工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第八节　各种积分的关系及其在场论中的应用

本节主要内容：

- Green公式
- 平面线积分与积分路径无关的条件
- Gauss公式与散度
- Stokes公式与旋度
- 几种重要的特殊向量场

有向曲面的边界曲线的正向

有向曲面的边界曲线的正向

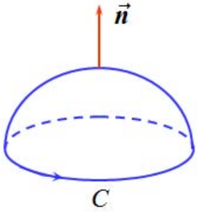
设Σ是具有边界曲线的有向曲面，$\partial\Sigma$表示曲面Σ的边界曲线，规定$\partial\Sigma$的正向如下:

$\partial\Sigma$的方向与有向曲面Σ的法向量的方向符合右手法则.

有向曲面的边界曲线的正向

设Σ是具有边界曲线的有向曲面，$\partial\Sigma$表示曲面Σ的边界曲线，规定$\partial\Sigma$的正向如下：

$\partial\Sigma$的方向与有向曲面Σ的法向量的方向符合右手法则.

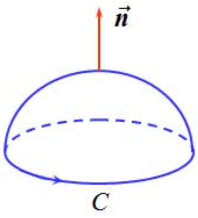


有向曲面的边界曲线的正向

设Σ是具有边界曲线的有向曲面，$\partial\Sigma$表示曲面Σ的边界曲线，规定$\partial\Sigma$的正向如下：

$\partial\Sigma$的方向与有向曲面Σ的法向量的方向符合右手法则.

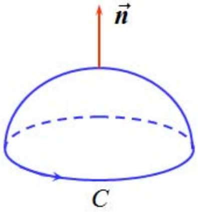
用$\partial\Sigma^+$表示Σ的正向边界曲线.



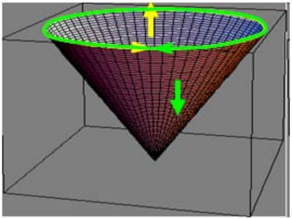
有向曲面的边界曲线的正向

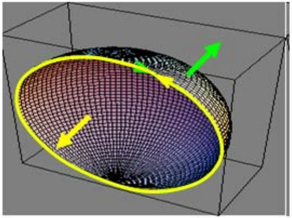
设Σ是具有边界曲线的有向曲面，$\partial\Sigma$表示曲面Σ的边界曲线，规定$\partial\Sigma$的正向如下：

$\partial\Sigma$的方向与有向曲面Σ的法向量的方向符合右手法则.



用$\partial\Sigma^+$表示Σ的正向边界曲线.





Sotkes公式

定理8.5 (Sotkes公式)

Sotkes公式

定理8.5 (Sotkes公式)

(1) Σ是分片光滑有向曲面, 其边界曲线$\partial\Sigma$是分段光滑闭曲线

Sotkes公式

定理8.5 (Sotkes公式)

(1) Σ是分片光滑有向曲面，其边界曲线$\partial\Sigma$是分段光滑闭曲线

(2) 曲面Σ的正侧与其边界曲线$\partial\Sigma$的正向按右手法则

Sotkes公式

定理8.5 (Sotkes公式)

(1) Σ是分片光滑有向曲面, 其边界曲线$\partial\Sigma$是分段光滑闭曲线

(2) 曲面Σ的正侧与其边界曲线$\partial\Sigma$的正向按右手法则

(3) 函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Sigma$上有一阶连续偏导数

Sotkes公式

定理8.5 (Sotkes公式)

(1) Σ是分片光滑有向曲面, 其边界曲线$\partial\Sigma$是分段光滑闭曲线

(2) 曲面Σ的正侧与其边界曲线$\partial\Sigma$的正向按右手法则

(3) 函数$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$在$\Sigma$上有一阶连续偏导数

则

Sotkes公式

定理8.5 (Sotkes公式)

(1) Σ是分片光滑有向曲面，其边界曲线$\partial\Sigma$是分段光滑闭曲线

(2) 曲面Σ的正侧与其边界曲线$\partial\Sigma$的正向按右手法则

(3) 函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在Σ上有一阶连续偏导数

则 $$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Sotkes公式

定理8.5 (Sotkes公式)

