工科数学分析

贺　丹(东南大学)

第四节 Fourier级数

本节主要内容:

- 周期函数与三角函数
- Fourier级数的概念
- 函数展成Fourier级数
  - 周期为2π的函数
  - 周期延拓
  - 余弦级数与正弦级数
  - 周期为$[-l, l]$的函数

4.1 周期函数与三角函数

在科学技术上, 会遇到各种周期现象, 在数学上可用周期函数来近似描述.

4.1 周期函数与三角函数

在科学技术上, 会遇到各种周期现象, 在数学上可用周期函数来近似描述.

例如, 函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 描述了物理中的所谓简谐振动问题,

4.1 周期函数与三角函数

在科学技术上, 会遇到各种周期现象, 在数学上可用周期函数来近似描述.

例如, 函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 描述了物理中的所谓简谐振动问题, 其中A, ω和φ分别叫做振幅、频率和初位相.

4.1 周期函数与三角函数

在科学技术上, 会遇到各种周期现象, 在数学上可用周期函数来近似描述.

例如, 函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 描述了物理中的所谓简谐振动问题, 其中A,ω和φ分别叫做振幅、频率和初位相.

它的周期为$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, 当$\omega = 1$时, $T = 2\pi$, 称之为正弦波或谐波.

考虑一列正弦函数：

考虑一列正弦函数：

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

考虑一列正弦函数：

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

它们的共同周期为2π.

考虑一列正弦函数：

$$A_1 \sin(x+\varphi_1), A_2 \sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n \sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

它们的共同周期为2π. 由n个周期为2π的正弦函数与常数A_0之和

考虑一列正弦函数：

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

它们的共同周期为2π. 由n个周期为2π的正弦函数与常数A_0之和

$$S_n(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(kx+\varphi_k)$$

考虑一列正弦函数：

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

它们的共同周期为2π. 由n个周期为2π的正弦函数与常数A_0之和

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(kx+\varphi_k)$$

的周期仍为2π, 称之为n次三角多项式.

考虑一列正弦函数:

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

它们的共同周期为2π. 由n个周期为2π的正弦函数与常数A_0之和

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(kx+\varphi_k)$$

的周期仍为2π, 称之为n次三角多项式.

- 如果n次三角多项式的极限存在, 即 $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, 则表示

考虑一列正弦函数:

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

它们的共同周期为2π. 由n个周期为2π的正弦函数与常数A_0之和

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(kx+\varphi_k)$$

的周期仍为2π, 称之为n次三角多项式.

- 如果n次三角多项式的极限存在, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, 则表示

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\varphi_n)$$

考虑一列正弦函数：

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(2x+\varphi_2), \cdots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \cdots$$

它们的共同周期为2π. 由n个周期为2π的正弦函数与常数A_0之和

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\sin(kx+\varphi_k)$$

的周期仍为2π, 称之为n次三角多项式.

- 如果n次三角多项式的极限存在, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, 则表示

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx+\varphi_n)$$

这个级数收敛于$S(x)$, 且$S(x)$的周期仍是2π.

- 问题：能否把一个给定的以2π为周期的周期函数$f(x)$表示(展开)为一列正弦函数之和呢？

- 问题：能否把一个给定的以2π为周期的周期函数$f(x)$表示（展开）为一列正弦函数之和呢？

也即表达式 $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$ 能否成立？

- 问题：能否把一个给定的以2π为周期的周期函数$f(x)$表示(展开)为一列正弦函数之和呢？

也即表达式 $f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n)$ 能否成立？

- $A_n\sin(nx+\varphi_n)=A_n(\sin nx\cos\varphi_n+\cos nx\sin\varphi_n)$

- 问题：能否把一个给定的以2π为周期的周期函数$f(x)$表示(展开)为一列正弦函数之和呢？

也即表达式 $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$ 能否成立？

- $$A_n \sin(nx + \varphi_n) = A_n(\sin nx \cos \varphi_n + \cos nx \sin \varphi_n)$$
$$= a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

- 问题：能否把一个给定的以2π为周期的周期函数$f(x)$表示(展开)为一列正弦函数之和呢？

也即表达式 $f(x)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n)$ 能否成立？

- $A_n\sin(nx+\varphi_n)=A_n(\sin nx\cos\varphi_n+\cos nx\sin\varphi_n)$

$$=a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

其中$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$.

- 问题：能否把一个给定的以2π为周期的周期函数$f(x)$表示(展开)为一列正弦函数之和呢？

也即表达式 $f(x)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n)$ 能否成立？

- $$\begin{aligned}A_n\sin(nx+\varphi_n) &= A_n(\sin nx\cos\varphi_n+\cos nx\sin\varphi_n)\\ &= a_n\cos nx+b_n\sin nx\end{aligned}$$

其中$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$.

- 设$A_0=\dfrac{a_0}{2}$，于是上述级数化为如下形式:

- 问题：能否把一个给定的以2π为周期的周期函数$f(x)$表示(展开)为一列正弦函数之和呢？

也即表达式 $f(x) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$ 能否成立？

- $A_n \sin(nx + \varphi_n) = A_n(\sin nx \cos \varphi_n + \cos nx \sin \varphi_n)$

$$= a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

其中$a_n = A_n \sin \varphi_n$，$b_n = A_n \cos \varphi_n$.

- 设$A_0 = \dfrac{a_0}{2}$，于是上述级数化为如下形式:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

三角函数系

三角函数系

定义

三角函数系

定义

函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

称为三角函数系.

三角函数系

定义

函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

称为三角函数系.

三角函数系的正交性

三角函数系

定义

函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

称为三角函数系.

三角函数系的正交性

三角函数系在$[-\pi, \pi]$上是正交的, 是指三角函数系中任何两个不同函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分等于零.

