工科数学分析

贺丹（东南大学）

第四节 空间曲面与曲线

本节主要内容：

第四节 空间曲面与曲线

本节主要内容:

- 球面与柱面

第四节 空间曲面与曲线

本节主要内容:

- 球面与柱面
- 空间曲线

第四节 空间曲面与曲线

本节主要内容：

- 球面与柱面
- 空间曲线
- 锥面

第四节 空间曲面与曲线

本节主要内容：

- 球面与柱面
- 空间曲线
- 锥面
- 旋转曲面的方程

第四节 空间曲面与曲线

本节主要内容：

- 球面与柱面
- 空间曲线
- 锥面
- 旋转曲面的方程
- 几个常见的二次曲面

第四节 空间曲面与曲线

本节主要内容:

- 球面与柱面
- 空间曲线
- 锥面
- 旋转曲面的方程
- 几个常见的二次曲面
- 曲面的参数方程

本节以两种方式来讨论空间曲面：

本节以两种方式来讨论空间曲面：

1. 已知曲面的形状，建立这曲面的方程；

本节以两种方式来讨论空间曲面：

1. 已知曲面的形状，建立这曲面的方程；
2. 已知一个三元方程，研究这个方程所表示的几何体的形状.

一、球面与柱面

一、球面与柱面

1. 球面

一、球面与柱面

1. 球面

空间中与一定点等距离的点的轨迹叫球面.

一、球面与柱面

1. 球面

空间中与一定点等距离的点的轨迹叫球面.

求球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面方程.

一、球面与柱面

1. 球面

空间中与一定点等距离的点的轨迹叫球面.

求球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为R的球面方程.

设$M(x,y,z)$为球面上的任一点，则有$|M_0M|=R$,

一、球面与柱面

1. 球面

空间中与一定点等距离的点的轨迹叫球面.

求球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面方程.

设$M(x, y, z)$为球面上的任一点，则有$|M_0M| = R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

一、球面与柱面

1. 球面

空间中与一定点等距离的点的轨迹叫球面.

求球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为R的球面方程.

设$M(x,y,z)$为球面上的任一点，则有$|M_0M|=R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

化简得 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$

一、球面与柱面

1. 球面

空间中与一定点等距离的点的轨迹叫球面.

求球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为R的球面方程.

设$M(x,y,z)$为球面上的任一点，则有$|M_0M|=R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

化简得 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$

球面上所有点的坐标都满足该方程;

一、球面与柱面

1. 球面

空间中与一定点等距离的点的轨迹叫球面.

求球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面方程.

设$M(x, y, z)$为球面上的任一点，则有$|M_0M| = R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

化简得 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2.$

球面上所有点的坐标都满足该方程；反之，不在球面上的点，其坐标都不满足该方程，因此，上述方程为球面方程.

- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时,

- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时,

即得球心在原点的球面方程

- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时,

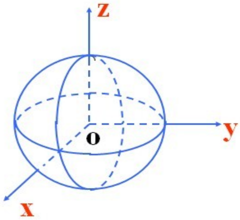
即得球心在原点的球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时，

即得球心在原点的球面方程

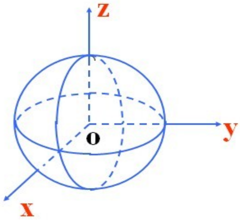
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时，

即得球心在原点的球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



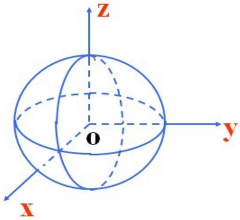
例1. 指出方程$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

表示何种曲面.

- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时,

即得球心在原点的球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



例1. 指出方程$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

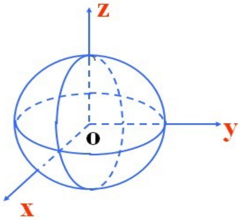
表示何种曲面.

解：化简方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$,

- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时,

即得球心在原点的球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



例1. 指出方程$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

表示何种曲面.

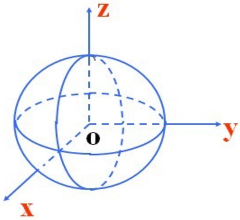
解：化简方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$,

得: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3^2.$

- 当$x_0 = y_0 = z_0 = 0$时,

即得球心在原点的球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



例1. 指出方程$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

表示何种曲面.

解：化简方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$,

得: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$.

故方程表示以$(-1, 2, 3)$为球心，3为半径的球面.

2. 柱面

2. 柱面

动直线L沿给定曲线C平行移动所形成的曲面，称为柱面.

2. 柱面

动直线L沿给定曲线C平行移动所形成的曲面，称为柱面.

动直线L称为柱面的母线，定曲线C称为柱面的准线.

2. 柱面

动直线L沿给定曲线C平行移动所形成的曲面，称为柱面.

动直线L称为柱面的母线，定曲线C称为柱面的准线.

现在来建立以Oxy平面上的曲线

$$C:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$ 为准线,

以平行于z轴的直线L为母线的柱面方程.

2. 柱面

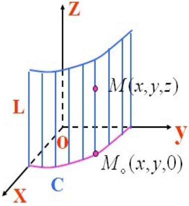
动直线L沿给定曲线C平行移动所形成的曲面，称为柱面.

动直线L称为柱面的母线，定曲线C称为柱面的准线.

现在来建立以Oxy平面上的曲线

$$C:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$ 为准线,

以平行于z轴的直线L为母线的柱面方程.



2. 柱面

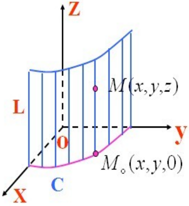
动直线L沿给定曲线C平行移动所形成的曲面，称为柱面.

动直线L称为柱面的母线，定曲线C称为柱面的准线.

现在来建立以Oxy平面上的曲线

$$C:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$ 为准线,

以平行于z轴的直线L为母线的柱面方程.



在柱面上任意取一点$M(x,y,z)$,

2. 柱面

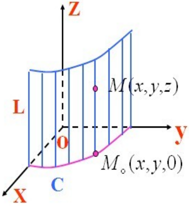
动直线L沿给定曲线C平行移动所形成的曲面，称为柱面.

动直线L称为柱面的母线，定曲线C称为柱面的准线.

现在来建立以Oxy平面上的曲线

$$C:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$ 为准线,

以平行于z轴的直线L为母线的柱面方程.



在柱面上任意取一点$M(x,y,z)$, 过M点作平行于z轴的直线, 交Oxy坐标面于点$M_0(x,y,0)$.

由柱面的定义可知点M_0必在准线C上, 故点M_0的坐标满足方程$F(x, y) = 0$,

由柱面的定义可知点M_0必在准线C上, 故点M_0的坐标满足方程$F(x,y)=0$, 由于点M与点M_0有相同的横坐标和纵坐标, 故点M的坐标也满足方程$F(x,y)=0$.

由柱面的定义可知点M_0必在准线C上, 故点M_0的坐标满足方程$F(x,y)=0$, 由于点M与点M_0有相同的横坐标和纵坐标, 故点M的坐标也满足方程$F(x,y)=0$.

反之, 如果空间一点$M(x,y,z)$满足方程$F(x,y)=0$, 则过点$M(x,y,z)$且与z轴平行的直线必通过准线C上的点$M_0(x,y,0)$,

由柱面的定义可知点M_0必在准线C上, 故点M_0的坐标满足方程$F(x,y)=0$, 由于点M与点M_0有相同的横坐标和纵坐标, 故点M的坐标也满足方程$F(x,y)=0$.

反之, 如果空间一点$M(x,y,z)$满足方程$F(x,y)=0$, 则过点$M(x,y,z)$且与z轴平行的直线必通过准线C上的点$M_0(x,y,0)$, 即M在过$M_0(x,y,0)$的母线上, 于是$M(x,y,z)$必在柱面上,

由柱面的定义可知点M_0必在准线C上, 故点M_0的坐标满足方程$F(x,y)=0$, 由于点M与点M_0有相同的横坐标和纵坐标, 故点M的坐标也满足方程$F(x,y)=0$.

反之, 如果空间一点$M(x,y,z)$满足方程$F(x,y)=0$, 则过点$M(x,y,z)$且与z轴平行的直线必通过准线C上的点$M_0(x,y,0)$, 即M在过$M_0(x,y,0)$的母线上, 于是$M(x,y,z)$必在柱面上, 因此方程$F(x,y)=0$表示以Oxy平面上的曲线C为准线, 母线平行于z轴的柱面方程.

柱面方程

对于柱面方程，一般地有如下结论:

柱面方程

对于柱面方程，一般地有如下结论:

- 方程$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面;

柱面方程

对于柱面方程，一般地有如下结论:

- 方程$F(x, y) = 0$表示母线平行于z轴的柱面;
- 方程$F(y, z) = 0$表示母线平行于x轴的柱面;

柱面方程

对于柱面方程，一般地有如下结论:

- 方程$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面;
- 方程$F(y,z)=0$表示母线平行于x轴的柱面;
- 方程$F(x,z)=0$表示母线平行于y轴的柱面.

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面.

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

方程$x^2 + y^2 = a^2$表示

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

方程$x^2+y^2=a^2$表示圆柱面;

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

方程$x^2 + y^2 = a^2$表示圆柱面;

方程$y^2 = 2px$表示

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

方程$x^2+y^2=a^2$表示圆柱面;

方程$y^2=2px$表示抛物柱面;

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

方程$x^2+y^2=a^2$表示圆柱面;

方程$y^2=2px$表示抛物柱面;

方程$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$表示

二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

方程$x^2+y^2=a^2$表示圆柱面;

方程$y^2=2px$表示抛物柱面;

方程$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$表示双曲柱面.

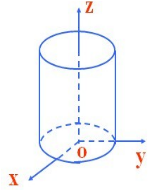
二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如:

方程$x^2+y^2=a^2$表示圆柱面;

方程$y^2=2px$表示抛物柱面;

方程$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$表示双曲柱面.



$$x^2+y^2=a^2$$

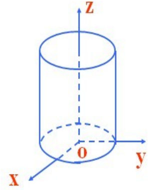
二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如：

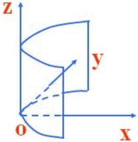
方程$x^2+y^2=a^2$表示圆柱面；

方程$y^2=2px$表示抛物柱面；

方程$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$表示双曲柱面.



