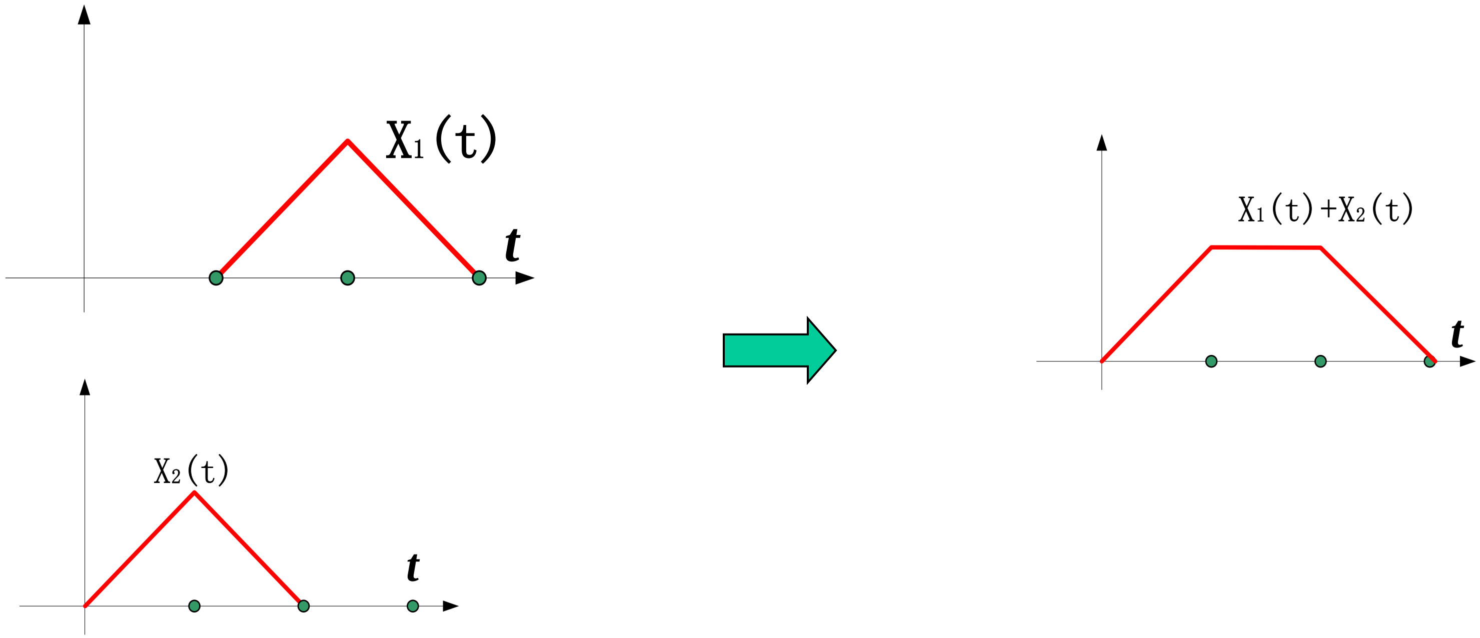
1.3 信号的简单运算与自变量变换

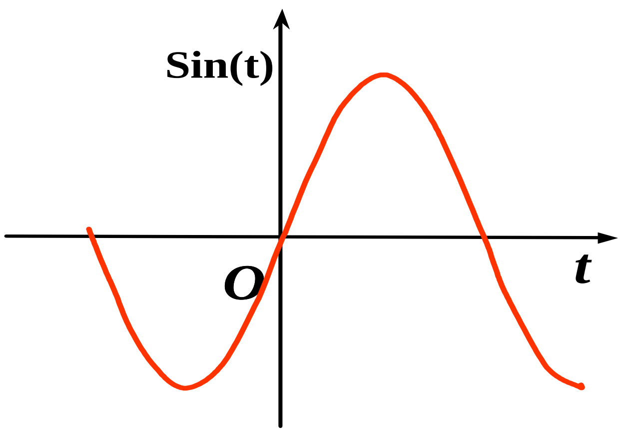
一、 信号的简单运算:

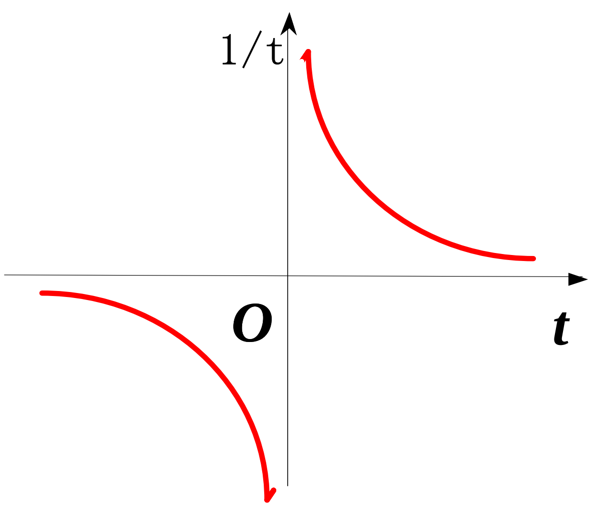
1.信号的加减 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

是指同一瞬时两信号之值对应相加所构成的"和信号"

