第四章 离散时间信号与系统的频域分析

教学要求：

1 深刻理解周期信号的离散时间傅立叶级数;

2 深刻理解非周期信号的离散时间傅立叶变换;

3 熟练掌握离散时间傅立叶变换性质;

4 深刻理解离散傅立叶变换（DFT）及其性质；

5 了解DFT快速算法（FFT）的基本思想；

6 熟练掌握离散时间信号与系统的频域分析方法;

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$x(n) = z^n$　　复指数信号　　$\boldsymbol{z = Ae^{j\omega}}$　　$\boldsymbol{z^n = A^n e^{j\omega n}}$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

$$y(n) = \underbrace{z^n}_{\text{特征函数}}\underbrace{H(z)}_{\text{特征值}}$$

$$x(n) = \sum_k a_k z_k^n$$

$$y(n) = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

第一节 周期信号的离散时间傅立叶级数 (DFS)

$$x(n) = x(n+N)$$

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)} \qquad \frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad \to \text{有理数}$$

$e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ ： 周期为N的周期信号

复指数信号集:

$$\phi_k(n) = \{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\phi_k(n) = \phi_{k+N}(n)$$

一、离散时间傅立叶级数(DFS):

$$x(n)=\sum_{k=<N>}\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x(n)=x(n+N)$$

$\dot{A}_k$ 离散时间傅立叶级数的系数

只有N个独立的复指数谐波分量

连续时间傅立叶级数:
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

有无穷多个独立的复指数谐波分量

问题:如何确定离散时间傅立叶级数的系数?

$$x(n)=\sum_{k=<N>}\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{k=<N>}\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$$

$$\sum_{n=<N>}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{n=<N>}\sum_{k=<N>}\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$\sum_{n=<N>}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{k=<N>}\dot{A}_k\sum_{n=<N>}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\dot{A}_r N$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\begin{cases}N, & k=r\text{或}k-r=mN\\ 0, & \text{其它}k\text{值}\end{cases}$$

离散时间傅立叶级数的系数：

$$\dot{A}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\dot{A}_k$：频谱系数　　A_k：　幅度频谱　　$\varphi(k)$：　相位频谱

离散时间傅立叶级数的系数： $\dot{A}_k = \dfrac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

1． $\dot{A}_k = \dot{A}_{k+N}$

$\dot{A}_k$ 是以N为周期的， 离散周期信号的频谱也是周期的

2． $x(n)$ 为实信号时， $\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$

$\dot{A}_k$ 是共轭对称的

$x(n) = x^*(n)$ $\qquad x(n) = \sum_{k=<N>} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

$x^*(n) = \sum_{k=<N>} \dot{A}_k^* e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=<N>} \dot{A}_{-k}^* e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

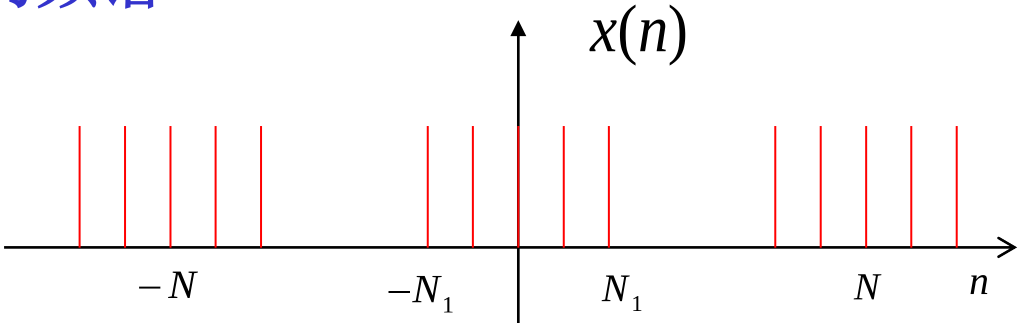
$$\left.\begin{array}{l} x(n) = \sum_{k=<N>} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ x^*(n) = \sum_{k=<N>} \dot{A}_{-k}^* e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{A}_k = \dot{A}_{-k}^* \\ \dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k} \end{array}$$

