3.21　已知某 LTI 系统的单位冲激响应为

$$h(t)=e^{-4t}u(t)$$

对下列输入信号，求输出响应 $y(t)$ 的傅里叶级数表示式。

(a) $x(t)=\cos 2\pi t,$

(b) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$

(c) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$

(d) $x(t)$ 如图 P3.21 所示。

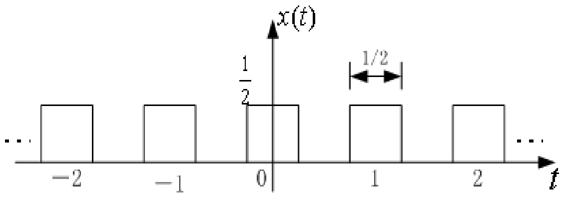


图 P3.21

解：设 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{jk\omega_0 t}$，则 $b_k=a_kH(k\omega_0)$；其中 a_k、b_k 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶级数系数。

(a) $x(t)=\cos 2\pi t,\ \omega_0=2\pi;\ a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$，其余 $a_k=0$

$$\therefore b_1=a_1H(\omega_0)=\frac{1}{4(2+j\pi)},\ b_{-1}=b_1^*=\frac{1}{4(2-j\pi)}，\text{其余 } b_k=0$$

(b) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$；$T=1,\omega_0=2\pi;\ \therefore a_k=1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$

$$b_k=\frac{1}{4+j2k\pi}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

(c) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$；$T=2,\omega_0=\pi;$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]e^{-jk\pi t}dt=\frac{1}{2}(1-e^{jk\pi})=\begin{cases}0, & k\text{偶}\\ 1, & k\text{奇}\end{cases}$$

$$\therefore\quad b_k=\begin{cases}0 & ,\ k\text{偶}\\ \dfrac{1}{4+jk\pi}, & k\text{奇}\end{cases}$$

(d) 由图 P3.21 所示 $x(t)$ 可得：　$T=1,\omega_0=2\pi$

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_k=\frac{1}{2}\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2},\ k=\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad b_0=\frac{1}{8},\ b_k=\begin{cases}0 & ,k\text{偶}，k\neq0\\ \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi(4+j2k\pi)}, & k\text{奇}\end{cases}$$

3.27 某 LTI 系统对输入信号

$$x(t)=\left(e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$$

的响应为

$$y(t)=\left(2e^{-t}-2e^{-4t}\right)u(t)$$

(a) 求该系统的频率响应。
(b) 求该系统的单位冲激响应。
(c) 写出描述系统的微分方程，并用直接 II 型结构实现该系统。

解： (a) $$X(\Omega)=\frac{1}{1+j\Omega}+\frac{1}{3+j\Omega}=\frac{4+2j\Omega}{\left(j\Omega\right)^2+4j\Omega+3}$$

$$Y(\Omega)=\frac{2}{1+j\Omega}-\frac{2}{4+j\Omega}=\frac{6}{\left(j\Omega\right)^2+5j\Omega+4}$$

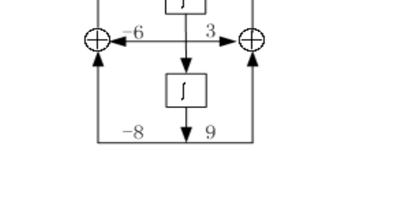
$$\therefore\quad H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{3\left(j\Omega+3\right)}{\left(j\Omega+2\right)\left(j\Omega+4\right)}=\frac{3/2}{j\Omega+2}+\frac{3/2}{j\Omega+4}$$

(b) $h(t)=\frac{3}{2}\left[e^{-2t}+e^{-4t}\right]u(t)$

(c) 由 $H(\Omega)=\dfrac{3j\Omega+9}{\left(j\Omega\right)^2+6j\Omega+8}$ 可得

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

其直接 II 型结构如图 PS3.27 所示。



3.28 某因果 LTI 系统由下列微分方程描述：

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

a. 确定该系统的频率响应$H(j\Omega)$和单位冲激响应$h(t)$。

b. 如果$x(t) = e^{-t}u(t)$，求系统的输出响应$y(t)$。

c. 若输入$x(t)$的傅里叶变换分别为，重新求系统的输出响应$y(t)$。

解：

a. $H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega+2}, h(t) = e^{-2t}u(t)$。

b. $X(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega+1}$, $Y(j\Omega) = X(j\Omega) \times H(j\Omega) = 2(\frac{1}{j\Omega+1} - \frac{1}{j\Omega+2})$，

故$y(t) = 2[e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)]$。

c. 先求$Y(j\Omega)$，再求$y(t)$。

结果分别为：

$y_1(t) = e^{-2t}u(t) - te^{-2t}u(t)$

$y_2(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

$y_3(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) - te^{-2t}u(t)$