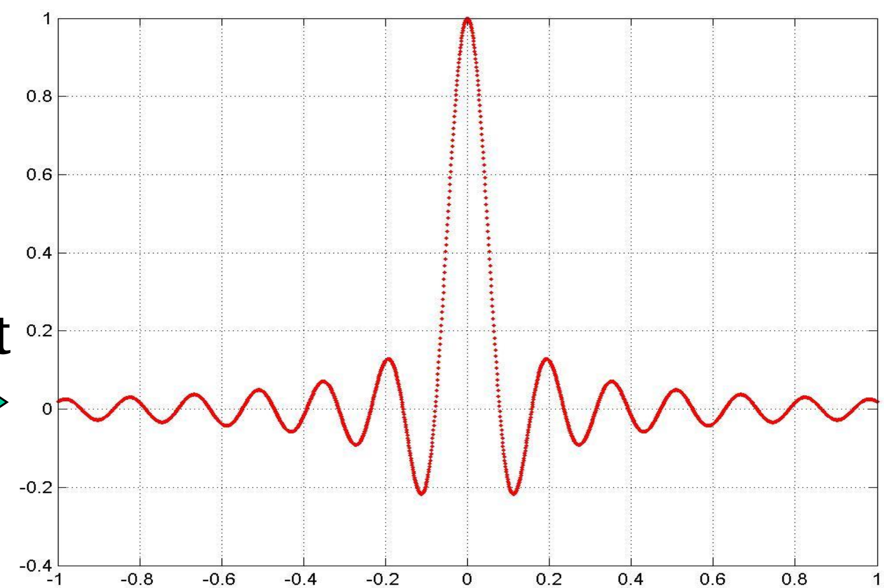


2.信号的乘除$x(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)$





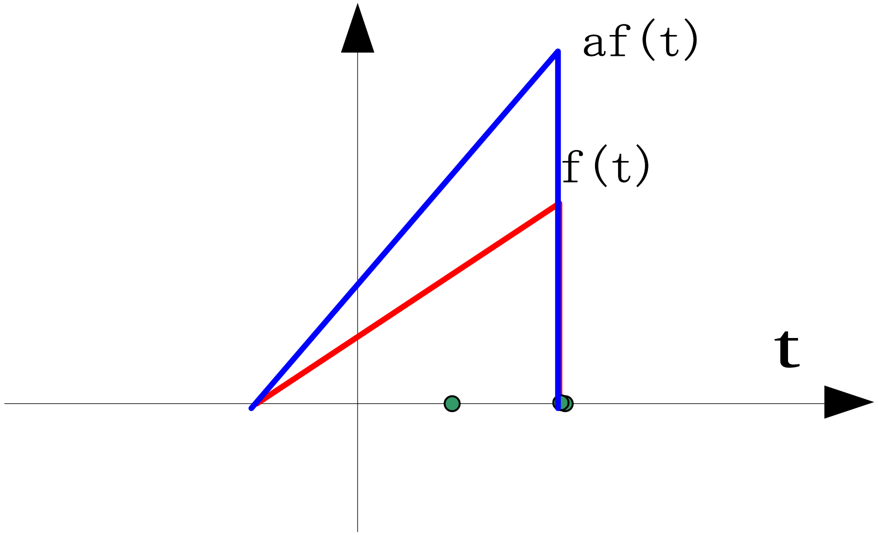
Sin(t)/t



Sa(t)=Sin(t)/t

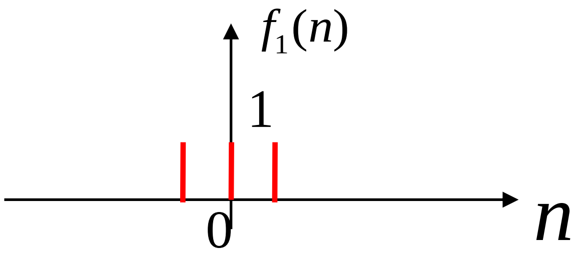
信号与标量的乘法:

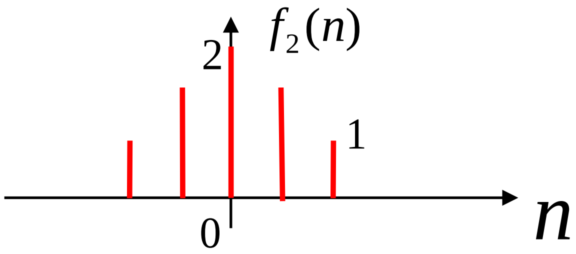
$$f(t) \rightarrow a f(t)$$

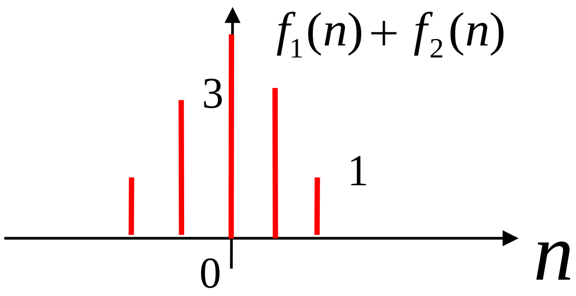


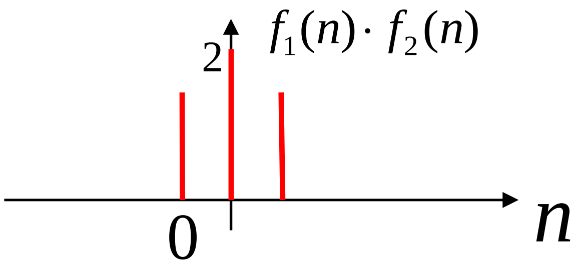
对于离散信号：

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \qquad f(n) = f_1(n) \cdot f_2(n)$$



