第六章 多元数量函数的积分学及其应用

贺 丹 (东南大学)

第六节 数量函数积分的应用(物理)

第六节 数量函数积分的应用(物理)

本章主要内容：

- 物体的质量
- 物体的质心
- 物体的转动惯量
- 物体对质点的引力

物体的质量

物体的质量

$$m = \int_{\Omega} \mu(M) \mathrm{d}\Omega$$

物体的质量

$$m = \int_{\Omega} \mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例1. 设物体为曲面$\Sigma: z + \sqrt{x^2+y^2} = 2$位于$z = x^2 + y^2$内的部分, 密度函数$\mu$为该点到$z$轴的距离, 求该物体的质量.

物体的质量

$$m = \int_{\Omega} \mu(M) \mathrm{d}\Omega$$

例1. 设物体为曲面$\Sigma: z + \sqrt{x^2+y^2} = 2$位于$z = x^2 + y^2$内的部分，密度函数$\mu$为该点到$z$轴的距离，求该物体的质量.

解： $m = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}S,$

物体的质量

$$m = \int_{\Omega} \mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例1. 设物体为曲面$\Sigma : z + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$位于$z = x^2 + y^2$内的部分, 密度函数$\mu$为该点到$z$轴的距离, 求该物体的质量.

解: $m = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}S,$

$\Sigma : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ \ D_{xy} : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ \mathrm{d}S = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

物体的质量

$$m = \int_\Omega \mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例1. 设物体为曲面$\Sigma : z + \sqrt{x^2+y^2} = 2$位于$z = x^2 + y^2$内的部分，密度函数$\mu$为该点到$z$轴的距离，求该物体的质量.

解： $m = \iint\limits_\Sigma \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S,$

$\Sigma : z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\quad D_{xy} : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ \mathrm{d}S = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

于是 $m = \iint\limits_\Sigma \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

物体的质量

$$m=\int_{\Omega}\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例1. 设物体为曲面$\Sigma: z+\sqrt{x^2+y^2}=2$位于$z=x^2+y^2$内的部分, 密度函数$\mu$为该点到$z$轴的距离, 求该物体的质量.

解: $m=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S,$

$\Sigma: z=2-\sqrt{x^2+y^2},\ \ D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1,\ \mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

于是 $m=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi.$$

物体的质心

物体的质心

设三维空间的n个质量为m_i的质点，其坐标分别为(x_i, y_i, z_i)，由物理学知识知，该质点组的质心为

物体的质心

设三维空间的n个质量为m_i的质点, 其坐标分别为(x_i, y_i, z_i), 由物理学知识知, 该质点组的质心为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

物体的质心

设三维空间的n个质量为m_i的质点, 其坐标分别为(x_i, y_i, z_i), 由物理学知识知, 该质点组的质心为

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

设质量连续分布的形体为Ω的物体, 其密度函数为$\mu(M)$, 则根据微元思想, 物体的质心为:

物体的质心

设三维空间的n个质量为m_i的质点，其坐标分别为(x_i, y_i, z_i)，由物理学知识知，该质点组的质心为

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

设质量连续分布的形体为Ω的物体，其密度函数为$\mu(M)$，则根据微元思想，物体的质心为:

$$\bar{x} = \frac{\int_\Omega x\mu(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mu(M)\mathrm{d}\Omega}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_\Omega y\mu(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mu(M)\mathrm{d}\Omega}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_\Omega z\mu(M)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mu(M)\mathrm{d}\Omega}$$

若物体的质量是均匀的, 即密度函数μ为常数, 此时称质心为物体的形心, 则形心为

若物体的质量是均匀的，即密度函数μ为常数，此时称质心为物体的形心，则形心为

$$\bar{x} = \frac{\int_\Omega x \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_\Omega y \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_\Omega z \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega}$$

若物体的质量是均匀的，即密度函数μ为常数，此时称质心为物体的形心，则形心为

$$\bar{x}=\frac{\int_{\Omega} x\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega},\qquad \bar{y}=\frac{\int_{\Omega} y\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega},\qquad \bar{z}=\frac{\int_{\Omega} z\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega}$$

其中$\displaystyle\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega$是形体$\Omega$的度量.

