工科数学分析

贺丹（东南大学）

3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法

3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法

定义（隐函数）

设有方程$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$, 如果存在一个$n$ 元函数

$y = \varphi(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, Ω 为一区域) 使得将$y = \varphi(\boldsymbol{x})$

代入方程后成为恒等式

3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法

定义（隐函数）

设有方程$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$, 如果存在一个$n$ 元函数

$y = \varphi(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, Ω 为一区域) 使得将$y = \varphi(\boldsymbol{x})$

代入方程后成为恒等式

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \equiv 0,$$

3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法

定义（隐函数）

设有方程$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$, 如果存在一个$n$ 元函数 $y = \varphi(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, Ω 为一区域) 使得将$y = \varphi(\boldsymbol{x})$ 代入方程后成为恒等式

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \equiv 0,$$

则称$y = \varphi(\boldsymbol{x})$ 是由方程$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$ 确定的隐函数.

定理3.6 (隐函数存在定理)

定理3.6 （隐函数存在定理）

设二元函数$F(x,y)$满足:

(1) 在点(x_0,y_0) 的某一邻域内具有连续偏导数F_x, F_y;

(2) $F(x_0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

定理3.6 (隐函数存在定理)

设二元函数$F(x,y)$满足:

(1) 在点(x_0,y_0) 的某一邻域内具有连续偏导数F_x, F_y;

(2) $F(x_0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y)=0$ 在x_0 的某邻域$U(x_0,\delta)$内唯一确定了一个具有连续导数的函数$y=f(x)$, 它满足$y_0=f(x_0)$及

$F(x,f(x))\equiv 0$ $(x\in U(x_0,\delta))$, 并有

定理3.6 (隐函数存在定理)

设二元函数$F(x,y)$满足:

(1) 在点(x_0,y_0) 的某一邻域内具有连续偏导数F_x, F_y;

(2) $F(x_0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y)=0$ 在x_0 的某邻域$U(x_0,\delta)$内唯一确定了一个具有连续导数的函数$y=f(x)$, 它满足$y_0=f(x_0)$及$F(x,f(x))\equiv 0$ $(x\in U(x_0,\delta))$, 并有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

例1. 验证方程$x^2+y^2-1=0$ 在点$(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个具有连续导数、且当$x=0$ 时$y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$, 并求此函数的一阶导数在$x=0$ 的值.

例1. 验证方程$x^2+y^2-1=0$ 在点$(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个具有连续导数、且当$x=0$ 时$y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$, 并求此函数的一阶导数在$x=0$ 的值.

解: 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$,

例1. 验证方程$x^2+y^2-1=0$ 在点$(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个具有连续导数、且当$x=0$ 时$y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$, 并求此函数的一阶导数在$x=0$ 的值.

解: 设$F(x,y)=x^2+y^2-1,$

则$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F(0,1)=0,\ F_y(0,1)=2\neq 0,$

例1. 验证方程$x^2+y^2-1=0$ 在点$(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个具有连续导数、且当$x=0$ 时$y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$, 并求此函数的一阶导数在$x=0$ 的值.

解: 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$,

则$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F(0,1)=0,\ F_y(0,1)=2\neq 0$,

故由定理3.6可知, 方程$x^2+y^2-1=0$ 在点$(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续导数, 当$x=0$ 时$y=1$ 的隐函数$y=f(x)$, 且

例1. 验证方程$x^2+y^2-1=0$ 在点$(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个具有连续导数、且当$x=0$ 时$y=1$ 的隐函数$y=f(x)$, 并求此函数的一阶导数在$x=0$ 的值.

解: 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$,

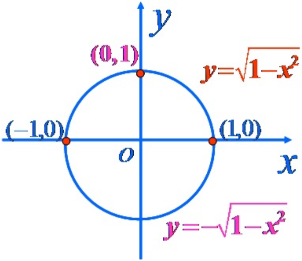
则$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F(0,1)=0,\ F_y(0,1)=2\neq 0$,

故由定理3.6可知, 方程$x^2+y^2-1=0$ 在点$(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续导数, 当$x=0$ 时$y=1$ 的隐函数$y=f(x)$, 且

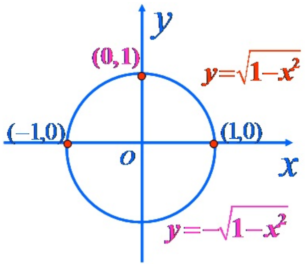
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0.$$

方程$x^2 + y^2 - 1 = 0$ 表示单位圆.

