工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第三节 三重积分的计算

第三节　三重积分的计算

本章主要内容:

第三节　三重积分的计算

本章主要内容：

- 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分

  (直角坐标系下三重积分的计算)

第三节 三重积分的计算

本章主要内容：

- 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分

  (直角坐标系下三重积分的计算)

- 柱面坐标系下三重积分的计算方法

第三节　三重积分的计算

本章主要内容：

- 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分

  (直角坐标系下三重积分的计算)

- 柱面坐标系下三重积分的计算方法

- 球面坐标系下三重积分的计算方法

直角坐标系下三重积分的计算

直角坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的定义

直角坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的定义

定义

直角坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的定义

定义

函数f为空间有界闭区域(V)上的有界函数, 将(V)任意分割成n个小部分$(\Delta V_i)(i=1,\cdots,n)$, 其第$i$个小闭区域的体积为$\Delta V_i$.
记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(\Delta V_i)\text{的直径}\}$,

直角坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的定义

定义

函数f为空间有界闭区域(V)上的有界函数，将(V)任意分割成n个小部分$(\Delta V_i)(i=1,\cdots,n)$，其第$i$个小闭区域的体积为$\Delta V_i$.

记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(\Delta V_i)\text{的直径}\}$，任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in(\Delta V_i)$，作和

式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$,

直角坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的定义

定义

函数f为空间有界闭区域(V)上的有界函数，将(V)任意分割成n个小部分$(\Delta V_i)(i=1,\cdots,n)$，其第$i$个小闭区域的体积为$\Delta V_i$. 记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(\Delta V_i)\text{的直径}\}$，任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in(\Delta V_i)$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$，如果无论将$(V)$如何分割，点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$如何选取，当$d\to 0$ 时，上述和式有确定的极限，

直角坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的定义

定义

函数f为空间有界闭区域(V)上的有界函数，将(V)任意分割成n个小部分$(\Delta V_i)(i=1,\cdots,n)$，其第$i$个小闭区域的体积为$\Delta V_i$.
记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(\Delta V_i)\text{的直径}\}$，任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in(\Delta V_i)$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$，如果无论将$(V)$如何分割，点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$如何选取，当$d\to 0$ 时，上述和式有确定的极限，则称函数f在(V)上可积，极限值为f在(V)上的三重积分，即

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

直角坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的定义

定义

函数f为空间有界闭区域(V)上的有界函数，将(V)任意分割成n个小部分$(\Delta V_i)(i=1,\cdots,n)$，其第$i$个小闭区域的体积为$\Delta V_i$. 记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(\Delta V_i)\text{的直径}\}$，任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in(\Delta V_i)$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$，如果无论将$(V)$如何分割，点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$如何选取，当$d\to 0$ 时，上述和式有确定的极限，则称函数f在(V)上**可积**，极限值为f在(V)上的**三重积分**，即

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

其中$\mathrm{d}V$为体积元素，也可记为$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

2. 计算方法

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发，导出三重积分的计算公式.

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发，导出三重积分的计算公式.

设物体占有空间区域(V)，密度函数$f(x,y,z)$为(V)上的连续函数，

则由第一节可知，物体的质量为$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V.$

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发，导出三重积分的计算公式.

设物体占有空间区域(V)，密度函数$f(x,y,z)$为(V)上的连续函数，

则由第一节可知，物体的质量为$m = \displaystyle\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$.

- 坐标面投影法

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发, 导出三重积分的计算公式.

设物体占有空间区域(V), 密度函数$f(x,y,z)$为(V)上的连续函数,

则由第一节可知, 物体的质量为$m = \displaystyle\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$.

- **坐标面投影法**

将区域(V)投影到Oxy面, 得到投影区域D_{xy}.

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发，导出三重积分的计算公式.

设物体占有空间区域(V)，密度函数$f(x,y,z)$为(V)上的连续函数，

则由第一节可知，物体的质量为$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$.

- 坐标面投影法

将区域(V)投影到Oxy面，得到投影区域D_{xy}. 设(V)满足条件：

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发，导出三重积分的计算公式.

设物体占有空间区域(V)，密度函数$f(x,y,z)$为(V)上的连续函数，

则由第一节可知，物体的质量为$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$.

- **坐标面投影法**

将区域(V)投影到Oxy面，得到投影区域D_{xy}. 设(V)满足条件：

过区域D_{xy}内任一点作平行于z轴的直线，此直线与(V)的边界曲面S的交点至多有两个(x,y,z_1) 和$(x,y,z_2)(z_1\leqslant z_2)$，且$z_1(x,y)$和$z_2(x,y)$均为$x,y$的连续函数.

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发, 导出三重积分的计算公式.

设物体占有空间区域(V), 密度函数$f(x,y,z)$为(V)上的连续函数,

则由第一节可知, 物体的质量为$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$.

- 坐标面投影法

将区域(V)投影到Oxy面, 得到投影区域D_{xy}. 设(V)满足条件:

过区域D_{xy}内任一点作平行于z轴的直线, 此直线与(V)的边界曲面S的交点至多有两个(x,y,z_1) 和$(x,y,z_2)(z_1\leqslant z_2)$, 且$z_1(x,y)$和$z_2(x,y)$均为$x,y$的连续函数. 于是$(V)$可以表示为:

2. 计算方法

从计算空间物体的质量出发, 导出三重积分的计算公式.

