工科数学分析

贺丹（东南大学）

第三节 多元数量值函数的导数与微分

第三节 多元数量值函数的导数与微分

本节主要内容：

第三节 多元数量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 偏导数的概念与几何意义

第三节 多元数量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 偏导数的概念与几何意义
- 全微分

第三节 多元数量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 偏导数的概念与几何意义
- 全微分
- 方向导数与梯度

第三节 多元数量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 偏导数的概念与几何意义
- 全微分
- 方向导数与梯度
- 高阶偏导数和高阶全微分

第三节 多元数量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 偏导数的概念与几何意义
- 全微分
- 方向导数与梯度
- 高阶偏导数和高阶全微分
- 多元复合函数的偏导数和全微分

3.1 偏导数的概念与几何意义

3.1 偏导数的概念与几何意义

定义3.1 (偏导数)

设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域$U(x_0,y_0)$内有定义,

3.1 偏导数的概念与几何意义

定义3.1 (偏导数)

设$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某一邻域$U(x_0, y_0)$内有定义，当自变量y固定在y_0，而x在x_0处有改变量Δx，$(x + \Delta x, y_0) \in U(x_0, y_0)$时，相应地函数$f$有改变量$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

3.1 偏导数的概念与几何意义

定义3.1 (偏导数)

设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域$U(x_0,y_0)$内有定义，当自变量y固定在y_0，而x在x_0处有改变量Δx，$(x+\Delta x,y_0)\in U(x_0,y_0)$时，相应地函数$f$有改变量$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$.

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处对x的偏导数，

3.1 偏导数的概念与几何意义

定义3.1 (偏导数)

设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域$U(x_0,y_0)$内有定义，当自变量y固定在y_0，而x在x_0处有改变量Δx，$(x+\Delta x,y_0)\in U(x_0,y_0)$时，相应地函数$f$有改变量$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$.

若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处对x的偏导数，

记为$f_x(x_0,y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, $z_x(x_0,y_0)$, 或$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

类似地, $z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处对y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

类似地, $z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处对y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为$f_y(x_0,y_0)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $z_y(x_0,y_0)$, 或 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

类似地, $z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处对y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为$f_y(x_0,y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $z_y(x_0,y_0)$, 或 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

- 如果二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x 与对y 的偏导数都存在, 则称$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处可偏导.

函数$z = f(x, y)$ 在区域D 内的偏导函数

函数$z = f(x, y)$ 在区域D 内的偏导函数

如果函数$z = f(x, y)$ 在区域$D \subseteq \mathbf{R}^2$ 内有定义, 且对D 内每一点(x, y) 处对x 的偏导数都存在,

函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内的偏导函数

如果函数$z=f(x,y)$ 在区域$D\subseteq\mathbf{R}^2$ 内有定义，且对D 内每一点(x,y) 处对x 的偏导数都存在，那么这个偏导数是x, y 的函数，称为函数$z=f(x,y)$ 对自变量x 的偏导函数，

函数$z = f(x,y)$ 在区域D 内的偏导函数

如果函数$z = f(x,y)$ 在区域$D \subseteq \mathbf{R}^2$ 内有定义, 且对D 内每一点(x,y) 处对x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数是x, y 的函数, 称为函数$z = f(x,y)$ 对自变量x 的偏导函数,

记为$\frac{\partial z}{\partial x}$, $f_x(x,y)$, $z_x(x,y)$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$, 即

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad ((x,y) \in D).$$

函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内的偏导函数

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 $D \subseteq \mathbf{R}^2$ 内有定义, 且对 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数是 x, y 的函数, 称为函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 x 的偏导函数,

记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f_x(x, y)$, $z_x(x, y)$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 即

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad ((x, y) \in D).$$

类似地, 可以定义函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导函数,

函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内的偏导函数

如果函数$z=f(x,y)$ 在区域$D\subseteq \mathbf{R}^2$ 内有定义, 且对D 内每一点(x,y) 处对x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数是x, y 的函数, 称为函数$z=f(x,y)$ 对自变量x 的偏导函数,

记为$\frac{\partial z}{\partial x}$, $f_x(x,y)$, $z_x(x,y)$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$, 即

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\quad ((x,y)\in D).$$

类似地, 可以定义函数$z=f(x,y)$ 对自变量y 的偏导函数,

记为$\frac{\partial z}{\partial y}$, $f_y(x,y)$, $z_y(x,y)$ 或$\frac{\partial f}{\partial y}$.

- 偏导函数简称偏导数.

- 偏导函数简称偏导数.
- 偏导数的概念还可以推广到二元以上的多元函数.

- 偏导函数简称偏导数.
- 偏导数的概念还可以推广到二元以上的多元函数.

  例如: 三元函数$u = f(x, y, z)$ 在点(x, y, z) 处对x 的偏导数

  定义为:

- 偏导函数简称偏导数.
- 偏导数的概念还可以推广到二元以上的多元函数.

例如: 三元函数$u = f(x, y, z)$ 在点(x, y, z) 处对x 的偏导数

定义为: $$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

- 偏导函数简称偏导数.
- 偏导数的概念还可以推广到二元以上的多元函数.

  例如: 三元函数$u = f(x, y, z)$ 在点(x, y, z) 处对x 的偏导数

  定义为: $$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$
- $f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)处对$x(y)$的偏导数$f_x(x_0, y_0)$ $(f_y(x_0, y_0))$

  就是偏导函数$f_x(x, y)(f_y(x, y))$在点(x_0, y_0)处的函数值.