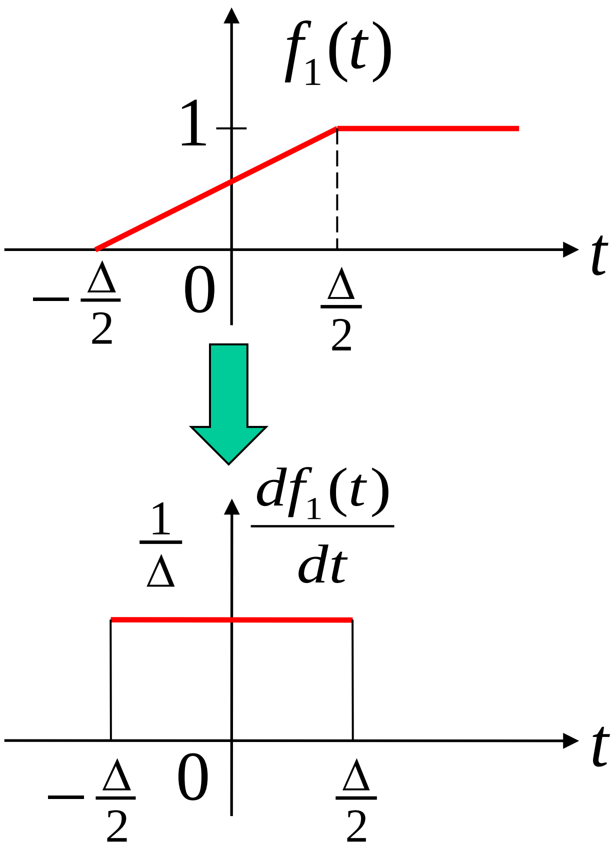


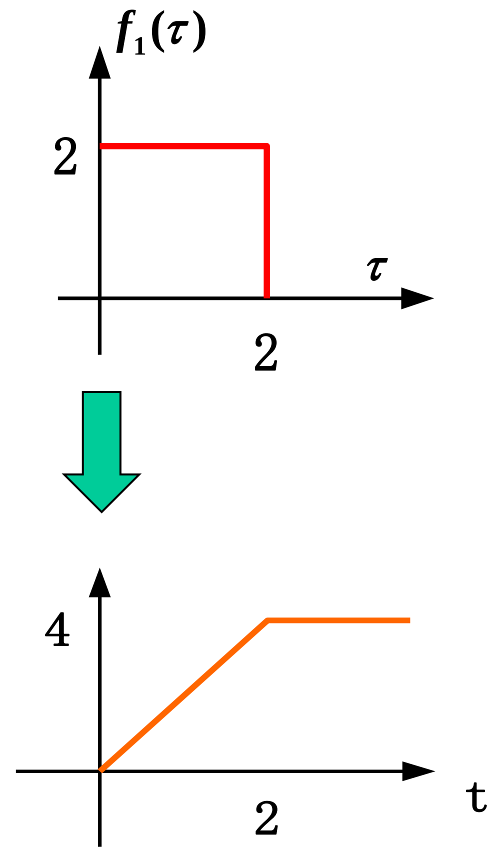




3. 信号的微分与积分：

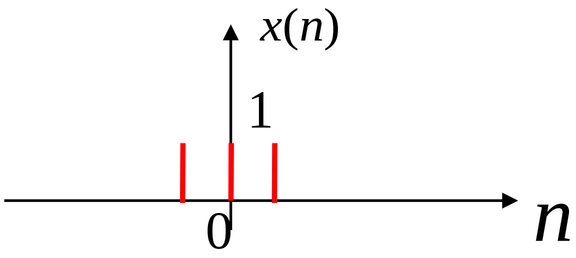
$$f(t) = \frac{d\,f_1(t)}{dt} \qquad\qquad f(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau$$