三角函数系的正交性

三角函数的正交性, 即指:

三角函数系的正交性

三角函数的正交性, 即指:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

三角函数系的正交性

三角函数的正交性, 即指:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

三角函数系的正交性

三角函数的正交性, 即指:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots);$$

三角函数系的正交性

三角函数的正交性, 即指:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots, m \neq n);$$

三角函数系的正交性

三角函数的正交性, 即指:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots, m \neq n);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots, m \neq n).$$

- 在三角函数系中，任一函数的自乘在$[-\pi,\pi]$上的积分为：

- 在三角函数系中, 任一函数的自乘在$[-\pi,\pi]$上的积分为:
  - $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}x = 2\pi$;

- 在三角函数系中，任一函数的自乘在$[-\pi,\pi]$上的积分为：
  - $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\mathrm{d}x = 2\pi$；
  - $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x = \pi, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$；

- 在三角函数系中，任一函数的自乘在$[-\pi,\pi]$上的积分为：
  - $\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}x = 2\pi$；
  - $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$；
  - $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \pi, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

三角级数

定义

三角级数

定义

由三角函数$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$构成的函数项级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为三角级数.

三角级数

定义

由三角函数$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$构成的函数项级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为三角级数.

- 问题：

三角级数

定义

由三角函数$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$构成的函数项级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为三角级数.

- 问题：设以2π为周期的函数$f(x)$可展为三角级数, 即

三角级数

定义

由三角函数$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$构成的函数项级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为三角级数.

- 问题：设以2π为周期的函数$f(x)$可展为三角级数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

三角级数

定义

由三角函数$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$构成的函数项级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为三角级数.

- 问题：设以2π为周期的函数$f(x)$可展为三角级数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则系数$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$与$f(x)$有什么关系？如何求出？

假设$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 并且假设上述级数可以在$[-\pi,\pi]$上逐项积分, 则利用三角函数系的正交性有:

假设$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 并且假设上述级数可以在$[-\pi,\pi]$上逐项积分, 则利用三角函数系的正交性有:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0,$

假设$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 并且假设上述级数可以在$[-\pi, \pi]$上逐项积分, 则利用三角函数系的正交性有:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \pi a_0$, 于是 $\displaystyle a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$

假设$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 并且假设上述级数可以在$[-\pi,\pi]$上逐项积分, 则利用三角函数系的正交性有:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0$, 于是 $\displaystyle a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x$

假设$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 并且假设上述级数可以在$[-\pi,\pi]$上逐项积分, 则利用三角函数系的正交性有:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0$, 于是 $\displaystyle a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x$$

假设$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 并且假设上述级数可以在$[-\pi,\pi]$上逐项积分, 则利用三角函数系的正交性有:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0$, 于是 $\displaystyle a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$

(2)
$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x$$
$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi a_n,$$

假设$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 并且假设上述级数可以在$[-\pi,\pi]$上逐项积分, 则利用三角函数系的正交性有:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0,$ 于是 $\displaystyle a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi a_n,$$

于是 $\displaystyle a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$

(3) 同(2)可得

(3) 同(2)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi b_n,$$

(3) 同(2)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi b_n,$$

于是 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$

(3) 同(2)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi b_n,$$

于是 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$

Euler-Fourier公式

(3) 同(2)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi b_n,$$

于是 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$

Euler-Fourier公式

上述系数公式中将a_0统一由a_n给出, 可得

(3) 同(2)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi b_n,$$

于是 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$

Euler-Fourier公式

上述系数公式中将a_0统一由a_n给出, 可得

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

(3) 同(2)可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi b_n,$$

于是 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$

Euler-Fourier公式

上述系数公式中将a_0统一由a_n给出, 可得

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

称上式为Euler-Fourier公式.

Fourier级数

定义

Fourier级数

定义

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积，则以Euler-Fourier公式中的a_n和b_n作为系数而得到的三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称为函数$f(x)$的Fourier级数，记为

Fourier级数

定义

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积, 则以Euler-Fourier公式中的a_n和b_n作为系数而得到的三角级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称为函数$f(x)$的Fourier级数, 记为

$$f(x)\backsim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

Fourier级数

定义

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积, 则以Euler-Fourier公式中的a_n和b_n作为系数而得到的三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称为函数$f(x)$的Fourier级数, 记为

$$f(x)\backsim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中$a_n(n=0,1,2,3,\cdots)$和$b_n(n=1,2,3,\cdots)$称为函数$f(x)$的Fourier系数.

例1. 设$f(x)$以2π为周期, 且当$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$, 求$f(x)$的傅里叶级数.

例1. 设$f(x)$以2π为周期, 且当$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$, 求$f(x)$的傅里叶级数.

解: $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0,$

例1. 设$f(x)$以2π为周期, 且当$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$, 求$f(x)$的傅里叶级数.

解: $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

例1. 设$f(x)$以2π为周期, 且当$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$, 求$f(x)$的傅里叶级数.

解: $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x$$

例1. 设$f(x)$以2π为周期, 且当$x\in(-\pi,\pi]$时$f(x)=x$, 求$f(x)$的傅里叶级数.

解: $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x=0,$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

例1. 设$f(x)$以2π为周期, 且当$x\in(-\pi,\pi]$时$f(x)=x$, 求$f(x)$的傅里叶级数.

