y \in C(D), x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 的值域均为 $[a,b]$，且它们都在 $[c,d]$ 上可导，

定理4.5

若 $f \in C(D), f_y \in C(D), x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 的值域均为 $[a,b]$，且它们都在 $[c,d]$ 上可导，则

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

也在 $[c,d]$ 上可导，

定理4.5

若 $f\in C(D), f_y\in C(D), x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 的值域均为 $[a,b]$，且它们都在 $[c,d]$ 上可导，则

$$F(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

也在 $[c,d]$ 上可导，且有

$$F'(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x+f(x_2(y),y)x_2'(y)-f(x_1(y),y)x_1'(y).$$

例5. 求 $F(y)=\displaystyle\int_{y}^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x$ 的导数.

例5. 求 $F(y)=\displaystyle\int_y^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x$ 的导数.

解: $F'(y)=\displaystyle\int_y^{y^2}\cos(xy)\mathrm{d}x+2y\frac{\sin y^3}{y^2}-\frac{\sin y^2}{y}$

例5. 求 $F(y)=\displaystyle\int_y^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x$ 的导数.

解: $$F'(y)=\int_y^{y^2}\cos(xy)\mathrm{d}x+2y\frac{\sin y^3}{y^2}-\frac{\sin y^2}{y}$$
$$=\frac{3\sin y^3-2\sin y^2}{y}.$$

4.2 反常重积分*

4.2 反常重积分*

例. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 并求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

4.2 反常重积分*

例. 计算 $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 并求 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解：利用极坐标变换$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $\mathbf{R}^2$变换为

$$D=\{(\rho,\theta)|0\leqslant\rho<+\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

4.2 反常重积分*

例. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 并求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解：利用极坐标变换 $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$, $\mathbf{R}^2$ 变换为

$$D = \{(\rho,\theta)|0 \leqslant \rho < +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

因此利用变量代换法得

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \pi.$$

又由于$\mathbf{R}^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$, 所以利用化累次积分法得

$$\begin{aligned}\pi &= \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

又由于$\mathbf{R}^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$, 所以利用化累次积分法得

$$\begin{aligned}\pi &= \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

又由于$\mathbf{R}^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$, 所以利用化累次积分法得

$$\begin{aligned}\pi &= \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

所以

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

又由于$\mathbf{R}^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$, 所以利用化累次积分法得

$$\begin{aligned}\pi &= \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

所以

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

此积分叫概率积分, 在概率统计等领域中有着重要应用.