9. z域微分特性 ⟹ 序列的线性加权

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$

则 $nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$ **收敛域R不变**

$$n^m x(n) \leftrightarrow (-z)^m \frac{d^m X(z)}{dz^m}$$

例: $nu(n) \leftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ $(|z|>1)$

$$n^2 u(n) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (|z|>1)$$

10、时域求和性质：

若 $\quad x(n) \leftrightarrow X(z)$

则 $\quad \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z) \qquad R \cap (|z|>1)$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) * u(n) \qquad \boxed{u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}} \qquad (|z|>1)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z)$$

例：求序列$\sum_{k=0}^{n} a^k$的z变换 $\qquad a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad (|z|>a)$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=-\infty}^{n} a^k u(k) \rightarrow \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-a} \qquad |z| > \max(|a|,1)$$

另解：$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}(1-a^{n+1})u(n)$$

$$u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad (|z|>1)$$

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad (|z|>|a|)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \leftrightarrow \frac{1}{1-a}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{az}{z-a}\right) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}$$

$$|z| > \max(|a|, 1)$$

11、初值定理：

若因果序列 $x(n)$ 的z变换为 $X(z)$ 且 $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ 存在

则： $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n} + x(0)$$

$$z[X(z)-x(0)] = x(1)+x(2)z^{-1}+x(3)z^{-2}+\cdots$$

$$x(1)=\lim_{z\to\infty} z[X(z)-x(0)]$$

$$x(2)=\lim_{z\to\infty} z[z[X(z)-x(0)]-x(1)]$$

$$=\lim_{z\to\infty} z^2[X(z)-x(0)-x(1)z^{-1}]$$

$$x(n)=\lim_{z\to\infty} z^n[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k}]$$

12、终值定理：

若**因果序列** $x(n)$ 的z变换为 $X(z)$ 且除了在z=1处允许有一阶极点之外，其余极点都在单位圆之内

则： $$x(\infty)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

注意：只有x(n)的终值存在，才能保证终值定理的正确性

证明：$$Z[x(n+1)-x(n)]=\sum_{n=-1}^{\infty}x(n+1)z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$(z-1)X(z)=zx(0)+\sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to 1}\left[zx(0)+\sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}\right]$$

$$=x(0)+\sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]=x(\infty)$$

例：某因果序列的z变换为

$$X(z)=\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a| \quad a\text{为实数}$$

求: $x(0),\quad x(1),\quad x(2),\quad x(\infty).$

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

$$x(n)=\lim_{z\to\infty}z^{n}[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(k)z^{-k}]$$

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

解： $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{z-a}=1$

$$x(1)=\lim_{z\to\infty}[z\cdot\frac{z}{z-a}-z]=a$$

$$x(2)=\lim_{z\to\infty}z^{2}[\frac{z}{z-a}-1-az^{-1}]=a^{2} \qquad x(n)=a^{n}u(n)$$

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z}{z-a}=\begin{cases}0, & |a|<1 & \checkmark\\ 1, & a=1 & \checkmark\\ 0, & a=-1 & \times\\ 0, & |a|>1 & \times\end{cases}$$

例： 已知因果序列 $x(n)=a^n u(n) \quad (|a|<1)$

求序列的无限和 $\sum_{i=0}^{\infty} x(i)$

解： 设 $f(n)=\sum_{i=0}^{n} x(i)$ $\qquad F(z)=\frac{z}{z-1}X(z)$

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=\sum_{i=0}^{\infty} x(i) \qquad a^n u(n)\leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad (|z|>|a|)$$

$\because \ |a|<1 \quad f(n)$ 存在终值，利用终值定理

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(i)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

$$=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-a}$$

第三节 z 反变换

一、 z反变换的定义：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{z=re^{j\omega}} \qquad x(n)r^{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)(z)^{n}d\omega \qquad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^{n}d\omega$$

$$z=re^{j\omega} \qquad dz=jre^{j\omega}d\omega=jzd\omega$$

$$\boxed{x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}X(z)z^{n-1}dz}$$

其中: C是在收敛域内包围z平面原点的闭合积分路线

二、z反变换的计算：

1. 幂级数展开法

2. 部分分式展开法

3. 围线积分法(留数法)

