# 工科数学分析

贺丹（东南大学）

# 第七节　空间曲线的曲率与扰率

# 第七节 空间曲线的曲率与挠率

本节主要内容：

# 第七节 空间曲线的曲率与扰率

本节主要内容：

- 平面曲线的曲率

# 第七节 空间曲线的曲率与扰率

本节主要内容：

- 平面曲线的曲率
- 空间曲线的曲率

# 第七节　空间曲线的曲率与挠率

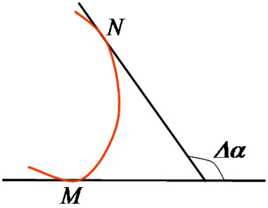
本节主要内容：

- 平面曲线的曲率
- 空间曲线的曲率
- 曲率半径与曲率圆

# 曲率概念

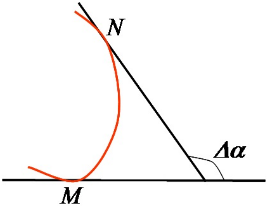
# 曲率概念

曲线弧$\widehat{MN}$ 两端切线的夹角$\Delta\alpha$, 可以看作是点$M$ 沿曲线移动到点$N$时, 切线$MT$ 随着转动到$NT'$ 所转过的角, 故$\Delta\alpha$ 又称为转角.



# 曲率概念

曲线弧$\widehat{MN}$ 两端切线的夹角$\Delta\alpha$, 可以看作是点$M$ 沿曲线移动到点$N$时, 切线$MT$ 随着转动到$NT'$ 所转过的角, 故$\Delta\alpha$ 又称为转角.



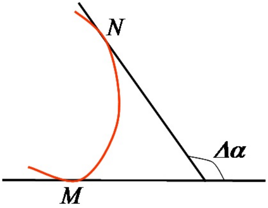

决定曲线弯曲程度的两个因素:

# 曲率概念

曲线弧$\widehat{MN}$ 两端切线的夹角$\Delta\alpha$, 可以看作是点$M$ 沿曲线移动到点$N$时, 切线$MT$ 随着转动到$NT'$ 所转过的角, 故$\Delta\alpha$ 又称为转角.

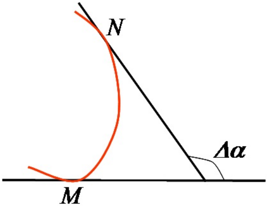
决定曲线弯曲程度的两个因素:

(1) 曲线的弧长;



# 曲率概念

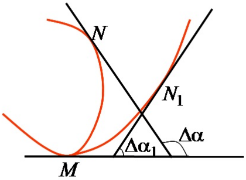
曲线弧$\widehat{MN}$ 两端切线的夹角$\Delta\alpha$, 可以看作是点$M$ 沿曲线移动到点$N$时, 切线$MT$ 随着转动到$NT'$ 所转过的角, 故$\Delta\alpha$ 又称为转角.



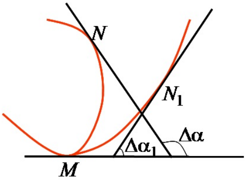

决定曲线弯曲程度的两个因素:

(1) 曲线的弧长;

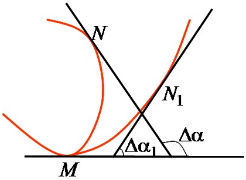
(2) 弧两端切线的转角.



N
$N_1$
$\Delta\alpha$
$\Delta\alpha_1$
M

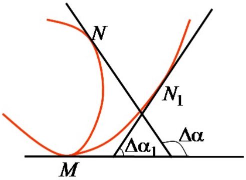


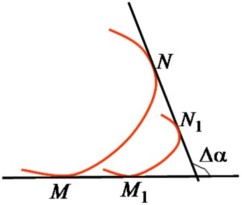

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MN_1},\ \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha,$$




$$\widehat{MN} = \widehat{MN_1},\ \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha,$$

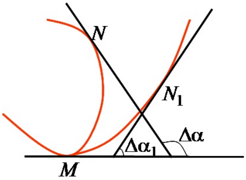
弧长若相等，角大弯度大.



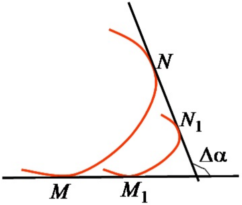

$$\widehat{MN} = \widehat{MN_1},\ \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha,$$

弧长若相等，角大弯度大.