(1) Σ是分片光滑有向曲面, 其边界曲线$\partial\Sigma$是分段光滑闭曲线

(2) 曲面Σ的正侧与其边界曲线$\partial\Sigma$的正向按右手法则

(3) 函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Sigma$上有一阶连续偏导数

则 $$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

Stokes公式的行列式形式

$$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Stokes公式的行列式形式

$$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Stokes公式的行列式形式

$$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

Stokes公式的行列式形式

$$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为$\Sigma$在点$(x, y, z)$处的单位法向量.

说明:

说明:

- Stokes公式表达了定向曲面上的第二型曲面积分与曲面的定向边界曲线上的第二型曲线积分之间关系.

说明:

- Stokes公式表达了定向曲面上的第二型曲面积分与曲面的定向边界曲线上的第二型曲线积分之间关系.
- 若Σ为xOy面上一块取上侧的平面区域, $\partial\Sigma$为xOy平面上的闭曲线, 当$R(x,y,z)\equiv 0$时, Stokes公式化为

说明:

- Stokes公式表达了定向曲面上的第二型曲面积分与曲面的定向边界曲线上的第二型曲线积分之间关系.
- 若Σ为xOy面上一块取上侧的平面区域, $\partial\Sigma$为xOy平面上的闭曲线, 当$R(x,y,z)\equiv 0$时, Stokes公式化为

$$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

说明:

- Stokes公式表达了定向曲面上的第二型曲面积分与曲面的定向边界曲线上的第二型曲线积分之间关系.
- 若Σ为xOy面上一块取上侧的平面区域, $\partial\Sigma$为xOy平面上的闭曲线, 当$R(x,y,z)\equiv 0$时, Stokes公式化为

$$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

说明:

- Stokes公式表达了定向曲面上的第二型曲面积分与曲面的定向边界曲线上的第二型曲线积分之间关系.
- 若Σ为xOy面上一块取上侧的平面区域, $\partial\Sigma$为xOy平面上的闭曲线, 当$R(x,y,z)\equiv 0$时, Stokes公式化为

$$\oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

——此即Green公式

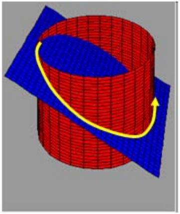
例1. 计算$\oint_\Gamma -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$是平面$y+z=2$与柱面$x^2+y^2=1$的交线, 方向为从原点向$z$轴的正向看去, 取顺时针方向.

例1. 计算$\oint_\Gamma -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$是平面$y+z=2$与柱面$x^2+y^2=1$的交线, 方向为从原点向$z$轴的正向看去, 取顺时针方向.

解: 取Σ为平面$y+z=2$上被曲线Γ所包围的部分, 取上侧,

则 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$,

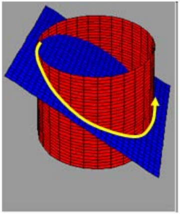
例1. 计算$\oint_{\Gamma} -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$是平面$y+z=2$与柱面$x^2+y^2=1$的交线, 方向为从原点向$z$轴的正向看去, 取顺时针方向.



解: 取Σ为平面$y+z=2$上被曲线Γ所包围的部分, 取上侧,

则 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$,

例1. 计算$\oint_\Gamma -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$是平面$y+z=2$与柱面$x^2+y^2=1$的交线, 方向为从原点向$z$轴的正向看去, 取顺时针方向.

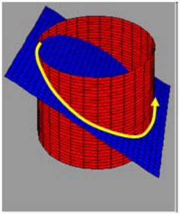


解: 取Σ为平面$y+z=2$上被曲线Γ所包围的部分, 取上侧,

则 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$,

$$I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix}$$

例1. 计算$\oint_\Gamma -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$是平面$y+z=2$与柱面$x^2+y^2=1$的交线, 方向为从原点向$z$轴的正向看去, 取顺时针方向.