方程$x^2+y^2-1=0$ 表示单位圆.



方程$x^2+y^2-1=0$ 表示单位圆.
从图中直观地可见, 只要
$(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$, 则在$(x_0, y_0)$
附近的一段圆弧曲线的方程就可用
$y=f(x)$ 表示.



方程$x^2+y^2-1=0$ 表示单位圆.

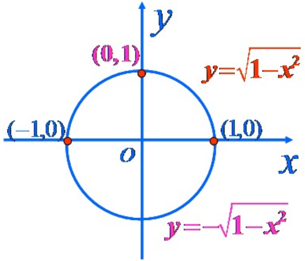
从图中直观地可见, 只要

$(x_0,y_0)\neq(\pm1,0)$, 则在(x_0,y_0)

附近的一段圆弧曲线的方程就可用

$y=f(x)$ 表示.

$(y=\sqrt{1-x^2}$ 或$y=-\sqrt{1-x^2})$.



方程$x^2+y^2-1=0$ 表示单位圆.

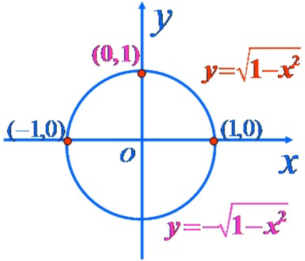
从图中直观地可见, 只要

$(x_0,y_0)\neq(\pm1,0)$, 则在(x_0,y_0)

附近的一段圆弧曲线的方程就可用

$y=f(x)$ 表示.

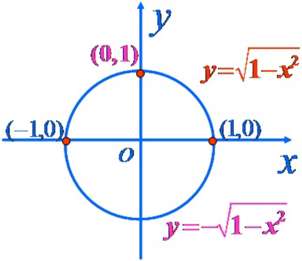
$(y=\sqrt{1-x^2}$ 或$y=-\sqrt{1-x^2})$.



又当$(x_0,y_0)=(\pm1,0)$ 时, $F_y(x_0,y_0)=0$;

当$(x_0,y_0)\neq(\pm1,0)$ 时, $F_y(x_0,y_0)\neq0$.

方程$x^2+y^2-1=0$ 表示单位圆.
从图中直观地可见, 只要
$(x_0,y_0)\neq(\pm1,0)$, 则在(x_0,y_0)
附近的一段圆弧曲线的方程就可用
$y=f(x)$ 表示.
$(y=\sqrt{1-x^2}$ 或$y=-\sqrt{1-x^2})$.



又当$(x_0,y_0)=(\pm1,0)$ 时, $F_y(x_0,y_0)=0$;
当$(x_0,y_0)\neq(\pm1,0)$ 时, $F_y(x_0,y_0)\neq0$.

由此可见定理3.6中条件$F_y(x_0,y_0)\neq0$ 的重要性.

例2. 求由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$所确定的隐函数

$y=y(x)$ 的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

例2. 求由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 设$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$, 则

例2. 求由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 设$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$, 则

$$F_x=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{-\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

例2. 求由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 设$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$, 则

$$F_x=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{-\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

定理3.6'

设$n+1$元函数$F(x_1,\cdots,x_n,y)$满足下列条件:

(1) 在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)$的某邻域内具有连续的偏导数;

(2) $F(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)\neq 0$,

定理3.6'

设$n+1$元函数$F(x_1,\cdots,x_n,y)$满足下列条件:

(1) 在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)$的某邻域内具有连续的偏导数;

(2) $F(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)\neq 0$,

则方程$F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$在$M_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$的某邻域$U(M_0,\delta)$内唯一确定了一个具有连续偏导数的函数$y=f(x_1,\cdots,x_n)$,它满足$y_0=f(x_1^0,\cdots,x_n^0)$及$F(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0$ $((x_1,\cdots,x_n)\in U(M_0,\delta))$, 并有

定理3.6'

设$n+1$元函数$F(x_1,\cdots,x_n,y)$满足下列条件:

(1) 在点$(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)$的某邻域内具有连续的偏导数;

(2) $F(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)\neq 0$,

则方程$F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$在$M_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$的某邻域$U(M_0,\delta)$内唯一确定了一个具有连续偏导数的函数$y=f(x_1,\cdots,x_n)$,它满足$y_0=f(x_1^0,\cdots,x_n^0)$及$F(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0$ $((x_1,\cdots,x_n)\in U(M_0,\delta))$, 并有

