工科数学分析

贺　丹(东南大学)

第七章　无穷级数

本节主要内容：

- 常数项级数
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier级数

第一节　常数项级数

本节主要内容：

- 常数项级数的概念、性质与收敛原理
- 正项级数的审敛准则
- 变号级数的审敛准则

常数项级数的概念

常数项级数的概念

定义

设$\{a_n\}$是一数列$(a_n \in \mathbf{R})$,

(1) 称$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为常数项无穷级数, 简称为常数项级数或级数, a_n称为该级数的通项(或一般项).

常数项级数的概念

定义

设$\{a_n\}$是一数列($a_n \in \mathbf{R}$),

(1) 称$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为常数项无穷级数, 简称为常数项级数或级数, a_n称为该级数的通项(或一般项).

(2) 若令 $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \cdots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$

常数项级数的概念

定义

设$\{a_n\}$是一数列($a_n \in \mathbf{R}$),

(1) 称$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为常数项无穷级数, 简称为常数项级数或级数, a_n称为该级数的通项(或一般项).

(2) 若令$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \cdots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$

则S_n称为常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的前$n$项部分和.

定义1.1 (级数的收敛与和)

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**, 并称

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**, 并称

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的**和**, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$;

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**, 并称 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的**和**, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=S$; 否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**.

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**, 并称$S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的**和**, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=S$; 否则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**发散**.

收敛级数的和与其部分和之差$R_n=S-S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$称为该级数的**余项**.

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**, 并称 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的**和**, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$; 否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**发散**.

收敛级数的和与其部分和之差$R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的**余项**.

例如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并称 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的和, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$; 否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

收敛级数的和与其部分和之差 $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的余项.

例如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散级数

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**, 并称 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的**和**, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$; 否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**.

收敛级数的和与其部分和之差 $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的**余项**.

例如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散级数

——此级数称为**调和级数**

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并称 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的和, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$; 否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

收敛级数的和与其部分和之差 $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的余项.

例如: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散级数

——此级数称为调和级数

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$

定义1.1 (级数的收敛与和)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并称 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的和, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$; 否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

收敛级数的和与其部分和之差 $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的余项.

例如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散级数

——此级数称为调和级数

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ 收敛级数

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

解： $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

解： $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

当$|q| < 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$;

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

解： $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

当$|q| < 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$; 当$|q| > 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

解: $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

当$|q| < 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$; 当$|q| > 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

当$q = -1$时, $S_n = \begin{cases} a, n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases}$, 极限不存在;

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

解： $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

当$|q| < 1$时, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$; 当$|q| > 1$时, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$;

当$q = -1$时, $S_n = \begin{cases} a, n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases}$, 极限不存在;

当$q = 1$时, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$.

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

解: $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

当$|q| < 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$; 当$|q| > 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

当$q = -1$时, $S_n = \begin{cases} a, n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases}$, 极限不存在;

当$q = 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$.

综上, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0)$:

例1. 讨论等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的敛散性.

解: $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

当$|q| < 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$; 当$|q| > 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

当$q = -1$时, $S_n = \begin{cases} a, n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases}$, 极限不存在;

当$q = 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$.

综上, $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0)$: $\begin{cases} |q| < 1, & \text{收敛, 且和为}\dfrac{a}{1-q}, \\ |q| \geqslant 1, & \text{发散.} \end{cases}$

例2. 判别下列级数的敛散性, 若收敛, 求其和.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(3) $\displaystyle\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots$

例2. 判别下列级数的敛散性, 若收敛, 求其和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(3) $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln^2 2}{2^2} + \dfrac{\ln^3 2}{2^3} + \cdots$

答: (1) 收敛, 其和为1.

例2. 判别下列级数的敛散性, 若收敛, 求其和.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(3) $\displaystyle\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots$

答: (1) 收敛, 其和为1. (2) 发散.

例2. 判别下列级数的敛散性, 若收敛, 求其和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(3) $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln^2 2}{2^2} + \dfrac{\ln^3 2}{2^3} + \cdots$

答: (1) 收敛, 其和为1. (2) 发散.

(3) 收敛, 其和为$S = \dfrac{\ln 2}{2 - \ln 2}$.

常数项级数的性质

常数项级数的性质

性质1

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛, 其和分别为$S$与$T$, 则

常数项级数的性质

性质1

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛, 其和分别为$S$与$T$, 则

(1) 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛, 且其和为$S \pm T$.

常数项级数的性质

性质1

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛, 其和分别为$S$与$T$, 则

(1) 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛, 且其和为$S \pm T$.