$x^2+y^2=a^2$



$y^2=2px$

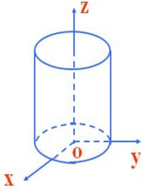
二次柱面

- 以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面. 例如：

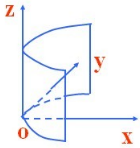
方程$x^2+y^2=a^2$表示圆柱面；

方程$y^2=2px$表示抛物柱面；

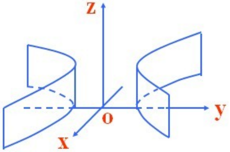
方程$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$表示双曲柱面.



$$x^2+y^2=a^2$$



$$y^2=2px$$



$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1,$

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,$ 母线平行于z轴的椭圆柱面

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,$ 母线平行于z轴的椭圆柱面
2. $z^2=2x,$

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,$ 母线平行于z轴的椭圆柱面
2. $z^2=2x,$ 母线平行于y轴的抛物柱面

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,$ 母线平行于z轴的椭圆柱面
2. $z^2=2x,$ 母线平行于y轴的抛物柱面
3. $xy=1,$

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1,$ 母线平行于z轴的椭圆柱面
2. $z^2 = 2x,$ 母线平行于y轴的抛物柱面
3. $xy = 1,$ 母线平行于z轴的双曲柱面

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,$ 母线平行于z轴的椭圆柱面
2. $z^2=2x,$ 母线平行于y轴的抛物柱面
3. $xy=1,$ 母线平行于z轴的双曲柱面
4. $\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1.$

例2. 指出下列方程在空间直角坐标系中分别表示什么图形？

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,$ 母线平行于z轴的椭圆柱面
2. $z^2=2x,$ 母线平行于y轴的抛物柱面
3. $xy=1,$ 母线平行于z轴的双曲柱面
4. $\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1.$ 母线平行于x轴的双曲柱面

例3. 求母线平行于$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$的柱面方程.

例3. 求母线平行于$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2. \end{cases}$的柱面方程.

解：设$M(x_0,y_0,z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于$\vec{a}=\{-1,0,1\}$的直线L必在柱面上.

例3. 求母线平行于$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$的柱面方程.

解: 设$M(x_0, y_0, z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于$\vec{a} = \{-1, 0, 1\}$的直线L必在柱面上.

而L的方程为$\dfrac{x - x_0}{-1} = \dfrac{y - y_0}{0} = \dfrac{z - z_0}{1}$,

例3. 求母线平行于$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2. \end{cases}$

的柱面方程.

解：设$M(x_0,y_0,z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于

$\vec{a}=\{-1,0,1\}$的直线L必在柱面上.

而L的方程为$\dfrac{x-x_0}{-1}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{1}$,

其参数方程为 $x=x_0-t,\ y=y_0,\ z=z_0+t$,

例3. 求母线平行于$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2. \end{cases}$的柱面方程.

解：设$M(x_0,y_0,z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于$\vec{a}=\{-1,0,1\}$的直线L必在柱面上.

而L的方程为$\dfrac{x-x_0}{-1}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{1}$,

其参数方程为 $x=x_0-t,\ y=y_0,\ z=z_0+t$,

将$x_0=x+t,\ y_0=y,\ z_0=z-t$ 代入准线方程, 得

例3. 求母线平行于$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2. \end{cases}$ 的柱面方程.

解: 设$M(x_0,y_0,z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于 $\vec{a}=\{-1,0,1\}$的直线L必在柱面上.

而L的方程为$\dfrac{x-x_0}{-1}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{1}$,

其参数方程为 $x=x_0-t,\ y=y_0,\ z=z_0+t$,

将$x_0=x+t,\ y_0=y,\ z_0=z-t$ 代入准线方程, 得

$$\begin{cases} (x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, & (*) \\ 2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. & (**) \end{cases}$$

例3. 求母线平行于$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2. \end{cases}$

的柱面方程.

解: 设$M(x_0,y_0,z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于

$\vec{a}=\{-1,0,1\}$的直线L必在柱面上.

而L的方程为$\dfrac{x-x_0}{-1}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{1}$,

其参数方程为 $x=x_0-t,\ y=y_0,\ z=z_0+t$,

将$x_0=x+t,\ y_0=y,\ z_0=z-t$ 代入准线方程, 得

$$\begin{cases} (x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, & (*) \\ 2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. & (**) \end{cases}$$

$2\times(*)-(**)$得, $t=z$,

例3. 求母线平行于$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$

的柱面方程.

解: 设$M(x_0, y_0, z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于

$\vec{a} = \{-1, 0, 1\}$的直线L必在柱面上.

而L的方程为$\dfrac{x - x_0}{-1} = \dfrac{y - y_0}{0} = \dfrac{z - z_0}{1}$,

其参数方程为 $x = x_0 - t,\ y = y_0,\ z = z_0 + t$,

将$x_0 = x + t,\ y_0 = y,\ z_0 = z - t$ 代入准线方程, 得

$$\begin{cases} (x+t)^2 + y^2 + (z-t)^2 = 1, & (*) \\ 2(x+t)^2 + 2y^2 + (z-t)^2 = 2. & (**) \end{cases}$$

$2 \times (*) - (**)$得, $t = z$, 代入$(*)$和$(**)$, 消去t,

例3. 求母线平行于$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{k}$, 准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2. \end{cases}$

的柱面方程.

解：设$M(x_0,y_0,z_0)$是准线上任一点, 则过M点平行于

$\vec{a}=\{-1,0,1\}$的直线L必在柱面上.

而L的方程为$\dfrac{x-x_0}{-1}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{1}$,

其参数方程为 $x=x_0-t,\ y=y_0,\ z=z_0+t$,

将$x_0=x+t,\ y_0=y,\ z_0=z-t$ 代入准线方程, 得

$$\begin{cases} (x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, & (*) \\ 2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2. & (**) \end{cases}$$

$2\times(*)-(**)$得, $t=z$, 代入$(*)$和$(**)$, 消去t,

得所求柱面方程为$(x+z)^2+y^2=1$.

二、空间曲线

二、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

二、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线L可以看作两个曲面Σ_1与Σ_2的交线.

二、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线L可以看作两个曲面Σ_1与Σ_2的交线.

若曲面Σ_1与Σ_2的方程分别为$F(x, y, z) = 0$ 与 $G(x, y, z) = 0$,

二、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线L可以看作两个曲面Σ_1与Σ_2的交线.

若曲面Σ_1与Σ_2的方程分别为$F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$,

则其交线L的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

二、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线L可以看作两个曲面Σ_1与Σ_2的交线.

若曲面Σ_1与Σ_2的方程分别为$F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$,

则其交线L的方程为
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

此方程组称为空间曲线的一般方程.

二、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线L可以看作两个曲面Σ_1与Σ_2的交线.

若曲面Σ_1与Σ_2的方程分别为$F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$,

则其交线L的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

此方程组称为空间曲线的**一般方程**.

例如方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases}$

二、空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线L可以看作两个曲面Σ_1与Σ_2的交线.

若曲面Σ_1与Σ_2的方程分别为$F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$,

则其交线L的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

此方程组称为空间曲线的**一般方程**.

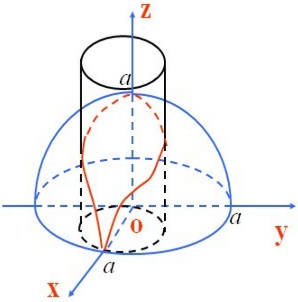
例如方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases}$ 表示在$z=1$平面上的圆.

例1. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ (x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases} \quad (z\geq 0, a>0)$

例1. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ (x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases} \quad (z\geq 0, a>0)$

表示上半球面和圆柱面的交线L.

例1. 方程组
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases} \quad (z \geq 0, a>0)$$
表示上半球面和圆柱面的交线L.



例2. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$

例2. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$

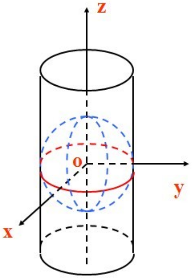
表示圆柱面与球面的交线,

它是Oxy平面上的一个圆.

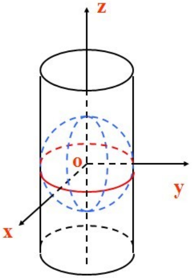
例2. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$

表示圆柱面与球面的交线,

它是Oxy平面上的一个圆.



例2. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$

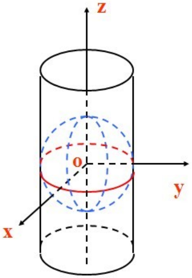


表示圆柱面与球面的交线,

它是Oxy平面上的一个圆.

注意：表示空间曲线的方程组不是唯一的.

例2. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$



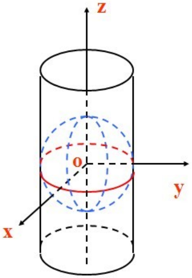
表示圆柱面与球面的交线,

它是Oxy平面上的一个圆.

注意：表示空间曲线的方程组不是唯一的.

例如 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$

例2. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$



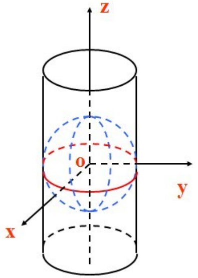
表示圆柱面与球面的交线,

它是Oxy平面上的一个圆.

注意：表示空间曲线的方程组不是唯一的.

例如 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$

例2. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$



表示圆柱面与球面的交线,

它是Oxy平面上的一个圆.

注意：表示空间曲线的方程组不是唯一的.

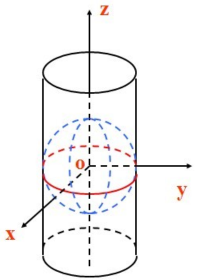
例如 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$

都表示Oxy平面上的同一个圆.

例2. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$

表示圆柱面与球面的交线,

它是Oxy平面上的一个圆.



注意: 表示空间曲线的方程组不是唯一的.

例如 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$

都表示Oxy平面上的同一个圆.

- 一般地, 用两个方程的组合代替方程之一, 仍表示同一曲线.

例3. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+x^2=1 \end{cases}$

$$(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$$

例3. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+x^2=1 \end{cases}$

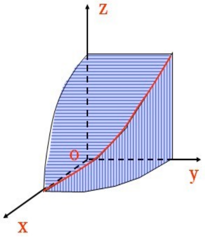
$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

表示两个圆柱的交线L在第一卦限的部分.

例3. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+x^2=1 \end{cases}$

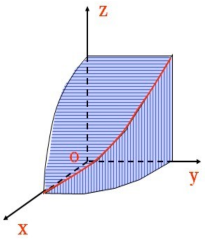
$(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$

表示两个圆柱的交线L在第一卦限的部分.



例3. 方程组
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+x^2=1 \end{cases}$$
$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

表示两个圆柱的交线L在第一卦限的部分.

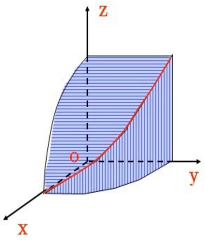


此曲线亦可用方程组

例3. 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+x^2=1 \end{cases}$

$(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$

表示两个圆柱的交线L在第一卦限的部分.



此曲线亦可用方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y-z=0 \end{cases} \quad (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$$

表示.