一. 幂级数展开法

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\cdots+x(-1)z+x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots x(n)z^{-n}+\cdots$$

展开方法:

长除法: 对右边序列, 按z的降幂顺序排列

对左边序列, 按z的升幂顺序排列

对双边序列, 分成两部分， 分别处理

例:　设 $X(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}=\dfrac{2z^2-0.5z}{(z-1)(z+0.5)}$

求其原序列 $x(n)$　(1) $|z|>1$　(2) $|z|<0.5$

解:　(1) $|z|>1$

$$X(z)=\frac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}=2+0.5z^{-1}+1.25z^{-2}+0.875z^{-3}+\cdots$$

$$x(n)=\{2,\quad 0.5,\quad 1.25,\quad 0.875,\quad \cdots\}$$

(2) $|z|<0.5$

$$X(z)=\frac{-0.5z+2z^2}{-0.5-0.5z+z^2}=z-5z^2+7z^3-17z^4+\cdots$$

$$x(n)=\{\cdots,\quad -17,\quad 7,\quad -5,\quad 1\}$$

二. 部分分式展开法

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

1.设 $X(z)$的n个极点均为单阶，将 $\frac{X(z)}{z}$ 展开，

则 $$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-a_1}+\frac{K_2}{z-a_2}+\cdots+\frac{K_n}{z-a_n}$$

其中 $$K_i=(z-a_i)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=a_i}$$

$$\therefore\ X(z)=K_0+K_1\frac{z}{z-a_1}+K_2\frac{z}{z-a_2}+\cdots K_n\frac{z}{z-a_n}$$

$$\begin{cases} \boxed{a^n u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}} & \boxed{(|z|>|a|)} \\ \boxed{-a^n u(-n-1)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}} & \boxed{(|z|<|a|)} \end{cases}$$

需要根据极点与收敛区边界的相对位置关系
分别求取相应的序列

极点位于收敛区内边界或内边界以内 $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{右边序列}}$

极点位于收敛区外边界或外边界以外 $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{左边序列}}$

极点位于收敛区内边界和外边界之外 $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{双边序列}}$

例: $X(z)=\dfrac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$

分别求在下列收敛区条件下的原序列 $x(n)$

(1) $|z|>1$ (2) $0.5<|z|<1$ (3) $|z|<0.5$

解:
$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z-0.5}{z^2-0.5z-0.5}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+0.5}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z+0.5}$$

(1) $|z|>1$ $\quad x(n)=u(n)+(-0.5)^n u(n)$

(2) $0.5<|z|<1$

$$x_r(n)=(-0.5)^n u(n) \qquad x_l(n)=-u(-n-1)$$

$$x(x)=x_r(n)+x_l(n)=(-0.5)^n u(n)-u(-n-1)$$

(3) $|z|<0.5$ $\quad x(k)=-u(-n-1)-(-0.5)^n u(-n-1)$

2.设 $X(z)$有一对共轭单阶极点 $z_{1,2}=c\pm jd$

则 $$\frac{X(z)}{z}=\frac{X_a(z)}{z}+\frac{X_b(z)}{z}$$

$$\frac{X_a(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_2}{z-c+jd}$$

可以证明: $\boxed{K_1=K_2^*}$

$$z_{1,2}=c\pm jd=\alpha e^{\pm j\beta} \qquad \alpha=\sqrt{c^2+d^2} \qquad \beta=\arctan(\frac{d}{c})$$

$$K_1=|K_1|e^{j\theta}, \quad K_2=|K_1|e^{-j\theta},$$

$$\frac{X_a(z)}{z}=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{z-\alpha e^{-j\beta}} \qquad X_a(z)=\frac{z|K_1|e^{j\theta}}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{z|K_1|e^{-j\theta}}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若$|z|>\alpha$, $\qquad x(n)=2|K_1|\alpha^n\cos(\beta n+\theta)u(n)$