设物体占有空间区域(V), 密度函数$f(x,y,z)$为(V)上的连续函数,

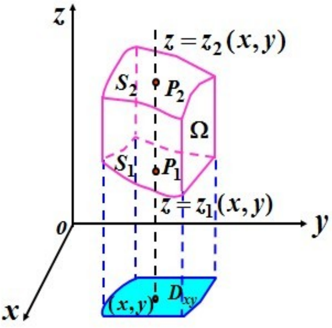
则由第一节可知, 物体的质量为$m = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$.

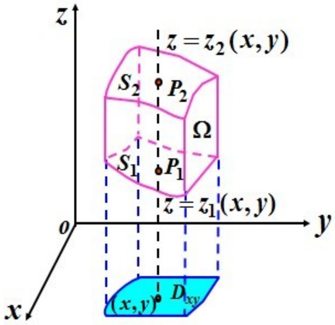
- **坐标面投影法**

将区域(V)投影到Oxy面, 得到投影区域D_{xy}. 设(V)满足条件:

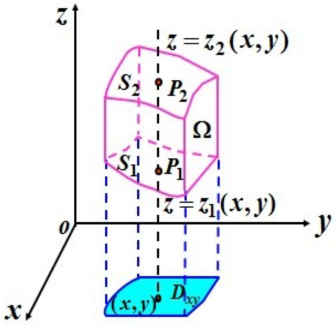
过区域D_{xy}内任一点作平行于z轴的直线, 此直线与(V)的边界曲面S的交点至多有两个(x,y,z_1) 和$(x,y,z_2)(z_1 \leqslant z_2)$, 且$z_1(x,y)$和$z_2(x,y)$均为$x,y$的连续函数. 于是$(V)$可以表示为:

$$(V) = \{(x,y,z)|(x,y) \in D_{xy}, z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}$$


z
$z = z_2(x,y)$
S_2
P_2
Ω
S_1
P_1
$z = z_1(x,y)$
0
y
x
(x,y)
D_{xy}

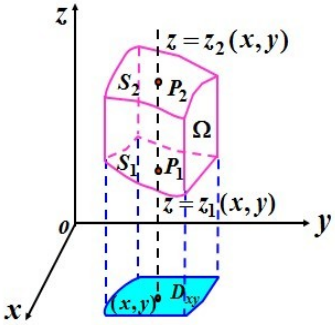


为求该形体的质量，将D_{xy}进行划分，在一个小的区域$(\Delta\sigma)$上，以$(\Delta\sigma)$的边界曲线为准线，作母线平行于z轴的柱面，此柱面截得(V)的部分可近似地看作一根“细棒”．



为求该形体的质量，将D_{xy}进行划分，在一个小的区域$(\Delta\sigma)$上，以$(\Delta\sigma)$的边界曲线为准线，作母线平行于z轴的柱面，此柱面截得(V)的部分可近似地看作一根“细棒”．

在$(\Delta\sigma)$内任取一点$(x,y,0)$作平行于z轴的直线，此直线与S_1和S_2交点的竖坐标为$z_1(x,y)$和$z_2(x,y)$，于是“细棒”的质量可近似地表示为



为求该形体的质量，将D_{xy}进行划分，在一个小的区域$(\Delta\sigma)$上，以$(\Delta\sigma)$的边界曲线为准线，作母线平行于z轴的柱面，此柱面截得(V)的部分可近似地看作一根“细棒”．

在$(\Delta\sigma)$内任取一点$(x,y,0)$作平行于z轴的直线，此直线与S_1和S_2交点的竖坐标为$z_1(x,y)$和$z_2(x,y)$，于是“细棒”的质量可近似地表示为

$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\Delta\sigma$$

把所有小区域$(\Delta\sigma)$上对应的“细棒”的质量加起来, 则得到

物体的质量

把所有小区域$(\Delta\sigma)$上对应的“细棒”的质量加起来, 则得到物体的质量

$$m = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\sigma$$

把所有小区域$(\Delta\sigma)$上对应的“细棒”的质量加起来, 则得到物体的质量

$$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\sigma$$

此即三重积分化为定积分与二重积分的计算公式.

把所有小区域$(\Delta\sigma)$上对应的“细棒”的质量加起来, 则得到物体的质量

$$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\sigma$$

此即三重积分化为定积分与二重积分的计算公式.

称为“细棒法”, 或者“坐标面投影法”, 或者“先一后二法”.

把所有小区域$(\Delta\sigma)$上对应的“细棒”的质量加起来, 则得到物体的质量

$$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\sigma$$

此即三重积分化为定积分与二重积分的计算公式.

称为“细棒法”, 或者“坐标面投影法”, 或者“先一后二法”.

若$D_{xy}=\{(x,y)|y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$, 则

把所有小区域$(\Delta\sigma)$上对应的“细棒”的质量加起来, 则得到物体的质量

$$m=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\sigma$$

此即三重积分化为定积分与二重积分的计算公式.

称为“细棒法”, 或者“坐标面投影法”, 或者“先一后二法”.

若$D_{xy}=\{(x,y)|y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

把所有小区域$(\Delta\sigma)$上对应的"细棒"的质量加起来, 则得到物体的质量

$$m = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\sigma$$

此即三重积分化为定积分与二重积分的计算公式.

称为"细棒法", 或者"坐标面投影法", 或者"先一后二法".

若$D_{xy} = \{(x,y) | y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

即为先对z, 再对y, 最后对x的三次积分.

说明

说明

- 根据空间区域(V)在Oxy面的投影区域D_{xy}的类型, 也可以化为先对z, 再对x, 最后对y的三次积分.

