工科数学分析

贺　丹(东南大学)

第一节　常数项级数

本节主要内容：

- 常数项级数的概念、性质与收敛原理
- 正项级数的审敛准则
- 变号级数的审敛准则

正项级数

正项级数

- 所谓**正项级数**, 是指级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0 \ (\forall n \in \mathbf{N}_+)$.

正项级数

- 所谓正项级数, 是指级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0\ (\forall n \in \mathbf{N}_+)$.
- 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$是单调不减的, 由单调有界原理可得:

正项级数

- 所谓正项级数, 是指级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0\ (\forall n \in \mathbf{N}_+)$.
- 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$是单调不减的, 由单调有界原理可得:

定理1.2

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

正项级数

- 所谓正项级数, 是指级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0\ (\forall n \in \mathbf{N}_+)$.
- 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$是单调不减的, 由单调有界原理可得:

定理1.2

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

例1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{\pi}{2n}}{2^n}$的敛散性.

正项级数

- 所谓正项级数, 是指级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0\ (\forall n \in \mathbf{N}_+)$.
- 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列$\{S_n\}$是单调不减的, 由单调有界原理可得:

定理1.2

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

例1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi}{2n}}{2^n}$的敛散性. 收敛

定理1.3 (比较准则I(或比较判别法))

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数，且 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $a_n \leqslant b_n$, 则

定理1.3 (比较准则I(或比较判别法))

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $a_n \leqslant b_n$, 则

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

定理1.3 (比较准则I(或比较判别法))

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $a_n \leqslant b_n$, 则

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

定理1.3 (比较准则I(或比较判别法))

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $a_n \leqslant b_n$, 则

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

- 定理中的条件$a_n \leqslant b_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$可以减弱为：

定理1.3 (比较准则I(或比较判别法))

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数, 且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $a_n \leqslant b_n$, 则

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

- 定理中的条件$a_n \leqslant b_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$可以减弱为：若存在常数$c > 0$, $N \in \mathbf{N}_+$使得当$n > N$时有$a_n \leqslant c b_n$成立.

定理1.3 (比较准则I(或比较判别法))

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数, 且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $a_n \leqslant b_n$, 则

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

- 定理中的条件$a_n \leqslant b_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$可以减弱为：若存在常数$c > 0$, $N \in \mathbf{N}_+$使得当$n > N$时有$a_n \leqslant cb_n$成立.
- 此定理意为：要证收敛找大的收敛的, 要证发散找小的发散的.

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n}(0<\alpha<\pi)$的敛散性.

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{3^n} (0 < \alpha < \pi)$ 的敛散性. 收敛

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{3^n} (0 < \alpha < \pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

例2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{\alpha}{3^n} (0 < \alpha < \pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

结论:

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{\alpha}{3^n}(0 < \alpha < \pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

结论：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$称为$p$级数，敛散性为：

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{3^n} (0 < \alpha < \pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

结论: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$称为$p$级数, 敛散性为: $\begin{cases} p > 1, & \text{收敛}, \\ p \leqslant 1, & \text{发散}. \end{cases}$

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n} (0 < \alpha < \pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

结论: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$称为$p$级数, 敛散性为: $\begin{cases} p > 1, & \text{收敛}, \\ p \leqslant 1, & \text{发散}. \end{cases}$

例4. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\ln n)^n}$.

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n}(0<\alpha<\pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

结论：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$称为$p$级数, 敛散性为：$\begin{cases} p>1, & \text{收敛}, \\ p\leqslant 1, & \text{发散}. \end{cases}$

例4. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\ln n)^n}$.

答：(1) 发散;

例2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{\alpha}{3^n} (0 < \alpha < \pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

结论：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$称为$p$级数, 敛散性为：$\begin{cases} p > 1, & \text{收敛}, \\ p \leqslant 1, & \text{发散}. \end{cases}$

例4. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+(\ln n)^n}$.

答：(1) 发散; (2) 收敛.

例2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n}(0<\alpha<\pi)$的敛散性. 收敛

例3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$($p$为实数)的敛散性.