- 偏导函数简称偏导数.
- 偏导数的概念还可以推广到二元以上的多元函数.

  例如: 三元函数$u=f(x,y,z)$ 在点(x,y,z) 处对x 的偏导数

  定义为: $$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$
- $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对$x(y)$的偏导数$f_x(x_0,y_0)$ $(f_y(x_0,y_0))$

  就是偏导函数$f_x(x,y)(f_y(x,y))$在点(x_0,y_0)处的函数值.
- 由偏导数的定义可知, 求$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x(或y)的偏导数, 实际上就是令$y=y_0$(或$x=x_0$)时, 求一元函数$f(x,y_0)$(或$f(x_0,y)$)在x_0(或y_0)处对x(或y)的导数.

- 偏导函数简称偏导数.
- 偏导数的概念还可以推广到二元以上的多元函数.

  例如: 三元函数$u = f(x, y, z)$ 在点(x, y, z) 处对x 的偏导数

  定义为: $$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$
- $f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)处对$x(y)$的偏导数$f_x(x_0, y_0)$ $(f_y(x_0, y_0))$

  就是偏导函数$f_x(x, y)(f_y(x, y))$在点(x_0, y_0)处的函数值.
- 由偏导数的定义可知, 求$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对x(或y)的偏导数, 实际上就是令$y = y_0$(或$x = x_0$)时, 求一元函数$f(x, y_0)$ (或$f(x_0, y)$)在x_0(或y_0)处对x(或y)的导数.

  因此, 可用一元函数求导数的方法来求二元函数的偏导数, 只不过在求偏导数时需要将另一个变量视为常量.

例1. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)$，求 $f_x(0,\dfrac{\pi}{4})$，$f_y(0,\dfrac{\pi}{4})$.

例1. 设$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)$, 求$f_x(0,\dfrac{\pi}{4})$, $f_y(0,\dfrac{\pi}{4})$.

解: $f_x(x,y)=-\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)+\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)$,

例1. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)$, 求 $f_x(0,\dfrac{\pi}{4})$, $f_y(0,\dfrac{\pi}{4})$.

解: $f_x(x,y)=-\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)+\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)$,

$f_y(x,y)=2\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)$

例1. 设$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)$, 求$f_x(0,\dfrac{\pi}{4})$, $f_y(0,\dfrac{\pi}{4})$.

解: $f_x(x,y)=-\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)+\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)$,

$$f_y(x,y)=2\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)$$

$$\therefore\ f_x(0,\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=-1,$$

例1. 设$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)$, 求$f_x(0,\frac{\pi}{4})$, $f_y(0,\frac{\pi}{4})$.

解: $f_x(x,y)=-\mathrm{e}^{-x}\sin(x+2y)+\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)$,

$$f_y(x,y)=2\mathrm{e}^{-x}\cos(x+2y)$$

$$\therefore\ f_x(0,\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=-1,$$

$$f_y(0,\frac{\pi}{4})=2\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

例2. 求下列函数的偏导数

(1) $z = x^y$

(2) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

例2. 求下列函数的偏导数

(1) $z = x^y$ (2) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

解: (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$,

例2. 求下列函数的偏导数

(1) $z = x^y$ (2) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

解: (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$

例2. 求下列函数的偏导数

(1) $z = x^y$ (2) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

解: (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

例2. 求下列函数的偏导数

(1) $z = x^y$ (2) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

解: (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x}) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

例3. 设$PV=RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

例3. 设$PV=RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明: $P=\dfrac{RT}{V}$

例3. 设$PV = RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

证明: $P = \dfrac{RT}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$,

例3. 设$PV=RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明: $P=\dfrac{RT}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2},$

$$V=\frac{RT}{P}$$

例3. 设$PV = RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

证明: $P = \dfrac{RT}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$,

$V = \dfrac{RT}{P} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{R}{P}$;

例3. 设$PV = RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

证明: $P = \dfrac{RT}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$,

$V = \dfrac{RT}{P} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{R}{P}$; $\quad T = \dfrac{PV}{R}$

例3. 设$PV=RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明: $P=\dfrac{RT}{V}\quad\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2}$,

$$V=\frac{RT}{P}\quad\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P};\quad T=\frac{PV}{R}\quad\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R};$$

例3. 设$PV = RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

证明: $P = \dfrac{RT}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$,

$$V = \frac{RT}{P} \quad \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P}; \quad T = \frac{PV}{R} \quad \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R};$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R} = -\frac{RT}{PV} = -1.$$

例3. 设$PV = RT$ (R 是常数), 求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

证明: $P = \dfrac{RT}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$,

$$V = \frac{RT}{P} \quad \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P}; \qquad T = \frac{PV}{R} \quad \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R};$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R} = -\frac{RT}{PV} = -1.$$

注意: $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ 要当做一个整体来对待, 不能像$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看作$\mathrm{d}y$ 与$\mathrm{d}x$ 的微商, ∂P 与∂V 是没有意义的.

例4. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$.

例4. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解: $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0,$

例4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解: $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0,$

同理, $f_y(x,y)=0.$

例4. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 求$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解: $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$,

同理, $f_y(x,y)=0$.

注意: 在这个例子中, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在,

例4. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解: $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0,$

同理, $f_y(x,y)=0.$

注意: 在这个例子中, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在,

$\therefore f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处不连续.

例4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解: $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0,$

同理, $f_y(x,y)=0.$

注意: 在这个例子中, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在,

$\therefore f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处不连续.