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y},\quad i=1,\cdots,n.$$

定理

设三元元函数$F(x,y,z)$满足下列条件:

(1) 在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内具有连续的偏导数F_x, F_y, F_z;

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

(3) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

定理

设三元元函数$F(x,y,z)$满足下列条件:

(1) 在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内具有连续的偏导数F_x, F_y, F_z;

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

(3) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y,z)=0$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(M_0,\delta)$内唯一确定了一个具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$, 它满足$z_0=f(x_0,y_0)$及$F(x,y,z)\equiv 0$ $((x,y)\in U(M_0,\delta))$, 并有

定理

设三元元函数$F(x,y,z)$满足下列条件:

(1) 在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内具有连续的偏导数F_x, F_y, F_z;

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

(3) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y,z)=0$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(M_0,\delta)$内

唯一确定了一个具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$, 它满足

$z_0=f(x_0,y_0)$及$F(x,y,z)\equiv 0$ $((x,y)\in U(M_0,\delta))$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1: 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$,

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2： $x^2+2y^2+3z^2=4$,

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1: 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2: $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2： $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0,$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2： $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0, \quad \therefore \mathrm{d}z=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y.$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2： $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0, \quad \therefore \mathrm{d}z=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3z}.$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解法1: 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2: $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0, \quad \therefore \mathrm{d}z=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3z}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2： $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0, \quad \therefore \mathrm{d}z=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3z}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2： $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0,\qquad \therefore \mathrm{d}z=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3z}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{x}{3}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解法1: 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2: $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0, \quad \therefore \mathrm{d}z=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3z}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{x}{3}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{3z^2}\left(-\frac{2y}{3z}\right)$$

例3. 设$x^2+2y^2+3z^2=4$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解法1： 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$,

则$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{3z}.$$

解法2： $x^2+2y^2+3z^2=4$, 微分得:

$$2x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+6z\mathrm{d}z=0, \qquad \therefore \mathrm{d}z=-\frac{x}{3z}\mathrm{d}x-\frac{2y}{3z}\mathrm{d}y.$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3z}.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{x}{3}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{3z^2}\left(-\frac{2y}{3z}\right)=-\frac{2xy}{9z^3}.$$

例4. 设$z=z(x,y)$ 是由方程$F(x-az,y-bz)=0$ 所确定的隐函数, 其中a, b 为常数, F 具有一阶连续偏导数, 证明:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

例4. 设$z=z(x,y)$ 是由方程$F(x-az,y-bz)=0$ 所确定的隐函数, 其中a, b 为常数, F 具有一阶连续偏导数, 证明:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

解: 设$\varphi(x,y,z)=F(x-az,y-bz)$, 则

例4. 设$z=z(x,y)$ 是由方程$F(x-az,y-bz)=0$ 所确定的隐函数, 其中a, b 为常数, F 具有一阶连续偏导数, 证明:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

解: 设$\varphi(x,y,z)=F(x-az,y-bz)$, 则

$$\varphi_x=F_1,\quad \varphi_y=F_2,\quad \varphi_z=-aF_1-bF_2,$$

例4. 设$z=z(x,y)$ 是由方程$F(x-az,y-bz)=0$ 所确定的隐函数, 其中a, b 为常数, F 具有一阶连续偏导数, 证明:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

解: 设$\varphi(x,y,z)=F(x-az,y-bz)$, 则

$$\varphi_x=F_1,\quad \varphi_y=F_2,\quad \varphi_z=-aF_1-bF_2,$$

所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z}=\dfrac{F_1}{aF_1+bF_2}$,

例4. 设$z=z(x,y)$ 是由方程$F(x-az,y-bz)=0$ 所确定的隐函数, 其中a, b 为常数, F 具有一阶连续偏导数, 证明:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

解: 设$\varphi(x,y,z)=F(x-az,y-bz)$, 则

$$\varphi_x=F_1,\quad \varphi_y=F_2,\quad \varphi_z=-aF_1-bF_2,$$

所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z}=\dfrac{F_1}{aF_1+bF_2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\varphi_y}{\varphi_z}=\dfrac{F_2}{aF_1+bF_2}$,

例4. 设$z=z(x,y)$ 是由方程$F(x-az,y-bz)=0$ 所确定的隐函数，其中a, b 为常数，F 具有一阶连续偏导数，证明：

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

解: 设$\varphi(x,y,z)=F(x-az,y-bz)$, 则

$$\varphi_x=F_1,\quad \varphi_y=F_2,\quad \varphi_z=-aF_1-bF_2,$$

所以$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_z}=\frac{F_1}{aF_1+bF_2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi_y}{\varphi_z}=\frac{F_2}{aF_1+bF_2}$,