若物体的质量是均匀的, 即密度函数μ为常数, 此时称质心为物体的形心, 则形心为

$$\bar{x} = \frac{\int_\Omega x \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_\Omega y \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_\Omega z \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathrm{d}\Omega}$$

其中$\displaystyle\int_\Omega \mathrm{d}\Omega$是形体$\Omega$的度量.

注意: 在计算质心或者形心时, 一定要根据物体是何种形体来选择积分类型.

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解:

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解： $\bar{x}=0,$

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解: $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{A}\iint\limits_{D} y\mathrm{d}\sigma$

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解: $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}\sigma$

因为 $A=4\pi-\pi=3\pi,$

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解: $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma$

因为 $A=4\pi-\pi=3\pi,$

$$\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma$$

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解: $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$

因为 $A=4\pi-\pi=3\pi$,

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho\sin\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解: $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}\sigma$

因为 $A=4\pi-\pi=3\pi$,

$$\iint_D y\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho\sin\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解: $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}\sigma$

因为 $A=4\pi-\pi=3\pi,$

$$\iint_D y\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho\sin\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi=7\pi,$$

例1. 求位于两圆$x^2+y^2=2y$和$x^2+y^2=4y$之间的均匀薄片的形心.

解: $\bar{x}=0, \quad \bar{y}=\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}\sigma$

因为 $A=4\pi-\pi=3\pi$,

$$\iint_D y\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho\sin\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi=7\pi,$$

故所求的形心为 $(0,\dfrac{7}{3})$.

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解： 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y}=0$,

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a > 0$), 其面密度为$\mu = \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y} = 0$,

$$\iint\limits_D \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}\sigma$$

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y}=0$,

$$\iint\limits_D \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\cos\varphi\rho^2\mathrm{d}\rho$$

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y}=0$,

$$\iint_D \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\cos\varphi\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{13a^3}{10},$$

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu = \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y}=0$,

$$\iint\limits_D \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_a^{a(1+\cos\varphi)} \sin\varphi\cos\varphi\rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{13a^3}{10},$$

$$\iint\limits_D \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$$

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y}=0$,

$$\iint\limits_D \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\cos\varphi\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{13a^3}{10},$$

$$\iint\limits_D \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\rho\mathrm{d}\rho$$

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y}=0$,

$$\iint\limits_D \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\cos\varphi\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{13a^3}{10},$$

$$\iint\limits_D \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\rho\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}a^2,$$

例2. 设在xOy 平面上有薄板$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$), 其面密度为$\mu = \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标.

解: 薄板区域的极坐标表示为$a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi)$,

由对称性可得$\bar{y}=0$,

$$\iint\limits_D \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\cos\varphi\rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{13a^3}{10},$$

$$\iint\limits_D \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)}\sin\varphi\rho\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}a^2,$$

故所求的质心为 $\left(\dfrac{39}{40}a, 0\right)$.

例3. 求空间立体Ω的形心,

$$其中\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant 3, x^2+y^2 \leqslant 2z\}.$$

例3. 求空间立体Ω的形心,

$$\text{其中}\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant 3, x^2+y^2 \leqslant 2z\}.$$

解:

例3. 求空间立体Ω的形心,

$$\text{其中}\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 3, x^2+y^2\leqslant 2z\}.$$

解： $\bar{x}=\bar{y}=0,$

例3. 求空间立体Ω的形心,

其中$\Omega = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leqslant 3, x^2+y^2 \leqslant 2z\}$.

解: $\bar{x} = \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \dfrac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V,$

例3. 求空间立体Ω的形心,

其中$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 3, x^2+y^2\leqslant 2z\}$.

解: $\bar{x}=\bar{y}=0, \quad \bar{z}=\dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V,$

因为两曲面的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ z=1, \end{cases}$ 于是,

例3. 求空间立体Ω的形心,

其中$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 3, x^2+y^2\leqslant 2z\}$.

解: $\bar{x}=\bar{y}=0,\quad \bar{z}=\dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V,$

因为两曲面的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ z=1, \end{cases}$ 于是,

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例3. 求空间立体Ω的形心，

其中$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 3, x^2+y^2\leqslant 2z\}$.