- 在一元函数中, 若函数在某点可导, 则它在该点必连续,

例4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解: $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同理, $f_y(x,y)=0$.

注意: 在这个例子中, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在,

$\therefore f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

- 在一元函数中, 若函数在某点可导, 则它在该点必连续, 而这个结论对二元函数来说却不一定成立.

例4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解: $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0,$

同理, $f_y(x,y)=0.$

注意: 在这个例子中, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在,

$\therefore f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处不连续.

- 在一元函数中, 若函数在某点可导, 则它在该点必连续, 而这个结论对二元函数来说却不一定成立.

此例表明: 函数$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的偏导数存在, 并不能保证函数在该点连续.

例5. 求三元函数$u=\sqrt[z]{\dfrac{y}{x}}$, 求u 的各个偏导数及$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}$.

例5. 求三元函数$u=\sqrt[z]{\dfrac{y}{x}}$, 求u 的各个偏导数及$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}$.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$,

例5. 求三元函数$u=\sqrt[z]{\dfrac{y}{x}}$, 求u 的各个偏导数及$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}$.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\dfrac{1}{x}$,

例5. 求三元函数$u=\sqrt[z]{\dfrac{y}{x}}$, 求u 的各个偏导数及$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}$.

解: $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right),$$

例5. 求三元函数$u=\sqrt[z]{\dfrac{y}{x}}$, 求u 的各个偏导数及$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}$.

解: $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right),$$

于是, $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}=\left.\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{z}-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right|_{(1,2,1)}=-2.$$

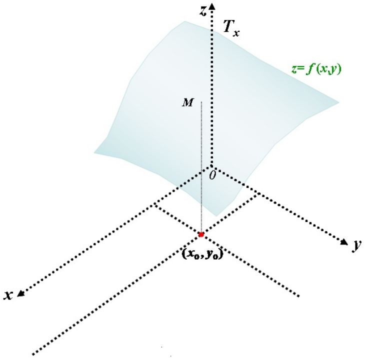
偏导数的几何意义

偏导数的几何意义

$z = f(x, y),$

偏导数的几何意义

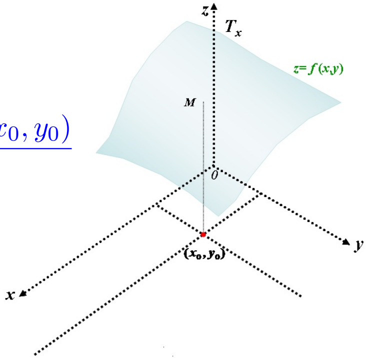
$$z = f(x, y),$$



偏导数的几何意义

$$z = f(x,y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

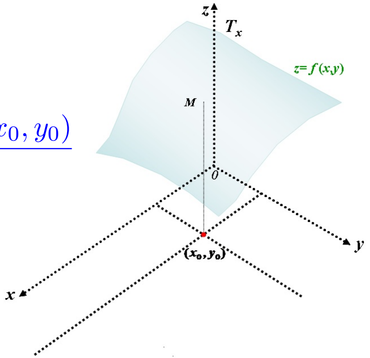


偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

固定$y = y_0$,



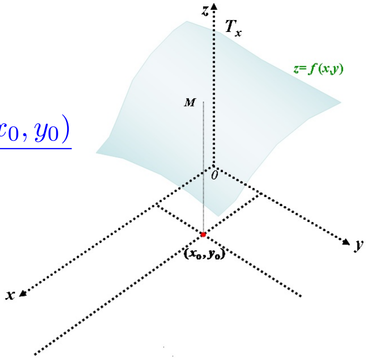
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

固定$y = y_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$



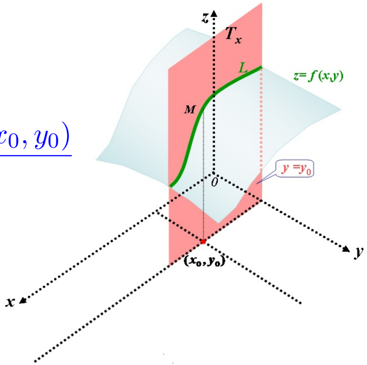
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

固定$y = y_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$



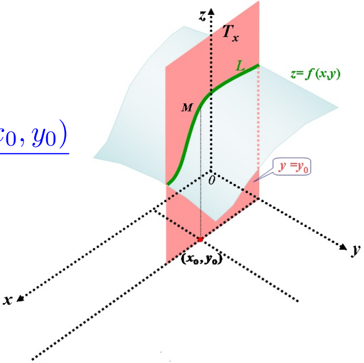
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

固定$y = y_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$



由一元函数导数的几何意义:

偏导数的几何意义

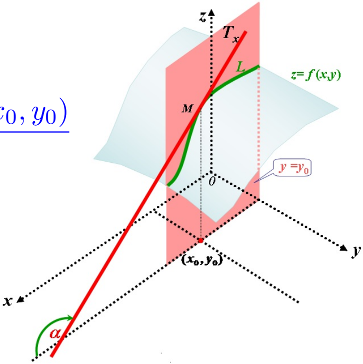
$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

固定$y = y_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$

由一元函数导数的几何意义:



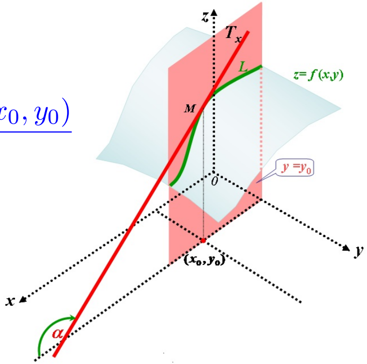
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