解: $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

所以 $$f(x)\backsim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx.$$

Fourier级数的收敛性

函数的Fourier级数的收敛性问题是一个相当复杂的理论问题，在此不加证明地给一个应用较为广泛的充分条件. 首先, 说明一下分段单调函数的概念：

Fourier级数的收敛性

函数的Fourier级数的收敛性问题是一个相当复杂的理论问题,在此不加证明地给一个应用较为广泛的充分条件. 首先, 说明一下分段单调函数的概念:

- 设有函数$f:[a,b]\to\mathbf{R}$, 如果在$[a,b]$内插入$n-1$个分点

Fourier级数的收敛性

函数的Fourier级数的收敛性问题是一个相当复杂的理论问题, 在此不加证明地给一个应用较为广泛的充分条件. 首先, 说明一下分段单调函数的概念:

- 设有函数$f:[a,b]\to\mathbf{R}$, 如果在$[a,b]$内插入$n-1$个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

Fourier级数的收敛性

函数的Fourier级数的收敛性问题是一个相当复杂的理论问题，在此不加证明地给一个应用较为广泛的充分条件. 首先，说明一下分段单调函数的概念：

- 设有函数$f:[a,b]\to\mathbf{R}$, 如果在$[a,b]$内插入$n-1$个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

使得函数f在每个开子区间(x_{k-1},x_k)内部都单调，那么就称f为$[a,b]$区间上**分段单调**.

定理 (狄利克雷(Dirichlet)收敛定理)(简称狄氏条件)

定理 (狄利克雷(Dirichlet)收敛定理)(简称狄氏条件)

设函数$f(x)$以2π为周期, 在$[-\pi,\pi]$上满足:

定理 (狄利克雷(Dirichlet)收敛定理)(简称狄氏条件)

设函数$f(x)$以2π为周期, 在$[-\pi, \pi]$上满足:

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

定理 (狄利克雷(Dirichlet)收敛定理)(简称狄氏条件)

设函数$f(x)$以2π为周期, 在$[-\pi,\pi]$上满足：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 分段单调(也即只有有限个极值点);

定理 (狄利克雷(Dirichlet)收敛定理)(简称狄氏条件)

设函数$f(x)$以2π为周期, 在$[-\pi,\pi]$上满足:

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 分段单调(也即只有有限个极值点);

则$f(x)$的Fourier级数$\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在$[-\pi,\pi]$上收敛, 且其和函数为:

定理 (狄利克雷(Dirichlet)收敛定理)(简称狄氏条件)

设函数$f(x)$以2π为周期, 在$[-\pi,\pi]$上满足：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 分段单调(也即只有有限个极值点);

则$f(x)$的Fourier级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在$[-\pi,\pi]$上收敛, 且其和函数为：

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点;} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点;} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}$$

- 在狄利克雷收敛定理中，虽然并非对$[-\pi,\pi]$上每个点x，函数$f(x)$的Fourier级数都收敛于$f(x)$自身，但为了方便起见，常把定理中的三种收敛情形都说成是f的Fourier级数在$[-\pi,\pi]$上收敛于f，或者f在$[-\pi,\pi]$上被展开为Fourier级数.

如例1中，$f(x)$以2π为周期，且$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$，

如例1中，$f(x)$以2π为周期，且$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$，

$f(x)$的Fourier级数为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$，

如例1中, $f(x)$以2π为周期, 且$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$,

$f(x)$的Fourier级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$,

设$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$, 则根据狄氏条件有:

如例1中, $f(x)$以2π为周期, 且$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$,

$f(x)$的Fourier级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2}{n} \sin nx$,

设$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2}{n} \sin nx$, 则根据狄氏条件有:

$S(x)$以2π为周期, 且在区间$[-\pi, \pi]$内,

如例1中，$f(x)$以2π为周期，且$x\in(-\pi,\pi]$时$f(x)=x$，

$f(x)$的Fourier级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}\sin nx$，

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}\sin nx$，则根据狄氏条件有：

$S(x)$以2π为周期，且在区间$[-\pi,\pi]$内，

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\pi); \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}$$

如例1中, $f(x)$以2π为周期, 且$x \in (-\pi, \pi]$时$f(x) = x$,

$f(x)$的Fourier级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$,

设$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$, 则根据狄氏条件有:

$S(x)$以2π为周期, 且在区间$[-\pi, \pi]$内,

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi); \\ \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi); \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

把$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数的步骤为：

把$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数的步骤为：

- 运用狄氏条件判断$f(x)$能否展开为Fourier级数;

把$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数的步骤为：

- 运用狄氏条件判断$f(x)$能否展开为Fourier级数;
- 求出Fourier系数$a_0, a_n, b_n \ (n=1,2,\cdots)$;

把$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数的步骤为：

- 运用狄氏条件判断$f(x)$能否展开为Fourier级数;
- 求出Fourier系数$a_0, a_n, b_n\ (n=1,2,\cdots)$;
- 写出Fourier级数并注明在何处收敛于$f(x)$;

把$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数的步骤为：

- 运用狄氏条件判断$f(x)$能否展开为Fourier级数;
- 求出Fourier系数$a_0, a_n, b_n \ (n = 1, 2, \cdots)$;
- 写出Fourier级数并注明在何处收敛于$f(x)$;
- 根据狄氏条件,对一些特殊的点, 求出Fourier级数和函数的值, 并写出Fourier级数的和函数$S(x)$的表达式.

例2. 设$f(x)$以2π为周期, 且$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$,

将$f(x)$展开为Fourier级数, 并求其和函数$S(x)$.

例2. 设$f(x)$以2π为周期, 且$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$,

将$f(x)$展开为Fourier级数, 并求其和函数$S(x)$.

解: 函数$f(x)$满足狄氏条件, 且

例2. 设$f(x)$以2π为周期, 且$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$,

将$f(x)$展开为Fourier级数, 并求其和函数$S(x)$.

解: 函数$f(x)$满足狄氏条件, 且

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x = 0,$$

例2. 设$f(x)$以2π为周期, 且$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$,

将$f(x)$展开为Fourier级数, 并求其和函数$S(x)$.