2. 空间曲线的参数方程

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线L上的动点M的坐标x, y, z也可以用另一个变量t的

函数来表示, 即

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线L上的动点M的坐标x, y, z也可以用另一个变量t的函数来表示，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线L上的动点M的坐标x, y, z也可以用另一个变量t的函数来表示，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

当t取定一个值时，由上面方程组就得到曲线上一点的坐标，

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线L上的动点M的坐标x, y, z也可以用另一个变量t的函数来表示，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

当t取定一个值时，由上面方程组就得到曲线上一点的坐标，通过t变动，可以得到曲线上所有的点，

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线L上的动点M的坐标x, y, z也可以用另一个变量t的

函数来表示，即 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

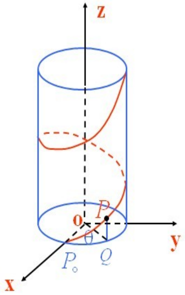
当t取定一个值时，由上面方程组就得到曲线上一点的坐标，

通过t变动，可以得到曲线上所有的点，

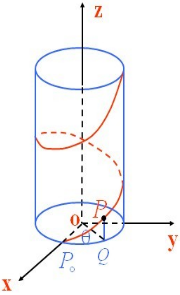
上面方程组称为曲线L的参数方程，t为参数.

例4. 设质点在圆柱面$x^2+y^2=r^2$上以均匀的角速度ω绕z轴旋转, 同时又以均匀的线速度v平行于z轴的方向上升, 运动开始, 即$t=0$时, 质点在$P_0(r,0,0)$处, 求质点的运动方程.

例4. 设质点在圆柱面$x^2+y^2=r^2$上以均匀的角速度ω绕z轴旋转，同时又以均匀的线速度v平行于z轴的方向上升，运动开始，即$t=0$时，质点在$P_0(r,0,0)$处，求质点的运动方程.

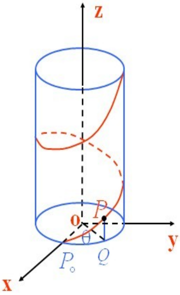


例4. 设质点在圆柱面$x^2+y^2=r^2$上以均匀的角速度ω绕z轴旋转，同时又以均匀的线速度v平行于z轴的方向上升，运动开始，即$t=0$时，质点在$P_0(r,0,0)$处，求质点的运动方程.



解：取时间t为参数，时刻t时质点的位置为$P(x,y,z)$，

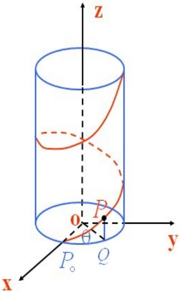
例4. 设质点在圆柱面$x^2+y^2=r^2$上以均匀的角速度ω绕z轴旋转, 同时又以均匀的线速度v平行于z轴的方向上升, 运动开始, 即$t=0$时, 质点在$P_0(r,0,0)$处, 求质点的运动方程.



解: 取时间t为参数, 时刻t时质点的位置为$P(x,y,z)$,

上升的高度为$QP=vt$, 则$z=vt$

例4. 设质点在圆柱面$x^2+y^2=r^2$上以均匀的角速度ω绕z轴旋转，同时又以均匀的线速度v平行于z轴的方向上升，运动开始，即$t=0$时，质点在$P_0(r,0,0)$处，求质点的运动方程.

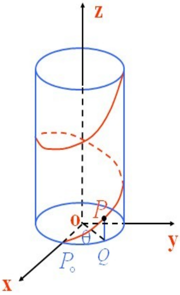


解：取时间t为参数，时刻t时质点的位置为$P(x,y,z)$,

上升的高度为$QP=vt$, 则$z=vt$

作$PQ\perp Oxy$面，垂足为$Q(x,y,0)$,

例4. 设质点在圆柱面$x^2+y^2=r^2$上以均匀的角速度ω绕z轴旋转，同时又以均匀的线速度v平行于z轴的方向上升，运动开始，即$t=0$时，质点在$P_0(r,0,0)$处，求质点的运动方程.



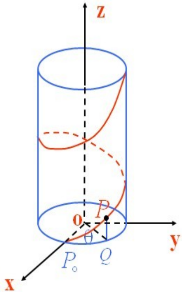
解：取时间t为参数，时刻t时质点的位置为$P(x,y,z)$，

上升的高度为$QP=vt$，则$z=vt$

作$PQ\perp Oxy$面，垂足为$Q(x,y,0)$，

则从P_0到P所经过的角$\theta=\omega t$，

例4. 设质点在圆柱面$x^2+y^2=r^2$上以均匀的角速度ω绕z轴旋转, 同时又以均匀的线速度v平行于z轴的方向上升, 运动开始, 即$t=0$时, 质点在$P_0(r,0,0)$处, 求质点的运动方程.



解: 取时间t为参数, 时刻t时质点的位置为$P(x,y,z)$,

上升的高度为$QP=vt$, 则$z=vt$

作$PQ\perp Oxy$面, 垂足为$Q(x,y,0)$,

则从P_0到P所经过的角$\theta=\omega t$,

于是, $x=r\cos\omega t,\ \ y=r\sin\omega t,$

即质点的运动方程为 $\begin{cases} x = r\cos\omega t, \\ y = r\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$

即质点的运动方程为 $\begin{cases} x = r\cos\omega t, \\ y = r\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$

——此方程称为圆柱螺旋线方程.

即质点的运动方程为 $\begin{cases} x = r\cos\omega t, \\ y = r\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$

——此方程称为圆柱螺旋线方程.

- 也可以用其它变量作参数.

即质点的运动方程为 $\begin{cases} x = r\cos\omega t, \\ y = r\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$

——此方程称为圆柱螺旋线方程.

- 也可以用其它变量作参数.

例如令$\theta = \omega t$, 则螺旋线方程为

即质点的运动方程为 $\begin{cases} x = r\cos\omega t, \\ y = r\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$

——此方程称为圆柱螺旋线方程.

- 也可以用其它变量作参数.

例如令$\theta = \omega t$, 则螺旋线方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

即质点的运动方程为 $\begin{cases} x = r\cos\omega t, \\ y = r\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$

——此方程称为圆柱螺旋线方程.

- 也可以用其它变量作参数.

例如令$\theta = \omega t$, 则螺旋线方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

这时$b = \dfrac{v}{\omega}$, 参数为θ.

3. 空间曲线在坐标面上的投影

3. 空间曲线在坐标面上的投影

- 空间曲线在平面上的投影的概念

3. 空间曲线在坐标面上的投影

- **空间曲线在平面上的投影的概念**

已知空间曲线L和平面π,

3. 空间曲线在坐标面上的投影

- **空间曲线在平面上的投影的概念**

已知空间曲线L和平面π,

从L上各点向平面π作垂线,

3. 空间曲线在坐标面上的投影

▶ 空间曲线在平面上的投影的概念

已知空间曲线L和平面π,

从L上各点向平面π作垂线,

垂足所构成的曲线L_1称为曲线

L在平面π上的**投影曲线**.

3. 空间曲线在坐标面上的投影

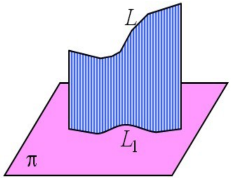
▶ 空间曲线在平面上的投影的概念

已知空间曲线L和平面π,

从L上各点向平面π作垂线,

垂足所构成的曲线L_1称为曲线

L在平面π上的**投影曲线**.



3. 空间曲线在坐标面上的投影

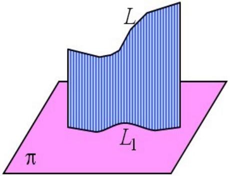
▶ 空间曲线在平面上的投影的概念

已知空间曲线L和平面π,

从L上各点向平面π作垂线,

垂足所构成的曲线L_1称为曲线

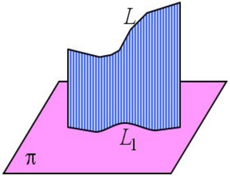
L在平面π上的**投影曲线**.



准线为曲线L而母线垂直于平面π的柱面称为空间曲线L关于平面π的**投影柱面**.

3. 空间曲线在坐标面上的投影

▶ 空间曲线在平面上的投影的概念



已知空间曲线L和平面π,

从L上各点向平面π作垂线,

垂足所构成的曲线L_1称为曲线

L在平面π上的**投影曲线**.

准线为曲线L而母线垂直于平面π的柱面称为空间曲线L关于平面π的**投影柱面**.

投影曲线L_1就是投影柱面与平面π的交线.

- 特殊地, 以曲线L为准线, 母线平行于z轴的柱面称为空间曲线L关于Oxy 面的投影柱面,

- 特殊地, 以曲线L为准线, 母线平行于z轴的柱面称为空间曲线L关于Oxy面的投影柱面,

  此投影柱面与Oxy面的交线称为曲线L在Oxy面上的投影曲线.

- 特殊地, 以曲线L为准线, 母线平行于z轴的柱面称为空间曲线L关于Oxy 面的投影柱面,

  此投影柱面与Oxy面的交线称为曲线L在Oxy面上的投影曲线.

- 同样可以定义曲线L关于Oyz面、Ozx面的投影柱面和投影曲线.

- 投影曲线的方程的求法

▶ 投影曲线的方程的求法

设空间曲线L的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

▶ 投影曲线的方程的求法

设空间曲线L的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

消去z, 得 $\Phi_1(x, y) = 0,$

- 投影曲线的方程的求法

设空间曲线L的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

消去z, 得 $\Phi_1(x,y)=0$, 它表示母线平行于z轴的柱面方程.

▶ 投影曲线的方程的求法

设空间曲线L的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

消去z, 得 $\Phi_1(x,y)=0$, 它表示母线平行于z轴的柱面方程.

因为柱面方程是由曲线L消去z得到的, 所以曲线L上点的前两个坐标x,y必满足该方程, 因此柱面过曲线L.

▶ 投影曲线的方程的求法

设空间曲线L的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

消去z, 得 $\Phi_1(x,y)=0$, 它表示母线平行于z轴的柱面方程.

因为柱面方程是由曲线L消去z得到的, 所以曲线L上点的前两个坐标x,y必满足该方程, 因此柱面过曲线L.

故$\Phi_1(x,y)=0$所表示的柱面就是曲线L关于Oxy面的投影柱面,

▶ 投影曲线的方程的求法

设空间曲线L的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

消去z, 得 $\Phi_1(x,y)=0$, 它表示母线平行于z轴的柱面方程.

因为柱面方程是由曲线L消去z得到的, 所以曲线L上点的前两个坐标x,y必满足该方程, 因此柱面过曲线L.

故$\Phi_1(x,y)=0$所表示的柱面就是曲线L关于Oxy面的投影柱面,

方程$\begin{cases} \Phi_1(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 就是曲线L在Oxy面上的投影曲线的方程.

同样, 从曲线L的方程中分别消去x与y, 得到柱面方程

$$\Phi_2(y,z)=0 \quad \text{与} \quad \Phi_3(x,z)=0.$$

同样, 从曲线L的方程中分别消去x与y, 得到柱面方程

$$\Phi_2(y,z)=0 \quad \text{与} \quad \Phi_3(x,z)=0.$$

则

$$\begin{cases} \Phi_2(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \Phi_3(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

同样, 从曲线L的方程中分别消去x与y, 得到柱面方程

$$\Phi_2(y,z)=0 \quad \text{与} \quad \Phi_3(x,z)=0.$$

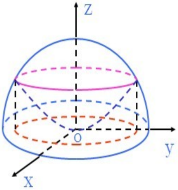
则

$$\begin{cases} \Phi_2(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \Phi_3(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

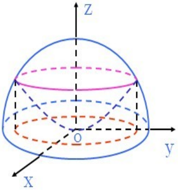
分别是曲线L在Oyz平面和Oxz平面上的投影曲线的方程.