固定$y = y_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$



由一元函数导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \tan \alpha$$

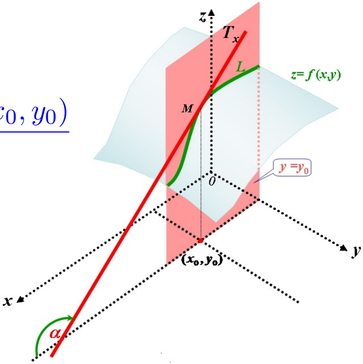
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

固定$y = y_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$



由一元函数导数的几何意义:

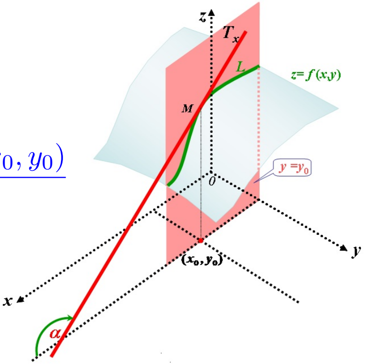
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \tan \alpha$$

即曲线L 在点$M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处切线T_x 的斜率

偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

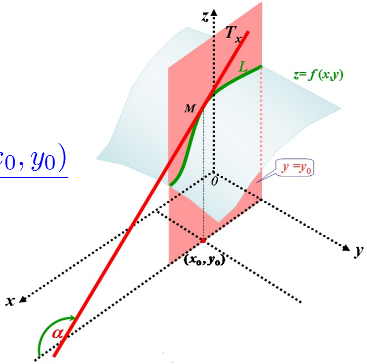


偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

固定$x = x_0$,



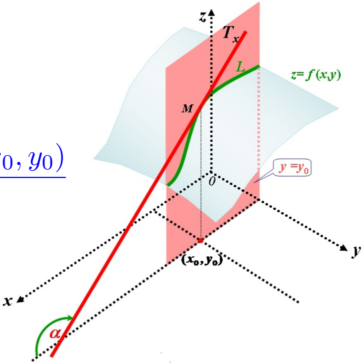
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

固定$x = x_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$



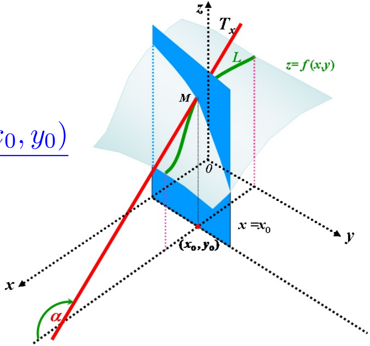
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

固定$x = x_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$



偏导数的几何意义

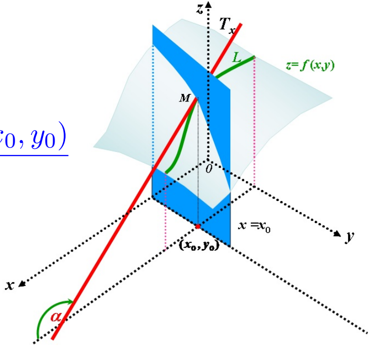
$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

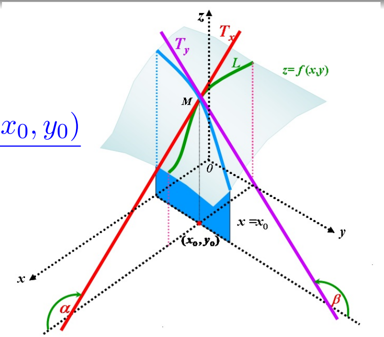
固定$x = x_0$,

得曲线L : $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$

由一元函数导数的几何意义:



偏导数的几何意义



$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

固定$x = x_0$,

得曲线: $L: \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$

由一元函数导数的几何意义:

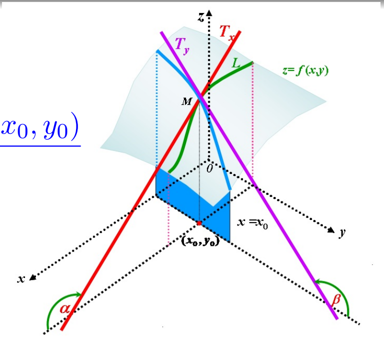
偏导数的几何意义

$$z = f(x, y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

固定$x = x_0$,

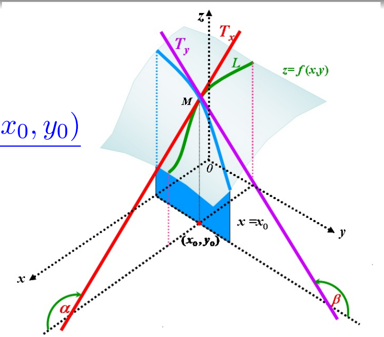
得曲线: $L: \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$



由一元函数导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \tan \beta$$

偏导数的几何意义



$$z=f(x,y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

固定$x=x_0$,

得曲线: $L:\begin{cases} z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$

由一元函数导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=\tan\beta$$

即曲线L 在点$M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处切线T_y 的斜率

3.2 全微分

3.2 全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域内有定义,

3.2 全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域内有定义，
$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 为这邻域内的任意一点，则称

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数在点(x_0, y_0)对应于自变量改变量Δx，Δy 的**全增量**.