解: 函数$f(x)$满足狄氏条件, 且

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

例2. 设$f(x)$以2π为周期, 且$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$,

将$f(x)$展开为Fourier级数, 并求其和函数$S(x)$.

解: 函数$f(x)$满足狄氏条件, 且

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

故$f(x)$的Fourier级数展开式为：

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

故$f(x)$的Fourier级数展开式为：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin nx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

故$f(x)$的Fourier级数展开式为：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx, \quad x \in (-\pi, 0)\cup(0, \pi).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

故$f(x)$的Fourier级数展开式为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

当$x = 0$时, Fourier级数收敛于$\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = 0$;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

故$f(x)$的Fourier级数展开式为：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

当$x = 0$时, Fourier级数收敛于$\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = 0$;

当$x = \pm\pi$时, Fourier级数收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = 0$;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

故$f(x)$的Fourier级数展开式为：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin nx, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

当$x = 0$时, Fourier级数收敛于$\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = 0$;

当$x = \pm\pi$时, Fourier级数收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = 0$;

于是 $S(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 < x < \pi; \\ 0, & x = 0, \ \pm\pi. \end{cases}$

例3. 设$f(x)$以2π为周期, 且$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$,

将$f(x)$展开为Fourier级数, 并求其和函数$S(x)$.

例3. 设$f(x)$以2π为周期, 且$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0 \\ 1, & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$,

将$f(x)$展开为Fourier级数, 并求其和函数$S(x)$.

答:
$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\right]\sin nx$$
$$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$$

例3. 设$f(x)$以2π为周期，且$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0 \\ 1, & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$，

将$f(x)$展开为Fourier级数，并求其和函数$S(x)$.

答：

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\right]\sin nx$$

$$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$$

$$S(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0; \\ 1, & 0<x<\pi; \\ \frac{1}{2}, & x=0, \\ \frac{1-\pi}{2}, & x=\pm. \end{cases}$$

例4. 设函数$f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi<x<0 \\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}$，且$f(x)$的周期为$2\pi$

设其Fourier级数的和函数为$S(x)$, 则$S(0)=$____, $S(1)=$____,

$S(\frac{3\pi}{2})=$________, $S(5\pi)=$________.

例4. 设函数$f(x) = \begin{cases} x+1, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$，且$f(x)$的周期为$2\pi$

设其Fourier级数的和函数为$S(x)$，则$S(0) = $___，$S(1) = $___，

$S(\frac{3\pi}{2}) = $______，$S(5\pi) = $______.

解： $S(x)$以2π为周期，且
$$S(x) = \begin{cases} x+1, & -\pi < x < 0; \\ x^2, & 0 < x < \pi; \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0; \\ \dfrac{1+\pi^2-\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

例4. 设函数$f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi<x<0 \\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}$，且$f(x)$的周期为$2\pi$

设其Fourier级数的和函数为$S(x)$, 则$S(0)=$___, $S(1)=$___,

$S(\frac{3\pi}{2})=$______, $S(5\pi)=$______.

解： $S(x)$以2π为周期, 且$S(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi<x<0; \\ x^2, & 0<x<\pi; \\ \frac{1}{2}, & x=0; \\ \frac{1+\pi^2-\pi}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}$

故$S(0)=\frac{1}{2}$, $S(1)=1$, $S(\frac{3\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}$, $S(5\pi)=\frac{1+\pi^2-\pi}{2}$.

周期延拓

若$f(x)$只在$[-\pi, \pi]$上有定义，且满足定理5.1的条件，则$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上也可以展成Fourier级数：

周期延拓

若$f(x)$只在$[-\pi,\pi]$上有定义，且满足定理5.1的条件，则$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上也可以展成Fourier级数：

- 将$f(x)$延拓成以2π为周期的函数，即定义一个函数$F(x)$，使它在$(-\infty,\infty)$上以2π为周期，在$(-\pi,\pi]$上$F(x)=f(x)$，$F(x)$称为$f(x)$的周期延拓;

周期延拓

若$f(x)$只在$[-\pi,\pi]$上有定义, 且满足定理5.1的条件, 则$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上也可以展成Fourier级数:

- 将$f(x)$延拓成以2π为周期的函数, 即定义一个函数$F(x)$, 使它在$(-\infty,\infty)$上以2π为周期, 在$(-\pi,\pi]$上$F(x)=f(x)$, $F(x)$称为$f(x)$的周期延拓;
- 将周期函数$F(x)$展开成Fourier级数.

周期延拓

若$f(x)$只在$[-\pi,\pi]$上有定义，且满足定理5.1的条件，则$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上也可以展成Fourier级数：

- 将$f(x)$延拓成以2π为周期的函数，即定义一个函数$F(x)$，使它在$(-\infty,\infty)$上以2π为周期，在$(-\pi,\pi]$上$F(x)=f(x)$，$F(x)$称为$f(x)$的**周期延拓**；
- 将周期函数$F(x)$展开成Fourier级数.
- 把x限制在$(-\pi,\pi)$上，则$F(x)$展开成的Fourier级数即为$f(x)$的Fourier级数，且根据收敛定理，在$x=\pm\pi$，该级数收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

例5. 将函数$f(x)=x^2\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成Fourier级数，

并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

例5. 将函数$f(x)=x^2\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成Fourier级数，

并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

解： 把$f(x)$在$(-\pi,\pi]$上作周期延拓，则

例5. 将函数$f(x)=x^2\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成Fourier级数,

并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解: 把$f(x)$在$(-\pi,\pi]$上作周期延拓, 则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

例5. 将函数$f(x)=x^2\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成Fourier级数，