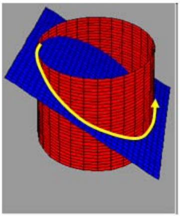


解: 取Σ为平面$y+z=2$上被曲线Γ所包围的部分, 取上侧,

则 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$,

$$I = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \iint_\Sigma (1+2y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

例1. 计算$\oint_{\Gamma} -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$是平面$y+z=2$与柱面$x^2+y^2=1$的交线, 方向为从原点向$z$轴的正向看去, 取顺时针方向.



解: 取Σ为平面$y+z=2$上被曲线Γ所包围的部分, 取上侧,

则 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$,

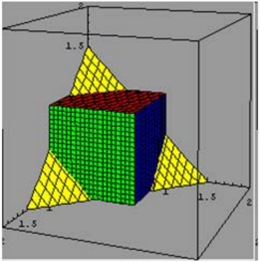
$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y^2 & x & z^2\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}(1+2y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

例2. 计算$I = \oint_\Gamma (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$, 其中 Γ是$x + y + z = \dfrac{3}{2}$截立方体$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$的表面所得的截痕, 方向为从原点向$z$轴正向看去, 取顺时针方向.

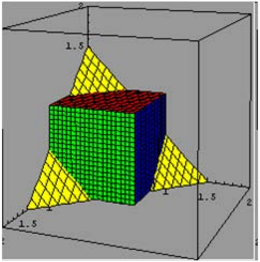
例2. 计算$I=\oint_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中

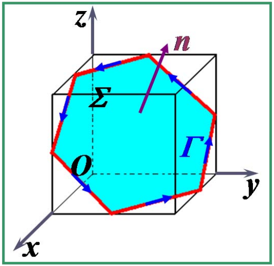
Γ是$x+y+z=\dfrac{3}{2}$截立方体$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$的表面所得的截痕, 方向为从原点向$z$轴正向看去, 取顺时针方向.



例2. 计算$I = \oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中

Γ是$x+y+z=\dfrac{3}{2}$截立方体$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$的表面所得的截痕, 方向为从原点向$z$轴正向看去, 取顺时针方向.





解： 取Σ为平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$上被Γ所围的部分，取上侧，

解： 取Σ为平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$上被Γ所围的部分，取上侧，

平面的单位法向量为$\vec{n}_0=\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$，故由Stokes公式得：

解： 取Σ为平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$上被Γ所围的部分, 取上侧,

平面的单位法向量为$\vec{n}_0=\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$, 故由Stokes公式得：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

解： 取Σ为平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$上被Γ所围的部分，取上侧，

平面的单位法向量为$\vec{n}_0=\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$，故由Stokes公式得：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

解： 取Σ为平面$x+y+z=\frac{3}{2}$上被Γ所围的部分，取上侧，

平面的单位法向量为$\vec{n}_0=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$，故由Stokes公式得：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{9}{2}.$$

环量与环量密度

环量与环量密度

类似平面向量场$\boldsymbol{F}$沿平面闭曲线L的环量，空间向量场$\boldsymbol{F}$沿空间闭曲线Γ的环量为：

环量与环量密度

类似平面向量场$\boldsymbol{F}$沿平面闭曲线L的环量，空间向量场$\boldsymbol{F}$沿空间闭曲线Γ的环量为：

定义

环量与环量密度

类似平面向量场$\boldsymbol{F}$沿平面闭曲线L的环量, 空间向量场$\boldsymbol{F}$沿空间闭曲线Γ的环量为:

定义

向量场函数$\vec{\boldsymbol{F}} = \{P, Q, R\}$沿有向闭曲线$\Gamma$的第二型曲线积分

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \oint_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

称为向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$沿Γ的环量.

环量与环量密度

类似平面向量场$\boldsymbol{F}$沿平面闭曲线L的环量，空间向量场$\boldsymbol{F}$沿空间闭曲线Γ的环量为：

定义

向量场函数$\vec{\boldsymbol{F}} = \{P, Q, R\}$沿有向闭曲线$\Gamma$的第二型曲线积分

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \oint_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

称为向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$沿Γ的**环量**.