3.2 全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域内有定义,

$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

为函数在点(x_0,y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的全增量.

实例:

3.2 全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域内有定义, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数在点(x_0, y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的全增量.

实例: 圆柱体体积$V = \pi r^2 h$,

3.2 全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域内有定义,

$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数在点(x_0,y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的**全增量**.

实例: 圆柱体体积$V=\pi r^2 h$, $r\to r+\Delta r$, $\quad h\to h+\Delta h$, 则

3.2 全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域内有定义,

$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数在点(x_0, y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的**全增量**.

实例: 圆柱体体积$V = \pi r^2 h$, $r \to r + \Delta r$, $\quad h \to h + \Delta h$, 则

$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 \cdot (h + \Delta h) - \pi r^2 h$

3.2 全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域内有定义,

$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

为函数在点(x_0,y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的全增量.

实例: 圆柱体体积$V=\pi r^2 h$, $r\to r+\Delta r$, $\quad h\to h+\Delta h$, 则

$$\Delta V = \pi(r+\Delta r)^2\cdot(h+\Delta h) - \pi r^2 h$$

$$= 2\pi rh\Delta r + \pi r^2\Delta h + 2\pi r\Delta r\Delta h + \pi h(\Delta r)^2 + \pi(\Delta r)^2\Delta h$$

3.2 全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域内有定义,

$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

为函数在点(x_0,y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的全增量.

实例: 圆柱体体积$V=\pi r^2 h$, $r\to r+\Delta r$, $\quad h\to h+\Delta h$, 则

$$\Delta V = \pi(r+\Delta r)^2\cdot(h+\Delta h) - \pi r^2 h$$

$$= 2\pi r h\Delta r + \pi r^2\Delta h + 2\pi r\Delta r\Delta h + \pi h(\Delta r)^2 + \pi(\Delta r)^2\Delta h$$

$$= 2\pi r h\Delta r + \pi r^2\Delta h + o(\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta h)^2}).$$

3.2 全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域内有定义,

$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数在点(x_0, y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的全增量.

实例: 圆柱体体积$V = \pi r^2 h$, $r \to r + \Delta r$, $h \to h + \Delta h$, 则

$$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 \cdot (h + \Delta h) - \pi r^2 h$$

$$= 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h + 2\pi r \Delta r \Delta h + \pi h(\Delta r)^2 + \pi(\Delta r)^2 \Delta h$$

$$= 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h + o(\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta h)^2}).$$

$2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$:

3.2 全微分

设函数$z = f(x,y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域内有定义,

$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 为这邻域内的任意一点, 则称

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数在点(x_0, y_0)对应于自变量改变量Δx, Δy 的全增量.

实例: 圆柱体体积$V = \pi r^2 h$, $r \to r + \Delta r$, $\quad h \to h + \Delta h$, 则

$$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 \cdot (h + \Delta h) - \pi r^2 h$$

$$= 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h + 2\pi r \Delta r \Delta h + \pi h(\Delta r)^2 + \pi(\Delta r)^2 \Delta h$$

$$= 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h + o(\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta h)^2}).$$

$2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$: 关于$\Delta r$ 与Δh 的二元一次齐次多项式.

二元函数全微分的定义

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域$U(x_0, y_0)$ 内有定义.

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有定义. 如果对于$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 函数$f$ 在(x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可表示为

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 的某邻域$U(x_0, y_0)$ 内有定义.
如果对于$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(x_0, y_0)$, 函数$f$ 在(x_0, y_0)
处的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有定义. 如果对于$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 函数$f$ 在(x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中A, B 不依赖于Δx、Δy (一般与点(x_0,y_0) 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是当 $\rho\to 0$ (即$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$)时关于$\rho$ 的高阶无穷小量,

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有定义.
如果对于$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 函数$f$ 在(x_0,y_0)
处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 其中$A$, B 不依赖于Δx、Δy
(一般与点(x_0,y_0) 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是当
$\rho\to 0$ (即$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$)时关于$\rho$ 的高阶无穷小量,
则称函数f 在点(x_0,y_0) 处**可微分**,

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有定义. 如果对于$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 函数$f$ 在(x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中A, B 不依赖于Δx、Δy (一般与点(x_0,y_0) 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是当$\rho\to 0$ (即$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$)时关于$\rho$ 的高阶无穷小量, 则称函数f 在点(x_0,y_0) 处可微分, 并称$A\Delta x+B\Delta y$ 为函数f 在点(x_0,y_0) 处的全微分,

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有定义. 如果对于$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 函数$f$ 在(x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 其中$A$, B 不依赖于Δx、Δy (一般与点(x_0,y_0) 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是当 $\rho\to 0$ (即$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$)时关于$\rho$ 的高阶无穷小量,

则称函数f 在点(x_0,y_0) 处可微分, 并称$A\Delta x+B\Delta y$ 为函数f 在点(x_0,y_0) 处的全微分, 记为$\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)}$ 或$\mathrm{d}f(x_0,y_0)$,

二元函数全微分的定义

定义3.2 (全微分)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有定义. 如果对于$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 函数$f$ 在(x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 其中$A$, B 不依赖于Δx、Δy (一般与点(x_0,y_0) 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是当 $\rho\to 0$ (即$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$)时关于$\rho$ 的高阶无穷小量,

则称函数f 在点(x_0,y_0) 处**可微分**, 并称$A\Delta x+B\Delta y$ 为函数f 在点(x_0,y_0) 处的**全微分**, 记为$\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)}$ 或$\mathrm{d}f(x_0,y_0)$,

即 $$\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y.$$

- 由定义可以看出, 当ρ 充分小且A, B 不全为零时, 全微分 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数f 在(x_0, y_0) 处全增量的线性主部.