并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

解：把$f(x)$在$(-\pi,\pi]$上作周期延拓，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n4}{n^2},\ \ (n=1,2,\cdots),$$

例5. 将函数$f(x)=x^2\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成Fourier级数,

并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

解: 把$f(x)$在$(-\pi,\pi]$上作周期延拓, 则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n4}{n^2},\ (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0,\ (n=1,2,3,\cdots).$$

例5. 将函数$f(x)=x^2\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成Fourier级数，

并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

解：把$f(x)$在$(-\pi,\pi]$上作周期延拓，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n4}{n^2},\ (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0,\ (n=1,2,3,\cdots).$$

当$x=\pm\pi$时，$\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\pi^2=f(\pm\pi)$,

且f在$(-\pi,\pi)$内连续, 故

且f在$(-\pi,\pi)$内连续, 故

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ \ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

且f在$(-\pi,\pi)$内连续, 故

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

- 当$x=0$时, $0=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$,

且f在$(-\pi,\pi)$内连续, 故

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

- 当$x=0$时, $0=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$,

$$\text{故}\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

且f在$(-\pi,\pi)$内连续, 故

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

- 当$x=0$时, $0=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$,

$$\text{故}\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

- 当$x=\pi$时, $\pi^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,

且f在$(-\pi,\pi)$内连续, 故

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

- 当$x=0$时, $0=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$,

$$\text{故}\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

- 当$x=\pi$时, $\pi^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

$$\text{故}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

正弦级数和余弦级数

定义

正弦级数和余弦级数

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

正弦级数和余弦级数

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(1) 若$f(x)$为奇函数, 则它的Fourier系数为

正弦级数和余弦级数

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(1) 若$f(x)$为奇函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

正弦级数和余弦级数

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(1) 若$f(x)$为奇函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\ (n = 1, 2, \cdots).$$

正弦级数和余弦级数

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(1) 若$f(x)$为奇函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\ (n = 1, 2, \cdots).$$

此时$f(x)$的Fourier级数变为

正弦级数和余弦级数

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(1) 若$f(x)$为奇函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \ (n = 1, 2, \cdots).$$

此时$f(x)$的Fourier级数变为

$$f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

正弦级数和余弦级数

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(1) 若$f(x)$为奇函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \ (n = 1, 2, \cdots).$$

此时$f(x)$的Fourier级数变为

$$f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

这种级数称为$f(x)$的正弦级数.

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(2) 若$f(x)$为偶函数, 则它的Fourier系数为

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(2) 若$f(x)$为偶函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(2) 若$f(x)$为偶函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \ (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0 \ (n=1,2,\cdots).$$

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(2) 若$f(x)$为偶函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0\ (n=1,2,\cdots).$$

此时$f(x)$的Fourier级数变为

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(2) 若$f(x)$为偶函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0 \ (n = 1, 2, \cdots).$$

此时$f(x)$的Fourier级数变为

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

定义

设$f(x)$以2π为周期, 且可积, 则

(2) 若$f(x)$为偶函数, 则它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0\ (n=1,2,\cdots).$$

此时$f(x)$的Fourier级数变为

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,$$

这种级数称为$f(x)$的余弦级数.

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$，则$F(x)$是$(-\pi,\pi)$上的奇函数，称为$f(x)$的**奇式延拓**.

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$ ，则$F(x)$是$(-\pi,\pi)$上的奇函数，称为$f(x)$的奇式延拓.
- 将$F(x)$在$(-\pi,\pi]$上展为Fourier级数，则为正弦级数;

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$，则$F(x)$是$(-\pi,\pi)$上的奇函数，称为$f(x)$的**奇式延拓**.
- 将$F(x)$在$(-\pi,\pi]$上展为Fourier级数，则为正弦级数；
- 将x限制在$(0,\pi]$上，有$F(x)=f(x)$，于是$F(x)$的Fourier级数即为$f(x)$的正弦级数展开式，其中系数为：

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots);$$

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$，则$F(x)$是$(-\pi,\pi)$上的奇函数，称为$f(x)$的奇式延拓.
- 将$F(x)$在$(-\pi,\pi]$上展为Fourier级数，则为正弦级数;
- 将x限制在$(0,\pi]$上，有$F(x)=f(x)$，于是$F(x)$的Fourier级数即为$f(x)$的正弦级数展开式，其中系数为：

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过奇式延拓展为

正弦级数：

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过奇式延拓展为

正弦级数：$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$ 其中

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过奇式延拓展为

正弦级数： $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$ 其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过奇式延拓展为

正弦级数： $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

且正弦级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$的和函数$S(x)$性质如下：

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过奇式延拓展为

正弦级数：$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$ 其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

且正弦级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过奇式延拓展为

正弦级数：$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$ 其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

且正弦级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;
- $S(x)$是一个奇函数;

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过奇式延拓展为

正弦级数： $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$， 其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

且正弦级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;
- $S(x)$是一个奇函数;
- 在区间$(0,\pi)$的$f(x)$的连续点上，$S(x)=f(x)$;

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过奇式延拓展为

正弦级数： $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$， 其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

且正弦级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;
- $S(x)$是一个奇函数;
- 在区间$(0,\pi)$的$f(x)$的连续点上，$S(x)=f(x)$;
- 若x_0为$(0,\pi)$上的间断点，则$S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过奇式延拓展为

正弦级数：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$，其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

且正弦级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;
- $S(x)$是一个奇函数;
- 在区间$(0,\pi)$的$f(x)$的连续点上，$S(x)=f(x)$;
- 若x_0为$(0,\pi)$上的间断点，则$S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;
- $S(0)=0,\quad S(\pi)=0.$

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in[-\pi,0) \end{cases}$, 则$F(x)$是$[-\pi,\pi]$上的偶函数, 称为$f(x)$的偶式延拓.