3. $x(n)$ 频谱的主值周期： $\dot{A}_k \qquad k = [0, N-1]$

4. 不存在收敛性问题

二、周期性矩形脉冲序列的频谱

$$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & N_1<|n|<\frac{N}{2}\end{cases}$$



$(N_1=2, N=10)$

$$\dot{A}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\cdot\frac{e^{j\frac{\pi}{N}k}}{e^{j\frac{\pi}{N}k}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\[2ex] \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{k\pi}{N}} & k\ne 0,\pm N,\pm 2N,\cdots\end{cases}$$

$$\dot{A}_k = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{k\pi}{N}} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \end{cases}$$

频谱绘制：

令： $\omega = \dfrac{2\pi}{N}k$ $\qquad \dot{A}_k = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin[(2N_1+1)\omega/2]}{\sin(\omega/2)}\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ $\qquad \dfrac{\sin\beta x}{\sin x}$

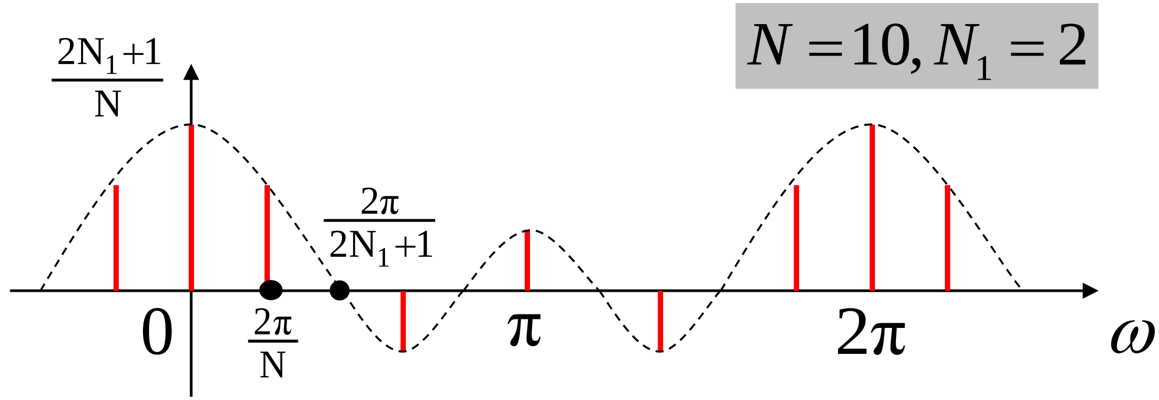
① 将 $0 \sim 2\pi$ 平分为 $2N_1+1$ 等分，作出频谱包络