- 由定义可以看出, 当ρ 充分小且A, B 不全为零时, 全微分 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数f 在(x_0, y_0) 处全增量的线性主部.
- 全微分的两个性质:

- 由定义可以看出, 当ρ 充分小且A, B 不全为零时, 全微分 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数f 在(x_0, y_0) 处全增量的线性主部.
- 全微分的两个性质:

  (1) $\mathrm{d}z$ 是Δx 和Δy 的线性函数;

- 由定义可以看出，当ρ 充分小且A, B 不全为零时，全微分$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数f 在(x_0, y_0) 处全增量的线性主部.
- 全微分的两个性质:

  (1) $\mathrm{d}z$ 是Δx 和Δy 的线性函数;

  (2) Δz 与$\mathrm{d}z$ 之差是比ρ 高阶的无穷小.

- 由定义可以看出, 当ρ 充分小且A, B 不全为零时, 全微分 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数f 在(x_0, y_0) 处全增量的线性主部.
- 全微分的两个性质:

  (1) $\mathrm{d}z$ 是Δx 和Δy 的线性函数;

  (2) Δz 与$\mathrm{d}z$ 之差是比ρ 高阶的无穷小.
- 若函数$z = f(x, y)$ 在区域D 内处处可微, 则称$z = f(x, y)$ 为区域D 内的可微函数.

可微的必要条件

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

若$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处可微, 则

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

若$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处可微, 则

(1) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处连续;

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

若$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 处可微, 则

(1) $f(x, y)$ 在点(x, y) 处连续;

(2) $f(x, y)$ 在点(x, y) 处存在偏导数, 且$A = f_x(x, y)$,

$B = f_y(x, y)$, 即$\mathrm{d}z = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y$

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

若$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处可微, 则

(1) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处连续;

(2) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处存在偏导数, 且$A=f_x(x,y)$,

$B=f_y(x,y)$, 即$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$

证明: (1) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

若$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处可微, 则

(1) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处连续;

(2) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处存在偏导数, 且$A=f_x(x,y)$,

$B=f_y(x,y)$, 即$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$

证明: (1) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 则$\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$,

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

若$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处可微, 则

(1) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处连续;

(2) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处存在偏导数, 且$A=f_x(x,y)$,

$B=f_y(x,y)$, 即$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$

证明: (1) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 则$\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$,

于是$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=\lim\limits_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]=f(x,y)$,

可微的必要条件

定理3.1 (可微的必要条件)

若$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处可微, 则

(1) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处连续;

(2) $f(x,y)$ 在点(x,y) 处存在偏导数, 且$A=f_x(x,y)$,

$B=f_y(x,y)$, 即$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$

证明: (1) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 则$\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$,

于是 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=\lim\limits_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]=f(x,y)$,

$\therefore$ 函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 处连续.

(2) 因为$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 可微,

(2) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,

(2) 因为$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 可微,

所以$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,

当$\Delta y = 0$ 时, $\rho = |\Delta x|$, 于是有

(2) 因为$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 可微,

所以$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,

当$\Delta y = 0$ 时, $\rho = |\Delta x|$, 于是有

$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + o|\Delta x|$,

(2) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,

当$\Delta y=0$ 时, $\rho=|\Delta x|$, 于是有

$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o|\Delta x|$,

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\dfrac{o|\Delta x|}{\Delta x})=A$,

(2) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,

当$\Delta y=0$ 时, $\rho=|\Delta x|$, 于是有

$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o|\Delta x|$,

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\dfrac{o|\Delta x|}{\Delta x})=A$,

即$f_x(x,y)=A$.　同理可得 $f_y(x,y)=B$.

(2) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,

当$\Delta y=0$ 时, $\rho=|\Delta x|$, 于是有

$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o|\Delta x|$,

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\dfrac{o|\Delta x|}{\Delta x})=A$,

即$f_x(x,y)=A$. 同理可得 $f_y(x,y)=B$.

故 $\mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$.

(2) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,

当$\Delta y=0$ 时, $\rho=|\Delta x|$, 于是有

$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o|\Delta x|$,

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\dfrac{o|\Delta x|}{\Delta x})=A$,

即$f_x(x,y)=A$. 同理可得 $f_y(x,y)=B$.

故 $\mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$.

规定: $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$, 则

(2) 因为$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微,

所以$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,

当$\Delta y=0$ 时, $\rho=|\Delta x|$, 于是有

$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o|\Delta x|$,

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\dfrac{o|\Delta x|}{\Delta x})=A$,

即$f_x(x,y)=A$. 同理可得 $f_y(x,y)=B$.

故 $\mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$.