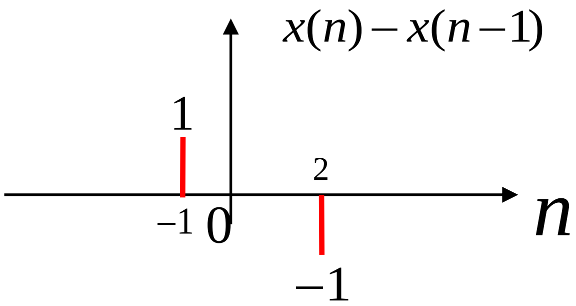


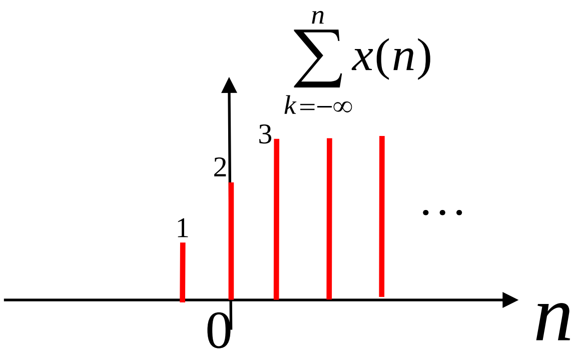


信号的差分：　$x(n)-x(n-1)$

信号的求和：　$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$





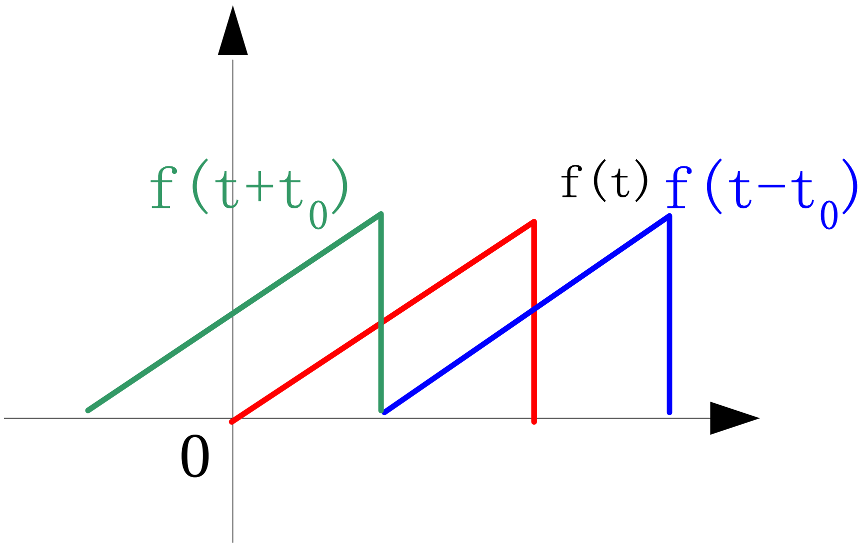


二、 信号的自变量变换

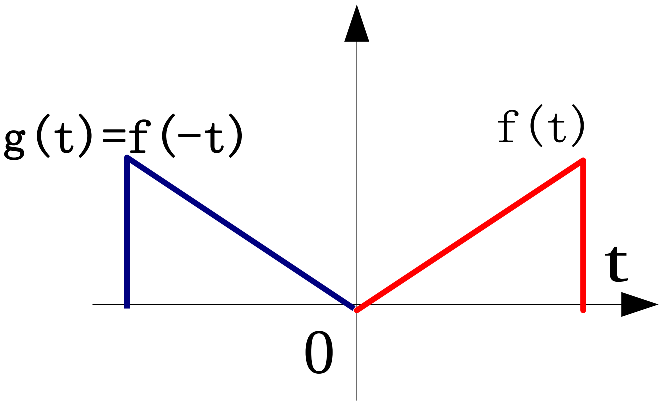
1. 平移:

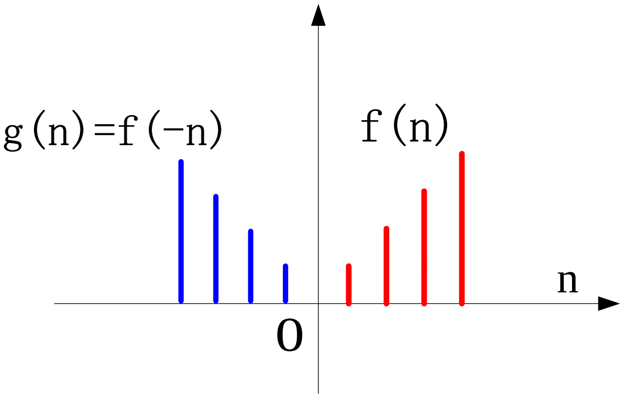
$$f(t) \rightarrow f(t-t_0), t_0 > 0$$

$$f(n) \rightarrow f(n-n_0), n_0 > 0$$



2. 反转: 将信号f(t)或f(k)中的自变量t(或k)换为-t(或-k),其几何含义是将信号f(t)或f(n)以t=0或n=0为轴反转.





偶信号、奇信号：

$$f(t) = f(-t) \qquad f(t) = -f(-t)$$

$$f(n) = f(-n) \qquad f(n) = -f(-n)$$

$$f_o(t) = \tfrac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$ ⟶ 奇信号

$$f_e(t) = \tfrac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$ ⟶ 偶信号

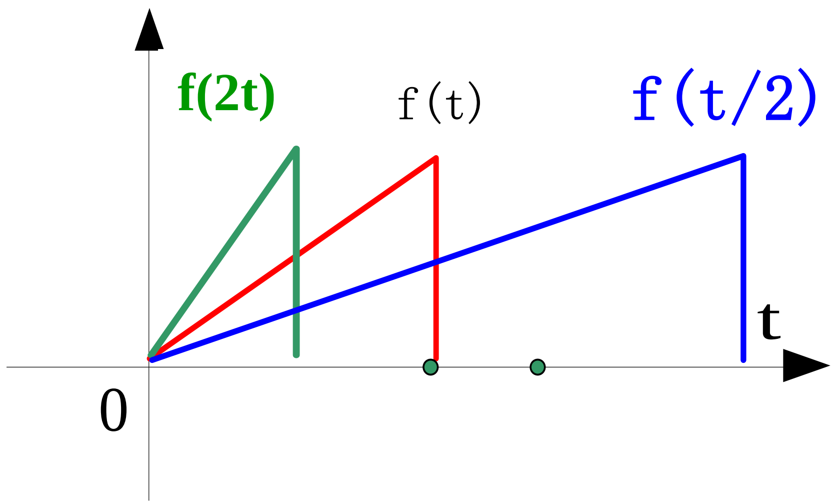
$$\boxed{f(t) = f_e(t) + f_o(t)}$$

任何实信号都可以分解为一个奇信号和偶信号的和。

3. 尺度变换:

$$f(t) \quad \rightarrow \quad f(at)$$

$$\begin{cases} a > 1 & \text{线性压缩} \\ 0 < a < 1 & \text{线性展宽} \end{cases}$$



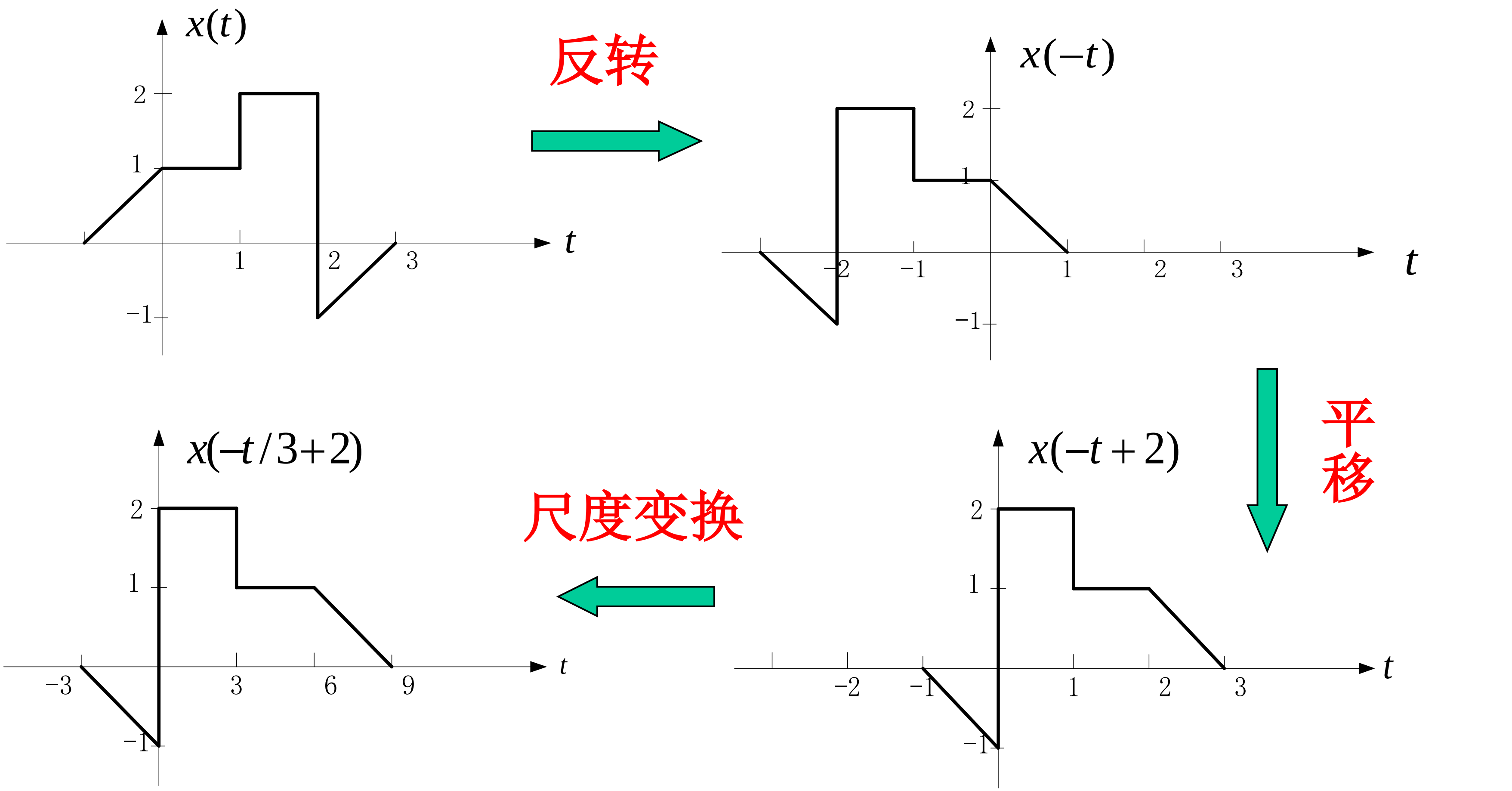
离散信号

$$f(n) \overset{?}{\rightarrow} f(Nn)$$ 抽取

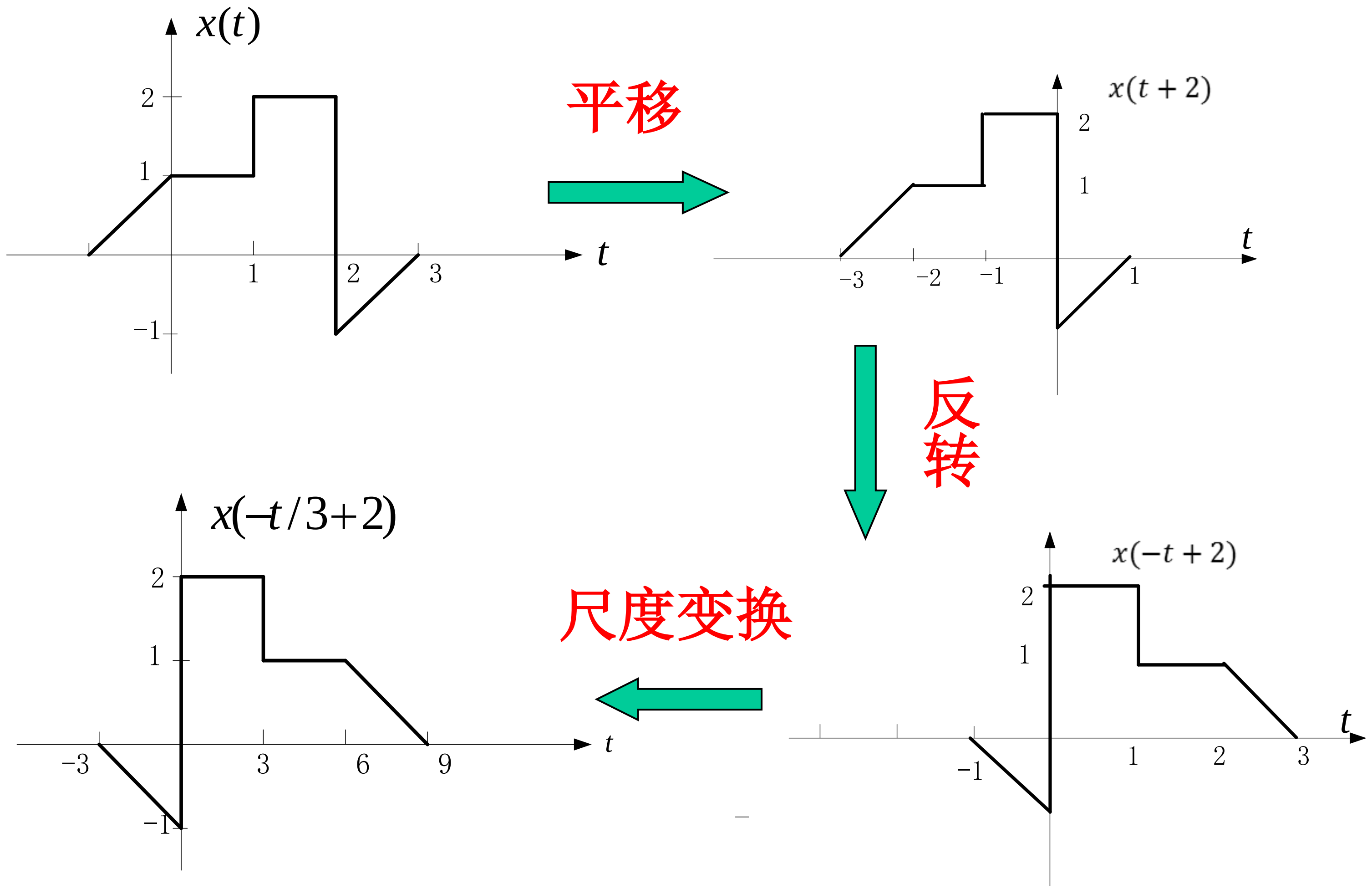
$$f(n) \overset{?}{\rightarrow} f(n/N)$$ 内插

注意: 连续信号与离散信号尺度变换的差别

例1、 信号x(t)的波形如图所示,画出信号x(-t/3+2)的波形.



