

第六章 二重积分习题课

贺 丹 (东南大学)



(一) 交换积分次序

1. 化积分为极坐标形式的二次积分:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

2. 将二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$ 化为直角坐标系下的二次积分.

3. 交换积分次序:

$$(1) \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1+\cos \theta}^2 f(\rho, \theta) d\rho.$$

思考: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$



4. 计算下列二重积分：

$$(1) \int_0^1 dy \int_1^y y^2 e^{-x^4} dx;$$

$$(2) \int_1^2 dy \int_2^y \frac{\sin x}{x-1} dx.$$



(二) 灵活运用对称性来化简计算

1. $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (x^2 + y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. (作业题) $\iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy = \underline{\hspace{2cm}},$

其中 f 连续, $D = \{(x, y) | x^3 \leq y \leq 1, x \geq -1\}.$

4. 计算 $I = \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1, x+y \geq 1.$

5. 计算二重积分 $\iint_D \frac{2x+3y}{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 同题4.



6. (作业题) 证明 $\int_0^a dx \int_0^x f(x)f(y)dy = \frac{1}{2} \left[\int_0^a f(x)dx \right]^2$.

7. 设 $f \in C_{[0,1]}$, 证明 $\int_0^1 e^{f(x)}dx \int_0^1 e^{-f(x)}dx \geq 1$.

(三) 被积函数有绝对值的问题

求二重积分 $\iint_D |\cos(x+y)|dxdy$

其中 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.



(四) 未知函数中含有二重积分的问题

1. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是

由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围成的区域, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 求 $F(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$,

其中 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.



(五) 二重积分的一般坐标变换

1. (作业题) 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$, 其中 D 是以点 $(0,0), (1,0), (0,1)$

为顶点的三角形区域.

2. 设函数 $f \in C_{[0,a]}$, 证明: $\iint_D f(x+y) dx dy = \int_0^a x f(x) dx$,

其中 $D = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a\} (a > 0)$.



(六) 练习

1. $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$ 的极坐标形式为_____.
2. 将 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^x f(x, y) dy$ 化成极坐标系下的二次积分.
3. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0,$
 $y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.
4. 求 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy, D = [0, 1] \times [0, 1]$.



5. 已知平面区域 D 满足 $\{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$,

求 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$

6. 求 $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} \frac{x+y}{x^2} e^{x+y} dx.$

7. 证明: $\int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy = \pi[f(a) - f(0)].$