说明

- 根据空间区域(V)在Oxy面的投影区域D_{xy}的类型, 也可以化为先对z, 再对x, 最后对y的三次积分.
- 若平行于x轴(或y轴)的直线与S的交点不多于两个, 则同样可把(V)投影到Oyz面(或Oxz面)上, 得到先对x(或y)的积分.

说明

- 根据空间区域(V)在Oxy面的投影区域D_{xy}的类型, 也可以化为先对z, 再对x, 最后对y的三次积分.
- 若平行于x轴(或y轴)的直线与S的交点不多于两个, 则同样可把(V)投影到Oyz面(或Oxz面)上, 得到先对x(或y)的积分.
- 若平行于坐标轴的直线与S的交点多于两个, 则可把(V)分成几块来处理.

例1. 将$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为各种次序的三次积分, 其中(V)是由平面$z=1$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体.

例1. 将$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为各种次序的三次积分, 其中

(V)是由平面$z=1$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体.

解: (1) 先对z积分

例1. 将$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为各种次序的三次积分, 其中(V)是由平面$z=1$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体.

解: (1) 先对z积分

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$$

例1. 将$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为各种次序的三次积分, 其中

(V)是由平面$z=1$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体.

解：(1) 先对z积分

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$$

(2) 先对x积分

例1. 将$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为各种次序的三次积分, 其中

(V)是由平面$z=1$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体.

解: (1) 先对z积分

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$$

(2) 先对x积分

$$I=\iint\limits_{D_{yz}}\left(\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad D_{yz}: 0\leqslant z\leqslant 1, -z\leqslant y\leqslant z$$

例1. 将$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为各种次序的三次积分, 其中

(V)是由平面$z=1$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体.

解: (1) 先对z积分

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$$

(2) 先对x积分

$$I=\iint\limits_{D_{yz}}\left(\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad D_{yz}: 0\leqslant z\leqslant 1, -z\leqslant y\leqslant z$$

(3) 先对y积分

例1. 将$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为各种次序的三次积分, 其中

(V)是由平面$z=1$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体.

解: (1) 先对z积分

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$$

(2) 先对x积分

$$I=\iint\limits_{D_{yz}}\left(\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad D_{yz}: 0\leqslant z\leqslant 1, -z\leqslant y\leqslant z$$

(3) 先对y积分 类似(2),略.

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$(V)$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

例2. 计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$(V)$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

解：将(V)投影到Oxy面, 得到其投影区域为

例2. 计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$(V)$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

解: 将(V)投影到Oxy面, 得到其投影区域为

$$D_{xy}=\left\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{2}\right\}$$

例2. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$(V)$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

解：将(V)投影到Oxy面, 得到其投影区域为

$$D_{xy}=\left\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{2}\right\}$$

于是

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$(V)$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

解：将(V)投影到Oxy面, 得到其投影区域为

$$D_{xy}=\left\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{2}\right\}$$

于是

$$\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_0^{1-x-2y} x\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$(V)$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域.

解：将(V)投影到Oxy面, 得到其投影区域为

$$D_{xy}=\left\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{2}\right\}$$

于是

$$\iiint\limits_{(V)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_0^{1-x-2y} x\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} x\mathrm{d}z=\frac{1}{48}.$$

▶ 坐标轴投影法

▶ 坐标轴投影法

将空间区域(Ω)向z轴投影，得到投影区间$[c_1, c_2]$，且(Ω)能表示为:

▶ 坐标轴投影法

将空间区域(Ω)向z轴投影, 得到投影区间$[c_1, c_2]$, 且(Ω)能表示为:

$$(\Omega) = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leqslant z \leqslant c_2\},$$

▶ 坐标轴投影法

将空间区域(Ω)向z轴投影，得到投影区间$[c_1, c_2]$，且(Ω)能表示为：

$$(\Omega) = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leqslant z \leqslant c_2\},$$

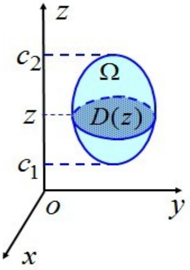
其中D_z是过点$(0, 0, z)$且平行于Oxy平面截(Ω)所得的平面区域.

▶ 坐标轴投影法

将空间区域(Ω)向z轴投影, 得到投影区间$[c_1, c_2]$, 且(Ω)能表示为:

$$(\Omega) = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leqslant z \leqslant c_2\},$$

其中D_z是过点$(0, 0, z)$且平行于Oxy平面截(Ω)所得的平面区域.

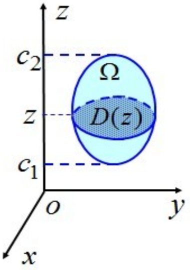


▶ 坐标轴投影法

将空间区域(Ω)向z轴投影，得到投影区间$[c_1, c_2]$，且(Ω)能表示为:

$$(\Omega) = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leqslant z \leqslant c_2\},$$

其中D_z是过点$(0, 0, z)$且平行于Oxy平面截(Ω)所得的平面区域.



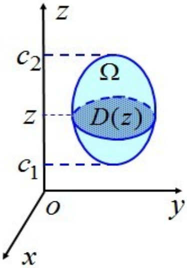
固定$z \in [c_1, c_2]$，在D_z上作二重积分$\displaystyle\iint_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

▶ 坐标轴投影法

将空间区域(Ω)向z轴投影, 得到投影区间$[c_1, c_2]$, 且(Ω)能表示为:

$$(\Omega) = \{(x, y, z)|(x, y) \in D_z, c_1 \leqslant z \leqslant c_2\},$$

其中D_z是过点$(0, 0, z)$且平行于Oxy平面截(Ω)所得的平面区域.