规定: $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$, 则

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

注意: 一元函数中, 可微与可导是等价的. 但在二元函数中, 偏导数存在是可微的必要条件, 而非充分条件,

注意: 一元函数中, 可微与可导是等价的. 但在二元函数中, 偏导数存在是可微的必要条件, 而非充分条件,

即: 可微$\rightarrow$ 可导

注意: 一元函数中, 可微与可导是等价的. 但在二元函数中, 偏导数存在是可微的必要条件, 而非充分条件,

即: 可微$\rightarrow$ 可导 可导$\not\rightarrow$ 可微

注意: 一元函数中, 可微与可导是等价的. 但在二元函数中, 偏导数存在是可微的必要条件, 而非充分条件,

即: 可微$\rightarrow$ 可导 可导$\not\rightarrow$ 可微

当偏导数存在时可得表达式$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, 但它不一定是全微分$\mathrm{d}z$,

注意: 一元函数中, 可微与可导是等价的. 但在二元函数中, 偏导数存在是可微的必要条件, 而非充分条件,

即: 可微$\rightarrow$ 可导 可导$\nrightarrow$ 可微

当偏导数存在时可得表达式$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, 但它不一定是全微分$\mathrm{d}z$, 必须加上

$$\text{“}\Delta z-[\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y]\text{是比}\rho\text{高阶的无穷小”}$$

的条件.

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处是否可微?

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$

处是否可微?

解: 在点$(0,0)$ 处,

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点$(0,0)$处是否可微?

解: 在点$(0,0)$ 处,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

例1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处是否可微?

解: 在点$(0,0)$ 处,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}}-0}{\Delta x}=0,$$

例1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处是否可微?

解: 在点$(0,0)$ 处,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}}-0}{\Delta x}=0,$$

同理, $f_y(0,0)=0$.

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处是否可微?

解: 在点$(0,0)$ 处,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}}-0}{\Delta x}=0,$$

同理, $f_y(0,0)=0.$

而$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$

$$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

$$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

当点$M(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线$y = x$ 趋于点$(0,0)$ 时,

$$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

当点$M(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线$y = x$ 趋于点$(0,0)$ 时,

$$\frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

当点$M(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线$y=x$ 趋于点$(0,0)$ 时,

$$\frac{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 它不能随$\rho\to 0$ 而趋向于0.

$$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

当点$M(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线$y = x$ 趋于点$(0,0)$ 时,

$$\frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\rho} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 它不能随$\rho \to 0$ 而趋向于0.

$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$不是$\rho$的高阶无穷小,

$$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

当点$M(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线$y = x$ 趋于点$(0,0)$ 时,

$$\frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\rho} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 它不能随$\rho \to 0$ 而趋向于0.

$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$不是$\rho$的高阶无穷小,

故$f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y$ 不是$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处的全微分,

$$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}},$$

当点$M(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线$y = x$ 趋于点$(0,0)$ 时,

$$\frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\rho} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 它不能随$\rho \to 0$ 而趋向于0.

$\therefore \Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$不是$\rho$的高阶无穷小,

故$f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y$ 不是$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处的全微分,

即函数在点$(0,0)$ 处不可微.

可微的充分条件

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 的某邻域内有定义, 若$f(x,y)$ 的两个偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 均在点(x,y) 连续, 则该函数在点(x,y) 处可微.

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z = f(x,y)$ 在点(x,y) 的某邻域内有定义, 若$f(x,y)$ 的两个偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 均在点(x,y) 连续, 则该函数在点(x,y) 处可微.

证明: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 的某邻域内有定义, 若$f(x,y)$ 的两个偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 均在点(x,y) 连续, 则该函数在点(x,y) 处可微.

证明: $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$$

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 的某邻域内有定义, 若$f(x,y)$ 的两个偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 均在点(x,y) 连续, 则该函数在点(x,y) 处可微.

证明: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 的某邻域内有定义, 若$f(x,y)$ 的两个偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 均在点(x,y) 连续, 则该函数在点(x,y) 处可微.

证明: $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$$

$$=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y\ (0<\theta_1,\theta_2<1)$$

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z=f(x,y)$ 在点(x,y) 的某邻域内有定义, 若$f(x,y)$ 的两个偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 均在点(x,y) 连续, 则该函数在点(x,y) 处可微.

证明: $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$$

$$=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y\ (0<\theta_1,\theta_2<1)$$

由f_x和f_y在(x,y)点连续可得,

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 的某邻域内有定义, 若$f(x, y)$ 的两个偏导数$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 均在点(x, y) 连续, 则该函数在点(x, y) 处可微.

证明: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

$$= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y \ (0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$$

由f_x和f_y在(x, y)点连续可得, $f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \alpha$,

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 的某邻域内有定义, 若$f(x, y)$ 的两个偏导数$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 均在点(x, y) 连续, 则该函数在点(x, y) 处可微.

证明: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$

$= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y \ (0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$

由f_x和f_y在(x, y)点连续可得, $f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \alpha$,

$$f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + \beta,$$

可微的充分条件

定理3.3 (可微的充分条件)

设函数$z = f(x, y)$ 在点(x, y) 的某邻域内有定义, 若$f(x, y)$ 的两个偏导数$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 均在点(x, y) 连续, 则该函数在点(x, y) 处可微.

证明: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

$$= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y \ (0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$$

由f_x和f_y在(x, y)点连续可得, $f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \alpha$,

$$f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + \beta,$$

其中α, β是当$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$时的无穷小量.

于是$\Delta z = [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$

于是$\Delta z = [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

于是$\Delta z = [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

而$0 \leqslant \left|\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right| = \left|\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \leqslant |\alpha|+|\beta|$

$$\text{于是}\Delta z = [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$\text{而}0 \leqslant \left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right| = \left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \leqslant |\alpha|+|\beta|$$

于是由α,β是当$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$时的无穷小量可得,

于是$\Delta z = [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

而$0 \leqslant \left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}\right| = \left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \leqslant |\alpha| + |\beta|$

于是由α, β是当$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$时的无穷小量可得,

$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho)\ (\rho \to 0)$,

于是$\Delta z = [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

而$0 \leqslant \left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}\right| = \left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \leqslant |\alpha| + |\beta|$

于是由α, β是当$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$时的无穷小量可得,

$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho)\ (\rho \to 0)$,

所以由全微分定义可知f在点(x,y)可微.