例5．求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.

例5. 求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.



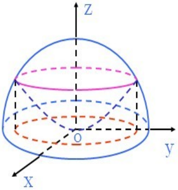
例5．求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.



解：由L的方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$$

例5. 求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.

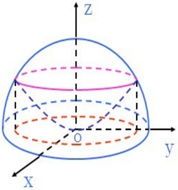


解：由L的方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$$

解得$z=-3$(舍去), $z=1$.

例5. 求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.



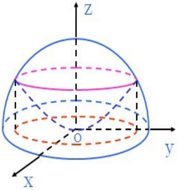
解：由L的方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$$

解得$z=-3$(舍去), $z=1$.

所以L的方程也可表示为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ z=1. \end{cases}$

例5. 求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.



解: 由L的方程

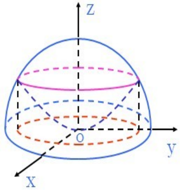
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$$

解得$z=-3$(舍去), $z=1$.

所以L的方程也可表示为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ z=1. \end{cases}$

消去z, 得交线L关于Oxy平面的的投影柱面的方程为$x^2+y^2=2$.

例5. 求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.



解：由L的方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$$

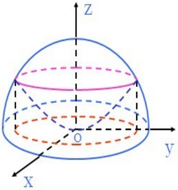
解得$z=-3$(舍去), $z=1$.

所以L的方程也可表示为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ z=1. \end{cases}$

消去z, 得交线L关于Oxy平面的的投影柱面的方程为$x^2+y^2=2$.

故L在Oxy平面上的的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ z=0, \end{cases}$

例5．求曲面$x^2+y^2+z^2=3$和曲面$x^2+y^2=2z$ 的交线L在平面Oxy上的投影曲线方程.



解：由L的方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$$

解得$z=-3$(舍去), $z=1$.

所以L的方程也可表示为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ z=1. \end{cases}$

消去z, 得交线L关于Oxy平面的的投影柱面的方程为$x^2+y^2=2$.

故L在Oxy平面上的的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ z=0, \end{cases}$

它是Oxy平面上以$(0,0)$为圆心, 半径为$\sqrt{2}$的圆.

注意： 如果在曲线L的方程中，出现有一个缺z项的方程时，那么此方程所表示的曲面就是经过曲线L且母线平行于z轴的柱面，它是曲线L 关于Oxy平面的投影柱面，可省略消去z的过程.

注意： 如果在曲线L的方程中，出现有一个缺z项的方程时，那么此方程所表示的曲面就是经过曲线L且母线平行于z轴的柱面，它是曲线L 关于Oxy平面的投影柱面，可省略消去z的过程.

例6．求曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64, \\ x^2+y^2=8y. \end{cases}$ 在Oxy, Oyz平面上的投影曲线的方程.

注意： 如果在曲线L的方程中，出现有一个缺z项的方程时，那么此方程所表示的曲面就是经过曲线L且母线平行于z轴的柱面，它是曲线L 关于Oxy平面的投影柱面，可省略消去z的过程.

例6．求曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64, \\ x^2+y^2=8y. \end{cases}$ 在Oxy, Oyz平面上的投影曲线的方程.

解： 曲线L在Oxy平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=8y, \\ z=0. \end{cases}$

注意： 如果在曲线L的方程中，出现有一个缺z项的方程时，那么此方程所表示的曲面就是经过曲线L且母线平行于z轴的柱面，它是曲线L 关于Oxy平面的投影柱面，可省略消去z的过程.

例6．求曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64, \\ x^2+y^2=8y. \end{cases}$ 在Oxy, Oyz平面上的投影曲线的方程.

解：曲线L在Oxy平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=8y, \\ z=0. \end{cases}$

从曲线L的方程中消去x，得曲线L关于Oyz平面的投影柱面方程:

注意：如果在曲线L的方程中，出现有一个缺z项的方程时，那么此方程所表示的曲面就是经过曲线L且母线平行于z轴的柱面，它是曲线L 关于Oxy平面的投影柱面，可省略消去z的过程.

例6．求曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64, \\ x^2+y^2=8y. \end{cases}$ 在Oxy, Oyz平面上的投影曲线的方程.

解：曲线L在Oxy平面上的投影曲线的方程为$\begin{cases} x^2+y^2=8y, \\ z=0. \end{cases}$

从曲线L的方程中消去x，得曲线L关于Oyz平面的投影柱面方程:

$$z^2+8y=64,$$

注意： 如果在曲线L的方程中，出现有一个缺z项的方程时，那么此方程所表示的曲面就是经过曲线L且母线平行于z轴的柱面，它是曲线L 关于Oxy平面的投影柱面，可省略消去z的过程.

例6. 求曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64, \\ x^2+y^2=8y. \end{cases}$ 在Oxy, Oyz平面上的投影曲线的方程.

解：曲线L在Oxy平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=8y, \\ z=0. \end{cases}$

从曲线L的方程中消去x，得曲线L关于Oyz平面的投影柱面方程:

$$z^2+8y=64,$$

故曲线L关于Oyz平面的投影曲线是一段抛物线

注意： 如果在曲线L的方程中，出现有一个缺z项的方程时，那么此方程所表示的曲面就是经过曲线L且母线平行于z轴的柱面，它是曲线L 关于Oxy平面的投影柱面，可省略消去z的过程.

例6．求曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64, \\ x^2+y^2=8y. \end{cases}$ 在Oxy,Oyz平面上的投影曲线的方程.

解：曲线L在Oxy平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=8y, \\ z=0. \end{cases}$

从曲线L的方程中消去x，得曲线L关于Oyz平面的投影柱面方程:

$$z^2+8y=64,$$

故曲线L关于Oyz平面的投影曲线是一段抛物线

$$\begin{cases} z^2+8y=64, \\ x=0. \end{cases} \qquad (0\le y\le 8).$$

三、锥面

1. 锥面的定义

三、锥面

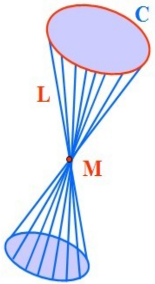
1. 锥面的定义

已知一条定曲线C及不在C上的一定点M，动直线L过点M沿C移动所形成的曲面称为**锥面**.

三、锥面

1. 锥面的定义

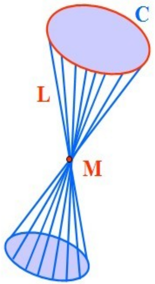
已知一条定曲线C及不在C上的一定点M，动直线L过点M沿C移动所形成的曲面称为**锥面**.



三、锥面

1. 锥面的定义

已知一条定曲线C及不在C上的一定点M，动直线L过点M沿C移动所形成的曲面称为**锥面**.

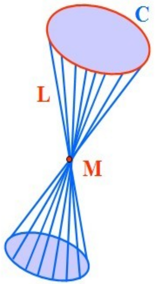


- 动直线L称为锥面的**母线**，

三、锥面

1. 锥面的定义

已知一条定曲线C及不在C上的一定点M，动直线L过点M沿C移动所形成的曲面称为锥面.

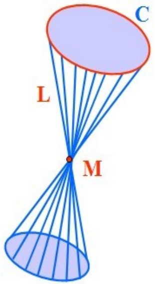


- 动直线L称为锥面的母线，
- 点M称为锥面的顶点.

三、锥面

1. 锥面的定义

已知一条定曲线C及不在C上的一定点M，动直线L过点M沿C移动所形成的曲面称为**锥面**.



- 动直线L称为锥面的**母线**，
- 点M称为锥面的**顶点**.
- 曲线C称为锥面的**准线**.

2. 锥面的方程

2. 锥面的方程

设锥面的其顶点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

2. 锥面的方程

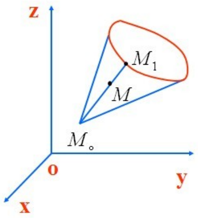
设锥面的其顶点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

其准线C的方程为 $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$

2. 锥面的方程

设锥面的其顶点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

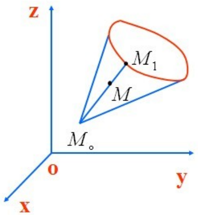
其准线C的方程为 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$



2. 锥面的方程

设锥面的其顶点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

其准线C的方程为 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$

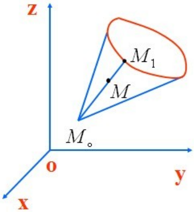


则通过顶点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和准线C上的点$M_1(X, Y, Z)$的母线方程为

2. 锥面的方程

设锥面的其顶点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

其准线C的方程为 $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$



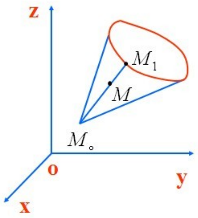
则通过顶点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和准线C上的点$M_1(X, Y, Z)$的母线方程为

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{Y - y_0} = \frac{z - z_0}{Z - z_0},$$

2. 锥面的方程

设锥面的其顶点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

其准线C的方程为 $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$



则通过顶点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和准线C上的点$M_1(X, Y, Z)$的母线方程为

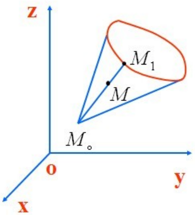
$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{Y - y_0} = \frac{z - z_0}{Z - z_0},$$

其中点$M(x, y, z)$是母线上的任意一点,

2. 锥面的方程

设锥面的其顶点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

其准线C的方程为 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$



则通过顶点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和准线C上的点$M_1(X, Y, Z)$的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{Y-y_0}=\frac{z-z_0}{Z-z_0},$$

其中点$M(x,y,z)$是母线上的任意一点,

当点$M_1(X,Y,Z)$在曲线C上移动时, 点$M(x,y,z)$就是锥面上的点.

因为$M_1(X,Y,Z)$在是准线上的点, 所以满足方程

因为$M_1(X,Y,Z)$在是准线上的点, 所以满足方程

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0, \\ F_2(X,Y,Z)=0. \end{cases}$$

因为$M_1(X,Y,Z)$在是准线上的点, 所以满足方程

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0, \\ F_2(X,Y,Z)=0. \end{cases}$$

将它与母线方程联立, 消去X,Y,Z得锥面方程.

因为$M_1(X,Y,Z)$在是准线上的点, 所以满足方程

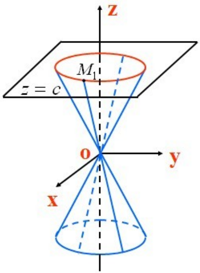
$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0, \\ F_2(X,Y,Z)=0. \end{cases}$$

将它与母线方程联立, 消去X,Y,Z得锥面方程.