固定$z \in [c_1, c_2]$, 在D_z上作二重积分$\displaystyle\iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

当z在区间$[c_1, c_2]$上变动时, 该二重积分是z的函数, 即

$$\varphi(z) = \iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再将$\varphi(z)$在$[c_1, c_2]$上作定积分得

再将$\varphi(z)$在$[c_1, c_2]$上作定积分得

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(z)\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

再将$\varphi(z)$在$[c_1, c_2]$上作定积分得

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(z)\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

当函数$f \in C_\Omega$时, 有

再将$\varphi(z)$在$[c_1, c_2]$上作定积分得

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(z)\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

当函数$f \in C_\Omega$时，有

$$\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此即三重积分化为二重积分与定积分的计算公式.

再将$\varphi(z)$在$[c_1, c_2]$上作定积分得

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(z)\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

当函数$f \in C_\Omega$时，有

$$\iiint_{(\Omega)} f(x, y, z)\mathrm{d}V = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此即三重积分化为二重积分与定积分的计算公式.

称为“切片法”，或者“坐标轴投影法”，或者“先二后一法”.

再将$\varphi(z)$在$[c_1, c_2]$上作定积分得

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(z)\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

当函数$f \in C_\Omega$时, 有

$$\iiint\limits_{(\Omega)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此即三重积分化为二重积分与定积分的计算公式.

称为“切片法”, 或者“坐标轴投影法”, 或者“先二后一法”.

- 也可以将(Ω)投影x轴(或y轴)上来得到切片法下的积分公式.

例3. 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} z^2 \mathrm{d}V$, 其中$(V)$是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

所围成的空间闭区域.

例3. 计算 $\iiint\limits_{(V)} z^2 \mathrm{d}V$, 其中$(V)$是由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.

解: $\iiint\limits_{(V)} z^2 \mathrm{d}V = \int_{-c}^{c} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-c}^{c} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

例3. 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} z^2\mathrm{d}V$, 其中$(V)$是由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

所围成的空间闭区域.

解: $$\iiint\limits_{(V)} z^2\mathrm{d}V=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-c}^{c}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中D_z表示平面$z=z$上的椭圆盘: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}$,

例3. 计算$\displaystyle\iiint\limits_{(V)} z^2\mathrm{d}V$, 其中$(V)$是由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

所围成的空间闭区域.

解: $$\iiint\limits_{(V)} z^2\mathrm{d}V=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-c}^{c}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中D_z表示平面$z=z$上的椭圆盘: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}$,

其面积为$\pi ab\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$,

例3. 计算 $\iiint\limits_{(V)} z^2 \mathrm{d}V$, 其中$(V)$是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

所围成的空间闭区域.

解: $\iiint\limits_{(V)} z^2 \mathrm{d}V = \int_{-c}^{c} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-c}^{c} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中D_z表示平面$z=z$上的椭圆盘: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}$,

其面积为$\pi ab\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$,

故 $\iiint\limits_{(V)} z^2 \mathrm{d}V = \int_{-c}^{c} z^2 \cdot \pi ab(1-\dfrac{z^2}{c^2})\mathrm{d}z = \dfrac{4}{15}\pi abc^3$.

例4. 设空间闭区域Ω为由曲面

$$x^2+y^2=az \text{ 与 } z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$$

所围成, 求Ω的体积V.

例4. 设空间闭区域Ω为由曲面

$$x^2+y^2=az \text{ 与 } z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$$

所围成, 求Ω的体积V.

解: $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$, 两曲面的交线可化为: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=a. \end{cases}$

例4. 设空间闭区域Ω为由曲面

$$x^2+y^2=az \text{ 与 } z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$$

所围成, 求Ω的体积V.

解: $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$, 两曲面的交线可化为: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=a. \end{cases}$

法一(坐标面投影法):

例4. 设空间闭区域Ω为由曲面

$$x^2+y^2=az \text{ 与 } z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$$

所围成, 求Ω的体积V.

解: $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$, 两曲面的交线可化为: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=a. \end{cases}$

法一(坐标面投影法): $V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z$

例4. 设空间闭区域Ω为由曲面

$$x^2+y^2=az \text{ 与 } z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$$

所围成, 求Ω的体积V.

解: $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$, 两曲面的交线可化为: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=a. \end{cases}$

法一(坐标面投影法): $V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z$

法二(切片法):

例4. 设空间闭区域Ω为由曲面

$$x^2+y^2=az \text{ 与 } z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$$

所围成, 求Ω的体积V.

解: $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$, 两曲面的交线可化为: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=a. \end{cases}$

法一(坐标面投影法): $V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z$

法二(切片法):

$$V=\int_0^a\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant az}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2a-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例4. 设空间闭区域Ω为由曲面

$$x^2 + y^2 = az \text{ 与 } z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}(a > 0)$$

所围成, 求Ω的体积V.