若$|z|<\alpha$, $\qquad x(n)=-2|K_1|\alpha^n\cos(\beta n+\theta)u(-n-1)$

3.设 $X(z)$在 $z_1=a$有r重极点，将 $\dfrac{X(z)}{z}$ 展开，

则 $$\frac{X(z)}{z}=\frac{X_a(z)}{z}+\frac{X_b(z)}{z}$$

$$\frac{X_a(z)}{z}=\frac{K_{1r}}{(z-a)^r}+\frac{K_{1(r-1)}}{(z-a)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{12}}{(z-a)^2}+\frac{K_{11}}{z-a}$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{dz^{r-i}}[(z-a)^r\frac{X(z)}{z}]\Big|_{z=a}$$

若$|z|>\alpha$，$x(n)=\left[\frac{K_{1r}}{(r-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)+\cdots+K_{12}(n+1)+K_{11}\right]a^n u(n)$

若$|z|<\alpha$，$x(n)=-\left[\frac{K_{1r}}{(r-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)+\cdots+K_{12}(n+1)+K_{11}\right]a^n u(-n-1)$

第四节　离散时间LTI的 z 域分析方法

对于 N 阶离散系统:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{m} b_k x(n-k)$$

时域求解:　$y(n) = x(n) * h(n)$　　$y(n) = x(n) \circledast h(n)$

频域求解:　$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$　　$Y(k) = X(k) \cdot H(k)$

z 域求解:　$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

如何确定 $H(z)$?

对于 N 阶离散系统： $\sum_{k=0}^{n} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{m} b_k x(n-k)$

利用z变换时移特性： $x(n-k) \leftrightarrow z^{-k} X(z)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k} X(z)$$

系统函数： $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$

系统函数的极点分布与系统的特性：

因果系统： 收敛域为最外边极点的外边

稳定系统： 收敛域一定包含单位圆

因果且稳定系统： 全部极点一定在Z平面单位圆内

用零极点图分析离散LTI系统的时域特性：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}}$$

$$M\ge N,\qquad H(z)=c_0+c_1 z^{-1}+\cdots c_{M-N} z^{M-N}+H_1(z)$$

$$M<N,\qquad H(z)=H_0\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

一阶极点： $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}\qquad h(n)=\sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n u(n)$

r阶重极点： $H(z)=\sum_{k=1}^{r}\frac{B_{1r}}{(1-p_1 z^{-1})^k}+\sum_{k=r+1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$

$$h(n)=\sum_{k=1}^{r}[\frac{B_{1r}}{(r-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)+\cdots B_{12}(n+1)+B_{11}]p_1^n u(n)+\sum_{k=2}^{N} A_k p_k^n u(n)$$

系统函数 $H(z)$

极点决定 $h(n)$ 的特性， 零点只影响 $h(n)$ 的幅值和相位。

1、单位圆内的极点

一阶实极点： $H_k(z)=\dfrac{A_k}{1-az^{-1}}$ $\quad h_k(n)=A_k a^n u(n)$

二阶实极点： $H_k(z)=\dfrac{A_0}{1-az^{-1}}+\dfrac{A_1}{(1-az^{-1})^2}$

$$h_k(n)=A_0 a^n u(n)+A_1(n+1)a^n u(n)$$

共轭成对的复数极点：

$$H_k(z)=\frac{A_k}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{A_k^*}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$h_k(n)=r^n[A_k e^{j\omega_0 n}+A_k^* e^{-j\omega_0 n}]u(n)=2|A_k|r^n\cos(\omega_0 n+\theta)u(n)$$