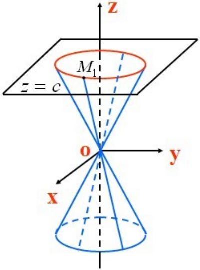
- 若锥面方程是关于x,y,z的二次式, 则称之为二次锥面.

例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.

例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.



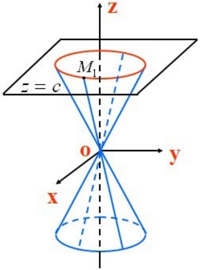
例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.



解：过顶点$O(0,0,0)$和准线上的点

$M_1(X,Y,Z)$的母线方程为

例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.

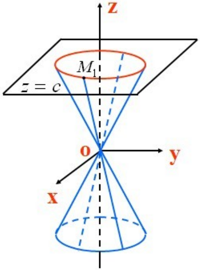


解：过顶点$O(0,0,0)$和准线上的点

$M_1(X,Y,Z)$的母线方程为

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z},$$

例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.



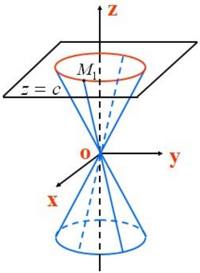
解：过顶点$O(0,0,0)$和准线上的点

$M_1(X,Y,Z)$的母线方程为

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z},$$

即 $X=\dfrac{Z}{z}x,\quad Y=\dfrac{Z}{z}y,$

例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.



解: 过顶点$O(0,0,0)$和准线上的点

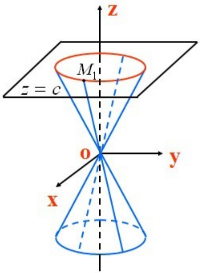
$M_1(X,Y,Z)$的母线方程为

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z},$$

即 $$X=\frac{Z}{z}x,\quad Y=\frac{Z}{z}y,$$

其中$M(x,y,z)$是母线上的任意一点.

例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.



解: 过顶点$O(0,0,0)$和准线上的点

$M_1(X,Y,Z)$的母线方程为

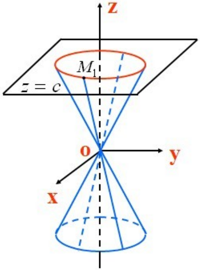
$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z},$$

即 $$X=\frac{Z}{z}x, \quad Y=\frac{Z}{z}y,$$

其中$M(x,y,z)$是母线上的任意一点.

因为点$M_1(X,Y,Z)$在准线上,

例1. 求顶点为原点, 准线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ 的锥面方程.



解: 过顶点$O(0,0,0)$和准线上的点

$M_1(X,Y,Z)$的母线方程为

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z},$$

即 $X=\dfrac{Z}{z}x,\quad Y=\dfrac{Z}{z}y,$

其中$M(x,y,z)$是母线上的任意一点.

因为点$M_1(X,Y,Z)$在准线上, 所以 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1, \\ Z=c. \end{cases}$

把$X=\dfrac{Z}{z}x,\ Y=\dfrac{Z}{z}y$ 代入准线方程得

把$X=\dfrac{Z}{z}x,\ Y=\dfrac{Z}{z}y$ 代入准线方程得$\begin{cases}\dfrac{(\frac{Z}{z}x)^2}{a^2}+\dfrac{(\frac{Z}{z}y)^2}{b^2}=1,\\ Z=c\end{cases}$，

把$X=\dfrac{Z}{z}x,\ Y=\dfrac{Z}{z}y$ 代入准线方程得$\begin{cases}\dfrac{(\frac{Z}{z}x)^2}{a^2}+\dfrac{(\frac{Z}{z}y)^2}{b^2}=1,\\ Z=c\end{cases}$,

化简得所求锥面的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,$

把$X=\dfrac{Z}{z}x,\ Y=\dfrac{Z}{z}y$ 代入准线方程得$\begin{cases}\dfrac{(\frac{Z}{z}x)^2}{a^2}+\dfrac{(\frac{Z}{z}y)^2}{b^2}=1, \\ Z=c\end{cases}$,

化简得所求锥面的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,$

——此为一个椭圆锥面

把$X=\frac{Z}{z}x,\ Y=\frac{Z}{z}y$ 代入准线方程得$\begin{cases}\dfrac{(\frac{Z}{z}x)^2}{a^2}+\dfrac{(\frac{Z}{z}y)^2}{b^2}=1, \\ Z=c\end{cases}$,

化简得所求锥面的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,$

——此为一个椭圆锥面

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 是一个x,y,z的二次齐次方程,

把$X=\dfrac{Z}{z}x,\ Y=\dfrac{Z}{z}y$ 代入准线方程得$\begin{cases}\dfrac{(\frac{Z}{z}x)^2}{a^2}+\dfrac{(\frac{Z}{z}y)^2}{b^2}=1, \\ Z=c\end{cases}$,

化简得所求锥面的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,$

——此为一个**椭圆锥面**

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 是一个x,y,z的二次齐次方程,

  在上面的椭圆锥面方程中, 令$a=b$, 得

把$X = \dfrac{Z}{z}x,\ Y = \dfrac{Z}{z}y$ 代入准线方程得$\begin{cases} \dfrac{(\frac{Z}{z}x)^2}{a^2} + \dfrac{(\frac{Z}{z}y)^2}{b^2} = 1, \\ Z = c \end{cases}$,

化简得所求锥面的方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0,$

——此为一个椭圆锥面

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ 是一个x, y, z的二次齐次方程,

在上面的椭圆锥面方程中, 令$a = b$, 得

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{c^2}z^2 = 0 \quad (\text{圆锥面}).$$

把$X=\dfrac{Z}{z}x,\ Y=\dfrac{Z}{z}y$ 代入准线方程得$\begin{cases}\dfrac{(\frac{Z}{z}x)^2}{a^2}+\dfrac{(\frac{Z}{z}y)^2}{b^2}=1, \\ Z=c\end{cases}$,

化简得所求锥面的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$,

——此为一个椭圆锥面

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 是一个x,y,z的二次齐次方程,

  在上面的椭圆锥面方程中, 令$a=b$, 得

$$x^2+y^2-\frac{a^2}{c^2}z^2=0\quad(\text{圆锥面}).$$

- 若锥面方程是关于x,y,z 的二次式, 则称之为二次锥面.

四、旋转曲面

四、旋转曲面

- 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转所形成的曲面称为旋转曲面,

四、旋转曲面

- 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转所形成的曲面称为**旋转曲面**，这条定直线称为旋转曲面的**轴**.

四、旋转曲面

- 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转所形成的曲面称为**旋转曲面**，这条定直线称为旋转曲面的**轴**.

设在Oyz平面上曲线L的方程为

$$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

四、旋转曲面

- 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转所形成的曲面称为旋转曲面，这条定直线称为旋转曲面的轴.

设在Oyz平面上曲线L的方程为

$$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

将曲线L绕z轴旋转一周，

得到一个旋转曲面.

四、旋转曲面

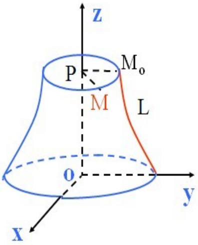
- 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转所形成的曲面称为**旋转曲面**，这条定直线称为旋转曲面的**轴**.

设在Oyz平面上曲线L的方程为

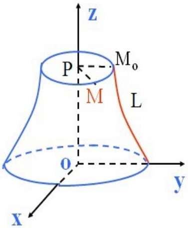
$$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

将曲线L绕z轴旋转一周，

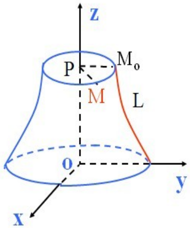
得到一个旋转曲面.



旋转曲面的方程

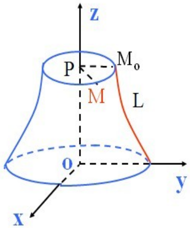


旋转曲面的方程



设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

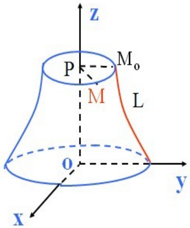
旋转曲面的方程



设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

由于点M可以由点M_0绕z轴旋转而得，故有

旋转曲面的方程

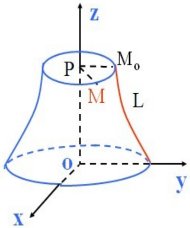


设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

由于点M可以由点M_0绕z轴旋转而得，故有

$$|PM| = |PM_0|,\ z = z_0,$$

旋转曲面的方程



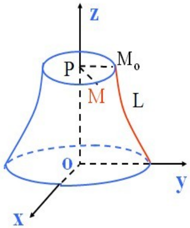
设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

由于点M可以由点M_0绕z轴旋转而得，故有

$$|PM| = |PM_0|,\ z = z_0,$$

由$|PM| = \sqrt{x^2+y^2}, |PM_0| = |y_0|$可得$y_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$,

旋转曲面的方程



设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

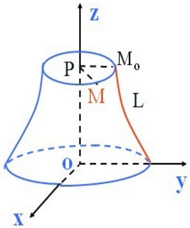
由于点M可以由点M_0绕z轴旋转而得，故有

$$|PM|=|PM_0|,\ z=z_0,$$

由$|PM|=\sqrt{x^2+y^2}, |PM_0|=|y_0|$可得$y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

又因为M_0在曲线L上，

旋转曲面的方程



设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

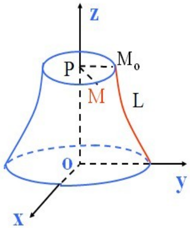
由于点M可以由点M_0绕z轴旋转而得，故有

$$|PM| = |PM_0|,\ z = z_0,$$

由$|PM| = \sqrt{x^2+y^2}, |PM_0| = |y_0|$可得$y_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$,

又因为M_0在曲线L上，所以$F(y_0,z_0) = 0$.

旋转曲面的方程



设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

由于点M可以由点M_0绕z轴旋转而得，故有

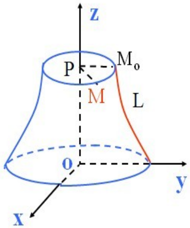
$$|PM| = |PM_0|,\ z = z_0,$$

由$|PM| = \sqrt{x^2+y^2}, |PM_0| = |y_0|$可得$y_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$,

又因为M_0在曲线L上，所以$F(y_0,z_0) = 0$.

将上面两式代入$F(y_0,z_0) = 0$. 得所求旋转曲面方程为

旋转曲面的方程



设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交z轴于点$P(0,0,z)$，交曲线L于点$M_0(0,y_0,z_0)$.

由于点M可以由点M_0绕z轴旋转而得，故有

$$|PM| = |PM_0|,\ z = z_0,$$

由$|PM| = \sqrt{x^2+y^2}, |PM_0| = |y_0|$可得$y_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$,

又因为M_0在曲线L上，所以$F(y_0,z_0) = 0$.