解: $V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V$, 两曲面的交线可化为: $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a. \end{cases}$

法一(坐标面投影法): $V = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z$

法二(切片法):

$$V = \int_0^a \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant az} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_a^{2a} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant (2a-z)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{6}\pi a^3.$$

3. 利用对称性简化三重积分的计算

3. 利用对称性简化三重积分的计算

设$f(x,y,z)$在有界闭区域(V)上连续, $(V)=(V_1)\cup(V_2)$,

3. 利用对称性简化三重积分的计算

设$f(x,y,z)$在有界闭区域(V)上连续, $(V)=(V_1)\cup(V_2)$,

(1) 若(V_1)与(V_2)关于Oxy面对称, 则

3. 利用对称性简化三重积分的计算

设$f(x,y,z)$在有界闭区域(V)上连续, $(V)=(V_1)\cup(V_2)$,

(1) 若(V_1)与(V_2)关于Oxy面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}z\text{是偶函数;}\\ 0, & f\text{关于}z\text{是奇函数;}\end{cases}$$

3. 利用对称性简化三重积分的计算

设$f(x,y,z)$在有界闭区域(V)上连续, $(V)=(V_1)\cup(V_2)$,

(1) 若(V_1)与(V_2)关于Oxy面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}z\text{是偶函数;}\\ 0, & f\text{关于}z\text{是奇函数;}\end{cases}$$

(2) 若(V_1)与(V_2)关于Oyz面对称, 则

3. 利用对称性简化三重积分的计算

设$f(x,y,z)$在有界闭区域(V)上连续, $(V)=(V_1)\cup(V_2)$,

(1) 若(V_1)与(V_2)关于Oxy面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}z\text{是偶函数};\\ 0, & f\text{关于}z\text{是奇函数}; \end{cases}$$

(2) 若(V_1)与(V_2)关于Oyz面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}x\text{是偶函数};\\ 0, & f\text{关于}x\text{是奇函数}; \end{cases}$$

(3) 若(V_1)与(V_2)关于Oxz面对称, 则

(3) 若(V_1)与(V_2)关于Oxz面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}y\text{是偶函数}; \\ 0, & f\text{关于}y\text{是奇函数}; \end{cases}$$

(3) 若(V_1)与(V_2)关于Oxz面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}y\text{是偶函数;} \\ 0, & f\text{关于}y\text{是奇函数;} \end{cases}$$

(4) 轮换对称性

(3) 若(V_1)与(V_2)关于Oxz面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}y\text{是偶函数}; \\ 0, & f\text{关于}y\text{是奇函数}; \end{cases}$$

(4) **轮换对称性**　若将x换为y, y换为z, z换为x, 积分区域不变,

(3) 若(V_1)与(V_2)关于Oxz面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}y\text{是偶函数}; \\ 0, & f\text{关于}y\text{是奇函数}; \end{cases}$$

(4) 轮换对称性 若将x换为y, y换为z, z换为x, 积分区域不变,

即$(x,y,z)\in(V)\leftrightarrow(y,z,x)\in(V)$, 则

(3) 若(V_1)与(V_2)关于Oxz面对称, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & f\text{关于}y\text{是偶函数}; \\ 0, & f\text{关于}y\text{是奇函数}; \end{cases}$$

(4) **轮换对称性** 若将x换为y, y换为z, z换为x, 积分区域不变,

即$(x,y,z)\in(V)\leftrightarrow(y,z,x)\in(V)$, 则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} f(y,z,x)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} f(z,x,y)\mathrm{d}V$$

例1. 设有空间区域

$$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$$

$$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$$

则下面正确的是:

例1. 设有空间区域

$$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$$

$$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$$

则下面正确的是:

(1) $\displaystyle\iiint_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}V;$

例1. 设有空间区域

$$\Omega_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$$

$$\Omega_2 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$$

则下面正确的是:

(1) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$; (2) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}V$;

例1. 设有空间区域

$$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$$

$$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$$

则下面正确的是:

(1) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$; (2) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}V$;

(3) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$;

例1. 设有空间区域

$$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$$

$$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$$

则下面正确的是:

(1) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$; (2) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}V$;

(3) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$; (4) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}V$.

例1. 设有空间区域

$$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$$

$$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$$

则下面正确的是:

(1) $\displaystyle\iiint_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$; (2) $\displaystyle\iiint_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} y\mathrm{d}V$;

(3) $\displaystyle\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$; (4) $\displaystyle\iiint_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}V$.

答: 应选(3).

例2. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2+z^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所生成的曲面所围成的区域.

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2+z^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所生成的曲面所围成的区域.

解：旋转曲面方程为$x^2+y^2+z^2=2z$, 故

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2+z^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所生成的曲面所围成的区域.

解：旋转曲面方程为$x^2+y^2+z^2=2z$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V$$

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2+z^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所生成的曲面所围成的区域.

解：旋转曲面方程为$x^2+y^2+z^2=2z$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2+z^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所生成的曲面所围成的区域.

解：旋转曲面方程为$x^2+y^2+z^2=2z$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 z^2\cdot\pi(2z-z^2)\mathrm{d}z$$

例2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2+z^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所生成的曲面所围成的区域.

解：旋转曲面方程为$x^2+y^2+z^2=2z$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2yz+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 z^2\cdot\pi(2z-z^2)\mathrm{d}z=\frac{8}{5}\pi.$$

例3. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+2z^2)\mathrm{d}V.$

例3. 计算三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+2z^2)\mathrm{d}V$.

解：积分区域为球域$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则由轮换对称性可知,

例3. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+2z^2)\mathrm{d}V.$

解：积分区域为球域$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则由轮换对称性可知,

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V,$$

例3. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+2z^2)\mathrm{d}V$.