结论：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$称为$p$级数，敛散性为：$\begin{cases} p>1, & \text{收敛}, \\ p\leqslant 1, & \text{发散}. \end{cases}$

例4. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\ln n)^n}$.

答：(1) 发散; (2) 收敛.

提示：(2) 当$n\geqslant 8$时, $\frac{1}{1+(\ln n)^n}\leqslant\frac{1}{(\ln n)^n}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

定理1.4 (比较准则II(或比较判别法的极限形式))

定理1.4 (比较准则II(或比较判别法的极限形式))

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $b_n > 0$, 且

定理1.4 (比较准则II(或比较判别法的极限形式))

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 且 $\forall n \in \mathbf{N}_+,\ b_n > 0$, 且

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$ (有限数或者 $+\infty$), 则

定理1.4 (比较准则II(或比较判别法的极限形式))

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $b_n > 0$, 且

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$ (有限数或者$+\infty$), 则

(1) 若$\lambda > 0$为有限数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$具有相同的敛散性;

定理1.4 (比较准则II(或比较判别法的极限形式))

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 且 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $b_n > 0$, 且

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$ (有限数或者 $+\infty$), 则

(1) 若 $\lambda > 0$ 为有限数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有相同的敛散性;

(2) 若 $\lambda = 0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

定理1.4 (比较准则II(或比较判别法的极限形式))

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数, 且$\forall n \in \mathbf{N}_+$, $b_n > 0$, 且

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$(有限数或者$+\infty$), 则

(1) 若$\lambda > 0$为有限数, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$具有相同的敛散性;

(2) 若$\lambda = 0$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(3) 若$\lambda = +\infty$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

证： 只给出(1)的证明, (2)和(3)的证明与(1)的证明类似.

证： 只给出(1)的证明, (2)和(3)的证明与(1)的证明类似.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda(0<\lambda<+\infty)$,

证： 只给出(1)的证明, (2)和(3)的证明与(1)的证明类似.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda(0<\lambda<+\infty)$，由极限的保序性知, 存在正整数$N$, 当$n>N$时, 有

$$\frac{\lambda}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}\lambda,$$

证： 只给出(1)的证明, (2)和(3)的证明与(1)的证明类似.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda(0<\lambda<+\infty)$，由极限的保序性知, 存在正整数$N$, 当$n>N$时, 有

$$\frac{\lambda}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}\lambda,$$

从而

$$\frac{\lambda}{2}b_n<a_n<\frac{3\lambda}{2}b_n\quad(n>N),$$

证： 只给出(1)的证明，(2)和(3)的证明与(1)的证明类似.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda(0<\lambda<+\infty)$，由极限的保序性知，存在正整数$N$，当$n>N$时，有

$$\frac{\lambda}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}\lambda,$$

从而

$$\frac{\lambda}{2}b_n<a_n<\frac{3\lambda}{2}b_n\quad(n>N),$$

由比较判别法知结论成立.

说明：比较判别法的极限形式，其实是将两个正项级数的通项作为无穷小量，来比较它们的阶：

说明：比较判别法的极限形式，其实是将两个正项级数的通项作为无穷小量，来比较它们的阶：

- 若a_n与b_n是同阶无穷小量，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同敛散.

说明：比较判别法的极限形式, 其实是将两个正项级数的通项作为无穷小量, 来比较它们的阶：

- 若a_n与b_n是同阶无穷小量, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$同敛散.
- 若a_n是比b_n是高阶无穷小量, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

说明：比较判别法的极限形式，其实是将两个正项级数的通项作为无穷小量，来比较它们的阶：

- 若a_n与b_n是同阶无穷小量，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$同敛散.
- 若a_n是比b_n是高阶无穷小量，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.
- 若a_n是比b_n是低阶无穷小量，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \ln \frac{n+2}{n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

答： (1) 发散；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \ln \frac{n+2}{n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

答： (1) 发散； (2) 收敛；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \ln \frac{n+2}{n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

答： (1) 发散； (2) 收敛； (3) 发散；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \ln \dfrac{n+2}{n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