② 将包络以 $\dfrac{2\pi}{N}$ 为间隔取样并乘以 $\dfrac{1}{N}$

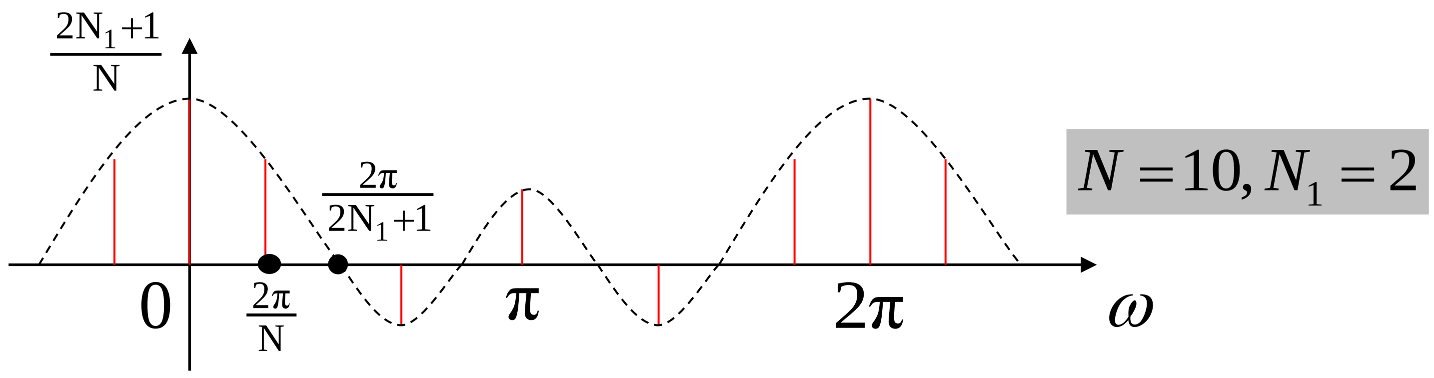
频谱特性：

1 离散性

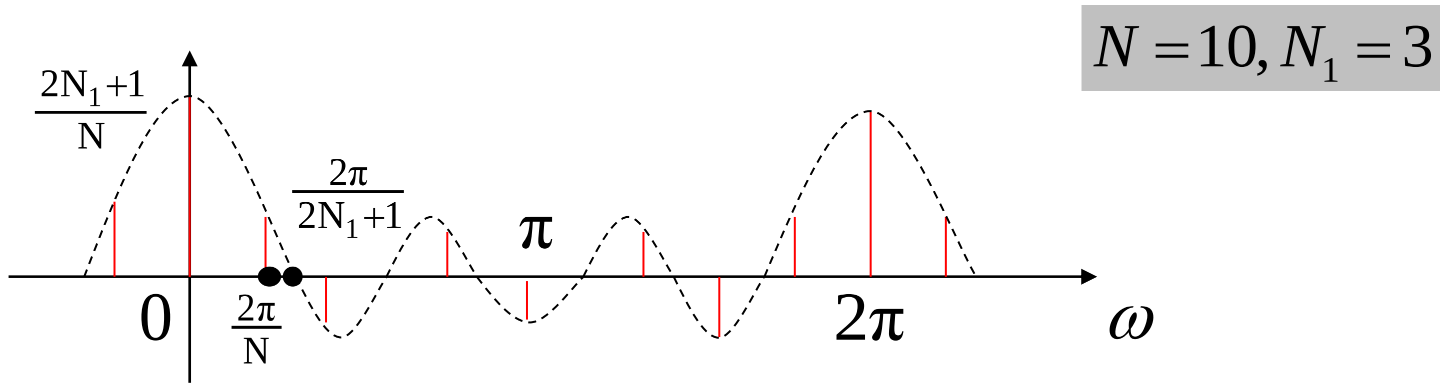
2 周期性



$\dot{A}_k = \dot{A}_{k+N}$， 关于 ω 周期为 2π

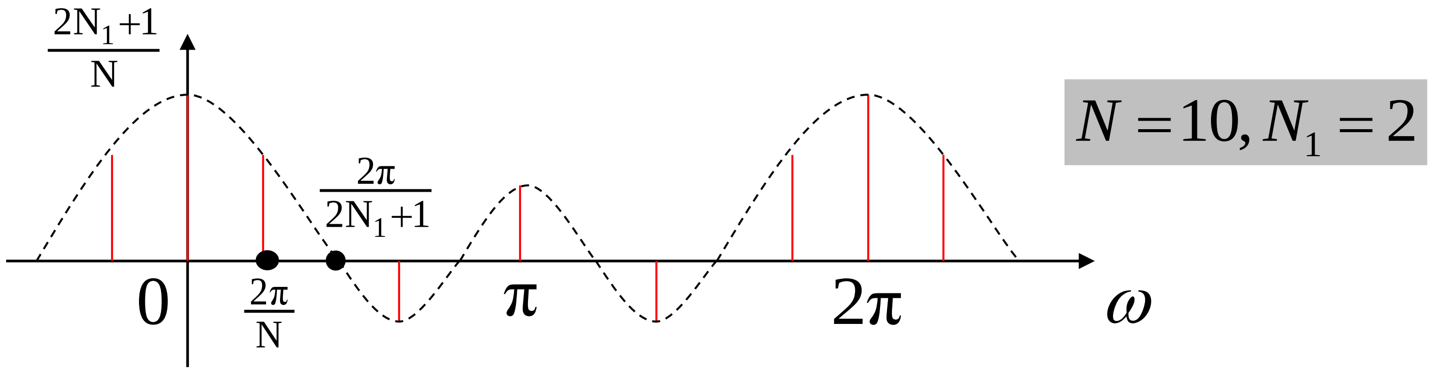


1 N不变，N_1增大

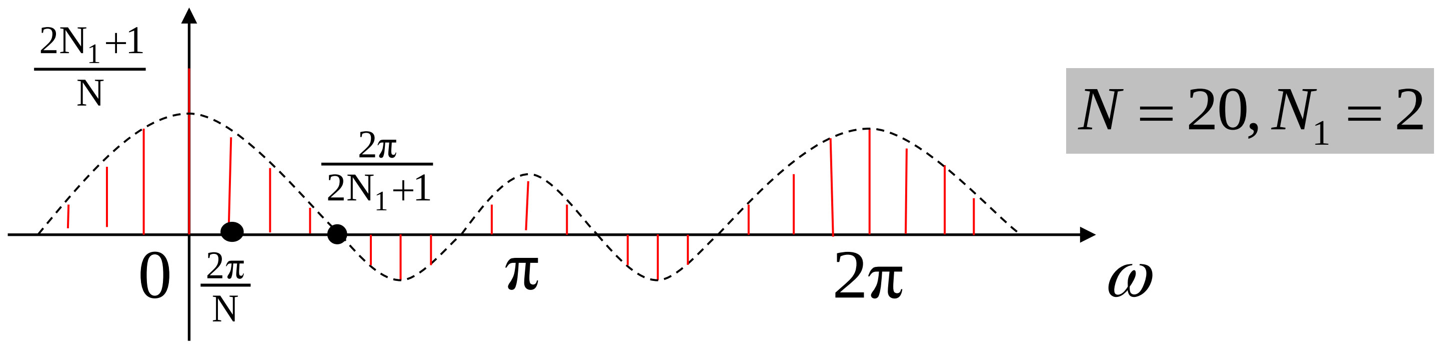


周期不变，谱线间隔不变

脉冲宽度增大，频谱包络主瓣的宽度变窄，幅度增加



2 N增大，N_1不变



脉冲宽度不变，频谱包络形状不变

周期增大，频谱幅度减小，谱线间隔减小　$N\to\infty$ ？

第二节 非周期信号的离散时间傅立叶变换

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-kN)$$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=<N>}\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$

$$\dot{A}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$n\le|N_1|,\quad \tilde{x}(n)=x(n)$$

$$N\dot{A}_k=\sum_{n=-N_1}^{N_1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$N\to\infty,\qquad \frac{2\pi}{N}k\to\omega$$

$$\lim_{N\to\infty}N\dot{A}_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

离散时间傅立叶变换：

(DTFT)

频谱密度

以2π为周期

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{\dot{A}_k = \frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})\Big|_{\omega_0=\frac{2\pi}{N}}}$$

周期信号的频谱系数与相应的非周期信号频谱密度的关系：

$\dot{A}_k$ 是 $X(e^{j\omega})$ 的样本， $X(e^{j\omega})$ 是 $\dot{A}_k$ 的包络。

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=<N>}\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=<N>}\frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=<N>}X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0$$

$N \to \infty,$ $\omega_0 \to d\omega$ $k\omega_0 \to \omega$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅立叶反变换

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} & \text{离散时间傅立叶变换} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega & \text{离散时间傅立叶反变换} \end{cases}$$

离散时间傅立叶变换存在的充分条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$ 一致收敛于 $X(e^{j\omega})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$ 以均方误差等于0的方式收敛于 $X(e^{j\omega})$

注意： 两个条件并不是等价的

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

常用序列的离散时间傅立叶变换：

1 单边指数序列： $x(n)=a^n u(n)$ $|a|<1$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega})=|X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$|X(e^{j\omega})|$ 幅度频谱 偶对称

$\varphi(\omega)$ 相位频谱 奇对称

$X(e^{j\omega})$ 关于 ω 是以 2π 为周期的

2 双边指数序列： $x(n) = a^{|n|} \qquad |a|<1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{j\omega n}$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}$$

$$= \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

3 单位脉冲序列： $x(n)=\delta(n)$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)e^{-j\omega n}=1$$

$x(n)=1 \rightarrow X(e^{j\omega})=?$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

$$x(n)=1 \rightarrow X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$\boxed{1\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)}$$