解： $\bar{x}=\bar{y}=0,\quad \bar{z}=\dfrac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V,$

因为两曲面的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ z=1, \end{cases}$ 于是，

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\pi\cdot 2z\mathrm{d}z+\int_1^{\sqrt{3}}\pi\cdot(3-z^2)\mathrm{d}z$$

例3. 求空间立体Ω的形心,

其中$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 3, x^2+y^2\leqslant 2z\}$.

解: $\bar{x}=\bar{y}=0,\quad \bar{z}=\dfrac{1}{V}\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V,$

因为两曲面的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ z=1, \end{cases}$ 于是,

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\pi\cdot 2z\mathrm{d}z+\int_1^{\sqrt{3}}\pi\cdot(3-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3-z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3-z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 z\cdot\pi\cdot 2z\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{3}} z\cdot\pi\cdot(3-z^2)\mathrm{d}z$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3-z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 z\cdot\pi\cdot 2z\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{3}} z\cdot\pi\cdot(3-z^2)\mathrm{d}z = \frac{5\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3-z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 z\cdot\pi\cdot 2z\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{3}} z\cdot\pi\cdot(3-z^2)\mathrm{d}z = \frac{5\pi}{3},$$

故立体的形心坐标为 $\left(0, 0, \dfrac{5(6\sqrt{3}+5)}{83}\right)$.

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解:

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解： 由对称性可得$\bar{y} = 0$.

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解: 由对称性可得$\bar{y} = 0$. 由$L: \rho = a(1-\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心($\mu = 1$).

解: 由对称性可得$\bar{y} = 0$. 由$L: \rho = a(1-\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi,$$ 可得

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解: 由对称性可得$\bar{y} = 0$. 由$L: \rho = a(1-\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi$, 可得

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi$$

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解: 由对称性可得$\bar{y} = 0$. 由$L: \rho = a(1-\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\varphi}d\varphi = 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|d\varphi,$$ 可得

$$\int_L x ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|d\varphi$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^3\frac{\varphi}{2} - 2\sin^5\frac{\varphi}{2})d\varphi = -\frac{32}{5}a^2,$$

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解: 由对称性可得$\bar{y} = 0$. 由$L: \rho = a(1-\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi$, 可得

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}(\sin^3\frac{\varphi}{2} - 2\sin^5\frac{\varphi}{2})\mathrm{d}\varphi = -\frac{32}{5}a^2,$$

$$\int_L \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi$$

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解: 由对称性可得$\bar{y} = 0$. 由$L: \rho = a(1-\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi$, 可得

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}(\sin^3\frac{\varphi}{2} - 2\sin^5\frac{\varphi}{2})\mathrm{d}\varphi = -\frac{32}{5}a^2,$$

$$\int_L \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2a|\sin\frac{\varphi}{2}|\mathrm{d}\varphi = 8a,$$

例4. 求心形线$\rho = a(1-\cos\varphi)$的形心$(\mu = 1)$.

解: 由对称性可得$\bar{y} = 0$. 由$L: \rho = a(1-\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi,$$ 可得

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^3\frac{\varphi}{2} - 2\sin^5\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = -\frac{32}{5}a^2,$$

$$\int_L \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi = 8a,$$

故 $\bar{x} = \dfrac{\int_L x\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s} = \dfrac{-\frac{32}{5}a^2}{8a} = -\dfrac{4a}{5}$, 所求的形心为 $\left(-\dfrac{4a}{5}, 0\right)$.

物体的转动惯量

物体的转动惯量

设三维空间的n个质量为m_i的质点, 其坐标分别为(x_i, y_i, z_i), 这个质点组绕着某一条直线 l 旋转, 设这n个质点到直线 l 的距离分别为$d_1, d_2, \cdots, d_n$. 由物理学知识知, 该质点组对直线 l 的转动惯量为

物体的转动惯量

设三维空间的n个质量为m_i的质点, 其坐标分别为(x_i, y_i, z_i), 这个质点组绕着某一条直线 l 旋转, 设这n个质点到直线 l 的距离分别为$d_1, d_2, \cdots, d_n$. 由物理学知识知, 该质点组对直线 l 的转动惯量为

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 m_i$$

物体的转动惯量

设三维空间的n个质量为m_i的质点, 其坐标分别为(x_i, y_i, z_i), 这个质点组绕着某一条直线 l 旋转, 设这n个质点到直线 l 的距离分别为$d_1, d_2, \cdots, d_n$. 由物理学知识知, 该质点组对直线 l 的转动惯量为