注意：针对自变量进行变换！



x(t)
2
1
−1
1
2
3
t
平移
x(t + 2)
2
1
−3
−2
−1
1
t
反转
x(−t + 2)
2
1
−1
1
2
3
t
尺度变换
x(−t/3+2)
2
1
−1
−3
3
6
9
t

1.4 常用基本信号

1 正弦信号

$$x(t)=x(t+mT),m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

连续时间正弦信号： 周期信号 **基波周期**：mT的最小值

$$x(t)=A\cos(\Omega_0 t+\phi) \qquad T_0=\frac{1}{f_0}=\frac{2\pi}{\Omega_0}$$

离散时间正弦序列： 周期信号？

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\phi) \qquad N_0:\frac{m}{N}\text{最简分数时的}N$$

$$\cos\omega_0 n=\cos\omega_0(n+N) \qquad \omega_0 N=2\pi m$$

m为整数

满足周期性的条件：

$$\boxed{\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N}\text{为一有理数}}$$

2 指数信号

连续时间指数信号： $x(t) = Ae^{at}$

（1）A, a为实常数：实指数信号

（2）$A=1, a = j\Omega_0$：　周期性复指数信号　$T = 2k\pi/\Omega_0$

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t} = \cos\Omega_0 t + j\sin\Omega_0 t$$

（3）A, a为复数：　复指数信号

$$A = |A|e^{j\theta}, a = \sigma + j\Omega_0$$

$$x(t) = |A|e^{j\theta}e^{(\sigma + j\Omega_0)t}$$

离散时间指数序列： $x(n)=Ka^n$

（1）K,a为实常数： 实指数序列

（2）$K=1, a=e^{j\omega_0}$： 复指数序列

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$$

$e^{j\Omega_0 t}$： 周期信号 $T=2k\pi/\Omega_0$

$e^{j\omega_0 n}$： 周期信号? $N=2\pi m/\omega_0$

满足条件： $\boxed{\dfrac{\omega_0}{2\pi}\text{为一有理数}}$

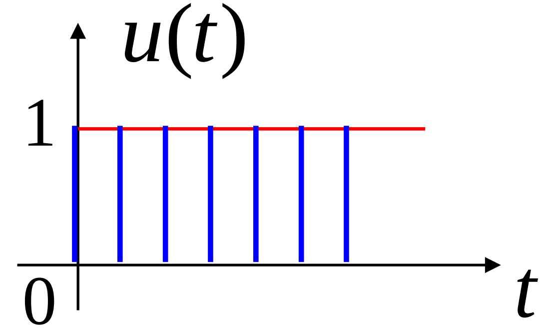
$$\varphi_k(t)=e^{jk\Omega_0 t} \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Omega_0\\ \omega_0\end{array}\right. \rightarrow 0\sim 2\pi \qquad \varphi_k(n)=e^{jk(2\pi/N)n}=\varphi_{k+N}(n)$$

3 单位阶跃信号

连续单位阶跃信号：

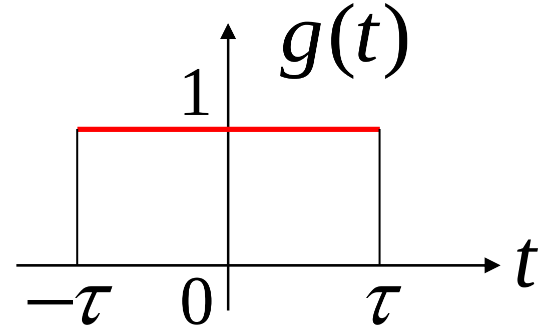
$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



$$x(t)u(t)=\begin{cases}x(t), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

门信号：

$$g(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau\\ 0, & |t|>\tau\end{cases}$$

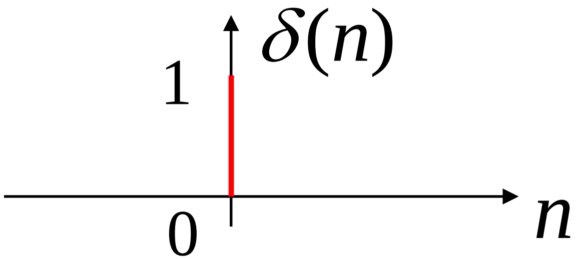


$$g(t)=u(t+\tau)-u(t-\tau)$$ ⇨ 实现信号的分段表示

离散单位阶跃序列： $$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

4 单位脉冲信号

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$



$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)$$

$$x(n)\delta(n-m)=x(m)\delta(n-m)$$

取样性

单位阶跃序列和单位脉冲信号的关系：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

单位阶跃序列的一阶差分

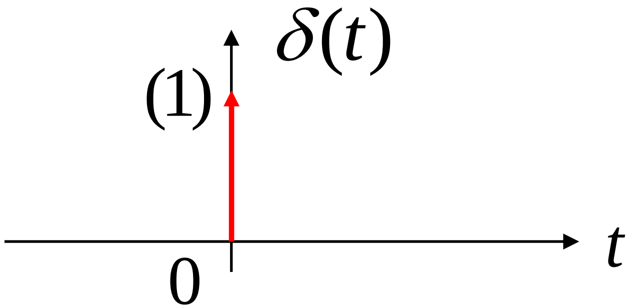
$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