- 对于二元函数$z = f(x, y)$, 有

- 对于二元函数$z = f(x, y)$, 有

偏导数连续

- 对于二元函数$z=f(x,y)$，有

$$\text{偏导数连续} \quad \Rightarrow \quad \text{函数可微}$$

- 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 有

$$\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{函数可微} \Rightarrow \text{偏导数存在}$$

- 对于二元函数$z = f(x, y)$，有

$$\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{函数可微} \Rightarrow \text{偏导数存在}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{函数连续}$$

- 对于二元函数$z=f(x,y)$, 有

$$\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{函数可微} \Rightarrow \text{偏导数存在}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{函数连续}$$

- 二元函数全微分的定义以及可微分的必要条件和充分条件, 可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数.

- 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 有

$$\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{函数可微} \Rightarrow \text{偏导数存在}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{函数连续}$$

- 二元函数全微分的定义以及可微分的必要条件和充分条件,可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数.

如: 三元函数 $u = f(x, y, z)$, 若三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ 连续,

则它可微且全微分为

- 对于二元函数$z=f(x,y)$, 有

$$\text{偏导数连续} \Rightarrow \text{函数可微} \Rightarrow \text{偏导数存在}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{函数连续}$$

- 二元函数全微分的定义以及可微分的必要条件和充分条件, 可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数.

如: 三元函数$u=f(x,y,z)$, 若三个偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ 连续, 则它可微且全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

例2. 求函数$z = xy^2 + x^2$ 在点$(1,2)$ 处的全微分.

例2. 求函数$z = xy^2 + x^2$ 在点$(1, 2)$ 处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 2x, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy,$

例2. 求函数$z = xy^2 + x^2$ 在点$(1, 2)$ 处的全微分.

解: $$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy,$$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 6, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 4,$$

例2. 求函数$z=xy^2+x^2$ 在点$(1,2)$ 处的全微分.

解: $$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+2x,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy,$$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=6,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=4,$$

$$\therefore\ \mathrm{d}z=6\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y.$$

例3. 求函数$u=\mathrm{e}^{x+z}\sin(x+y)$ 的全微分.

例3. 求函数$u = \mathrm{e}^{x+z}\sin(x+y)$ 的全微分.

解: $$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x+z}[\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{e}^{x+z}\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{e}^{x+z}\sin(x+y),$$

例3. 求函数$u = \mathrm{e}^{x+z}\sin(x+y)$ 的全微分.

解: $$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x+z}[\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{e}^{x+z}\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{e}^{x+z}\sin(x+y),$$

$$\therefore \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{x+z}\{[\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x + \cos(x+y)\mathrm{d}y + \sin(x+y)\mathrm{d}z\}.$$

例4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明:

(1) 在点 $(0,0)$ 的邻域内有偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$;

(2) 偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续;

(3) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

例4. 设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明:

(1) 在点$(0,0)$ 的邻域内有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$;

(2) 偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处不连续;

(3) 函数$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处可微.

证明: (1) 当$x^2+y^2\neq 0$ 时, 有

例4. 设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明:

(1) 在点$(0,0)$ 的邻域内有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$;

(2) 偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处不连续;

(3) 函数$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处可微.

证明: (1) 当$x^2+y^2\neq 0$ 时, 有

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

当$x^2+y^2=0$ 时, 有

当$x^2+y^2=0$ 时，有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

当$x^2+y^2=0$ 时，有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}=0,$$

当$x^2+y^2=0$时，有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}=0,$$

同理可得$f_y(0,0)=0.$

当$x^2+y^2=0$ 时，有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}=0,$$

同理可得$f_y(0,0)=0.$

故$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 的邻域内有偏导数$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$.

$$(2) \because \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2})$$

$$(2) \because \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2})$$

当点(x,y) 沿直线$y=x$ 趋于点$(0,0)$ 时, 有

$$(2) \because \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2})$$

当点(x,y) 沿直线$y=x$ 趋于点$(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$(2) \because \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

当点(x,y) 沿直线$y=x$ 趋于点$(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\ \text{不存在},$$

$$(2)\because \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2})$$

当点(x,y) 沿直线$y=x$ 趋于点$(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{2x^2}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\ \text{不存在},$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)\ \text{不存在},$$

$$(2) \because \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

当点(x,y) 沿直线$y=x$ 趋于点$(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}$$ 不存在,

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)$ 不存在, 因而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)$ 在$(0,0)$ 处不连续.

$$(2) \because \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

当点(x,y) 沿直线$y=x$ 趋于点$(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2} \text{ 不存在},$$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)$ 不存在, 因而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)$ 在$(0,0)$ 处不连续.

同理可证, $f_y(x,y)$ 在$(0,0)$ 处不连续.

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0,$

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

所以$\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

所以$\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}$$

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

所以$\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho}$$

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

所以$\displaystyle\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho \sin \frac{1}{\rho^2}$$

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

所以$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2} = 0,$$

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

所以$\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

于是$\Delta f = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$,

(3) 因为$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$

$$= [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

所以$\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

于是$\Delta f = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$,

即函数$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处可微.