答： (1) 发散； (2) 收敛； (3) 发散；

(4) 收敛；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

答： (1) 发散； (2) 收敛； (3) 发散；

(4) 收敛； (5) 发散；

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

答： (1) 发散； (2) 收敛； (3) 发散；

(4) 收敛； (5) 发散；

结论： 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ (p为实数)：

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$　　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

答： (1) 发散；　(2) 收敛；　(3) 发散；

(4) 收敛；　(5) 发散；

结论： 数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ (p为实数)： $\begin{cases} p>1, & \text{收敛,} \\ p\leqslant 1, & \text{发散.} \end{cases}$

例6. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

例6. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{n^2}}$$

例6. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos\pi x}{x^2}$$

例6. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{x^2}-\cos\pi x)'}{(x^2)'}$$

例6. 判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{x^2}-\cos\pi x)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}+\pi\sin\pi x}{2x}=1+\frac{\pi^2}{2},$$

例6. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{x^2}-\cos\pi x)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}+\pi\sin\pi x}{2x}=1+\frac{\pi^2}{2},$$

故由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

定理1.6 (D'Alembert(达朗贝尔)准则)(或检比法)(或比值判别法)

定理1.6 (D'Alembert(达朗贝尔)准则)(或检比法)(或比值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数，且$a_n > 0(n \in \mathbf{N}_+)$，及 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$，则

定理1.6 (D'Alembert(达朗贝尔)准则)(或检比法)(或比值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且$a_n > 0(n \in \mathbf{N}_+)$, 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

定理1.6 (D'Alembert(达朗贝尔)准则)(或检比法)(或比值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且$a_n > 0(n \in \mathbf{N}_+)$, 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若$\rho > 1$ (包含$\rho = +\infty$), 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

定理1.6 (D'Alembert(达朗贝尔)准则)(或检比法)(或比值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 且 $a_n > 0(n \in \mathbf{N}_+)$, 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则

(1) 若 $\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\rho > 1$ (包含 $\rho = +\infty$), 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $\rho = 1$, 则判别法失效, 即级数可能收敛, 也可能发散.

定理1.6 (D'Alembert(达朗贝尔)准则)(或检比法)(或比值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且$a_n > 0(n \in \mathbf{N}_+)$, 及 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若$\rho > 1$ (包含$\rho = +\infty$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

(3) 若$\rho = 1$, 则判别法失效, 即级数可能收敛, 也可能发散.

- (3) 考虑p-级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

证明： (1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$时,

证明： (1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$时, 对$r(\rho<r<1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$, 当$n>N$时, 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$, 即

证明： (1) 当 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$时，对$r(\rho<r<1)$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，有$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r$，即

$$a_{N+2}<ra_{N+1},\quad a_{N+3}<ra_{N+2}<r^2a_{N+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{N+k}<ra_{N+k-1}<r^{k-1}a_{N+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

证明： (1) 当 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$时, 对$r(\rho<r<1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$, 当$n>N$时, 有$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r$, 即

$$a_{N+2}<ra_{N+1},\quad a_{N+3}<ra_{N+2}<r^2a_{N+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{N+k}<ra_{N+k-1}<r^{k-1}a_{N+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n<a_{N+1}+ra_{N+1}+\cdots+r^{k-1}a_{N+1}+\cdots$

证明： (1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$时，对$r(\rho<r<1)$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$，即

$$a_{N+2}<ra_{N+1},\quad a_{N+3}<ra_{N+2}<r^2a_{N+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{N+k}<ra_{N+k-1}<r^{k-1}a_{N+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则
$$\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n<a_{N+1}+ra_{N+1}+\cdots+r^{k-1}a_{N+1}+\cdots$$
$$=a_{N+1}\sum_{k=0}^{\infty}r^k,$$

证明： (1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$时，对$r(\rho<r<1)$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$，即

$$a_{N+2}<ra_{N+1},\quad a_{N+3}<ra_{N+2}<r^2a_{N+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{N+k}<ra_{N+k-1}<r^{k-1}a_{N+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则
$$\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n<a_{N+1}+ra_{N+1}+\cdots+r^{k-1}a_{N+1}+\cdots$$
$$=a_{N+1}\sum_{k=0}^{\infty}r^k,$$