环量反映了向量场绕曲线旋转趋势的整体状态.

环量与环量密度

类似平面向量场$\boldsymbol{F}$沿平面闭曲线L的环量，空间向量场$\boldsymbol{F}$沿空间闭曲线Γ的环量为：

定义

向量场函数$\vec{\boldsymbol{F}}=\{P,Q,R\}$沿有向闭曲线$\Gamma$的第二型曲线积分

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}=\oint_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

称为向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$沿Γ的**环量**.

环量反映了向量场绕曲线旋转趋势的整体状态.

但在不同点处，向量场的旋转趋势一般是不同的，因而需要考察向量场中各点处的旋转趋势.

定义

定义

设有连续向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$, 在点$M \in \Omega$取定一个方向$\vec{\boldsymbol{n}}_0$, 以$\vec{\boldsymbol{n}}_0$为法向量, 作一小块曲面$\Delta\Sigma$, 其边界曲线为$\Delta L$, 并选取$\Delta L$的方向使其与$\vec{\boldsymbol{n}}_0$符合右手法则.

定义

设有连续向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$, 在点$M \in \Omega$取定一个方向$\vec{\boldsymbol{n}}_0$, 以$\vec{\boldsymbol{n}}_0$为法向量, 作一小块曲面$\Delta\Sigma$, 其边界曲线为$\Delta L$, 并选取$\Delta L$的方向使其与$\vec{\boldsymbol{n}}_0$符合右手法则. 则向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$沿$\Delta L$的环$\Delta\Gamma$量与小曲面面积$\Delta A$之比$\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \dfrac{1}{\Delta A}\displaystyle\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$近似地反映了$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$在点$M$附近绕方向$\vec{\boldsymbol{n}}_0$ 的旋转趋势大小, 称之为平均环量面密度.

定义

设有连续向量场$\vec{F}(M)(M \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$, 在点$M \in \Omega$取定一个方向$\vec{n}_0$, 以$\vec{n}_0$为法向量, 作一小块曲面$\Delta\Sigma$, 其边界曲线为$\Delta L$, 并选取$\Delta L$的方向使其与$\vec{n}_0$符合右手法则. 则向量场$\vec{F}(M)$沿$\Delta L$的环$\Delta\Gamma$量与小曲面面积$\Delta A$之比$\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \dfrac{1}{\Delta A}\displaystyle\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{s}$近似地反映了$\vec{F}(M)$在点$M$附近绕方向$\vec{n}_0$ 的旋转趋势大小, 称之为**平均环量面密度**.

如果当$\Delta\Sigma$保持$\vec{n}_0$为其法向量, 而任意收缩到点M时, 比式$\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta A}$的极限存在, 则称此极限为$\vec{F}(M)$在点$M$沿方向$\vec{n}_0$的**环量面密度**, 记为$\dfrac{d\Gamma}{dS}$ (或$\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{F}$), 即

定义

设有连续向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^3)$, 在点$M\in\Omega$取定一个方向$\vec{\boldsymbol{n}}_0$, 以$\vec{\boldsymbol{n}}_0$为法向量, 作一小块曲面$\Delta\Sigma$, 其边界曲线为$\Delta L$, 并选取$\Delta L$的方向使其与$\vec{\boldsymbol{n}}_0$符合右手法则. 则向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$沿$\Delta L$的环$\Delta\Gamma$量与小曲面面积$\Delta A$之比$\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta A}=\dfrac{1}{\Delta A}\displaystyle\oint_\Gamma\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$近似地反映了$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$在点$M$附近绕方向$\vec{\boldsymbol{n}}_0$ 的旋转趋势大小, 称之为平均环量面密度.