将上面两式代入$F(y_0,z_0) = 0$. 得所求旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0.$$

总结:

总结: 欲求曲线 $L:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 绕z轴旋转所成的旋转曲面方程,

总结: 欲求曲线 $L:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 绕z轴旋转所成的旋转曲面方程, 只要将$F(y,z)=0$中的y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 而z保持不变,

总结: 欲求曲线 $L:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 绕z轴旋转所成的旋转曲面方程, 只要将$F(y,z)=0$中的y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

而z保持不变，即得旋转曲面方程为:

总结: 欲求曲线 $L:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 绕z轴旋转所成的旋转曲面方程, 只要将$F(y,z)=0$中的y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 而z保持不变, 即得旋转曲面方程为:

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

总结: 欲求曲线 $L:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 绕z轴旋转所成的旋转曲面方程, 只要将$F(y,z)=0$中的y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 而z保持不变，即得旋转曲面方程为:

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

- 同理, 曲线L绕y轴旋转所成的旋转曲面方程为:

总结: 欲求曲线 $L:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$ 绕z轴旋转所成的旋转

曲面方程, 只要将$F(y,z)=0$中的y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

而z保持不变, 即得旋转曲面方程为:

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

- 同理, 曲线L绕y轴旋转所成的旋转曲面方程为:

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

例1．求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2 + y^2}$,

例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

则得$z = a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$,

例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

则得$z = a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$,

即所求旋转曲面方程为:

例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

则得$z = a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$,

即所求旋转曲面方程为:

$$z^2 = a^2(x^2+y^2).$$

例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

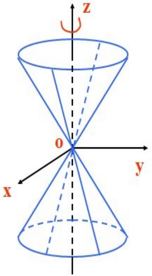
解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

则得$z = a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$,

即所求旋转曲面方程为:

$$z^2 = a^2(x^2+y^2).$$



例1．求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

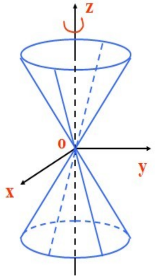
解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

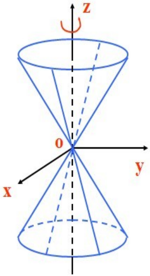
则得$z = a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$,

即所求旋转曲面方程为:

$$z^2 = a^2(x^2+y^2).$$



例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.



解: $\because$ 直线$z = ay (a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

则得$z = a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$,

即所求旋转曲面方程为:

$$z^2 = a^2(x^2+y^2).$$

该方程表示的曲面称为圆锥面, 点O称为圆锥的顶点.

例1. 求直线$\begin{cases} z = ay \\ x = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面方程.

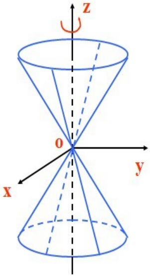
解: $\because$ 直线$z = ay(a \neq 0)$绕z轴旋转,

$\therefore$ 将z保持不变, y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

则得$z = a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$,

即所求旋转曲面方程为:

$$z^2 = a^2(x^2+y^2).$$



该方程表示的曲面称为圆锥面, 点O称为圆锥的顶点.

例2. 求抛物线$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ $(p > 0)$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面的方程.

例2. 求抛物线$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ $(p > 0)$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面的方程.

解: 在方程$y^2 = 2pz$中,

将y^2换成$x^2 + y^2$, 而z保持不变,

例2. 求抛物线$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ $(p > 0)$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面的方程.

解: 在方程$y^2 = 2pz$中,

将y^2换成$x^2 + y^2$, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为

例2. 求抛物线$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ $(p > 0)$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面的方程.

解: 在方程$y^2 = 2pz$中,

将y^2换成$x^2 + y^2$, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

例2．求抛物线$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ $(p > 0)$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面的方程.

解: 在方程$y^2 = 2pz$中,

将y^2换成$x^2 + y^2$, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

——曲面称为旋转抛物面

例2. 求抛物线$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ $(p > 0)$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面的方程.

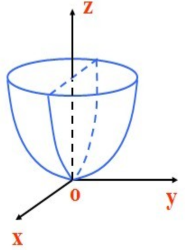
解: 在方程$y^2 = 2pz$中,

将y^2换成$x^2 + y^2$, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

——曲面称为旋转抛物面



例2．求抛物线$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ $(p > 0)$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面的方程.

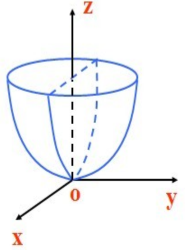
解: 在方程$y^2 = 2pz$中,

将y^2换成$x^2 + y^2$, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

——曲面称为旋转抛物面



例3. 求椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

例3. 求椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解: 在方程$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$中,

例3. 求椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解: 在方程$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$中,

将y^2换成x^2+y^2, 而z保持不变,

例3. 求椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解: 在方程$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$中,

将y^2换成x^2+y^2, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为:

例3. 求椭圆 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解: 在方程$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$中,

将y^2换成x^2+y^2, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

例3．求椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

解: 在方程$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$中,

将y^2换成x^2+y^2, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

——该曲面称为旋转椭球面

例3. 求椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所成的旋转曲面的方程.

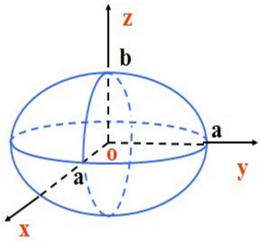
解: 在方程$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$中,

将y^2换成x^2+y^2, 而z保持不变,

得所求旋转曲面的方程为:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

——该曲面称为**旋转椭球面**



例4. 求双曲线$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 分别绕z轴和x轴旋转

所得的曲面的方程.

例4. 求双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 分别绕z轴和x轴旋转所得的曲面的方程.

解: 绕z轴所成的旋转曲面称为旋转单叶双曲面,

例4. 求双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 分别绕z轴和x轴旋转

所得的曲面的方程.

解: 绕z轴所成的旋转曲面称为旋转单叶双曲面,

其方程为 $$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

例4. 求双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 分别绕z轴和x轴旋转所得的曲面的方程.

解: 绕z轴所成的旋转曲面称为旋转单叶双曲面,

其方程为 $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

绕x轴所成的旋转曲面称为旋转双叶双曲面,

例4. 求双曲线$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 分别绕z轴和x轴旋转

所得的曲面的方程.

解: 绕z轴所成的旋转曲面称为旋转单叶双曲面,

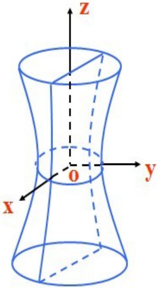
其方程为 $$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

绕x轴所成的旋转曲面称为旋转双叶双曲面,

其方程为 $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

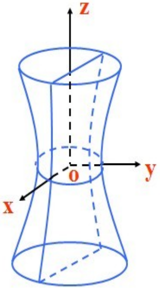
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$



旋转单叶双曲面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

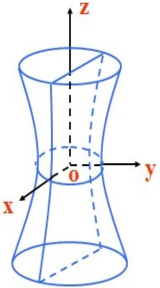
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$



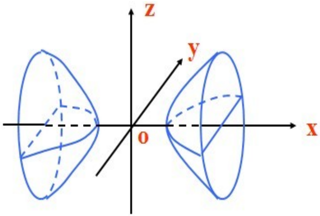
旋转单叶双曲面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$



旋转单叶双曲面



旋转双叶双曲面

例5. 求直线 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

例5. 求直线 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

答案： $L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$

旋转曲面方程为： $x^2+z^2=4y^2+\dfrac{1}{4}(1-y)^2.$

五、几个常见的二次曲面

五、几个常见的二次曲面

1. 椭球面

五、几个常见的二次曲面

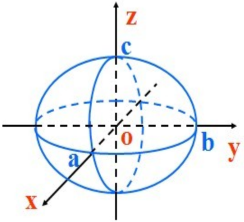
1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0)$ 所确定的曲面称为椭球面.

五、几个常见的二次曲面

1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a>0,b>0,c>0)$ 所确定的曲面称为椭球面.

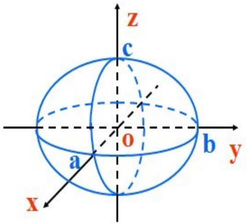


五、几个常见的二次曲面

1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a>0,b>0,c>0)$ 所确定的

曲面称为椭球面.

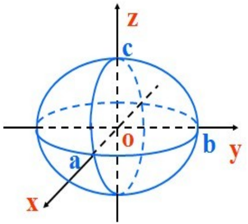


由方程知

五、几个常见的二次曲面

1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a>0,b>0,c>0)$ 所确定的曲面称为椭球面.



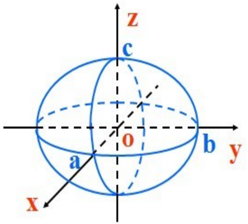
由方程知

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1,$$

五、几个常见的二次曲面

1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a>0,b>0,c>0)$ 所确定的曲面称为椭球面.



由方程知

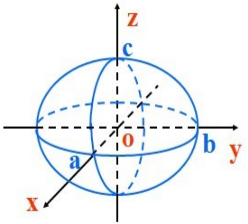
$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1,$$

即 $|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c.$

五、几个常见的二次曲面

1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a>0,b>0,c>0)$ 所确定的曲面称为椭球面.



由方程知

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1,$$

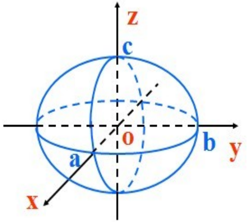
即 $|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c.$

这说明椭球面介于由六个平面$x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所构成的长方体之内,

五、几个常见的二次曲面

1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \ (a>0, b>0, c>0)$ 所确定的曲面称为椭球面.



由方程知

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1,$$

即 $|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c.$

这说明椭球面介于由六个平面$x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所构成的长方体之内, a, b, c 叫做椭球面的半轴.

- 下面用平行截痕法(即用平行于坐标面的不同平面去截曲面)来研究椭球面的形状.

- 下面用平行截痕法(即用平行于坐标面的不同平面去截曲面)来研究椭球面的形状.

1. 椭球面被三个坐标面$x = 0, y = 0, z = 0$所截得的曲线分别为椭圆

- 下面用平行截痕法(即用平行于坐标面的不同平面去截曲面)来研究椭球面的形状.

1. 椭球面被三个坐标面$x=0, y=0, z=0$所截得的曲线分别为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

- 下面用平行截痕法(即用平行于坐标面的不同平面去截曲面)来研究椭球面的形状.

1. 椭球面被三个坐标面$x=0, y=0, z=0$所截得的曲线分别为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

2. 用平行于Oxy面的平面$z=h(|h|\le c)$截椭球面, 截得的曲线为

- 下面用平行截痕法(即用平行于坐标面的不同平面去截曲面)来研究椭球面的形状.

1. 椭球面被三个坐标面$x=0, y=0, z=0$所截得的曲线分别为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

2. 用平行于Oxy面的平面$z=h(|h|\leq c)$截椭球面, 截得的曲线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

▶ 下面用平行截痕法(即用平行于坐标面的不同平面去截曲面)来研究椭球面的形状.