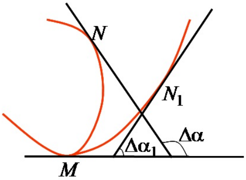



$$\widehat{MN} = \widehat{MN_1},\ \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha,$$

弧长若相等，角大弯度大.

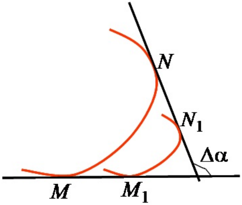



$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha,\ \widehat{MN} > \widehat{MN_1},$$



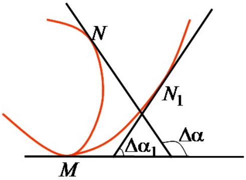

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MN_1},\ \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha,$$

弧长若相等，角大弯度大.



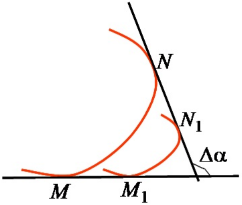

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha,\ \overset{\frown}{MN} > \overset{\frown}{MN_1},$$

转角若相等, 弧长弯度小.




$$\widehat{MN} = \widehat{MN_1},\ \Delta\alpha_1 < \Delta\alpha,$$

弧长若相等，角大弯度大.

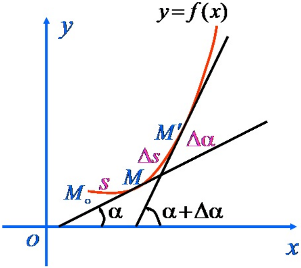


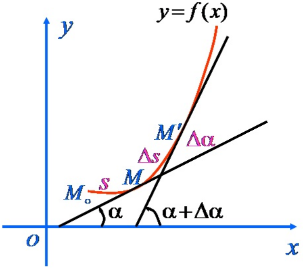

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha,\ \widehat{MN} > \widehat{MN_1},$$

转角若相等, 弧长弯度小.

综上分析可知, 弧的弯曲程度可用弧两端切线的转角与弧度之比 $\dfrac{\Delta\alpha}{\widehat{MN}}$ 来描述, 比值越大, 弧的弯曲程度就越大, 比值越小, 弧的弯曲程度就越小.

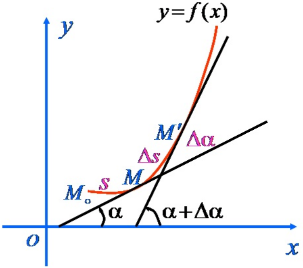
**定义：** 设$L$为平面上的光滑曲线，在$L$上取定一点$M_0$作为度量弧长的基点. 设点$M$是曲线$L$上任一点, 弧$\widehat{M_0M}$的长为$s$, 点$M$处曲线的切线的倾角为$\alpha$. 点$M'$是曲线$L$上的另一点,弧$\widehat{M_0M'}$的长为$s+\Delta s$, 即弧$\widehat{MM'}$的长为$|\Delta s|$. 动点从$M$沿曲线移动到$M'$时切线的转角为$|\Delta\alpha|$, 称$\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$称为弧段$\widehat{MM'}$的平均曲率, 记为$\bar{K}$.






**定义：** 设$L$为平面上的光滑曲线，在$L$上取定一点$M_0$作为度量弧长的基点. 设点$M$是曲线$L$上任一点, 弧$\widehat{M_0M}$的长为$s$, 点$M$处曲线的切线的倾角为$\alpha$. 点$M'$是曲线$L$上的另一点,弧$\widehat{M_0M'}$的长为$s+\Delta s$, 即弧$\widehat{MM'}$的长为$|\Delta s|$. 动点从$M$沿曲线移动到$M'$时切线的转角为$|\Delta\alpha|$, 称$\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$称为弧段$\widehat{MM'}$的平均曲率, 记为$\bar{K}$.