单位脉冲信号的求和

5 单位冲激信号

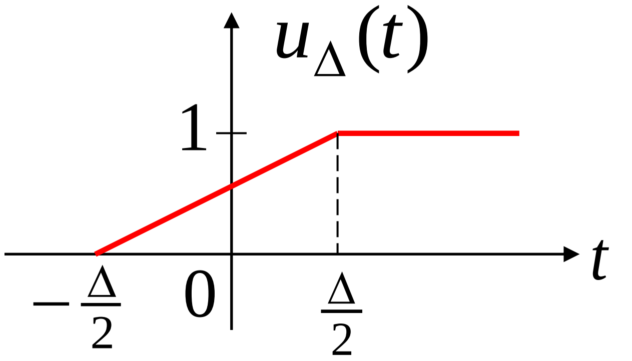
单位冲激函数 $\delta(t)$ 的定义：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{cases}$$

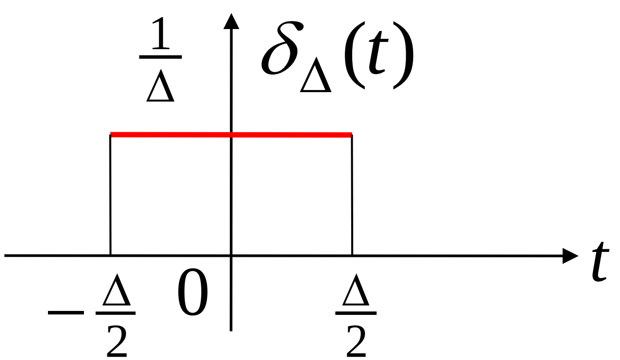


极限的观点：

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_{\Delta}(t) \qquad \delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t)$$



单位阶跃信号和单位冲激信号的关系：

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$$

奇异函数

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的极限定义：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{cases}$$

根据广义函数或分配函数的理论， $\delta(t)$ 定义为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

$x(t)$ 在 $t = 0$ 连续

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)dt$$

$$= x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

1. $\delta(t)$ 的抽样性质：

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$ 单位冲激函数与普通函数相乘

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

2. $\delta(t)$ 是偶函数：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(-t)dt = x(0^-)$$

$x(t)$ 在 $t=0$ 连续 $\qquad x(0^-) = x(0^+) = x(0)$

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(-t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(-\tau)\delta(\tau)d(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(\tau)d\tau = x(0)$$

3. $\delta(t)$ 的微分：

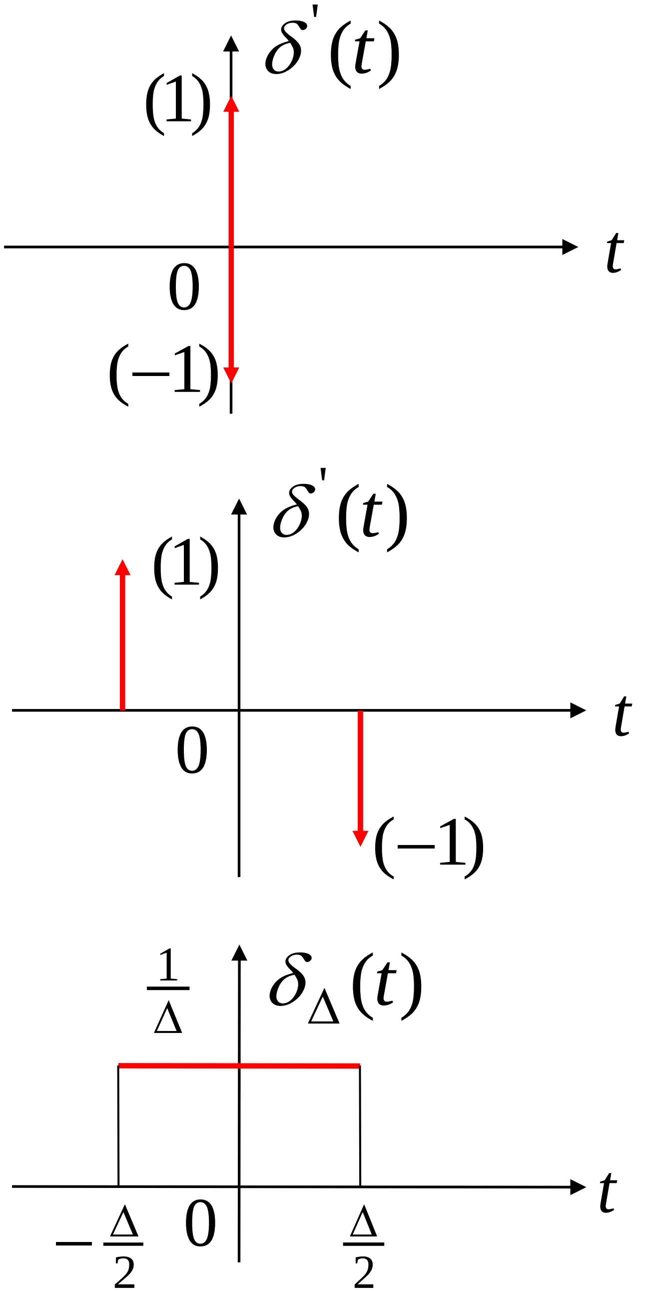
一阶微分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta^{'}(t)dt = -x^{'}(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta'(t)dt$$

$$= x(t)\delta(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\delta(t)dt = -x'(0)$$

$\delta^{'}(t)$ 单位冲激偶 奇函数



高阶微分： $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n \frac{d^n x(t)}{dt^n}\Big|_{t=0}$$

4. $\delta(t)$ 的积分：

一次积分： $$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$$

n次积分： $$\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t}}_{n} \delta(t)\underbrace{dt\cdots dt}_{n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$$