4 离散符号函数：

$$\operatorname{sgn}(n)=\begin{cases}1, & n>0\\ 0 & n=0\\ -1 & n<0\end{cases}\qquad \lim_{a\to 1}[a^n u(n)-a^{-n}u(-n)]=\operatorname{sgn}(n)$$

$$(0<a<1)$$

$$a^n u(n)\leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\qquad a^{-n}u(-n)\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{0}a^{-n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{j\omega n}$$

$$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}-\frac{1}{1-ae^{j\omega}}=\frac{-2aj\sin\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}\qquad =\frac{1}{1-ae^{j\omega}}$$

$$\operatorname{sgn}(n)\leftrightarrow \lim_{a\to 1}\frac{-2aj\sin\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}=\frac{-j\sin\omega}{1-\cos\omega}$$

5 单位阶跃序列： $x(n)=u(n)$

$$u(n)=\frac{1}{2}[1+\mathrm{sgn}(n)+\delta(n)]$$

$$1\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\qquad \mathrm{sgn}(n)\leftrightarrow\frac{-j\sin\omega}{1-\cos\omega}\qquad \delta(n)\leftrightarrow 1$$

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left(1-\frac{j\sin\omega}{1-\cos\omega}\right)+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-j\omega})}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$$

6 周期信号的离散时间傅立叶变换：

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)} \qquad 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \to x(n)?$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega \ = e^{j\omega_0 n}$$

$$x(n) = \sum_{k=<N>} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 n} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=<N>} 2\pi \dot{A}_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l) \ = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

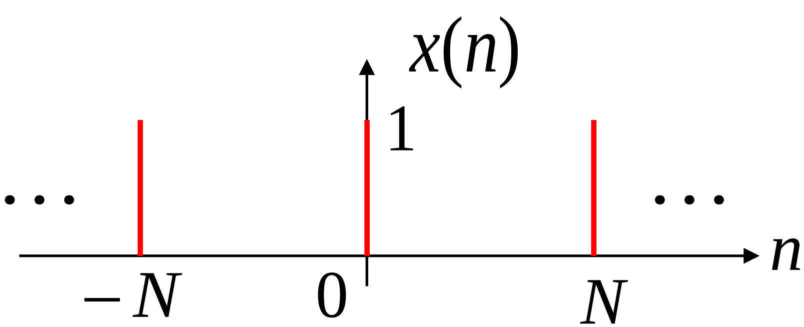
$$\boxed{X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \delta(\omega - \tfrac{2\pi}{N} k)}$$

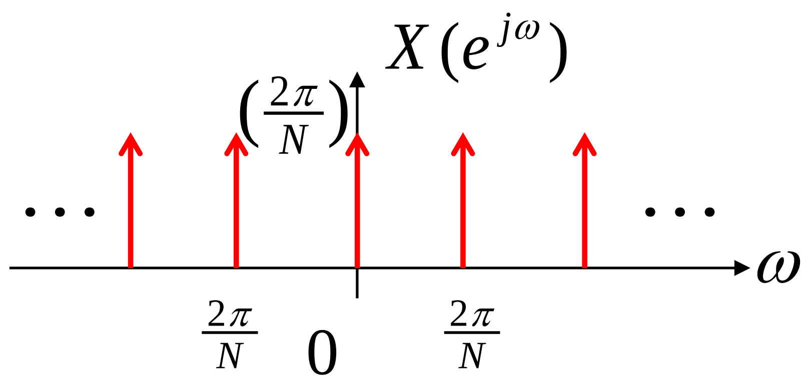
例： $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)\rightarrow X(e^{j\omega})?$

$$\boxed{X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\delta(\omega-\tfrac{2\pi}{N}k)}$$

解： $\dot{A}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\delta(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}$

$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\tfrac{2\pi}{N}k)$$





第四节　离散时间傅立叶变换的性质

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} & \text{离散时间傅立叶变换} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega & \text{离散时间傅立叶反变换} \end{cases}$$

1、周期性

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}e^{j2\pi n} = X(e^{j\omega})$$

$X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的

2、线性特性

$$x_1(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \qquad x_2(n) \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

$$\boldsymbol{a x_1(n) + b x_2(n) \leftrightarrow a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})}$$