如果当$\Delta s\to 0$时(即点$M'$沿曲线$L$趋向于$M$时), 平均曲率$\bar{K}$的极限存在, 则称这个极限为曲线$L$在点$M$处的曲率, 记为$K$, 即




定义： 设$L$为平面上的光滑曲线，在$L$上取定一点$M_0$作为度量弧长的基点. 设点$M$是曲线$L$上任一点, 弧$\overset{\frown}{M_0M}$的长为$s$, 点$M$处曲线的切线的倾角为$\alpha$. 点$M'$是曲线$L$上的另一点,弧$\overset{\frown}{M_0M'}$的长为$s+\Delta s$, 即弧$\overset{\frown}{MM'}$的长为$|\Delta s|$. 动点从$M$沿曲线移动到$M'$时切线的转角为$|\Delta\alpha|$, 称$\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$称为弧段$\overset{\frown}{MM'}$的平均曲率, 记为$\bar{K}$.

如果当$\Delta s \to 0$时(即点$M'$沿曲线$L$趋向于$M$时), 平均曲率$\bar{K}$的极限存在, 则称这个极限为曲线$L$在点$M$处的曲率, 记为$K$, 即

$$K = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

例1. 求直线$L$上各点处的曲率.

例1. 求直线$L$上各点处的曲率.

解: 对于直线来说, 切线与直线本身重合, 当点沿直线移动时, 切线的倾角$\alpha$不变, 即$\Delta\alpha = 0$, 从而

例1. 求直线$L$上各点处的曲率.

解: 对于直线来说, 切线与直线本身重合, 当点沿直线移动时, 切线的倾角$\alpha$不变, 即$\Delta\alpha = 0$, 从而

$$K = \left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = 0,$$

例1. 求直线$L$上各点处的曲率.

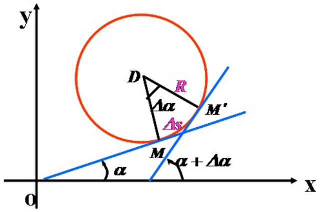
解: 对于直线来说, 切线与直线本身重合, 当点沿直线移动时, 切线的倾角$\alpha$不变, 即$\Delta\alpha = 0$, 从而

$$K = \left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = 0,$$

即直线上各点处的曲率都是零.

例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.

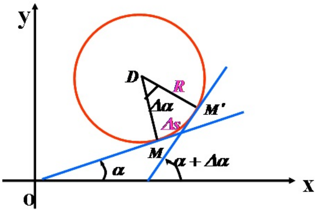
例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.



例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.

解: 在点$M$, $M'$处圆的切线

所夹的角$\Delta\alpha$等于$\angle MDM'$,

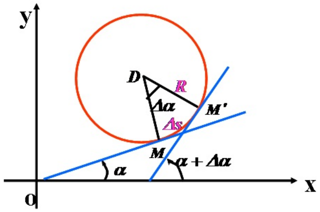


例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.

解: 在点$M$, $M'$处圆的切线

所夹的角$\Delta\alpha$等于$\angle MDM'$,

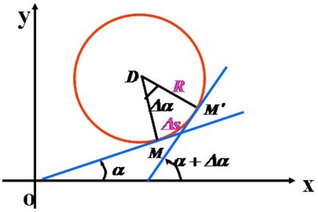
而$\angle MDM' = \dfrac{\Delta s}{R}$,



例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.

解: 在点$M$, $M'$处圆的切线

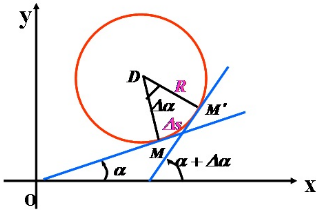
所夹的角$\Delta\alpha$等于$\angle MDM'$,




而$\angle MDM' = \dfrac{\Delta s}{R}$,

$$\therefore \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.




**解**: 在点$M$, $M'$处圆的切线

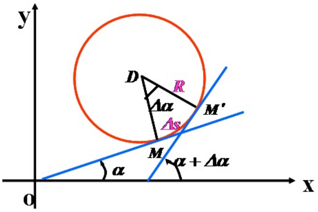
所夹的角$\Delta\alpha$等于$\angle MDM'$,

而$\angle MDM' = \dfrac{\Delta s}{R}$,

$$\therefore \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.




解: 在点$M$, $M'$处圆的切线

所夹的角$\Delta\alpha$等于$\angle MDM'$,

而$\angle MDM' = \dfrac{\Delta s}{R}$,

$$\therefore \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

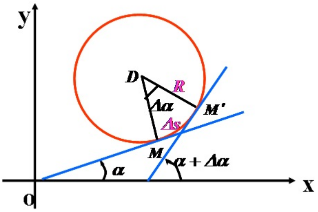
$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}.$$

结论:

例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.

