习题课　多元函数的极限与微分

贺丹（东南大学）

选择题

1. 若函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不连续, 则(　　)

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 必不存在;

(B) $f(x_0,y_0)$ 必不存在;

(C) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)必不可微;

(D) $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$必不存在.

2. 考虑二元函数$f(x,y)$的下面4条性质:

(1) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续;

(2) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数连续;

(3) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微;

(4) 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数存在.

则下面结论正确的是(　).

(A) (2)⇒(3)⇒(1);　　(B) (3)⇒(2)⇒(1);

(C) (3)⇒(4)⇒(1);　　(D) (3)⇒(1)⇒(4).

3. 若函数$f(x,y)$在区域D内具有二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, 则(　)

(A) 必有$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$;　　(B) $f(x,y)$在D内必连续;

(C) $f(x,y)$在D内必可微;　　(D) 以上结论都不对.

4. 设$u = x^{y^z}$, 则$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3,2,2)} = (\quad)$

(A) $4\ln 3$;　　(B) $8\ln 3$;　　(C) $324\ln 3$;　　(D) $162\ln 3$.

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 则在 $(0,0)$ 点处(   )

(A) 连续, 偏导数存在;

(B) 连续, 偏导数不存在;

(C) 不连续, 偏导数存在;

(D) 不连续, 偏导数不存在.

计算题

1. 讨论下面二重极限, 若存在求出极限值, 若不存在, 说明理由.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^3-y^3}$

2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}, & y\neq 0, \\ 0, & y=0 \end{cases}$ 的连续性.

3. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, f,φ 具有二阶导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 设 $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 设函数$z=z(x,y)$由方程$\varphi(x^2-z^2,\mathrm{e}^z+2y)=0$确定，

其中φ具有连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设$u=f(x,y,z),\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$ $(f,\varphi$具有一阶连续偏导数)，且$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7. 设$z=\displaystyle\int_0^1 f(t)|xy-t|\mathrm{d}t$，$f\in C_{[0,1]}$，$0\leqslant x,y\leqslant 1$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8. 设$z=z(x,y)$由方程$z=x^2+\displaystyle\int_{\sqrt{z}}^{y-x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$确定，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

9. 设函数$u=f(x,y,z)$具有连续偏导数，且$z=z(x,y)$由方程

$x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$所确定，求$\mathrm{d}u$.

10. 设$f(x,y)$可微, 且$f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=2$, $f_y(1,1)=3$,

令$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

10'. 设$f(x,y)$具有连续偏导数, 且$f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=a$,

$f_y(1,1)=b$, 令$\varphi(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$, 求$\varphi(1),\varphi'(1)$.

11. 设$f(x,y)$具有一阶连续偏导数, 且

$$f(1,1)=2,\ f_x(m,n)=m+n,\ f_y(m,n)=m\cdot n,$$

令$g(x)=f(x,f(x,x))$, 则$g'(1)=(\quad)$

(A) 3; (B) 6; (C) 9; (D) 12.

12. 设$f(x,y)$在$(0,0)$点连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1-3x-4y}{\ln(1+x^2+y^2)}=1,$$

问$f(x,y)$在$(0,0)$点处是否可微, 若可微, 则求出$\mathrm{d}z|_{(0,0)}$.

13. 设变换$\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$ 可把方程$6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ (z有二阶连续偏导数), 求常数a.

14. 设$ab\neq 0$, $f(x,y)$具有二阶连续偏导数, 且

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ f(ax,bx)=ax,\ f_x(ax,bx)=bx^2,$$

求$f_{xx}(ax,bx)$, $f_{yy}(ax,bx)$, $f_{xy}(ax,bx)$.

练习题

1. 设$g(x,y)=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$, 其中$f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

2. 设$z=f(t)$, $t=g(xy,x^2+y^2)$, 其中f有二阶导数, g 有二阶连续偏导数, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 设$z=z(x,\ y)$ 是由方程$F(xy,\ z-2x)=0$所确定的隐函数, 其中F 具有连续偏导数, 计算$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设$z = z(u)$, 且$u = \varphi(u) + \int_y^x f(t)\mathrm{d}t$, 其中$z(u)$ 可微, $\varphi'(u)$ 连续, 且$\varphi'(u) \neq 1$, $f(t)$ 连续, 求$f(y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + f(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5. 设$u(x, t) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$, 其中$\varphi, \psi$ 分别具有二阶连续导数, 求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.