2、单位圆上的极点

一阶实极点：
$$H_k(z)=\frac{A_k}{1\pm z^{-1}} \qquad h_k(n)=A_k(\pm 1)^n u(n)$$

一阶共轭极点：
$$H_k(z)=\frac{A_k}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{A_k^*}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$h_k(n)=[A_k e^{j\omega_0 n}+A_k^* e^{-j\omega_0 n}]u(n)=2\left|A_k\right|\cos(\omega_0 n+\theta)u(n)$$

3、单位圆上的高阶极点和单位圆外的极点

$$h_k(n)\to\infty$$

例: 已知某LTI松弛离散系统, 当输入 $x(n)=(-\frac{1}{2})^n u(n)$

其响应 $y(n)=[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n+4(-\frac{1}{3})^n-\frac{9}{2}(-\frac{1}{2})^n]u(n)$

求: (1) 系统的单位脉冲响应 $h(n)$

(2) 画出系统函数的零极点图，并判断系统的稳定性、因果性

(3) 系统的差分方程

(4) 系统的模拟框图

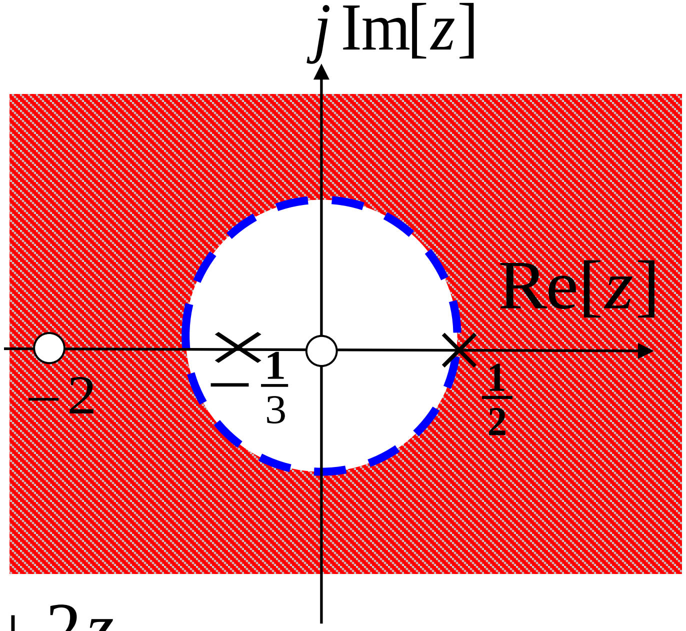
解: (1) $X(z)=\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}} \qquad (|z|>\frac{1}{2})$

$$Y(z)=\frac{\frac{3}{2}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{4z}{z+\frac{1}{3}}-\frac{\frac{9}{2}z}{z+\frac{1}{2}}=\frac{z^3+2z^2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})(z+\frac{1}{2})} \qquad (|z|>\tfrac{1}{2})$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^2+2z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}} \qquad (|z|>\tfrac{1}{2})$$

$$h(n)=[3(\tfrac{1}{2})^n-2(-\tfrac{1}{3})^n]u(n)$$

(2) $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^2+2z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})} \quad (|z|>\frac{1}{2})$



$H(z)$ 全部极点在Z平面单位圆内，

因此，该系统为因果且稳定系统。

(3) $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^2+2z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}=\dfrac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}$