解: 在点$M$, $M'$处圆的切线

所夹的角$\Delta\alpha$等于$\angle MDM'$,



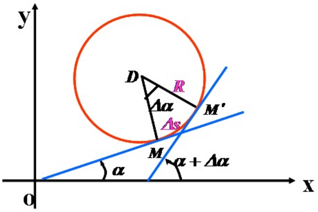

而$\angle MDM' = \dfrac{\Delta s}{R}$,

$$\therefore \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}.$$

结论: (1) 圆上各点处的曲率都相等, 且$K = \dfrac{1}{R}$.

例2. 求半径为$R$的圆上各点处的曲率.




**解**: 在点$M$, $M'$处圆的切线

所夹的角$\Delta\alpha$等于$\angle MDM'$,

而$\angle MDM' = \dfrac{\Delta s}{R}$,

$$\therefore \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}.$$

**结论**: (1) 圆上各点处的曲率都相等, 且$K = \dfrac{1}{R}$.

(2) 半径越小, 曲率越大, 圆弧弯曲得越厉害.

# 曲率的计算公式

# 曲率的计算公式

设曲线$y = f(x)$, $f(x)$具有二阶导数,

# 曲率的计算公式

设曲线$y = f(x)$, $f(x)$具有二阶导数,

$\because \tan\alpha = y'$,

# 曲率的计算公式

设曲线$y = f(x)$, $f(x)$具有二阶导数,

$\because \tan\alpha = y'$,

$$\therefore \alpha = \arctan y',\ \mathrm{d}\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

# 曲率的计算公式

设曲线$y = f(x)$, $f(x)$具有二阶导数,

$\because \tan\alpha = y'$,

$\therefore \alpha = \arctan y'$, $\mathrm{d}\alpha = \dfrac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$,

而$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$,

# 曲率的计算公式

设曲线$y = f(x)$, $f(x)$具有二阶导数,

$\because \tan\alpha = y'$,

$\therefore \alpha = \arctan y'$, $\mathrm{d}\alpha = \dfrac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$,

而$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$,

$$\therefore K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|.$$

例3. 求等边双曲线$xy = 1$在点$(1, 1)$处的曲率.

例3. 求等边双曲线$xy=1$在点$(1,1)$处的曲率.

解: $\because y=\dfrac{1}{x},\ y'=-\dfrac{1}{x^2},\ y''=\dfrac{2}{x^3},$

例3. 求等边双曲线$xy=1$在点$(1,1)$处的曲率.

解: $\because y=\dfrac{1}{x},\ y'=-\dfrac{1}{x^2},\ y''=\dfrac{2}{x^3},$

$\therefore\ y'\big|_{x=1}=-1,\ \ y''\big|_{x=1}=2,$

例3. 求等边双曲线$xy=1$在点$(1,1)$处的曲率.

解: $\because y=\dfrac{1}{x},\ y'=-\dfrac{1}{x^2},\ y''=\dfrac{2}{x^3},$

$\therefore\ y'\big|_{x=1}=-1,\ \ y''\big|_{x=1}=2,$

$$\therefore K=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例4. 求椭圆$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{4}$处的曲率.

例4. 求椭圆$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{4}$处的曲率.

解: $y'\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{4\cos t}{3\sin t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{4}{3},$

例4. 求椭圆$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{4}$处的曲率.

解: $y'\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{4\cos t}{3\sin t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{4}{3}$,

$$y''\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{4}{3}\csc^2 t}{-3\sin t}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{8\sqrt{2}}{3^2},$$

例4. 求椭圆 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{4}$处的曲率.

解: $$y'\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4\cos t}{3\sin t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{3},$$

$$y''\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{4}{3}\csc^2 t}{-3\sin t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{8\sqrt{2}}{3^2},$$

$$\therefore K = \left|\frac{-\frac{8\sqrt{2}}{3^2}}{(1+(-\frac{4}{3})^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{3^2}}{\frac{125}{27}} = \frac{24\sqrt{2}}{125}.$$

例5. 抛物线$y = ax^2 + bx + c$上哪一点处的曲率最大？

例5. 抛物线$y = ax^2 + bx + c$上哪一点处的曲率最大?

解: $y = ax^2 + bx + c$, $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$,

例5. 抛物线$y = ax^2 + bx + c$上哪一点处的曲率最大?