解：积分区域为球域$\Omega : x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则由轮换对称性可知,

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V,$$

故 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+2z^2)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} z^2\mathrm{d}V$

例3. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (x^2+2z^2)\mathrm{d}V.$

解：积分区域为球域$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则由轮换对称性可知,

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V,$$

故 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (x^2+2z^2)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} z^2\mathrm{d}V$

$$=3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_{-1}^{1} z^2\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z$$

例3. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (x^2+2z^2)\mathrm{d}V.$

解：积分区域为球域$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, 则由轮换对称性可知,

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V,$$

故 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (x^2+2z^2)\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} z^2\mathrm{d}V$

$$= 3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z \iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_{-1}^{1} z^2\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z = \frac{4}{5}\pi.$$

三重积分的一般坐标变换法则

定理

三重积分的一般坐标变换法则

定理

设函数f在有界闭区域Ω上连续,

(1) 变换$T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 将区域Ω一对一的变为Ω';

三重积分的一般坐标变换法则

定理

设函数f在有界闭区域Ω上连续，

(1) 变换$T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 将区域Ω一对一的变为Ω';

(2) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$在$\Omega'$具有一阶连续偏导数;

三重积分的一般坐标变换法则

定理

设函数f在有界闭区域Ω上连续,

(1) 变换$T: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 将区域Ω一对一的变为Ω';

(2) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$在$\Omega'$具有一阶连续偏导数;

(3) 在Ω'上, Jacobi行列式$J(u,v,w) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$;

三重积分的一般坐标变换法则

定理

设函数f在有界闭区域Ω上连续,

(1) 变换$T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 将区域Ω一对一的变为Ω';

(2) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$在$\Omega'$具有一阶连续偏导数;

(3) 在Ω'上, Jacobi行列式$J(u,v,w) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$;

则有 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

三重积分的一般坐标变换法则

定理

设函数f在有界闭区域Ω上连续,

(1) 变换$T: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 将区域Ω一对一的变为Ω';

(2) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$在$\Omega'$具有一阶连续偏导数;

(3) 在Ω'上, Jacobi行列式$J(u,v,w) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$;

则有 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

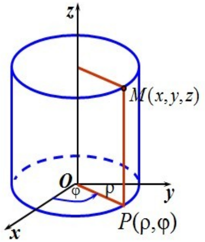
柱面坐标下三重积分的计算

柱面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，点M在Oxy面上的投影为点P，其极坐标为(ρ,φ)，则称三元有序数组(ρ,φ,z)是点M的柱面坐标.

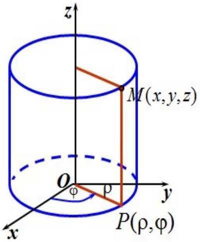
柱面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点, 点M在Oxy面上的投影为点P, 其极坐标为(ρ,φ), 则称三元有序数组(ρ,φ,z)是点M的柱面坐标.



柱面坐标下三重积分的计算

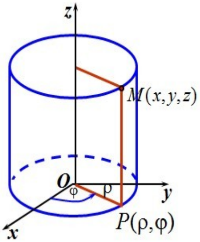
设$M(x,y,z)$为空间内一点, 点M在Oxy面上的投影为点P, 其极坐标为(ρ,φ), 则称三元有序数组(ρ,φ,z)是点M的柱面坐标.



点M的直角坐标(x,y,z)与其柱面坐标的关系为:

柱面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点, 点M在Oxy面上的投影为点P, 其极坐标为(ρ,φ), 则称三元有序数组(ρ,φ,z)是点M的柱面坐标.



点M的直角坐标(x,y,z)与其柱面坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \text{其中}\, 0 \leqslant \rho < +\infty, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\infty < z < +\infty.$$

柱面坐标系中的三族坐标面分别为：

柱面坐标系中的三族坐标面分别为：

- $\rho =$常数，

柱面坐标系中的三族坐标面分别为：

- $\rho=$常数，表示以z轴为中心轴的圆柱面；

柱面坐标系中的三族坐标面分别为：

- $\rho=$常数，表示以z轴为中心轴的圆柱面；
- $\varphi=$常数，

柱面坐标系中的三族坐标面分别为:

- $\rho =$常数, 表示以z轴为中心轴的圆柱面;
- $\varphi =$常数, 表示过z轴的半平面;

柱面坐标系中的三族坐标面分别为:

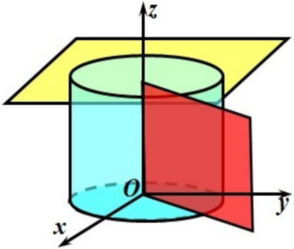
- $\rho=$常数, 表示以z轴为中心轴的圆柱面;
- $\varphi=$常数, 表示过z轴的半平面;
- $z=$常数,

柱面坐标系中的三族坐标面分别为：

- $\rho =$常数，表示以z轴为中心轴的圆柱面；
- $\varphi =$常数，表示过z轴的半平面；
- $z =$常数，表示与Oxy平行的平面.

柱面坐标系中的三族坐标面分别为：

- $\rho=$常数，表示以z轴为中心轴的圆柱面；
- $\varphi=$常数，表示过z轴的半平面；
- $z=$常数，表示与Oxy平行的平面.



在柱面坐标变换 $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ 下Jacobi行列式为：

在柱面坐标变换$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ 下Jacobi行列式为：

$$J(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

在柱面坐标变换 $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ 下Jacobi行列式为：

$$J(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

因此

在柱面坐标变换 $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ 下Jacobi行列式为：

$$J(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

在柱面坐标变换$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$下Jacobi行列式为：

$$J(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

其中$\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho$为柱面坐标系中的体积元素.