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in[-\pi,0) \end{cases}$，则$F(x)$是$[-\pi,\pi]$上的偶函数，称为$f(x)$的偶式延拓.
- 将$F(x)$在$[-\pi,\pi]$上展为Fourier级数，则为余弦级数；

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in[-\pi,0) \end{cases}$, 则$F(x)$是$[-\pi,\pi]$上的偶函数, 称为$f(x)$的偶式延拓.
- 将$F(x)$在$[-\pi,\pi]$上展为Fourier级数, 则为余弦级数;
- 将x限制在$[0,\pi]$上, 有$F(x)=f(x)$, 于是$F(x)$的Fourier级数即为$f(x)$的余弦级数展开式, 其中系数为:

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots);$$

将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数

- 令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in[-\pi,0) \end{cases}$，则$F(x)$是$[-\pi,\pi]$上的偶函数，称为$f(x)$的**偶式延拓**.
- 将$F(x)$在$[-\pi,\pi]$上展为Fourier级数，则为余弦级数；
- 将x限制在$[0,\pi]$上，有$F(x)=f(x)$，于是$F(x)$的Fourier级数即为$f(x)$的余弦级数展开式，其中系数为：

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$(n=0,1,2,3,\cdots).$$

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过偶式延拓展为余弦级数：

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过偶式延拓展为

余弦级数： $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$， 其中

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过偶式延拓展为

余弦级数： $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$ 其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过偶式延拓展为

余弦级数： $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$ 其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

且余弦级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$的和函数$S(x)$性质如下：

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过偶式延拓展为

余弦级数： $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$ 其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

且余弦级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过偶式延拓展为余弦级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\quad \text{其中}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad (n=0,1,2,\cdots),$$

且余弦级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;
- $S(x)$是一个偶函数;

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过偶式延拓展为余弦级数：
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$
其中
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

且余弦级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期；
- $S(x)$是一个偶函数；
- 在区间$(0,\pi)$的$f(x)$的连续点上，$S(x)=f(x)$；

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，可通过偶式延拓展为余弦级数：$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$ 其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

且余弦级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期；
- $S(x)$是一个偶函数；
- 在区间$(0,\pi)$的$f(x)$的连续点上，$S(x)=f(x)$；
- 若x_0为$(0,\pi)$上的间断点，则$S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$；

综上可得：对定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$, 可通过偶式延拓展为

余弦级数：$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$ 其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

且余弦级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$的和函数$S(x)$性质如下：

- $S(x)$以2π为周期;
- $S(x)$是一个偶函数;
- 在区间$(0,\pi)$的$f(x)$的连续点上, $S(x)=f(x)$;
- 若x_0为$(0,\pi)$上的间断点, 则$S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;
- $S(0)=f(0),\quad S(\pi)=f(\pi)$.

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解： (1) 求正弦级数.

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解： (1) 求正弦级数. 将$f(x)$作奇式延拓, 则

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (1) 求正弦级数. 将$f(x)$作奇式延拓, 则

$$a_n = 0,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

例6. 将函数$f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (1) 求正弦级数. 将$f(x)$作奇式延拓, 则

$$a_n=0,\ \ n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}[1-\pi(-1)^n-(-1)^n],$$

例6. 将函数$f(x) = x + 1 \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (1) 求正弦级数. 将$f(x)$作奇式延拓, 则

$$a_n = 0, \ n = 0, 1, 2, \cdots .$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}[1 - \pi(-1)^n - (-1)^n],$$

故 $$x + 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1 - \pi(-1)^n - (-1)^n]}{n\pi}\sin nx \quad (0 < x < \pi),$$

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (1) 求正弦级数. 将$f(x)$作奇式延拓, 则

$a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots.$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}[1 - \pi(-1)^n - (-1)^n],$$

故 $$x + 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-\pi(-1)^n-(-1)^n]}{n\pi}\sin nx \quad (0 < x < \pi),$$

当$x = 0$和$x = \pi$时, 级数收敛于0, 不等于$f(x)$的值.

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (2) 求余弦级数.

例6. 将函数$f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (2) 求余弦级数. 将$f(x)$作偶式延拓, 则

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (2) 求余弦级数. 将$f(x)$作偶式延拓, 则

$b_n = 0,\ \ n = 1, 2, 3, \cdots,$

例6. 将函数$f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (2) 求余弦级数. 将$f(x)$作偶式延拓, 则

$$b_n=0,\ \ n=1,2,3,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\mathrm{d}x=\pi+2,$$

例6. 将函数$f(x) = x + 1\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解: (2) 求余弦级数. 将$f(x)$作偶式延拓, 则

$$b_n = 0,\ \ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\mathrm{d}x = \pi + 2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1],$$

例6. 将函数$f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解： (2) 求余弦级数. 将$f(x)$作偶式延拓, 则

$$b_n=0,\ \ n=1,2,3,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\mathrm{d}x=\pi+2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1],$$

故 $$x+1=\frac{\pi+2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l, l]$上满足狄氏条件.

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l,l]$上满足狄氏条件.

令$t=\dfrac{x}{l}\cdot\pi$, 则$x=\dfrac{lt}{\pi}$,

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l,l]$上满足狄氏条件.

令$t=\dfrac{x}{l}\cdot\pi$, 则$x=\dfrac{lt}{\pi}$, 且区间$[-l,l]$变为$[-\pi,\pi]$,

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l,l]$上满足狄氏条件.

令$t=\dfrac{x}{l}\cdot\pi$, 则$x=\dfrac{lt}{\pi}$, 且区间$[-l,l]$变为$[-\pi,\pi]$,

而$f(x)=f(\dfrac{t}{\pi}\cdot l)\triangleq F(t)$,

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l,l]$上满足狄氏条件.