解: $y = ax^2 + bx + c$, $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$,

$$K = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{3/2}},$$

例5. 抛物线$y = ax^2 + bx + c$上哪一点处的曲率最大?

解: $y = ax^2 + bx + c,\ y' = 2ax + b,\ y'' = 2a,$

$$K = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{3/2}},$$

$\because K$ 的分子是常数$|2a|$,

例5. 抛物线$y = ax^2 + bx + c$上哪一点处的曲率最大?

**解**: $y = ax^2 + bx + c$, $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$,

$$K = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{3/2}},$$

$\because$ $K$ 的分子是常数$|2a|$,

$\therefore$ 只要分母最小, $K$就最大,

例5. 抛物线$y=ax^2+bx+c$上哪一点处的曲率最大?

解: $y=ax^2+bx+c$, $y'=2ax+b$, $y''=2a$,

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}},$$

$\because$ $K$ 的分子是常数$|2a|$,

$\therefore$ 只要分母最小, $K$就最大,

$\therefore$ 抛物线在顶点$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$处的曲率最大.

# 空间曲线的曲率的计算公式

**定理7.1**

# 空间曲线的曲率的计算公式

**定理7.1**

设空间光滑曲线$\Gamma$ 的方程为$\boldsymbol{r}(t)$, 其中$t$ 曲线的参数, $\boldsymbol{r}(t)$ 二阶可导, 且$\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, 则$\Gamma$ 在对应点$t$ 处的曲率为

$$K(t) = \frac{\| \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) \|}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|^3}.$$

# 空间曲线的曲率的计算公式

**定理7.1**

设空间光滑曲线$\Gamma$ 的方程为$\boldsymbol{r}(t)$, 其中$t$ 曲线的参数, $\boldsymbol{r}(t)$ 二阶可导, 且$\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, 则$\Gamma$ 在对应点$t$ 处的曲率为

$$K(t) = \frac{\| \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) \|}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|^3}.$$

**例6.** 求螺旋线$\boldsymbol{r} = (a\cos t, a\sin t, kt)$ 的曲率$(a > 0)$.

# 空间曲线的曲率的计算公式

**定理7.1**

设空间光滑曲线$\Gamma$ 的方程为$\boldsymbol{r}(t)$, 其中$t$ 曲线的参数, $\boldsymbol{r}(t)$ 二阶可导, 且$\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, 则$\Gamma$ 在对应点$t$ 处的曲率为

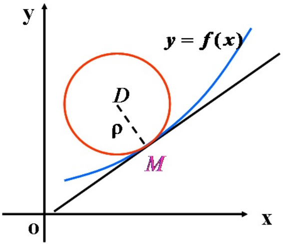
$$K(t) = \frac{\| \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) \|}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|^3}.$$

**例6.** 求螺旋线$\boldsymbol{r} = (a\cos t, a\sin t, kt)$ 的曲率$(a > 0)$.

答案: $K = \dfrac{a}{a^2 + k^2}.$

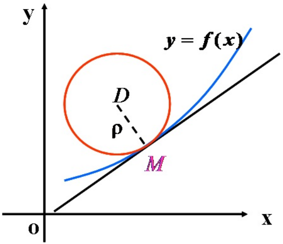
# 曲率半径与曲率圆

# 曲率半径与曲率圆



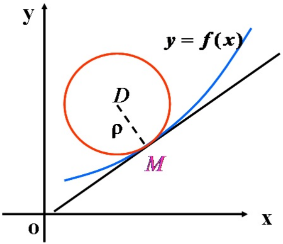
# 曲率半径与曲率圆

**定义：** 设曲线$C$点$M(x,y)$处的曲率为$K(K\neq 0)$, 作点$M$处曲线$C$的法线, 且在曲线凹向一侧取一点$D$, 使$|MD|=\dfrac{1}{K}=\rho.$



# 曲率半径与曲率圆

定义： 设曲线$C$点$M(x,y)$处的曲率为$K(K\neq 0)$, 作点$M$处曲线$C$的法线, 且在曲线凹向一侧取一点$D$, 使$|MD|=\dfrac{1}{K}=\rho$.




以$D$为圆心, $\rho$为半径的圆称为曲线在点$M$的曲率圆, 圆心$D$称为曲线在点$M$的曲率中心, 半径$\rho$称为曲线在点$M$的曲率半径.