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 m_i$$

设质量连续分布的形体为Ω的物体, 其密度函数为$\mu(M)$, 则根据微元思想, 该物体对直线 l 的转动惯量为

物体的转动惯量

设三维空间的n个质量为m_i的质点, 其坐标分别为(x_i, y_i, z_i), 这个质点组绕着某一条直线 l 旋转, 设这n个质点到直线 l 的距离分别为$d_1, d_2, \cdots, d_n$. 由物理学知识知, 该质点组对直线 l 的转动惯量为

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 m_i$$

设质量连续分布的形体为Ω的物体, 其密度函数为$\mu(M)$, 则根据微元思想, 该物体对直线 l 的转动惯量为

$$I_l = \int_\Omega d^2 \mu(M) \mathrm{d}\Omega$$

物体的转动惯量

设三维空间的n个质量为m_i的质点, 其坐标分别为(x_i, y_i, z_i), 这个质点组绕着某一条直线 l 旋转, 设这n个质点到直线 l 的距离分别为$d_1, d_2, \cdots, d_n$. 由物理学知识知, 该质点组对直线 l 的转动惯量为

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 m_i$$

设质量连续分布的形体为Ω的物体, 其密度函数为$\mu(M)$, 则根据微元思想, 该物体对直线 l 的转动惯量为

$$I_l = \int_{\Omega} d^2 \mu(M) \mathrm{d}\Omega$$

其中d为物体上的一点M到直线 l 的距离.

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_{\Omega} (y^2 + z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_\Omega (y^2 + z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y = \int_\Omega (x^2 + z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_\Omega (y^2 + z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y = \int_\Omega (x^2 + z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_z = \int_\Omega (x^2 + y^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_\Omega (y^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y = \int_\Omega (x^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_z = \int_\Omega (x^2+y^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例5. 求均匀球面对过球心的一条轴 l 的转动惯量(设密度为μ).

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_{\Omega}(y^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y = \int_{\Omega}(x^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_z = \int_{\Omega}(x^2+y^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例5. 求均匀球面对过球心的一条轴 l 的转动惯量(设密度为μ).

解: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 转动轴为z 轴, 则

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_\Omega (y^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y = \int_\Omega (x^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_z = \int_\Omega (x^2+y^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例5. 求均匀球面对过球心的一条轴 l 的转动惯量(设密度为μ).

解: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 转动轴为z 轴, 则

$$I_z = \iint\limits_{\Sigma} \mu(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_\Omega (y^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y = \int_\Omega (x^2+z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_z = \int_\Omega (x^2+y^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例5. 求均匀球面对过球心的一条轴 l 的转动惯量(设密度为μ).

解: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 转动轴为z 轴, 则

$$I_z = \iint_\Sigma \mu(x^2+y^2)\mathrm{d}S = \frac{2\mu}{3}\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

特殊地, Ω 关于 x 轴, y 轴和 z 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \int_\Omega (y^2 + z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_y = \int_\Omega (x^2 + z^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

$$I_z = \int_\Omega (x^2 + y^2)\mu(M)\mathrm{d}\Omega$$

例5. 求均匀球面对过球心的一条轴 l 的转动惯量(设密度为μ).

解: 设球面方程为$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 转动轴为z 轴, 则

$$I_z = \iint_\Sigma \mu(x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \frac{2\mu}{3}\iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{2\mu}{3}R^2 \cdot 4\pi R^2 = \frac{8\pi R^4 \mu}{3}.$$

例6. 设立体Ω 由曲面$z=x^2+y^2$ 及平面$z=4$ 围成, 密度为常数k, 求它对z 轴的转动惯量.

例6. 设立体Ω 由曲面$z=x^2+y^2$ 及平面$z=4$ 围成, 密度为常数k, 求它对z 轴的转动惯量.

解: $I_z=\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2)\mathrm{d}V$

例6. 设立体Ω 由曲面$z=x^2+y^2$ 及平面$z=4$ 围成, 密度为常数k, 求它对z 轴的转动惯量.

解: $$I_z=\iiint\limits_{\Omega}k(x^2+y^2)\mathrm{d}V$$
$$=k\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{4}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

例6. 设立体Ω 由曲面$z=x^2+y^2$ 及平面$z=4$ 围成, 密度为常数k, 求它对z 轴的转动惯量.