(2) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$收敛, 且其和为$\lambda S$;

常数项级数的性质

性质1

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛, 其和分别为$S$与$T$, 则

(1) 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛, 且其和为$S \pm T$.

(2) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$收敛, 且其和为$\lambda S$;

(3) 若$a_n \leqslant b_n$, 则$S \leqslant T$, 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

常数项级数的性质

性质1

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛, 其和分别为$S$与$T$, 则

(1) 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛, 且其和为$S \pm T$.

(2) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$收敛, 且其和为$\lambda S$;

(3) 若$a_n \leqslant b_n$, 则$S \leqslant T$, 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

- 两个收敛级数逐项相加(相减)所得级数收敛.

常数项级数的性质

性质1

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛, 其和分别为$S$与$T$, 则

(1) 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛, 且其和为$S \pm T$.

(2) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$收敛, 且其和为$\lambda S$;

(3) 若$a_n \leqslant b_n$, 则$S \leqslant T$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

- 两个收敛级数逐项相加(相减)所得级数收敛.
- 对于$\forall \lambda \in \mathbf{R}(\lambda \neq 0)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda b_n$同敛散.

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

例1. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

例1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n - 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

例1. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}=4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^n-3\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n$$

等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4}{5})^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{5})^n$ 都收敛, 且

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

例1. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4,$$

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

例1. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$$

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

例1. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

解
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}=4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^n-3\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n$$

等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4}{5})^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{5})^n$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$$

所以, 原级数 $=4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4}{5})^n-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{5})^n$

- 定理说明对收敛的级数可以进行加法和数乘运算.

例1. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}=4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^n-3\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n$$

等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4}{5})^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{5})^n$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$$

所以, 原级数 $=4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{4}{5})^n-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{5})^n=14.$

性质2

删除或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质2

删除或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质3

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则不改变它的各项次序, 任意添加括号后所得到的新级数仍收敛, 且其和不变.

性质2

删除或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质3

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则不改变它的各项次序, 任意添加括号后所得到的新级数仍收敛, 且其和不变.

- 性质3的逆命题不成立.

性质2

删除或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质3

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则不改变它的各项次序, 任意添加括号后所得到的新级数仍收敛, 且其和不变.

- 性质3的逆命题不成立.

  例如：级数$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛于0,

性质2

删除或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质3

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则不改变它的各项次序, 任意添加括号后所得到的新级数仍收敛, 且其和不变.

- 性质3的逆命题不成立.

  例如：级数$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛于0,

  但是级数$1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

性质2

删除或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质3

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则不改变它的各项次序, 任意添加括号后所得到的新级数仍收敛, 且其和不变.

- 性质3的逆命题不成立.

  例如：级数$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛于0,

  但是级数$1-1+1-1+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散.

性质2

删除或添加有限项不影响级数的敛散性.

性质3

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则不改变它的各项次序, 任意添加括号后所得到的新级数仍收敛, 且其和不变.

- 性质3的逆命题不成立.

  例如：级数$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛于0,

  但是级数$1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散.

- 如果加括号后的级数发散, 则原级数也发散.

例2. 试问下列说法是否正确, 并说明理由或举例.

例2. 试问下列说法是否正确, 并说明理由或举例.

(1) 数列$\{a_n\}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$同时收敛或同时发散;

例2. 试问下列说法是否正确, 并说明理由或举例.

(1) 数列$\{a_n\}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$同时收敛或同时发散;

(2) 两个发散级数逐项相加所组成的级数一定发散;

例2. 试问下列说法是否正确, 并说明理由或举例.

(1) 数列$\{a_n\}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$同时收敛或同时发散;

(2) 两个发散级数逐项相加所组成的级数一定发散;

(3) 一个收敛级数与一个发散级数逐项相加所组成的级数一定发散.

例2. 试问下列说法是否正确, 并说明理由或举例.

(1) 数列$\{a_n\}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$同时收敛或同时发散;

(2) 两个发散级数逐项相加所组成的级数一定发散;

(3) 一个收敛级数与一个发散级数逐项相加所组成的级数一定发散.

答: (1)(2)错, (3)正确.

判断级数收敛的条件

性质4 (级数收敛的必要条件)

判断级数收敛的条件

性质4 (级数收敛的必要条件)

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

判断级数收敛的条件

性质4 (级数收敛的必要条件)

若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- **逆否命题:** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

判断级数收敛的条件

性质4 (级数收敛的必要条件)

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

- **逆否命题:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.
- **注意:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的必要条件,

  但不是充分条件.

判断级数收敛的条件

性质4 (级数收敛的必要条件)

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

- 逆否命题： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.
- 注意： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的必要条件,

  但不是充分条件.