如果当$\Delta\Sigma$保持$\vec{\boldsymbol{n}}_0$为其法向量, 而任意收缩到点M时, 比式$\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta A}$的极限存在, 则称此极限为$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$在点$M$沿方向$\vec{\boldsymbol{n}}_0$的环量面密度, 记为$\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}$ (或$\mathbf{rot}_{\vec{\boldsymbol{n}}_0}\vec{\boldsymbol{F}}$), 即 $\mathbf{rot}_{\vec{\boldsymbol{n}}_0}\vec{\boldsymbol{F}}=\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}=\displaystyle\lim_{\Delta\Sigma\to M}\dfrac{1}{\Delta A}\oint_\Gamma\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{s}.$

环量面密度的公式

环量面密度的公式

环量面密度表示环量对曲面面积的变化率,

环量面密度的公式

环量面密度表示环量对曲面面积的变化率， 由Stokes公式及积分中值定理可得, 当曲面$\Delta\Sigma$无限收缩到点M时, 有

环量面密度的公式

环量面密度表示环量对曲面面积的变化率， 由Stokes公式及积分中值定理可得, 当曲面$\Delta\Sigma$无限收缩到点M时, 有

$$\lim_{\Delta\Sigma\to M}\frac{1}{\Delta A}\oint_{\Gamma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}=\lim_{\Delta\Sigma\to M}\frac{1}{\Delta A}\iint\limits_{\Sigma}(\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_{M^*}\mathrm{d}A$$

环量面密度的公式

环量面密度表示环量对曲面面积的变化率， 由Stokes公式及积分中值定理可得，当曲面$\Delta\Sigma$无限收缩到点M时，有

$$\lim_{\Delta\Sigma\to M}\frac{1}{\Delta A}\oint_{\Gamma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}=\lim_{\Delta\Sigma\to M}\frac{1}{\Delta A}\iint\limits_{\Sigma}(\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_{M^*}\mathrm{d}A$$

即$\mathbf{rot}_{\vec{\boldsymbol{n}}_0}\vec{\boldsymbol{F}}=\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}=(\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_M$

环量面密度的公式

环量面密度表示环量对曲面面积的变化率， 由Stokes公式及积分中值定理可得，当曲面$\Delta\Sigma$无限收缩到点M时，有

$$\lim_{\Delta\Sigma\to M}\frac{1}{\Delta A}\oint_{\Gamma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}=\lim_{\Delta\Sigma\to M}\frac{1}{\Delta A}\iint_{\Sigma}(\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_{M^*}\mathrm{d}A$$

即$\mathbf{rot}_{\vec{\boldsymbol{n}}_0}\vec{\boldsymbol{F}}=\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}=(\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_M$

$$=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma$$

或 $$\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{F}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

或 $\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

另一方面, $\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = (\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_M = |\vec{\mu}|\cos(\vec{\mu},\vec{n}_0)$

或 $\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

另一方面, $\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = (\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_M = |\vec{\mu}|\cos(\vec{\mu},\vec{n}_0)$

这表明在M点处的环量面密度为向量 $\vec{\mu}$ 在 $\vec{n}_0$ 方向上的投影.

或 $\mathbf{rot}_{\vec{\boldsymbol{n}}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

另一方面, $\mathbf{rot}_{\vec{\boldsymbol{n}}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = (\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_M = |\vec{\mu}|\cos(\vec{\mu},\vec{n}_0)$

这表明在M点处的环量面密度为向量 $\vec{\mu}$ 在 $\vec{n}_0$ 方向上的投影.

问题: 什么方向使得环量面密度最大?

或 $\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

另一方面, $\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = (\vec{\mu}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0)_M = |\vec{\mu}|\cos(\vec{\mu},\vec{n}_0)$

这表明在M点处的环量面密度为向量 $\vec{\mu}$ 在 $\vec{n}_0$ 方向上的投影.

问题： 什么方向使得环量面密度最大?

结论：当$(\vec{\mu},\vec{n}_0)=0$时, 即单位法向量$\vec{n}_0$与向量$\vec{\mu}$ 的方向相同时,

环量面密度$\mathbf{rot}_{\vec{n}_0}\vec{\boldsymbol{F}}$取得最大值.