解:
$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}k(x^2+y^2)\mathrm{d}V$$
$$=k\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{4}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$
$$=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4\rho^2\mathrm{d}z$$

例6. 设立体Ω 由曲面$z = x^2 + y^2$ 及平面$z = 4$ 围成, 密度为常数k, 求它对z 轴的转动惯量.

解:

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} k(x^2 + y^2)\mathrm{d}V$$

$$= k \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{x^2+y^2}^{4} (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$$

$$= k \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \rho\mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{4} \rho^2\mathrm{d}z$$

$$= \frac{32\pi}{3}k.$$

例7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 围成的平面薄片, 薄片上点 (x,y) 的密度为 $\mu(x,y)=x+1$, 求该薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量.

例7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 围成的平面薄片, 薄片上点 (x,y) 的密度为 $\mu(x,y)=x+1$, 求该薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解: 平面薄片上的点 (x,y) 到直线 $y=-1$ 的距离为 $y+1$,

于是所求转动惯量为

例7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 围成的平面薄片，薄片上点 (x,y) 的密度为 $\mu(x,y)=x+1$，求该薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解： 平面薄片上的点 (x,y) 到直线 $y=-1$ 的距离为 $y+1$,

于是所求转动惯量为

$$I=\iint\limits_{D}(x+1)(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

例7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 围成的平面薄片, 薄片上点 (x,y) 的密度为 $\mu(x,y)=x+1$, 求该薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解: 平面薄片上的点 (x,y) 到直线 $y=-1$ 的距离为 $y+1$,

于是所求转动惯量为

$$I=\iint_D (x+1)(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 D 关于 y 轴对称, 故

例7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 围成的平面薄片，薄片上点 (x,y) 的密度为 $\mu(x,y)=x+1$，求该薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解： 平面薄片上的点 (x,y) 到直线 $y=-1$ 的距离为 $y+1$,

于是所求转动惯量为

$$I=\iint\limits_D (x+1)(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 D 关于 y 轴对称，故

$$I=\iint\limits_D (y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 围成的平面薄片, 薄片上点 (x,y) 的密度为 $\mu(x,y)=x+1$, 求该薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解: 平面薄片上的点 (x,y) 到直线 $y=-1$ 的距离为 $y+1$,

于是所求转动惯量为

$$I=\iint\limits_D (x+1)(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 D 关于 y 轴对称, 故

$$I=\iint\limits_D (y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(1+y)^2\mathrm{d}x$$

例7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 围成的平面薄片, 薄片上点 (x,y) 的密度为 $\mu(x,y)=x+1$, 求该薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解: 平面薄片上的点 (x,y) 到直线 $y=-1$ 的距离为 $y+1$,

于是所求转动惯量为

$$I=\iint\limits_D (x+1)(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 D 关于 y 轴对称, 故

$$I=\iint\limits_D (y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(1+y)^2\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1\sqrt{y}(1+y)^2\mathrm{d}y=\frac{368}{105}.$$

物体的对质点的引力

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元,

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$是$\mathrm{d}V$对质量为$m$的质点的引力,

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$是$\mathrm{d}V$对质量为$m$的质点的引力, 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$是$\mathrm{d}V$对质量为$m$的质点的引力, 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

则$|\overrightarrow{\mathrm{d}F}|=\dfrac{km\mu\mathrm{d}V}{r^2}$($k$为引力常数),

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$是$\mathrm{d}V$对质量为$m$的质点的引力, 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

则$|\overrightarrow{\mathrm{d}F}|=\dfrac{km\mu\mathrm{d}V}{r^2}$($k$为引力常数), 方向为$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$是$\mathrm{d}V$对质量为$m$的质点的引力, 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

则$|\overrightarrow{\mathrm{d}F}|=\dfrac{km\mu\mathrm{d}V}{r^2}$($k$为引力常数), 方向为$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$

于是 $\overrightarrow{\mathrm{d}F}=\{\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z\}=\{\dfrac{km\mu x\mathrm{d}V}{r^3},\dfrac{km\mu y\mathrm{d}V}{r^3},\dfrac{km\mu z\mathrm{d}V}{r^3}\}$,