例1. 计算$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=Ry$及$z=0$所围成.

例1. 计算$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=Ry$及$z=0$所围成.

解：Ω在Oxy面上的投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant Ry$, 则

例1. 计算$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=Ry$及$z=0$所围成.

解：Ω在Oxy面上的投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant Ry$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} yz\mathrm{d}z$$

例1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=Ry$

及$z=0$所围成.

解：Ω在Oxy面上的投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant Ry$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} yz\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\sin\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{R^2-\rho^2}\rho\sin\varphi\cdot z\mathrm{d}z$$

例1. 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=Ry$ 及$z=0$所围成.

解：Ω在Oxy面上的投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant Ry$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} yz\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\sin\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{R^2-\rho^2}\rho\sin\varphi\cdot z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\sin\varphi}(R^2-\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

例1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2=Ry$ 及$z=0$所围成.

解：Ω在Oxy面上的投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant Ry$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} yz\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{R\sin\varphi} \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{R^2-\rho^2} \rho\sin\varphi \cdot z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{R\sin\varphi} (R^2-\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5R^5}{3}\sin^3\varphi - \frac{R^5}{5}\sin^5\varphi\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

例1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2=Ry$

及$z=0$所围成.

解：Ω在Oxy面上的投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant Ry$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} yz\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} yz\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\sin\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{R^2-\rho^2}\rho\sin\varphi\cdot z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\sin\varphi}(R^2-\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{5R^5}{3}\sin^3\varphi-\frac{R^5}{5}\sin^5\varphi\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{32}R^5.$$

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

解：密度函数为$k\sqrt{x^2+y^2}(k>0)$，则$m=\iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$,

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

解：密度函数为$k\sqrt{x^2+y^2}(k>0)$，则$m=\iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，

其中Ω在xoy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 16\}$，故

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

解：密度函数为$k\sqrt{x^2+y^2}(k>0)$，则$m=\iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，

其中Ω在xoy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 16\}$，故

$$m=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{4-y} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

解：密度函数为$k\sqrt{x^2+y^2}(k>0)$，则$m=\iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，

其中Ω在xoy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 16\}$，故

$$m=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{4-y} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16} k\sqrt{x^2+y^2}(4-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

解：密度函数为$k\sqrt{x^2+y^2}(k>0)$，则$m=\iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，

其中Ω在xoy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 16\}$，故

$$m=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{4-y}k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}k\sqrt{x^2+y^2}(4-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}4k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

解：密度函数为$k\sqrt{x^2+y^2}(k>0)$，则$m=\iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，

其中Ω在xoy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 16\}$，故

$$m=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{4-y}k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}k\sqrt{x^2+y^2}(4-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}4k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho^2 d\rho$$

例2. 一形体Ω由平面$y+z=4, z=0$和圆柱面$x^2+y^2=16$围成，已知其上任一点的密度与该点到z轴的距离成正比，求其质量m.

解：密度函数为$k\sqrt{x^2+y^2}(k>0)$，则$m=\iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，

其中Ω在xoy面上的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 16\}$，故

$$m=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{4-y}k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}k\sqrt{x^2+y^2}(4-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}4k\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho^2d\rho=\frac{512}{3}k\pi.$$

球面坐标下三重积分的计算

球面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，从点M向xOy面作垂线，垂足为P.
令

球面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，从点M向xOy面作垂线，垂足为P.
令

- r : 原点O与点M的距离;

球面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，从点M向xOy面作垂线，垂足为P.
令

- r：原点O与点M的距离;
- θ：$\overrightarrow{OM}$与z轴正向所夹的角;

球面坐标下三重积分的计算

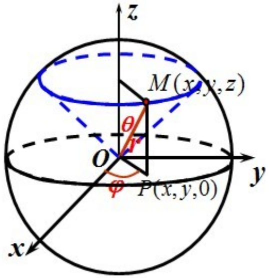
设$M(x,y,z)$为空间内一点，从点M向xOy面作垂线，垂足为P. 令

- r : 原点O与点M的距离;
- θ : $\overrightarrow{OM}$与z轴正向所夹的角;
- φ : $\overrightarrow{OP}$与x轴的夹角.

球面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，从点M向xOy面作垂线，垂足为P. 令

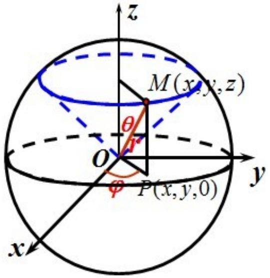
- r : 原点O与点M的距离;
- θ : $\overrightarrow{OM}$与z轴正向所夹的角;
- φ : $\overrightarrow{OP}$与x轴的夹角.



球面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，从点M向xOy面作垂线，垂足为P. 令

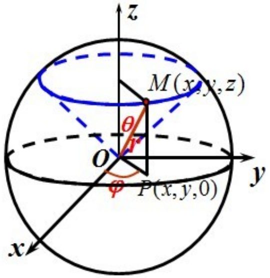
- r : 原点O与点M的距离;
- θ : $\overrightarrow{OM}$与z轴正向所夹的角;
- φ : $\overrightarrow{OP}$与x轴的夹角.



称三元有序数组(r,θ,φ)为点M的球面坐标. 点M的直角坐标(x,y,z)与其球面坐标的关系为

球面坐标下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，从点M向xOy面作垂线，垂足为P. 令



- r : 原点O与点M的距离;
- θ : $\overrightarrow{OM}$与z轴正向所夹的角;
- φ : $\overrightarrow{OP}$与x轴的夹角.