旋度的定义

定义8.2 (旋度)

旋度的定义

定义8.2 (旋度)

设有向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$, 在点$M \in \Omega$, 若存在一个向量, 其方向是$\vec{\boldsymbol{F}}$在点$M$处环量面密度取最大值的方向, 其模等于环量面密度的最大值, 则称此向量为向量场$\vec{\boldsymbol{F}}$在点M处的旋度, 记为$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}$.

旋度的定义

定义8.2 (旋度)

设有向量场$\vec{F}(M)(M\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^3)$, 在点$M\in\Omega$, 若存在一个向量, 其方向是$\vec{F}$在点$M$处环量面密度取最大值的方向, 其模等于环量面密度的最大值, 则称此向量为向量场$\vec{F}$在点M处的旋度, 记为$\mathbf{rot}\,\vec{F}$.

- 旋度是一个向量.

旋度的定义

定义8.2 (旋度)

设有向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^3)$, 在点$M\in\Omega$, 若存在一个向量, 其方向是$\vec{\boldsymbol{F}}$在点$M$处环量面密度取最大值的方向, 其模等于环量面密度的最大值, 则称此向量为向量场$\vec{\boldsymbol{F}}$在点M处的旋度, 记为$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}$.

- 旋度是一个向量.
- 若向量场$\vec{\boldsymbol{F}}$中每一点M都有旋度$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}$，则形成一个向量场, 称为由向量场$\vec{\boldsymbol{F}}$产生的旋度场.

旋度计算公式

$$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

旋度计算公式

$$\mathbf{rot}\,\vec{F} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

旋度计算公式

$$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}} = \left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

因此, Stokes公式可以写成向量形式:

$$\oint_{\partial\Sigma^+} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

旋度的运算法则

旋度的运算法则

- $\mathbf{rot}(C\vec{A}) = C\mathbf{rot}\,\vec{A}$, 其中$C$为常数;

旋度的运算法则

- $\mathbf{rot}(C\vec{A}) = C\mathbf{rot}\,\vec{A}$, 其中$C$为常数;
- $\mathbf{rot}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathbf{rot}\,\vec{A} \pm \mathbf{rot}\,\vec{B}$;

旋度的运算法则

- $\mathbf{rot}(C\vec{A}) = C\mathbf{rot}\,\vec{A}$, 其中$C$为常数;
- $\mathbf{rot}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathbf{rot}\,\vec{A} \pm \mathbf{rot}\,\vec{B}$;
- $\mathbf{rot}(u\vec{A}) = u\mathbf{rot}\,\vec{A} + \mathbf{grad}u \times \mathbf{rot}\,\vec{A}$, 其中$u$为一数量值函数.

旋度的运算法则

- $\mathbf{rot}(C\vec{A}) = C\mathbf{rot}\,\vec{A}$, 其中$C$为常数;
- $\mathbf{rot}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathbf{rot}\,\vec{A} \pm \mathbf{rot}\,\vec{B}$;
- $\mathbf{rot}(u\vec{A}) = u\mathbf{rot}\,\vec{A} + \mathbf{grad}u \times \mathbf{rot}\,\vec{A}$, 其中$u$为一数量值函数.

例. 求$\vec{F} = (3x^2 - 2yz, y^3 + yz^2, xyz - 3xz^2)$在点$M(1, -2, 2)$ 处的旋度以及在这点沿方向$\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$的环量密度.

几种特殊的场

定义

几种特殊的场

定义

设向量空间场$\vec{F}(M) \in C_{\Omega}(\Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$,

几种特殊的场

定义

设向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}(M) \in C_\Omega(\Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$,

(1) 若空间曲线$\displaystyle\int_L \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 在Ω内与路径无关, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为保守场;

几种特殊的场

定义

设向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}(M) \in C_\Omega(\Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$,

(1) 若空间曲线$\displaystyle\int_L \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 在Ω内与路径无关, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为保守场;

(2) 若在Ω内, 恒有$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\mathbf{0}}$, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为无旋场;

几种特殊的场

定义

设向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}(M) \in C_{\Omega}(\Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$,

(1) 若空间曲线$\displaystyle\int_L \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 在Ω内与路径无关, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为保守场;

(2) 若在Ω内, 恒有$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\mathbf{0}}$, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为无旋场;

(3) 若存在定义在Ω上的函数u, 使得$\vec{\boldsymbol{F}} = \{u_x, u_y, u_z\}$, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为有势场, 并称$u$为势函数.

