习题课　数项级数

贺 丹 (东南大学)

一、选择题

1. 下面命题中正确为(　　)(多选题).

(1) 若$a_n \leqslant b_n$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 必收敛.

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且$a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$.

(4) 若数列$\{a_n\}$单调减, 且$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛.

(5) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必发散.

(6) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛.

(7) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且$a_n > 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ 必收敛.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于$S$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 【 】

(A) 收敛于$2S-u_1$; (B) 收敛于$2S+u_1$;

(C) 收敛于$2S$; (D) 发散.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都发散, 则 【 】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$发散; (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$发散;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$发散; (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$发散.

4. 设$u_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$, 若$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 u_n = l \ (0 < l < +\infty)$, 则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 【　】

(A) 绝对收敛;　　(B) 条件收敛;

(C) 发散;　　(D) 不能确定其敛散性.

- 设$\lim\limits_{n\to\infty} n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1)u_n = 1 \ (p > 0)$, 讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性。
- 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 且$\lim\limits_{n\to\infty} n u_n = A$, 证明$A = 0$.

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则 【　　】

(A) $\rho = +\infty$;　　(B) $\rho < 1$;

(C) $1 < \rho < +\infty$;　　(D) $\rho = 1$.

- 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 求 ρ.

6. 若 $|u_n| > |u_{n+1}|$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

   则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 【　　】

(A) 绝对收敛;　　(B) 条件收敛;

(C) 发散;　　(D) 可能收敛也可能发散.

7. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ ($\lambda>0$为常数) 【 】

(A) 发散; (B) 条件收敛;

(C) 绝对收敛; (D) 敛散性与λ有关.

- 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geqslant 0$)收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n-1}}$ 收敛.

8. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^n}{2^n(\ln n)^\alpha n!}$ ($\alpha\in\mathbf{R}$) 【 】

(A) 绝对收敛; (B) 条件收敛;

(C) 发散; (D) 可能收敛也可能发散.

9. 设$u_n = (-1)^n \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, 则 【　】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$都收敛;

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$都发散;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$发散;

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

10. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (a为常数) 【　】

(A) 绝对收敛;

(B) 条件收敛;

(C) 发散;

(D) 敛散性与a的取值有关.

二、判别下列级数的敛散性

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^n}{(1+n)^n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{5^n-3^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\dfrac{n-1}{n+1}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{q^n n!}{n^n}\ (q>0)$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}\ (a>0)$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^{\ln n}}\ (a>0)$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}-1\right)$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{1+x}\mathrm{d}x$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$.

三、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}$.

四、判断级数的敛散性，若收敛，说明是绝对收敛还是条件收敛.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^p}$，其中$p$为常数;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-\arctan\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right)$;

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

证明和解答题

1. 设正数列$\{u_n\}$单调减少，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$发散，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n+1}\right)^n$收敛.

2. 设$\{u_n\}$为有界单调递增的正数列，证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛.

3. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n\neq 0)$绝对收敛，证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{1+u_n}$ 收敛；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}$收敛.

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}|$收敛, 且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$收敛.

5. 设$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$, 则

(1) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$的和;

(2) 证明对任意的常数$\lambda > 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛.

思考题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是否一定收敛? 若判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$一定收敛, 请证明. 若判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 不一定收敛, 请举例说明.

2. 若数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$收敛, 则常数$a$的取值范围为________.

思考题

3. 设在区间$[0,a]$上$u_0(x)$连续，且对任意的$x\in[0,a]$有

$$u_n(x)=\int_0^x u_{n-1}(t)\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$$

证明：对任意的$x\in[0,a]$，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$绝对收敛.

4. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$，论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^{\lambda}\ \ (\lambda>0)$ 的敛散性.
若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？