3、共轭对称特性

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad \Rightarrow \quad x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$x(n)$ 为实序列 $\Rightarrow$ $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$$\left.\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] + j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] \\ X^*(e^{-j\omega}) &= \mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})] - j\,\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})] \end{aligned}\right\}$$

实部--偶、虚部--奇

模量--偶、相位--奇

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \Rightarrow \begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] \\ X_o(e^{j\omega}) = j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] \end{cases}$$

实偶—实偶

实奇—虚奇

4、时移特性

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad \Longrightarrow \quad x(n-n_0) \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

例： $a^n u(n-2) \to X(e^{j\omega}) = ?$ $\qquad (|a|<1)$

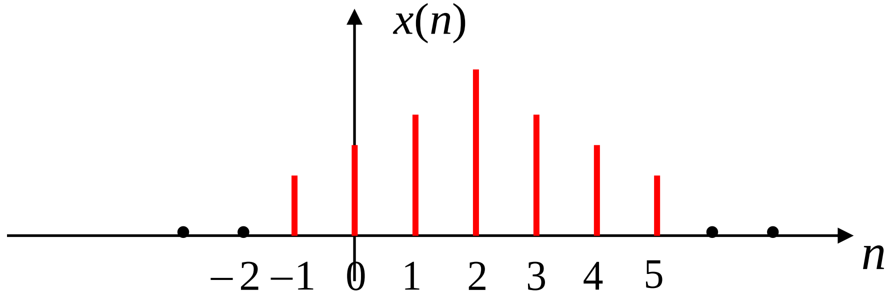
$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

解： $a^n u(n-2) = a^2 a^{n-2} u(n-2)$

$$a^n u(n-2) \to X(e^{j\omega}) = a^2 \cdot \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \cdot e^{-j\omega 2}$$

$$= \frac{a^2 e^{-j\omega 2}}{1-ae^{-j\omega}}$$

例：　$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}),$



若存在一个实数 a，使得 $X(e^{j\omega})e^{j\omega a}$ 为实函数

试确定 a

解：　$X(e^{j\omega})e^{j\omega a}$ 为实函数，　$\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})e^{j\omega a}] = 0$

$X(e^{j\omega})e^{j\omega a} \to x(n+a)$ 为实偶函数

当$a = 2$时，　$x(n+2)$ 为实偶函数

因此，　$a = 2$

5、频移特性

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \Rightarrow x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$

$$= X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

例： $a^n u(n)\cos\omega_0 n \to X(e^{j\omega}) = ?$ $\quad (|a|<1)$

解： $$a^n u(n)\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}[a^n u(n)e^{j\omega_0 n} + a^n u(n)e^{-j\omega_0 n}]$$

$$a^n u(n)\cos\omega_0 n \to \frac{1}{2}[\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\omega_0)}} + \frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\omega_0)}}]$$

6、时域和频域的尺度变换

$$x_{(k)}(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{k}), & n\text{是}k\text{的整倍数} \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

信号内插

$$x_{(k)}(kn)=x(n)$$

信号抽取

$$X_{(k)}(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{(k)}(n)e^{-j\omega n}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_{(k)}(rk)e^{-j\omega rk}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)e^{-j\omega rk}=X(e^{jk\omega})$$

$$\boxed{x_{(k)}(n)\leftrightarrow X(e^{jk\omega})}$$

$$x(-n)\leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

7、时域差分与求和

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

时域差分： $$x(n)-x(n-1) \leftrightarrow (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

时域求和： $$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-2\pi k)$$

连续时间傅立叶变换:

$$\begin{cases} \boxed{1-e^{-j\omega} \rightarrow j\Omega} \\ \boxed{\delta(\Omega) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-2\pi k)} \end{cases}$$

时域微分： $$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\Omega X(\Omega)$$

时域积分： $$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(\Omega)}{j\Omega} + \pi X(0)\delta(\Omega)$$

8、频域微分特性

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad \Rightarrow \quad nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

例： $(n+1)a^n u(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = ?$ $\quad (|a|<1)$

解： $(n+1)a^n u(n) = na^n u(n) + a^n u(n)$

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad na^n u(n) \leftrightarrow \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$\boxed{(n+1)a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}}$$