令$t=\dfrac{x}{l}\cdot\pi$, 则$x=\dfrac{lt}{\pi}$, 且区间$[-l,l]$变为$[-\pi,\pi]$,

而$f(x)=f(\dfrac{t}{\pi}\cdot l)\triangleq F(t)$, 于是$F(t)$以$2\pi$为周期, 并$[-\pi,\pi]$上满足狄氏条件, 从而可将$F(t)$展为Fourier级数:

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l,l]$上满足狄氏条件.

令$t=\dfrac{x}{l}\cdot\pi$, 则$x=\dfrac{lt}{\pi}$, 且区间$[-l,l]$变为$[-\pi,\pi]$,

而$f(x)=f(\dfrac{t}{\pi}\cdot l)\triangleq F(t)$, 于是$F(t)$以$2\pi$为周期, 并$[-\pi,\pi]$上满足狄氏条件, 从而可将$F(t)$展为Fourier级数:

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\ 其中$$

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l,l]$上满足狄氏条件.

令$t=\dfrac{x}{l}\cdot\pi$, 则$x=\dfrac{lt}{\pi}$, 且区间$[-l,l]$变为$[-\pi,\pi]$,

而$f(x)=f(\dfrac{t}{\pi}\cdot l)\triangleq F(t)$, 于是$F(t)$以$2\pi$为周期, 并$[-\pi,\pi]$上满足狄氏条件, 从而可将$F(t)$展为Fourier级数:

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\ \text{其中}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l,l]$上满足狄氏条件.

令$t=\dfrac{x}{l}\cdot\pi$, 则$x=\dfrac{lt}{\pi}$, 且区间$[-l,l]$变为$[-\pi,\pi]$,

而$f(x)=f(\dfrac{t}{\pi}\cdot l)\triangleq F(t)$, 于是$F(t)$以$2\pi$为周期, 并$[-\pi,\pi]$上满足狄氏条件, 从而可将$F(t)$展为Fourier级数：

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$ 其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

收敛定理

收敛定理

设周期为$2l$的函数$f(x)$在$[-l,l]$上满足狄氏条件，则$f(x)$的傅里叶级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$在$[-l,l]$上收敛，

收敛定理

设周期为$2l$的函数$f(x)$在$[-l,l]$上满足狄氏条件，则$f(x)$的傅里叶级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$在$[-l,l]$上收敛，并且其和函数$S(x)$满足

收敛定理

设周期为$2l$的函数$f(x)$在$[-l,l]$上满足狄氏条件, 则$f(x)$的傅里叶级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$ 在$[-l,l]$上收敛, 并且其和函数$S(x)$满足

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点;}\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点;}\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l,\end{cases}$$

收敛定理

设周期为$2l$的函数$f(x)$在$[-l,l]$上满足狄氏条件, 则$f(x)$的傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$在$[-l,l]$上收敛, 并且其和函数$S(x)$满足

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点;}\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点;}\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l,\end{cases}$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ \ (n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ \ (n=1,2,\cdots).$$

和周期为2π的函数类似，有如下结论：

和周期为2π的函数类似, 有如下结论:

- 若区间$[-l,l]$上的函数$f(x)$非周期函数, 则可进行周期延拓, 将$f(x)$展为Fourier级数;

和周期为2π的函数类似, 有如下结论:

- 若区间$[-l,l]$上的函数$f(x)$非周期函数, 则可进行周期延拓, 将$f(x)$展为Fourier级数;
- 若已知$f(x)$在$[0,l]$上的表达式, 则可以通过奇式延拓, 将$f(x)$展为正弦级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$,

和周期为2π的函数类似, 有如下结论:

- 若区间$[-l,l]$上的函数$f(x)$非周期函数, 则可进行周期延拓, 将$f(x)$展为Fourier级数;
- 若已知$f(x)$在$[0,l]$上的表达式, 则可以通过奇式延拓, 将$f(x)$展为正弦级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$,

$$\text{其中 } b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

和周期为2π的函数类似, 有如下结论:

- 若区间$[-l,l]$上的函数$f(x)$非周期函数, 则可进行周期延拓, 将$f(x)$展为Fourier级数;
- 若已知$f(x)$在$[0,l]$上的表达式, 则可以通过奇式延拓, 将$f(x)$展为正弦级数: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$,

  其中 $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$
- 若已知$f(x)$在$[0,l]$上的表达式, 则可以通过偶式延拓, 将$f(x)$展为余弦级数: $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$,

和周期为2π的函数类似, 有如下结论:

- 若区间$[-l,l]$上的函数$f(x)$非周期函数, 则可进行周期延拓, 将$f(x)$展为Fourier级数;
- 若已知$f(x)$在$[0,l]$上的表达式, 则可以通过奇式延拓, 将$f(x)$展为正弦级数: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$,

  $$\text{其中 } b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$
- 若已知$f(x)$在$[0,l]$上的表达式, 则可以通过偶式延拓, 将$f(x)$展为余弦级数: $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$,

  $$\text{其中 } a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

例7. 将周期为4的函数$f(x)=\begin{cases} 0, & -2\leqslant x<0 \\ 1, & 0\leqslant x<2 \end{cases}$ 展成Fourier级数.

例7. 将周期为4的函数$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 展成Fourier级数.

解: 函数周期为4, 即$l=2$, 则

例7. 将周期为4的函数$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 展成Fourier级数.

解： 函数周期为4, 即$l=2$, 则 $a_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{2}\mathrm{d}x=1,$

例7. 将周期为4的函数$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 展成Fourier级数.