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$是$\mathrm{d}V$对质量为$m$的质点的引力, 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

则$|\overrightarrow{\mathrm{d}F}|=\dfrac{km\mu\mathrm{d}V}{r^2}$($k$为引力常数), 方向为$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$

于是 $\overrightarrow{\mathrm{d}F}=\{\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z\}=\{\dfrac{km\mu x\mathrm{d}V}{r^3},\dfrac{km\mu y\mathrm{d}V}{r^3},\dfrac{km\mu z\mathrm{d}V}{r^3}\}$,

则 $F_x=\displaystyle\iiint_{\Omega}\frac{km\mu x\mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

物体的对质点的引力

例8. 设密度为μ的均匀物体Ω, 为由柱面$x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$和平面$z=0, z=4$围成的立体形体, 有一质量为m的质点位于坐标原点, 求物体Ω对质点的引力.

解: 设$M(x,y,z)$为立体内任一点, $\mathrm{d}V$为包含点M的体积微元, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$是$\mathrm{d}V$对质量为$m$的质点的引力, 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

则$|\overrightarrow{\mathrm{d}F}|=\dfrac{km\mu\mathrm{d}V}{r^2}$($k$为引力常数), 方向为$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$

于是 $\overrightarrow{\mathrm{d}F}=\{\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z\}=\{\dfrac{km\mu x\mathrm{d}V}{r^3},\dfrac{km\mu y\mathrm{d}V}{r^3},\dfrac{km\mu z\mathrm{d}V}{r^3}\}$,

则 $$F_x=\iiint\limits_{\Omega}\frac{km\mu x\mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$F_y = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu y\mathrm{dV}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_y = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu y \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$F_y = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu y \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu z \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_y = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu y \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu z \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= km\mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_2^3 \rho \mathrm{d}\rho \int_0^4 \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}z$$

$$F_y = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu y \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu z \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= km\mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_2^3 \rho \mathrm{d}\rho \int_0^4 \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}z$$

$$= 2k\pi m\mu(2\sqrt{5}-4),$$

$$F_y = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu y \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} \frac{km\mu z \mathrm{d}V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= km\mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_2^3 \rho \mathrm{d}\rho \int_0^4 \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}z$$

$$= 2k\pi m\mu(2\sqrt{5}-4),$$

故所求引力为$\{0, 0, 2k\pi m\mu(2\sqrt{5}-4)\}$.

总结

物体Ω的对位于Ω外的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处单位质点的引力 $\vec{\mathbf{F}}$ 的三个分量为:

总结

物体Ω的对位于Ω外的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处单位质点的引力 $\vec{\mathbf{F}}$ 的三个分量为:

$$F_x=\int_{\Omega}\frac{k(x-x_0)\mu(M)}{r^3}\mathrm{d}\Omega,$$

总结

物体Ω的对位于Ω外的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处单位质点的引力 $\vec{\mathbf{F}}$ 的三个分量为:

$$F_x=\int_\Omega \frac{k(x-x_0)\mu(M)}{r^3}\mathrm{d}\Omega,\quad F_y=\int_\Omega \frac{k(y-y_0)\mu(M)}{r^3}\mathrm{d}\Omega$$

总结

物体Ω的对位于Ω外的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处单位质点的引力 $\vec{\mathbf{F}}$ 的三个分量为:

$$F_x=\int_\Omega \frac{k(x-x_0)\mu(M)}{r^3}\mathrm{d}\Omega,\quad F_y=\int_\Omega \frac{k(y-y_0)\mu(M)}{r^3}\mathrm{d}\Omega$$

$$F_z=\int_\Omega \frac{k(z-z_0)\mu(M)}{r^3}\mathrm{d}\Omega$$

总结

物体Ω的对位于Ω外的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处单位质点的引力 $\vec{\mathbf{F}}$ 的三个分量为:

$$F_x = \int_\Omega \frac{k(x - x_0)\mu(M)}{r^3} \mathrm{d}\Omega, \qquad F_y = \int_\Omega \frac{k(y - y_0)\mu(M)}{r^3} \mathrm{d}\Omega$$

$$F_z = \int_\Omega \frac{k(z - z_0)\mu(M)}{r^3} \mathrm{d}\Omega$$

其中k为引力系数, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$,

$\mu(M)$为物体的密度函数.