称三元有序数组(r,θ,φ)为点M的球面坐标. 点M的直角坐标(x,y,z)与其球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

其中$0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

球面坐标系中的三族坐标面分别为：

球面坐标系中的三族坐标面分别为：

- $r=$常数,

球面坐标系中的三族坐标面分别为:

- $r=$常数, 表示以原点为球心的球面;

球面坐标系中的三族坐标面分别为:

- $r=$常数, 表示以原点为球心的球面;
- $\theta=$常数,

球面坐标系中的三族坐标面分别为：

- $r=$常数，表示以原点为球心的球面；
- $\theta=$常数，顶点在原点的圆锥面；

球面坐标系中的三族坐标面分别为:

- $r=$常数, 表示以原点为球心的球面;
- $\theta=$常数, 顶点在原点的圆锥面;
- $\varphi=$常数,

球面坐标系中的三族坐标面分别为:

- $r=$常数, 表示以原点为球心的球面;
- $\theta=$常数, 顶点在原点的圆锥面;
- $\varphi=$常数, 表示过z轴的半平面.

在球面坐标变换$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$下Jacobi行列式为：

在球面坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ 下Jacobi行列式为:

$$J(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

在球面坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ 下Jacobi行列式为:

$$J(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta$$

在球面坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ 下Jacobi行列式为：

$$J(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta$$

故 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

在球面坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ 下Jacobi行列式为：

$$J(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta$$

故 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

在球面坐标变换$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$下Jacobi行列式为：

$$J(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta$$

故 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

其中$r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$为球面坐标系中的体积元素.

例1. 把直角坐标系下的三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$化为球面坐标下的三重积分, 其中$\Omega$为:

例1. 把直角坐标系下的三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$化为球面坐标下的三重积分, 其中$\Omega$为:

(1) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$;

例1. 把直角坐标系下的三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$化为球面坐标下的三重积分, 其中$\Omega$为:

(1) $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$;

(2) $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$;

例1. 把直角坐标系下的三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$化为球面坐标下的三重积分, 其中$\Omega$为:

(1) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$;

(2) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$;

(3) $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$;

例1. 把直角坐标系下的三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$化为球面坐标下的三重积分, 其中$\Omega$为:

(1) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$;

(2) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$;

(3) $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$;

(4) $x^2+y^2+z^2\leqslant 4, z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$;

例1. 把直角坐标系下的三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V$化为球面坐标下的三重积分, 其中$\Omega$为:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$;

(3) $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$;

(4) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$;

(5) $x^2 + y^2 = 3z^2 (z > 0)$与$z = 2$所围成的区域;

例1. 把直角坐标系下的三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$化为球面坐标下的三重积分, 其中$\Omega$为:

(1) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$;

(2) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$;

(3) $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$;

(4) $x^2+y^2+z^2\leqslant 4, z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$;

(5) $x^2+y^2=3z^2(z>0)$与$z=2$所围成的区域;

(6) $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$.

例2. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由圆锥面$x^2+y^2=z^2$与上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的区域.

例2. 计算三重积分$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由圆锥面$x^2+y^2=z^2$与上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的区域.

解：原式$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R} r^2 \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}r$

例2. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由圆锥面$x^2+y^2=z^2$与上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的区域.

解：原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5.$

例2. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由圆锥面$x^2+y^2=z^2$与上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的区域.

解: 原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5.$

例3. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成的闭区域.

例2. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由圆锥面$x^2+y^2=z^2$与上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的区域.

解: 原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5.$

例3. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成的闭区域.

解: 原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r$

例2. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由圆锥面$x^2+y^2=z^2$与上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的区域.

解: 原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5.$

例3. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成的闭区域.

解: 原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\dfrac{1}{r}\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=(\sqrt{2}-1)\pi.$

广义球面坐标变换

广义球面坐标变换

广义球面坐标变换

变换T : $$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

广义球面坐标变换

广义球面坐标变换

变换$T:\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$ 将由椭球面围成的闭区域

$$\Omega = \left\{(x, y, z)\middle|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$$ 变换为区域

广义球面坐标变换

广义球面坐标变换

变换$T:\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$ 将由椭球面围成的闭区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\Big|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$$ 变换为区域

$$\Omega' = \{(r,\theta,\varphi)|0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant 1\}$$

广义球面坐标变换

广义球面坐标变换

变换$T:\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$ 将由椭球面围成的闭区域

$\Omega = \left\{(x,y,z)\middle|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$ 变换为区域

$$\Omega' = \{(r,\theta,\varphi)|0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant 1\}$$

且Jacobi行列式为$J(r,\theta,\varphi) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta$

广义球面坐标变换

广义球面坐标变换

变换T : $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$ 将由椭球面围成的闭区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\Big|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$$ 变换为区域

$$\Omega' = \{(r,\theta,\varphi)|0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant 1\}$$

且Jacobi行列式为$J(r,\theta,\varphi) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta$

即在广义球面坐标变换下，体积元素为$abcr^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

例4. 求椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$的体积.

例4. 求椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$的体积.

例5. 计算$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$,

其中$\Omega=\{(x,y,z)|(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant R^2\}$.

例4. 求椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$的体积.

例5. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$,

其中$\Omega=\{(x,y,z)|(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant R^2\}$.

答案: $\frac{4}{5}\pi R^5+12\pi R^3$.