5. $\delta(t)$ 的尺度变换：

$$\boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)}$$

1.5 系统的性质

1、即时系统与动态系统:

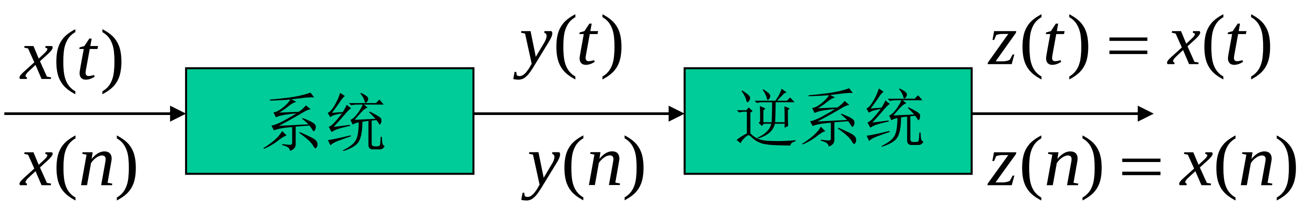
即时系统: $y(t)=kx(t)$ $\quad y(n)=kx(n)$

动态系统: $y(t)=x(t-1)$ $\quad y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(n)$

恒等系统 $y(t)=x(t)$

2、系统的可逆性与逆系统:

可逆系统：输入和输出具有一一对应关系



3、系统的因果性:

因果系统: 如果$t < t_0$, $x(t) = 0$, $y(t) = 0$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(n)$$

非因果系统:

$$y(t) = x(t+1) \qquad y(n) = x(n) - x(n+1)$$

4、系统的稳定性:

稳定系统:有界输入产生有界输出

不稳定系统: $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(n)$

5、时变与时不变系统:

时不变系统: $x(t) \to y(t)$ $\quad x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

$x(n) \to y(n)$ $\quad x(n-n_0) \to y(n-n_0)$

例：判断系统的时不变性

$$y(n) = nx(n)$$

令：$x_1(n) = x(n)$ $\qquad y_1(n) = nx_1(n)$

$x_2(n) = x(n-n_0)$ $\qquad y_2(n) = nx_1(n-n_0)$

$$y_1(n-n_0) = (n-n_0)x_1(n-n_0) \neq y_2(n)$$

所以，$y(n) = nx(n)$ 是时变系统。

5、线性与非线性系统:

齐次性: $x(t) \to y(t) \quad k \cdot x(t) \to k \cdot y(t)$

叠加性: $x_1(t) \to y_1(t)$ $\quad x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

$x_2(t) \to y_2(t)$

$x_1(t), x_2(t) \Rightarrow k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \to k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$

线性系统: 同时满足齐次性和叠加性

线性系统必然具有零输入零输出的特性，反之未必成立。

6、线性时不变系统:

系统同时具有线性和时不变特性

例：判断系统是否为线性时不变系统

$$y(n)=nx(n)$$

齐次性判定： $ax(n) \Rightarrow y(n)=nax(n)=ay(n)$

满足齐次性。

叠加性判定： $x_1(n)+x_2(n) \Rightarrow y(n)=n(x_1(n)+x_2(n))$

$$y(n)=y_1(n)+y_2(n) \Leftarrow y(n)=nx_1(n)+nx_2(n)$$

满足叠加性。

$y(n)=nx(n)$ 是线性系统。

$y(n)=nx(n)$ 是时变系统。

$y(n)=nx(n)$ 不是线性时不变系统。

例：判断系统 $y(t)=x(t)+2$ 是否为线性系统

齐次性判定： $kx(t) \to y(t)=kx(t)+2$

$$ky(t)=kx(t)+2k$$

显然不满足齐次性

叠加性判定： $x_1(t) \to y_1(t)=x_1(t)+2$

$$x_2(t) \to y_2(t)=x_2(t)+2$$

$$x_1(t)+x_2(t) \to y(t)=x_1(t)+x_2(t)+2$$

$$y_1(t)+y_2(t)=x_1(t)+x_2(t)+4$$

显然不满足叠加性

所以系统 $y(t)=x(t)+2$ 不是线性系统

实际上对于系统 $y(t) = x(t) + 2$

如果：$x(t) = 0$， 那么：$y(t) = 2$

不满足线性系统零输入零输出的特性，不是线性系统

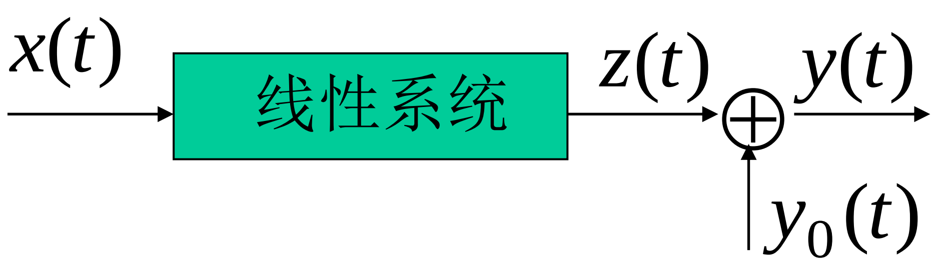
但是：

$$kx_1(t) \rightarrow y_1(t) = kx_1(t) + 2$$

$$kx_2(t) \rightarrow y_2(t) = kx_2(t) + 2$$

$$y_1(t) - y_2(t) = k[x_1(t) - x_2(t)]$$

7、增量线性系统： **输出增量**与**输入增量**之间成线性关系



零状态响应 $z(t)$

零输入响应 $y_0(t)$

系统全响应

$$y(t) = y_0(t) + z(t)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

作业: p43: 1.1 (1)c

1.2 (1)c

1.3 b, c

1.5 b, c

p46: 1.13 a, b, f

1.16

1.19