故 $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{aF_1}{aF_1+bF_2}+\frac{bF_2}{aF_1+bF_2}=1.$$

例5. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程

$x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

例5. 设$u = f(x,y,z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x,y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2e^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

例5. 设$u = f(x,y,z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x,y)$ 是由方程

$x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2e^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\quad u_y(x,y) = \mathrm{e}^x z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$,

例5. 设$u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z=z(x,y)$ 是由方程

$x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y)=\mathrm{e}^x yz^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $u_y(x,y)=\mathrm{e}^x z^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x,y,z)=x+y+z+xyz$,

例5. 设$u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y)=\mathrm{e}^x yz^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $u_y(x,y)=\mathrm{e}^x z^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x,y,z)=x+y+z+xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{1+yz}{1+xy}$

例5. 设$u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x}yz^{2}$, 其中$z=z(x,y)$ 是由方程

$x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y)=\mathrm{e}^{x}yz^{2}+2\mathrm{e}^{x}yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $u_y(x,y)=\mathrm{e}^{x}z^{2}+2\mathrm{e}^{x}yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x,y,z)=x+y+z+xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{1+yz}{1+xy}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{1+xz}{1+xy}$,

例5. 设$u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z=z(x,y)$ 是由方程

$x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y)=\mathrm{e}^x yz^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\quad u_y(x,y)=\mathrm{e}^x z^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x,y,z)=x+y+z+xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{1+yz}{1+xy}\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{1+xz}{1+xy}$,

$$\therefore u_x(x,y)=\mathrm{e}^x yz^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\left(-\frac{1+yz}{1+xy}\right),$$

例5. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$，其中$z = z(x, y)$ 是由方程

$x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数，求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\quad u_y(x, y) = \mathrm{e}^x z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x, y, z) = x + y + z + xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{1 + yz}{1 + xy}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{1 + xz}{1 + xy}$,

$$\therefore u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \left(-\frac{1 + yz}{1 + xy}\right),$$

$$u_y(x, y) = \mathrm{e}^x z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \left(-\frac{1 + xz}{1 + xy}\right),$$

例5. 设$u = f(x,y,z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x,y)$ 是由方程

$x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $u_y(x,y) = \mathrm{e}^x z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x,y,z) = x + y + z + xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{1+yz}{1+xy}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{1+xz}{1+xy}$,

$$\therefore u_x(x,y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \left(-\frac{1+yz}{1+xy}\right),$$

$$u_y(x,y) = \mathrm{e}^x z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \left(-\frac{1+xz}{1+xy}\right),$$

由$x + y + z + xyz = 0$可得, 当$x = 0, y = 1$ 时, $z = -1$.

例5. 设$u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z=z(x,y)$ 是由方程

$x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y)=\mathrm{e}^x yz^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $u_y(x,y)=\mathrm{e}^x z^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x,y,z)=x+y+z+xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{1+yz}{1+xy}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{1+xz}{1+xy}$,

$$\therefore u_x(x,y)=\mathrm{e}^x yz^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot(-\frac{1+yz}{1+xy}),$$

$$u_y(x,y)=\mathrm{e}^x z^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot(-\frac{1+xz}{1+xy}),$$

由$x+y+z+xyz=0$可得, 当$x=0,y=1$ 时, $z=-1$.

则$u_x(0,1,-1)=1$, $u_y(0,1,-1)=3$,

例5. 设$u = f(x,y,z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x,y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$\mathrm{d}u|_{(0,1)}$.

解: $u_x(x,y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\quad u_y(x,y) = \mathrm{e}^x z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$,

设$F(x,y,z) = x + y + z + xyz$,

$$\text{则}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1+yz}{1+xy}\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1+xz}{1+xy},$$

$$\therefore u_x(x,y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \left(-\frac{1+yz}{1+xy}\right),$$

$$u_y(x,y) = \mathrm{e}^x z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \left(-\frac{1+xz}{1+xy}\right),$$

由$x + y + z + xyz = 0$可得, 当$x = 0, y = 1$ 时, $z = -1$.

则$u_x(0,1,-1) = 1$, $u_y(0,1,-1) = 3$, 故$\mathrm{d}u|_{(0,1)} = \mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y$.