习题课　第一型曲线、曲面积分及多元函数积分的应用

贺丹　东南大学

填空题

1. L 为椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 其周长为$a$, 则

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. $\displaystyle\oint_{(x-2)^2+y^2=4}(x+y-2)^2\mathrm{d}s = \underline{\qquad\qquad}.$

3. $\displaystyle\oint_{x^2+y^2=2x}(2xy+x+4y)\mathrm{d}s = \underline{\qquad\qquad}.$

4. 设$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, 其线密度$\mu=1$, 则$L$关于$z$轴的

转动惯量为$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

5. 设Σ为平面$x+y+z=4$被圆柱面$x^2+y^2=1$截下的有限部分, 则$\displaystyle\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S =$ ______________.

6. 设曲面Σ是介于两平面$z=0$与$z=H(H>0)$之间的圆柱面$x^2+y^2=R^2(R>0)$, 则$\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+R^2} =$ __________.

7. 设曲面Σ为$x^2+y^2+z^2=4$, 则

$$\iint_{\Sigma} (x^2+y^2)\mathrm{d}S = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

计算题

1. 曲面$z = 13 - x^2 - y^2$将曲面$x^2 + y^2 + z^2 = 25$分成三部分，试求球面被分割成三部分的曲面面积之比.

2. 求$\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + |y|)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma : x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0, 0 \leqslant z \leqslant 1)$.

3. 计算圆柱面$x^2 + y^2 = ay(a > 0)$介于平面$z = 0$与曲面$z = \dfrac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}(h > 0)$之间部分的面积.（试用两种方法求解）

4. 设Σ为曲面$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$的上半部分，点$M(x, y, z) \in \Sigma$，$\pi$为$\Sigma$在点$M$处的切平面，$\rho(x, y, z)$为点$(0, 0, 0)$到平面$\pi$的距离，求$\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{z}{\rho(x, y, z)}\mathrm{d}S$.

5(1). 求$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$, 其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, & z < \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

(2). 求$F(t) = \iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S$, 其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x+y+z}, & x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

1. 求曲面$z = a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}(a > 0)$与$z = \sqrt{x^2 + y^2}$所围立体的质量, 已知其上任一点密度与该点到$xoy$面的距离成反比.

2. 已知球体$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$内任一点处的密度与该点到点$P_0(0, 0, R)$处的距离的平方成正比(比例系数$k > 0$), 试求球体$\Omega$的质心坐标.

3. 求均匀锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$被柱面$z^2 = 2x$所割下的部分的质心坐标.

4. 求半径为R的上半球面对球心处单位质量质点的引力(球面的密度为1).

练习题

1. 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}A$, 其中$\Sigma$是由平面$x=0, y=0, z=0$以及$x+y+z=1$围成的四面体的整个边界.

2. 球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$内, 各点处的密度等于该点到原点的距离的平方, 试求这球体的质心.

3. 设L是摆线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$上从$t=0$到$t=\pi$的弧段, 求$L$的形心横坐标.

4. 计算球面上的三角形$x^2+y^2+z^2=a^2(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$的边界曲线的形心坐标.

思考题

1. 求半径为R的均匀球体对球外一单位质点M的引力，使定点M与球心的距离为$a(a > R)$.

2. 求密度为1的均匀球体$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqslant 1$对直线$L: \ x = y = z$的转动惯量.