因为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}r^k$收敛，

证明: (1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$时, 对$r(\rho<r<1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$, 当$n>N$时, 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$, 即

$$a_{N+2}<ra_{N+1},\quad a_{N+3}<ra_{N+2}<r^2a_{N+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{N+k}<ra_{N+k-1}<r^{k-1}a_{N+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则
$$\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n<a_{N+1}+ra_{N+1}+\cdots+r^{k-1}a_{N+1}+\cdots$$
$$=a_{N+1}\sum_{k=0}^{\infty}r^k,$$

因为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}r^k$收敛, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$时,

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$时, 对$r(\rho>r>1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$,
当$n>N$时, 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>r>1$,

(2) 当 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho > 1$时, 对$r(\rho > r > 1)$, 存在$N \in \mathbf{N}_+$,

当$n > N$时, 有$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r > 1$,

从而当$n \to \infty$时, a_n不趋向于零, 故级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$时, 对$r(\rho>r>1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$,

当$n>N$时, 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>r>1$,

从而当$n\to\infty$时, a_n不趋向于零, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$时, 类似可证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$时, 对$r(\rho>r>1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$,

当$n>N$时, 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>r>1$,

从而当$n\to\infty$时, a_n不趋向于零, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$时, 类似可证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

注意:

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$时, 对$r(\rho>r>1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$,

当$n>N$时, 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>r>1$,

从而当$n\to\infty$时, a_n不趋向于零, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$时, 类似可证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

注意:

- 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在且不是无穷大量时, 判断方法失效.

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$时，对$r(\rho>r>1)$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，

当$n>N$时，有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>r>1$，

从而当$n\to\infty$时，a_n不趋向于零，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$时，类似可证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

注意:

- 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在且不是无穷大量时，判断方法失效.
- 比值判别中的极限条件只是充分条件，而非必要条件.

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$时, 对$r(\rho>r>1)$, 存在$N\in\mathbf{N}_+$,

当$n>N$时, 有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>r>1$,

从而当$n\to\infty$时, a_n不趋向于零, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$时, 类似可证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

注意:

- 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在且不是无穷大量时, 判断方法失效.
- 比值判别中的极限条件只是充分条件, 而非必要条件.

  例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛, 但极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在.

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若$\rho > 1$(包含$\rho = +\infty$), 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若$\rho > 1$(包含$\rho = +\infty$), 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

(3) 若$\rho = 1$, 则判别法失效, 即级数可能收敛, 也可能发散.

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若$\rho > 1$(包含$\rho = +\infty$), 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

(3) 若$\rho = 1$, 则判别法失效, 即级数可能收敛, 也可能发散.

- 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$不存在且不是无穷大量时, 判断方法失效.

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

(1) 若 $\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\rho > 1$(包含 $\rho = +\infty$), 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $\rho = 1$, 则判别法失效, 即级数可能收敛, 也可能发散.

- 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 不存在且不是无穷大量时, 判断方法失效.
- 根值判别中的极限条件只是充分条件, 而非必要条件.

定理1.7 (Cauchy准则)(或检根法)(或根值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

(1) 若$\rho < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若$\rho > 1$(包含$\rho = +\infty$), 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

(3) 若$\rho = 1$, 则判别法失效, 即级数可能收敛, 也可能发散.

- 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$不存在且不是无穷大量时, 判断方法失效.
- 根值判别中的极限条件只是充分条件, 而非必要条件.
- 凡是用比值或根值判敛法判定为发散的级数必有其通项不趋向于零.

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^5}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^{n+1}}$;　　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答：(1) 收敛;

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答：(1) 收敛; (2) 发散

例7 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^5}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^{n+1}}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答: (1) 收敛; (2) 发散 (3) 发散

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n!}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n^5}$;　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}$;　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答：(1) 收敛;　(2) 发散　(3) 发散　(4) 收敛

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^{n+1}}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答：(1) 收敛; (2) 发散 (3) 发散 (4) 收敛

(5) 当$a<1$时, 收敛; 当$a\geqslant 1$时, 发散.

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答：(1) 收敛; (2) 发散 (3) 发散 (4) 收敛

(5) 当$a < 1$时, 收敛; 当$a \geqslant 1$时, 发散.