1. 椭球面被三个坐标面$x=0, y=0, z=0$所截得的曲线分别为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

2. 用平行于Oxy面的平面$z=h(|h|\leq c)$截椭球面, 截得的曲线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

- 当$|h| < c$时, $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$, 上式方程可写成

- 当$|h| < c$时, $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$, 上式方程可写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

- 当$|h| < c$时, $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$, 上式方程可写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

它表示平面$z = h$上的一个椭圆, 长、短半轴分别为:

- 当$|h| < c$时, $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$, 上式方程可写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

它表示平面$z = h$上的一个椭圆, 长、短半轴分别为:

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}、\ \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2};$$

- 当$|h| < c$时, $1-\dfrac{h^2}{c^2} > 0$, 上式方程可写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

它表示平面$z=h$上的一个椭圆, 长、短半轴分别为:

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}、\ \frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2};$$

- 当$|h|$逐渐增大时, 所截得的椭圆逐渐缩小;

- 当$|h| < c$时，$1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$，上式方程可写成

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

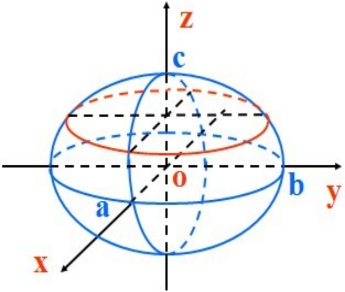
它表示平面$z = h$上的一个椭圆，长、短半轴分别为：

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}、\ \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2};$$

- 当$|h|$逐渐增大时，所截得的椭圆逐渐缩小；
- 当$|h| = c$时，所截得的椭圆变成点$(0, 0, \pm c)$.

同样, 可以用平行于其他坐标面的平面截此椭球面, 并进行类似的讨论, 这样就可以画出椭球面的图形.

同样, 可以用平行于其他坐标面的平面截此椭球面, 并进行类似的讨论, 这样就可以画出椭球面的图形.



2. 单叶双曲面

2. 单叶双曲面

由方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

2. 单叶双曲面

由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

2. 单叶双曲面

由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

2. 单叶双曲面

由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

所确定的曲面叫做单叶双曲面.

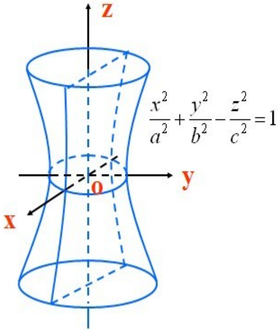
2. 单叶双曲面

由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

所确定的曲面叫做单叶双曲面.



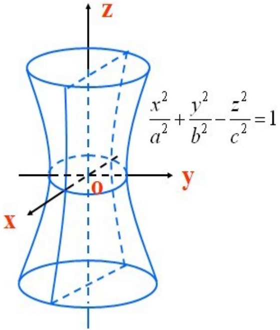
2. 单叶双曲面

由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

所确定的曲面叫做单叶双曲面.



- 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$(单叶双曲面)中, 令 $a=b$, 得

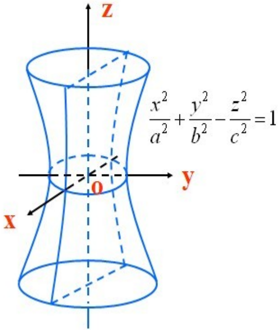
2. 单叶双曲面

由方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

所确定的曲面叫做单叶双曲面.



- 在$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$(单叶双曲面)中, 令$a=b$, 得

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (\text{旋转单叶双曲面}).$$

这里只研究单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

这里只研究单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 用平行于Oxy面的平面$z=h$去截它，截线总是一个椭圆

这里只研究单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 用平行于Oxy面的平面$z=h$去截它，截线总是一个椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

这里只研究单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 用平行于Oxy面的平面$z=h$去截它，截线总是一个椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

它的顶点分别在Oxz和Oyz平面上.

这里只研究单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 用平行于Oxy面的平面$z=h$去截它，截线总是一个椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

它的顶点分别在Oxz和Oyz平面上.

2. 曲面分别在这两个平面上的截线是双曲线

这里只研究单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 用平行于Oxy面的平面$z=h$去截它，截线总是一个椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

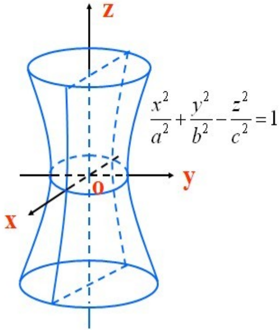
它的顶点分别在Oxz和Oyz平面上.

2. 曲面分别在这两个平面上的截线是双曲线

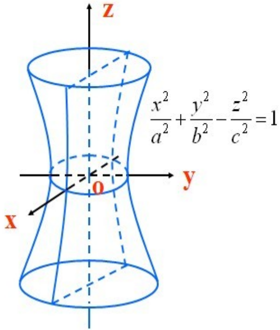
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

于是，单叶双曲面可以看作是由一个椭圆的变动产生的，这个椭圆的两对顶点分别在上述两条双曲线上运动，椭圆所在平面垂直于z轴.

于是，单叶双曲面可以看作是由一个椭圆的变动产生的，这个椭圆的两对顶点分别在上述两条双曲线上运动，椭圆所在平面垂直于z轴.



于是，单叶双曲面可以看作是由一个椭圆的变动产生的，这个椭圆的两对顶点分别在上述两条双曲线上运动，椭圆所在平面垂直于z轴.



单叶双曲面对称于每个坐标轴，每个坐标平面和原点.

3. 双叶双曲面

3. 双叶双曲面

由方程$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

3. 双叶双曲面

由方程 $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

3. 双叶双曲面

由方程$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

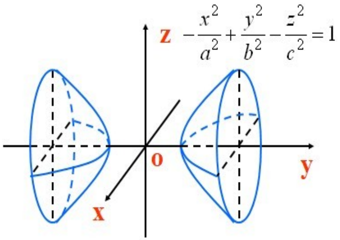
或$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

3. 双叶双曲面

由方程 $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,

或 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$,

或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.



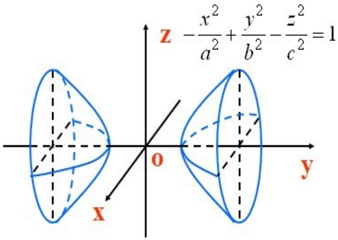
3. 双叶双曲面

由方程 $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

所确定的曲面称为双叶双曲面.



下面研究双叶双曲面$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

下面研究双叶双曲面$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 若$y=0$, 则得$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,

下面研究双叶双曲面$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 若$y=0$, 则得$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,故这个曲面和$Oxz$平面不相交.

下面研究双叶双曲面$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 若$y=0$, 则得$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,故这个曲面和$Oxz$平面不相交.

2. 用平行于Oxz面的平面$y=h$去截它,

下面研究双叶双曲面$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 若$y=0$, 则得$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$,故这个曲面和$Oxz$平面不相交.

2. 用平行于Oxz面的平面$y=h$去截它,

当$|h|>b$时, 截线总是一个椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{b^2}-1, \\ y=h. \end{cases}$

下面研究双叶双曲面 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的形状.

1. 若 $y=0$, 则得 $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$,故这个曲面和 Oxz 平面不相交.

2. 用平行于 Oxz 面的平面 $y=h$ 去截它,

当 $|h|>b$ 时, 截线总是一个椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{b^2}-1, \\ y=h. \end{cases}$

它的两对顶点分别在 Oxy 和 Oyz 平面上.

下面研究双叶双曲面$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 若$y=0$, 则得$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$,故这个曲面和$Oxz$平面不相交.

2. 用平行于Oxz面的平面$y=h$去截它,

当$|h|>b$时, 截线总是一个椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{b^2}-1,\\ y=h.\end{cases}$

它的两对顶点分别在Oxy和Oyz平面上.

3. 曲面分别在Oxy和Oyz这两个坐标平面上的截线是双曲线

下面研究双叶双曲面$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的形状.

1. 若$y=0$, 则得$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$,故这个曲面和$Oxz$平面不相交.

2. 用平行于Oxz面的平面$y=h$去截它,

当$|h|>b$时, 截线总是一个椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{b^2}-1,\\ y=h.\end{cases}$

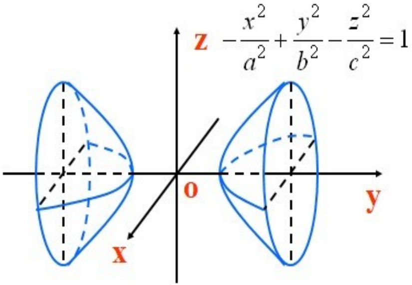
它的两对顶点分别在Oxy和Oyz平面上.

3. 曲面分别在Oxy和Oyz这两个坐标平面上的截线是双曲线

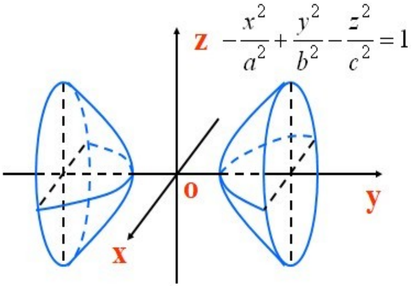
$$\begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

于是, 双叶双曲面也可以看作是由一个椭圆的变动产生的, 这个椭圆的两对顶点分别在上述两条双曲线上运动, 椭圆所在平面垂直于y轴.

于是, 双叶双曲面也可以看作是由一个椭圆的变动产生的, 这个椭圆的两对顶点分别在上述两条双曲线上运动, 椭圆所在平面垂直于y轴.



于是, 双叶双曲面也可以看作是由一个椭圆的变动产生的, 这个椭圆的两对顶点分别在上述两条双曲线上运动, 椭圆所在平面垂直于y轴.



双叶双曲面对称于每个坐标轴, 每个坐标平面和原点.

4. 椭圆抛物面

4. 椭圆抛物面

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

4. 椭圆抛物面

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$

4. 椭圆抛物面

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$

4. 椭圆抛物面

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为**椭圆抛物面**.

4. 椭圆抛物面

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为椭圆抛物面.

- 下面研究方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的形状:

4. 椭圆抛物面

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为椭圆抛物面.

- 下面研究方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的形状:

1. 椭圆抛物面经过原点, 且在Oxy面上方.

4. 椭圆抛物面

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为椭圆抛物面.

- 下面研究方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的形状:

1. 椭圆抛物面经过原点, 且在Oxy面上方.
2. 曲面上的点关于z轴, Oyz和Oxz平面对称.

4. 椭圆抛物面

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为**椭圆抛物面**.

- 下面研究方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的形状:

1. 椭圆抛物面经过原点, 且在Oxy面上方.
2. 曲面上的点关于z轴, Oyz和Oxz平面对称.
3. 用平行于Oxy面的平面$z=h(h>0)$去截曲面, 截线方程为:

4. 椭圆抛物面

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为**椭圆抛物面**.