$$(z^2-\tfrac{1}{6}z-\tfrac{1}{6})Y(z)=(z^2+2z)X(z)$$

差分方程: $y(n+2)-\frac{1}{6}y(n+1)-\frac{1}{6}y(n)=x(n+2)+2x(n+1)$

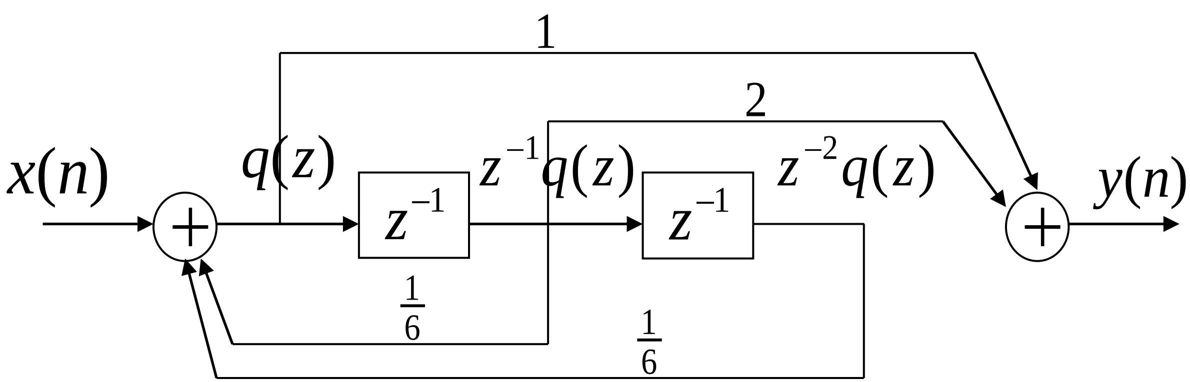
$$(1-\tfrac{1}{6}z^{-1}-\tfrac{1}{6}z^{-2})Y(z)=(1+2z^{-1})X(z)$$

差分方程: $y(n)-\frac{1}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$

(4) $$Y(z)=\frac{(1+2z^{-1})}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}X(z) \qquad q(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}X(z)$$

$$Y(z)=(1+2z^{-1})q(z)$$

$$X(z)=(1-\tfrac{1}{6}z^{-1}-\tfrac{1}{6}z^{-2})q(z)$$



第五节　单边z变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

双边z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

单边z变换

右边(因果)序列,单边z变换与双边z变换相同

双边(非因果)序列,单边z变换与双边z变换不相同

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

双边反z变换

$$x(n)u(n)=[\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz]u(n)$$

单边反z变换

双边z变换的移位性质: $x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

单边z变换的移位性质:

右移: $$\boxed{x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)+z^{-n_0}\sum_{n=-n_0}^{-1}x(n)z^{-n}, \quad n_0>0}$$

左移: $$\boxed{x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0}X(z)-z^{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1}x(n)z^{-n}, \quad n_0>0}$$

证明: $$Z[x(n-n_0)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n-n_0)z^{-n} \overset{m=n-n_0}{=} \sum_{m=-n_0}^{\infty}x(m)z^{-m-n_0}$$

$$=z^{-n_0}\sum_{m=-n_0}^{-1}x(m)z^{-m}+z^{-n_0}\sum_{m=0}^{\infty}x(m)z^{-m}$$

$$=z^{-n_0}X(z)+z^{-n_0}\sum_{n=-n_0}^{-1}x(n)z^{-n}$$

$$x(n-1) \leftrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1)$$

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$$

利用单边变换分析增量线性系统:

例: 初始条件为 $y(-2)=0.5$，　$y(-1)=1$ 的线性常系数差分方程

$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$ 描述的是一个增量线性系统.

若系统输入 $x(n)=u(n)$, 求系统的响应 $y(n)$.

解: 对差分方程两边进行单边变换

$$Y(z)-3[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+2[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)]=X(z)$$

$$[1-3z^{-1}+2z^{-2}]Y(z)-[3y(-1)-2z^{-1}y(-1)-2y(-2)]=X(z)$$

$$Y(z)=\frac{3y(-1)-2z^{-1}y(-1)-2y(-2)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{X(z)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$=\underline{\frac{2-2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}}+\frac{X(z)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$=\underline{\frac{2}{1-2z^{-1}}+\frac{-3}{1-z^{-1}}}+\frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{4}{1-2z^{-1}}$$

$$y(n)=\underline{2\cdot(2)^n u(n)-3u(n)}+[-n+4\cdot(2)^n]u(n)$$

作业：**9.4（c）**

9.12

9.14

9.23