解: 函数周期为4, 即$l=2$, 则 $a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\mathrm{d}x=1$,

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=0,$$

例7. 将周期为4的函数$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 展成Fourier级数.

解: 函数周期为4, 即$l=2$, 则 $a_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}x=1$,

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},$$

例7. 将周期为4的函数$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 展成Fourier级数.

解: 函数周期为4, 即$l=2$, 则 $a_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{2}\mathrm{d}x=1$,

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2},\quad x\in(-2,0)\cup(0,2),$$

例7. 将周期为4的函数$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$ 展成Fourier级数.

解：函数周期为4, 即$l=2$, 则 $a_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}x=1$,

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2},\quad x\in(-2,0)\cup(0,2),$$

当$x=0,\ x=\pm2$时, 级数收敛于$\dfrac{1}{2}$.

例8. 把$f(x)=1-\dfrac{x}{2}$在$[0,2]$上展开成以4为周期的正弦级数.

例8. 把$f(x)=1-\dfrac{x}{2}$在$[0,2]$上展开成以4为周期的正弦级数.

解： 将$f(x)$先作奇式延拓, 再作周期延拓, 周期为4, 即 $l=2$, 则

例8. 把$f(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$在$[0,2]$上展开成以4为周期的正弦级数.

解: 将$f(x)$先作奇式延拓, 再作周期延拓, 周期为4, 即 $l = 2$, 则

$$a_n = 0,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

例8. 把$f(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$在$[0,2]$上展开成以4为周期的正弦级数.

解: 将$f(x)$先作奇式延拓, 再作周期延拓, 周期为4, 即 $l = 2$, 则

$$a_n = 0, \ \ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x) \sin\frac{n\pi x}{2} \mathrm{d}x$$

例8. 把$f(x)=1-\dfrac{x}{2}$在$[0,2]$上展开成以4为周期的正弦级数.

解: 将$f(x)$先作奇式延拓, 再作周期延拓, 周期为4, 即 $l=2$, 则

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(1-\frac{x}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi},\quad (n=1,2,\cdots),$$

例8. 把$f(x) = 1 - \frac{x}{2}$在$[0,2]$上展开成以4为周期的正弦级数.

解: 将$f(x)$先作奇式延拓, 再作周期延拓, 周期为4, 即 $l = 2$, 则

$$a_n = 0,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 (1 - \frac{x}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi},\quad (n = 1, 2, \cdots),$$

所以 $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x,\ \ x \in (0, 2),$$

例8. 把$f(x)=1-\dfrac{x}{2}$在$[0,2]$上展开成以4为周期的正弦级数.

解: 将$f(x)$先作奇式延拓, 再作周期延拓, 周期为4, 即$l=2$, 则

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(1-\frac{x}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi},\quad (n=1,2,\cdots),$$

所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}x,\ x\in(0,2),$

当$x=0$和$x=2$时, 级数收敛于0.

例9. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$，且$f(x)$以$2\pi$为周期的正弦级数的和函数为$S_1(x)$, $f(x)$以2π为周期的余项级数的和函数为$S_2(x)$, 求$S_k(3\pi), S_k(\dfrac{3\pi}{2})\ (k=1,2)$.

例9. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$，且$f(x)$以$2\pi$为周期的正弦级数的和函数为$S_1(x)$，$f(x)$以$2\pi$为周期的余项级数的和函数为$S_2(x)$，求$S_k(3\pi), S_k(\dfrac{3\pi}{2})$ $(k=1,2)$.

答：$S_1(3\pi)=0$，$S_2(3\pi)=1$，

例9. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$，且$f(x)$以$2\pi$为周期的正弦级数的和函数为$S_1(x)$，$f(x)$以$2\pi$为周期的余项级数的和函数为$S_2(x)$，求$S_k(3\pi), S_k(\frac{3\pi}{2})\ (k=1,2)$.

答： $S_1(3\pi)=0,\ S_2(3\pi)=1,\ S_1(\frac{3\pi}{2})=-1,\ S_2(\frac{3\pi}{2})=1.$

例10. 设$f(x) = x^2\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$ $(-\infty < x < \infty)$, 其中$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\ (n = 1, 2, \cdots)$, 求$S(0)$, $S(\frac{1}{2})$, $S(-\frac{1}{2})$, $S(1)$, $S(-\frac{4}{3})$.

例10. 设$f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$ $(-\infty<x<\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$, 求$S(0)$, $S(\frac{1}{2})$, $S(-\frac{1}{2})$, $S(1)$, $S(-\frac{4}{3})$.

答: $S(0)=0$,

例10. 设$f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x)$ $(-\infty<x<\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$, 求$S(0)$, $S(\frac{1}{2})$, $S(-\frac{1}{2})$, $S(1)$, $S(-\frac{4}{3})$.

答: $S(0)=0,\quad S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4},$

例10. 设$f(x)=x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$ $(-\infty<x<\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$ $(n=1,2,\cdots)$, 求$S(0)$, $S(\frac{1}{2})$, $S(-\frac{1}{2})$, $S(1)$, $S(-\frac{4}{3})$.

答: $S(0)=0$, $S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, $S(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$,

例10. 设$f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$ $(-\infty<x<\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$, 求$S(0)$, $S(\frac{1}{2})$, $S(-\frac{1}{2})$, $S(1)$, $S(-\frac{4}{3})$.

答: $S(0)=0$, $S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, $S(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$,

$S(1)=0$,

例10. 设$f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$ $(-\infty<x<\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$, 求$S(0)$, $S(\frac{1}{2})$, $S(-\frac{1}{2})$, $S(1)$, $S(-\frac{4}{3})$.

答: $S(0)=0$, $S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, $S(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$,

$S(1)=0$, $S(-\frac{4}{3})=\frac{4}{9}$.