几种特殊的场

定义

设向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}(M) \in C_{\Omega}(\Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$,

(1) 若空间曲线$\displaystyle\int_L \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 在Ω内与路径无关, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为保守场;

(2) 若在Ω内, 恒有$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\mathbf{0}}$, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为无旋场;

(3) 若存在定义在Ω上的函数u, 使得$\vec{\boldsymbol{F}} = \{u_x, u_y, u_z\}$, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为有势场, 并称$u$为势函数.

(4) 若在Ω内, 恒有$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{F}} = 0$, 则称$\vec{\boldsymbol{F}}$为无源场.

几种特殊的场

定义

设向量空间场$\vec{F}(M) \in C_\Omega(\Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$,

(1) 若空间曲线$\displaystyle\int_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ 在Ω内与路径无关, 则称$\vec{F}$为保守场;

(2) 若在Ω内, 恒有$\mathbf{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$, 则称$\vec{F}$为无旋场;

(3) 若存在定义在Ω上的函数u, 使得$\vec{F} = \{u_x, u_y, u_z\}$, 则称$\vec{F}$为有势场, 并称$u$为势函数.

(4) 若在Ω内, 恒有$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$, 则称$\vec{F}$为无源场.

对于平面向量场, 类似可以定义保守场和有势场.

定义8.7

定义8.7

既无源又无旋的向量空间场$\vec{F}$称为调和场, 即有

定义8.7

既无源又无旋的向量空间场$\vec{F}$称为调和场, 即有

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

定义8.7

既无源又无旋的向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}$称为调和场, 即有

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{0}}.$$

- 调和场$\vec{\boldsymbol{F}}$是无旋场, 故也是有势场, 即存在势函数$u=u(M)$,

使得$\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla u=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$.

定义8.7

既无源又无旋的向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}$称为调和场, 即有

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

- 调和场$\vec{\boldsymbol{F}}$是无旋场, 故也是有势场, 即存在势函数$u=u(M)$,

使得$\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla u=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$.

又因为$\vec{\boldsymbol{F}}$是无源场, 则有$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla\cdot(\nabla u)=0$,

定义8.7

既无源又无旋的向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}$称为**调和场**, 即有

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

- 调和场$\vec{\boldsymbol{F}}$是无旋场, 故也是有势场, 即存在势函数$u=u(M)$,

使得$\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla u=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$.

又因为$\vec{\boldsymbol{F}}$是无源场, 则有$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla\cdot(\nabla u)=0$,

即　$\Delta u=0$, 或　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

定义8.7

既无源又无旋的向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}$称为调和场, 即有

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

- 调和场$\vec{\boldsymbol{F}}$是无旋场, 故也是有势场, 即存在势函数$u=u(M)$,

使得$\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla u=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$.

又因为$\vec{\boldsymbol{F}}$是无源场, 则有$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla\cdot(\nabla u)=0$,

即　$\Delta u=0$, 或　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

上述二阶偏微分方程称为Laplace方程.

定义8.7

既无源又无旋的向量空间场$\vec{\boldsymbol{F}}$称为调和场, 即有

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

- 调和场$\vec{\boldsymbol{F}}$是无旋场, 故也是有势场, 即存在势函数$u=u(M)$,

使得$\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla u=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$.

又因为$\vec{\boldsymbol{F}}$是无源场, 则有$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}=\nabla\cdot(\nabla u)=0$,

即　$\Delta u=0$, 或　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

上述二阶偏微分方程称为Laplace方程.

因此, 调和场的势函数必定满足Laplace方程.