- 下面研究方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的形状:

1. 椭圆抛物面经过原点, 且在Oxy面上方.
2. 曲面上的点关于z轴, Oyz和Oxz平面对称.
3. 用平行于Oxy面的平面$z=h(h>0)$去截曲面, 截线方程为:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h, \\ z=h\end{cases},$$

4. 椭圆抛物面

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为椭圆抛物面.

- 下面研究方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的形状:

1. 椭圆抛物面经过原点, 且在Oxy面上方.
2. 曲面上的点关于z轴, Oyz和Oxz平面对称.
3. 用平行于Oxy面的平面$z=h(h>0)$去截曲面, 截线方程为:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h,\\ z=h\end{cases}$$

, 它是一个逐渐增大的椭圆.

4. 椭圆抛物面

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为椭圆抛物面.

- 下面研究方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的形状:

1. 椭圆抛物面经过原点, 且在Oxy面上方.
2. 曲面上的点关于z轴, Oyz和Oxz平面对称.
3. 用平行于Oxy面的平面$z=h(h>0)$去截曲面, 截线方程为:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h,\\ z=h\end{cases}$$
, 它是一个逐渐增大的椭圆.

4. 它与Oyz面和Oxz面的截线为抛物线：

4. 它与Oyz面和Oxz面的截线为抛物线：

$$\begin{cases} z = \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = 0. \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2}, \\ y = 0. \end{cases}$$

4. 它与Oyz面和Oxz面的截线为抛物线：

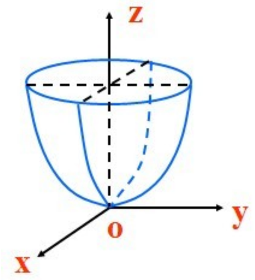
$$\begin{cases} z = \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = 0. \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2}, \\ y = 0. \end{cases}$$

- 椭圆抛物面可以看作是由一个椭圆的变动产生的，这个椭圆的两对顶点分别在上述两条抛物线上运动，椭圆所在平面垂直于z轴.

4. 它与Oyz面和Oxz面的截线为抛物线：

$$\begin{cases} z = \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = 0. \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2}, \\ y = 0. \end{cases}$$

- 椭圆抛物面可以看作是由一个椭圆的变动产生的，这个椭圆的两对顶点分别在上述两条抛物线上运动，椭圆所在平面垂直于z轴.



5. 双曲抛物面(马鞍面)

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为双曲抛物面.

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为双曲抛物面.

- 下面来讨论方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$的形状.

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为双曲抛物面.

- 下面来讨论方程$z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$的形状.

1. 用平面$z = 0$截此曲面, 得到Oxy面上的两条相交直线

$$\begin{cases} bx \pm ay = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为双曲抛物面.

▶ 下面来讨论方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$的形状.

1. 用平面$z=0$截此曲面, 得到Oxy面上的两条相交直线

$$\begin{cases} bx\pm ay=0, \\ z=0. \end{cases}$$

2. 用平面$x=0$截此曲面, 得到Oyz面上开口向下的抛物线

$$\begin{cases} y^2=-b^2z, \\ x=0. \end{cases}$$

5. 双曲抛物面(马鞍面)

由方程 $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 或 $y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ 或 $x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$

所确定的曲面称为双曲抛物面.

▶ 下面来讨论方程$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$的形状.

1. 用平面$z = 0$截此曲面, 得到Oxy面上的两条相交直线

$$\begin{cases} bx \pm ay = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

2. 用平面$x = 0$截此曲面, 得到Oyz面上开口向下的抛物线

$$\begin{cases} y^2 = -b^2 z, \\ x = 0. \end{cases}$$

3. 用平面$y=0$截此曲面, 得到Oxz面上开口向上的抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2 z, \\ y = 0. \end{cases}$$

3. 用平面$y=0$截此曲面，得到Oxz面上开口向上的抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2 z, \\ y = 0. \end{cases}$$

4. 用平面$z=h$截此曲面，得到曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ z = h. \end{cases}$

3. 用平面$y=0$截此曲面，得到Oxz面上开口向上的抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2 z, \\ y = 0. \end{cases}$$

4. 用平面$z=h$截此曲面，得到曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ z = h. \end{cases}$

即平面$z=h$上的双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 h} - \dfrac{y^2}{b^2 h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$

5. 用平面$x = h$截此曲面, 得到Oyz面上开口向下的抛物线

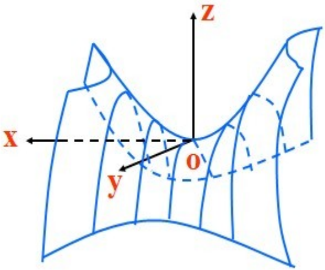
$$\begin{cases} z = \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

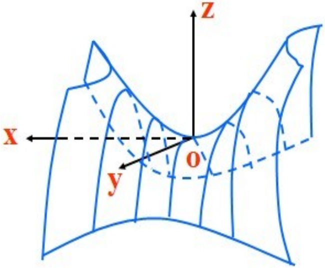
5. 用平面$x = h$截此曲面, 得到Oyz面上开口向下的抛物线

$$\begin{cases} z = \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

6. 用平面$y = h$截此曲面, 得到Oxz面上开口向上的抛物线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$


z
x
y
o



- 当$a=b=1$时，方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$通过将$x$轴，$y$轴在$Oxy$面上作$45^0$的转轴后变形为 $z=xy$.

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16,$

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16,$ 旋转椭球面

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2+4y^2+z^2=16,$ 旋转椭球面
2. $y^2-4z^2=81,$

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16,$ 旋转椭球面

2. $y^2 - 4z^2 = 81,$ 双曲柱面

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16,$ 旋转椭球面
2. $y^2 - 4z^2 = 81,$ 双曲柱面
3. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z,$

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2+4y^2+z^2=16,$ 旋转椭球面
2. $y^2-4z^2=81,$ 双曲柱面
3. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z,$ 椭圆抛物面

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2+4y^2+z^2=16,$ 旋转椭球面
2. $y^2-4z^2=81,$ 双曲柱面
3. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z,$ 椭圆抛物面
4. $x^2+y^2-\dfrac{z}{9}=0,$

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16,$ 旋转椭球面
2. $y^2 - 4z^2 = 81,$ 双曲柱面
3. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z,$ 椭圆抛物面
4. $x^2 + y^2 - \dfrac{z}{9} = 0,$ 旋转抛物面

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16,$ 旋转椭球面
2. $y^2 - 4z^2 = 81,$ 双曲柱面
3. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z,$ 椭圆抛物面
4. $x^2 + y^2 - \dfrac{z}{9} = 0,$ 旋转抛物面
5. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0,$

例1. 指出下列方程表示什么曲面？

1. $4x^2+4y^2+z^2=16,$ 旋转椭球面
2. $y^2-4z^2=81,$ 双曲柱面
3. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z,$ 椭圆抛物面
4. $x^2+y^2-\dfrac{z}{9}=0,$ 旋转抛物面
5. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2-1=0,$ 单叶双曲面

6. $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0,$

6. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面

6. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面

7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} - 1 = 0,$

6. $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0,$ 椭圆柱面

6. $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=0,$ 圆锥面
7. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}-1=0,$ 椭圆柱面
8. $x^2=y,$

6. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面

7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} - 1 = 0,$ 椭圆柱面

8. $x^2 = y,$ 抛物柱面

6. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面

7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} - 1 = 0,$ 椭圆柱面

8. $x^2 = y,$ 抛物柱面

9. $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} = 1,$

6. $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0,$ 椭圆柱面

8. $x^2 = y,$ 抛物柱面

9. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1,$ 旋转双叶双曲面

6. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面
7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} - 1 = 0,$ 椭圆柱面
8. $x^2 = y,$ 抛物柱面
9. $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} = 1,$ 旋转双叶双曲面
10. $x^2 - y^2 + 2z = 0.$

6. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0,$ 圆锥面

7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} - 1 = 0,$ 椭圆柱面

8. $x^2 = y,$ 抛物柱面

9. $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} = 1,$ 旋转双叶双曲面

10. $x^2 - y^2 + 2z = 0.$ 双曲抛物面

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1, 0, 0)$的直线的轨迹.

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi=45^o$, 所以

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi=45^o$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$$

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi=45^o$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\varphi=|\cos(\vec{a},\vec{k})|$$

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1, 0, 0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x, y, z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a} = \{x - 1, y, z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k} = \{0, 0, 1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi = 45^o$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi = |\cos(\vec{a}, \vec{k})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{k}|}{|\vec{a}||\vec{k}|}$$

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi=45^o$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\varphi=|\cos(\vec{a},\vec{k})|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{k}|}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}},$$

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi=45^o$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\varphi=|\cos(\vec{a},\vec{k})|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{k}|}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}},$$

即 $$\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi=45^o$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\varphi=|\cos(\vec{a},\vec{k})|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{k}|}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}},$$

即 $$\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

化简得 $(x-1)^2+y^2-z^2=0$

例2. 求与Oxy平面成45^o角, 且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

解: 设$M(x,y,z)$为动直线上任一点,

则动直线的方向向量为 $\vec{a}=\{x-1,y,z\}$,

取z轴上的单位向量$\vec{k}=\{0,0,1\}$,

由题意可知$\vec{a}$与Oxy平面的夹角为$\varphi=45^o$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\varphi=|\cos(\vec{a},\vec{k})|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{k}|}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}},$$

即 $$\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

化简得 $(x-1)^2+y^2-z^2=0$ （圆锥面）.

六、曲面的参数方程

六、曲面的参数方程

- 若曲面Σ上点的坐标(x, y, z)能表示成两个参数u, v的函数

六、曲面的参数方程

- 若曲面Σ上点的坐标(x, y, z)能表示成两个参数u, v的函数

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

六、曲面的参数方程

- 若曲面Σ上点的坐标(x, y, z)能表示成两个参数u, v的函数

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

则此方程组称为曲面Σ的参数方程.

六、曲面的参数方程

- 若曲面Σ上点的坐标(x, y, z)能表示成两个参数u, v的函数

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

则此方程组称为曲面Σ的参数方程.

- 若能从方程组中消去参数u, v，则得曲面Σ的隐式方程

$$F(x, y, z) = 0.$$

六、曲面的参数方程

- 若曲面Σ上点的坐标(x, y, z)能表示成两个参数u, v的函数

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

则此方程组称为曲面Σ的参数方程.

- 若能从方程组中消去参数u, v，则得曲面Σ的隐式方程

$$F(x, y, z) = 0.$$

- 例如，圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$的参数方程为

六、曲面的参数方程

- 若曲面Σ上点的坐标(x, y, z)能表示成两个参数u, v的函数

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

则此方程组称为曲面Σ的参数方程.

- 若能从方程组中消去参数u, v，则得曲面Σ的隐式方程

$$F(x, y, z) = 0.$$

- 例如，圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \\ z = u. \end{cases} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty < u < +\infty).$$

- 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的参数方程为

- 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi).$$

- 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi).$$