9、时域卷积特性

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \qquad h(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega})$$

$$x(n) * h(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

例：　证明 $\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) * u(n) \qquad u(n) \leftrightarrow \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow X(e^{j\omega})U(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})\delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

10、频域卷积特性（调制特性）

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \qquad y(n) \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$x(n)y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

周期卷积

例： $a^n u(n)\cos\omega_0 n \rightarrow X(e^{j\omega}) = ?$

解： $a^n u(n) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)]$$

$$a^n u(n)\cos\omega_0 n \rightarrow \frac{1}{2}[\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\omega_0)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\omega_0)}}]$$

11、对偶性　$x(t) \leftrightarrow X(\Omega) \Rightarrow X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$

$$a(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$a(n) = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} x(-k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{cases} x(n) = \sum_{k=<N>} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x(n) \overset{\text{DFS}}{\leftrightarrow} a(k)} \\ \boxed{a(n) \overset{\text{DFS}}{\leftrightarrow} \frac{1}{N} x(-k)} \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$是以2π为周期的函数

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) e^{jkt} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

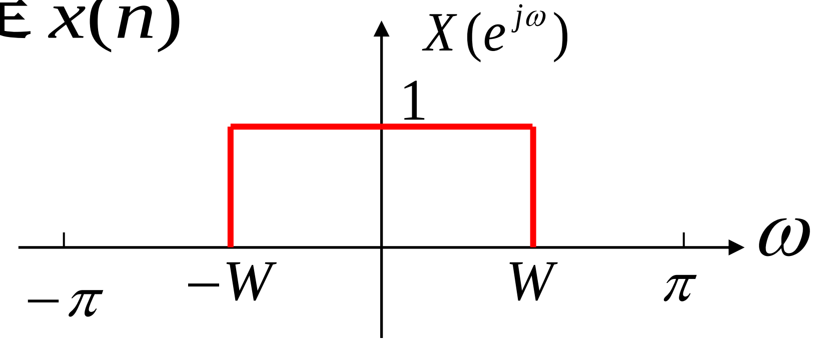
$$a(k) = x(-k)$$

$$\begin{cases} \boxed{x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})} \\ \boxed{X(e^{jt}) \overset{\text{CFS}}{\leftrightarrow} x(-n)} \end{cases}$$

例： 已知信号 $x(n)$ 的离散时间傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$

的一个周期如图所示，试确定 $x(n)$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



分析: $\boxed{x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})}$ $\boxed{X(e^{jt}) \overset{\text{CFS}}{\leftrightarrow} x(-n)}$

解: $\dot{A}_k = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$ $\qquad \Omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}, T = 2\pi$

$$a(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X(e^{jt})e^{-jkt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{-jkt}dt = \frac{\sin Wk}{\pi k}$$

$$\therefore \quad x(n) = a(-n) = \frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} Sa(Wn)$$

第五节　离散LTI系统的频域分析

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

系统的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$h(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega})$$

问题：如何求取离散LTI系统的频率响应？

n 阶离散LTI系统： **n 阶线性常系数差分方程描述**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

两边进行离散时间傅立叶变换:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

例：某松驰状态的离散LTI系统的差分方程为

$$y(n)-\tfrac{5}{6}y(n-1)+\tfrac{1}{6}y(n-2)=x(n)$$

求（1）系统的单位脉冲响应 $h(n)$

（2）若输入信号为 $x(n)=(\dfrac{1}{2})^n u(n)$ 时，求系统的响应 $y(n)$

解：（1）系统的频率响应：

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}=\frac{1}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

$$=\frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$h(n)=3(\tfrac{1}{2})^n u(n)-2(\tfrac{1}{3})^n u(n)$$

（2） $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n) \Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$(n+1)a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

$$=\frac{3}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}-\frac{6}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{4}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$y(n)=3(n+1)(\tfrac{1}{2})^n u(n)-6(\tfrac{1}{2})^n u(n)+4(\tfrac{1}{3})^n u(n)$$

作业： 4.2 (b)

4.6 (b)

4.7 (a) (h)

4.9 (a) (d)

4.19