说明：可以证明, 凡是能用比值判敛法判定敛散性的级数的都必能用根值法来判定, 反之未必.

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答：(1) 收敛; (2) 发散 (3) 发散 (4) 收敛

(5) 当$a<1$时, 收敛; 当$a \geqslant 1$时, 发散.

说明：可以证明, 凡是能用比值判敛法判定敛散性的级数的都必能用根值法来判定, 反之未必.

如(4)：$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(n+1)+(-1)^{n+2}}}{2^{-n+(-1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+2(-1)^{n+2}}$

例7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n^5}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(an)^n}{(n+1)^n}$ (a为常数).

答：(1) 收敛; (2) 发散 (3) 发散 (4) 收敛

(5) 当$a<1$时, 收敛; 当$a \geqslant 1$时, 发散.

说明：可以证明, 凡是能用比值判敛法判定敛散性的级数的都必能用根值法来判定, 反之未必.

如(4)：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{-(n+1)+(-1)^{n+2}}}{2^{-n+(-1)^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-1+2(-1)^{n+2}}$

不存在, 可见比值判别法失效.

例8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^{n}$ $(x>0$为常数$)$的敛散性.

例8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0$为常数$)$的敛散性.

解: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}$

例8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0$为常数$)$的敛散性.

解：因为 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}$

例8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0$为常数$)$的敛散性.

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

例8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0$为常数)的敛散性.

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0<x<\mathrm{e}$时, 级数收敛;

例8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0$为常数$)$的敛散性.

解：因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0 < x < \mathrm{e}$时, 级数收敛; 当$x > \mathrm{e}$时, 级数发散;

例8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0$为常数$)$的敛散性.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0<x<\mathrm{e}$时, 级数收敛; 当$x>\mathrm{e}$时, 级数发散;

当$x=\mathrm{e}$时, 由于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n}$

例8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0$为常数$)$的敛散性.

解: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0<x<\mathrm{e}$时, 级数收敛; 当$x>\mathrm{e}$时, 级数发散;

当$x=\mathrm{e}$时, 由于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n}=\dfrac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$,

例8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0$为常数$)$的敛散性.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0<x<\mathrm{e}$时, 级数收敛; 当$x>\mathrm{e}$时, 级数发散;

当$x=\mathrm{e}$时, 由于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n}=\dfrac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$,

则 $a_{n+1}>a_n$,

例8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0$为常数$)$的敛散性.

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0<x<\mathrm{e}$时, 级数收敛; 当$x>\mathrm{e}$时, 级数发散;

当$x=\mathrm{e}$时, 由于$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n}=\frac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$,

则 $a_{n+1}>a_n$, 故 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$,

例8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \ (x>0$为常数)的敛散性.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n} = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0<x<\mathrm{e}$时, 级数收敛; 当$x>\mathrm{e}$时, 级数发散;

当$x=\mathrm{e}$时, 由于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n} = \dfrac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$,

则 $a_{n+1} > a_n$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 原级数发散.

例8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0$为常数$)$的敛散性.

解： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

所以当$0<x<\mathrm{e}$时, 级数收敛; 当$x>\mathrm{e}$时, 级数发散;

当$x=\mathrm{e}$时, 由于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n}=\dfrac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$,

则 $a_{n+1}>a_n$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 原级数发散.

说明： 在比值判敛法$\rho=1$时, 比值法失效, 但在求极限过程中, 若能判定$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$是从大于1的方向趋向于1, 则可判定级数是发散的.

定理1.5 (积分准则或积分判别法)

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，若存在一个单调递减的非负连续函数$f(x)$($x \in [1, +\infty)$) 使得 $f(n) = a_n$，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

例9. 判别下列级数的敛散性：

例9. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

例9. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

答： 此为p-级数，当$p \leqslant 1$时发散，当$p > 1$时收敛.

例9. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

答： 此为p-级数，当$p\leqslant 1$时发散，当$p>1$时收敛.

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

例9. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

答： 此为p-级数，当$p \leqslant 1$时发散，当$p > 1$时收敛.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$.

答： 收敛.