例3. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \ln \dfrac{n}{n+1}$的敛散性.

判断级数收敛的条件

性质4 (级数收敛的必要条件)

若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- **逆否命题:** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.
- **注意:** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的必要条件,

  但不是充分条件.

例3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\dfrac{n}{n+1}$的敛散性. 发散

我们知道, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛当且仅当其部分和数列$\{S_n\}$收敛,由数列极限的Cauchy收敛原理得:

我们知道, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛当且仅当其部分和数列$\{S_n\}$收敛,由数列极限的Cauchy收敛原理得:

定理1.1 (Cauchy收敛原理)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得当$n \geqslant N$时, 对$\forall p \in \mathbf{N}_+$, 总有

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

例4. 利用Cauchy收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

例4. 利用Cauchy收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证明: $\forall\varepsilon>0$, 对 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$, 由于

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

例4. 利用Cauchy收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明： $\forall\varepsilon>0$, 对 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$, 由于

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

例4. 利用Cauchy收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证明： $\forall\varepsilon>0$, 对 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$, 由于

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},$$

例4. 利用Cauchy收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明： $\forall\varepsilon>0$, 对 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$, 由于

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},$$

所以可取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n>N$ 时, 对 $\forall p\in\mathbf{N}_+$, 都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

例4. 利用Cauchy收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证明： $\forall\varepsilon>0$, 对 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$, 由于

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},$$

所以可取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n>N$ 时, 对 $\forall p\in\mathbf{N}_+$, 都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

根据Cauchy收敛准则, 原级数收敛.

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n}$ (2) $1 - \ln \pi + \ln^2 \pi - \ln^3 \pi + \cdots$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2}{n(n+1)} - (-1)^n (\dfrac{3}{4})^n \right]$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{3^n} \right)$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$

(6) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{29} + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ (2) $1-\ln\pi+\ln^2\pi-\ln^3\pi+\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n(n+1)}-(-1)^n(\frac{3}{4})^n\right]$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{3^n}\right)$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

(6) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{29}+1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots$

答: (1)发散；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ (2) $1 - \ln\pi + \ln^2\pi - \ln^3\pi + \cdots$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n(n+1)} - (-1)^n (\frac{3}{4})^n\right]$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{3^n}\right)$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

(6) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{29} + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$

答: (1)发散；(2)发散；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ (2) $1 - \ln \pi + \ln^2 \pi - \ln^3 \pi + \cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n(n+1)} - (-1)^n (\frac{3}{4})^n\right]$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{3^n}\right)$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

(6) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{29} + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$

答: (1)发散；(2)发散；(3) 收敛；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$ (2) $1-\ln\pi+\ln^2\pi-\ln^3\pi+\cdots$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{n(n+1)}-(-1)^n(\dfrac{3}{4})^n\right]$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{3^n}\right)$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$

(6) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{29}+1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots$

答: (1)发散；(2)发散；(3) 收敛；(4) 发散；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$ (2) $1-\ln\pi+\ln^2\pi-\ln^3\pi+\cdots$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{n(n+1)}-(-1)^n(\dfrac{3}{4})^n\right]$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{3^n}\right)$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$

(6) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{29}+1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots$

答: (1)发散；(2)发散；(3) 收敛；(4) 发散；

(5) 发散；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ (2) $1-\ln\pi+\ln^2\pi-\ln^3\pi+\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n(n+1)}-(-1)^n(\frac{3}{4})^n\right]$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{3^n}\right)$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

(6) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{29}+1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots$

答: (1)发散；(2)发散；(3) 收敛；(4) 发散；

(5) 发散； (6) 发散；

(7) $13+5+7+11+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{11^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+9)^2}+\cdots$

(7) $13+5+7+11+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{11^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+9)^2}+\cdots$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ (9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ (其中a为常数)

(7) $13+5+7+11+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{11^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+9)^2}+\cdots$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ (9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ (其中a为常数)

答: (7) 收敛;

(7) $13+5+7+11+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots+\frac{1}{(n+9)^2}+\cdots$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ (其中a为常数)

答: (7) 收敛； (8) 发散;

(7) $13+5+7+11+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots+\frac{1}{(n+9)^2}+\cdots$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ (9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ (其中a为常数)

答: (7) 收敛； (8) 发散; (9) 收敛, 其和为$\frac{1}{5}$;

(7) $13+5+7+11+\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{11^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+9)^2}+\cdots$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$　　(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ (其中a为常数)

答: (7) 收敛；　(8) 发散;　(9) 收敛, 其和为$\dfrac{1}{5}$;

(10) 收敛, 其和为$1-a$.