工科数学分析

贺　丹(东南大学)

第一节　常数项级数

本节主要内容：

- 常数项级数的概念、性质与收敛原理
- 正项级数的审敛准则
- 变号级数的审敛准则

交错级数

负项级数：级数中每一项都是负数.

交错级数

负项级数：级数中每一项都是负数.

- 正项级数的所有审敛准则都可以用于负项级数. 正项级数和负项级数统称为同号级数.

交错级数

负项级数：级数中每一项都是负数.

- 正项级数的所有审敛准则都可以用于负项级数. 正项级数和负项级数统称为同号级数.

变号级数（也称任意项级数）：级数中有无穷多项为正, 无穷多项为负.

交错级数

负项级数：级数中每一项都是负数.

- 正项级数的所有审敛准则都可以用于负项级数. 正项级数和负项级数统称为同号级数.

变号级数（也称任意项级数）：级数中有无穷多项为正, 无穷多项为负.

交错级数：各项的正负号交替变化的级数, 它可表示成

交错级数

负项级数：级数中每一项都是负数.

- 正项级数的所有审敛准则都可以用于负项级数. 正项级数和负项级数统称为**同号级数**.

变号级数（也称任意项级数）：级数中有无穷多项为正, 无穷多项为负.

交错级数：各项的正负号交替变化的级数, 它可表示成

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$

其中$a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$.

交错级数的判敛准则

定理1.8 (Leibniz准则)

交错级数的判敛准则

定理1.8 (Leibniz准则)

设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$满足条件:

交错级数的判敛准则

定理1.8 (Leibniz准则)

设交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$满足条件:

(1) $a_n \geqslant a_{n+1}\quad (n=1,2,\cdots)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

交错级数的判敛准则

定理1.8 (Leibniz准则)

设交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$满足条件：

(1) $a_n \geqslant a_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛, 且其和$S \leqslant a_1$, 余项$r_n = S - S_n$

满足$|r_n| \leqslant a_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$.

交错级数的判敛准则

定理1.8 (Leibniz准则)

设交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ $(a_n>0)$满足条件：

(1) $a_n \geqslant a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛, 且其和$S \leqslant a_1$, 余项$r_n = S - S_n$

满足$|r_n| \leqslant a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

- 本定理不仅给出了交错级数的判敛法, 而且表明对于满足判别法的交错级数, 如果取S_n作为和S的近似值, 则产生的绝对误差不会超过余项第一项a_{n+1}的绝对值.

证明： 由 $S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$\leqslant (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + (u_{2n+1} - u_{2n+2})$$

$$= S_{2(n+1)},$$

可得$\{S_{2n}\}$为单调递增数列, 又

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

证明： 由 $S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$\leqslant (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + (u_{2n+1} - u_{2n+2})$$

$$= S_{2(n+1)},$$

可得$\{S_{2n}\}$为单调递增数列, 又

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

则$\{S_{2n}\}$有界. 从而 $\{S_{2n}\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. 显然 $S \leqslant u_1$.

证明: 由 $S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$\leqslant (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + (u_{2n+1} - u_{2n+2})$$

$$= S_{2(n+1)},$$

可得$\{S_{2n}\}$为单调递增数列, 又

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

则$\{S_{2n}\}$有界. 从而 $\{S_{2n}\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. 显然 $S \leqslant u_1$.

又由$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$可得, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

证明： 由 $S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n}$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$\leqslant (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + (u_{2n+1} - u_{2n+2})$$

$$= S_{2(n+1)},$$

可得$\{S_{2n}\}$为单调递增数列, 又

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

则$\{S_{2n}\}$有界. 从而 $\{S_{2n}\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. 显然 $S \leqslant u_1$.

又由$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$可得, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $S \leqslant u_1$.

因为余项可写为

$$\begin{aligned} r_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \\ &= (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots), \end{aligned}$$

因为余项可写为

$$\begin{aligned} r_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \\ &= (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots), \end{aligned}$$

可得级数 $u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 仍满足定理的条件,

因为余项可写为

$$
\begin{aligned}
r_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \\
&= (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),
\end{aligned}
$$

可得级数 $u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 仍满足定理的条件,

故由上可知 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leqslant u_{n+1}$.

因为余项可写为

$$
\begin{aligned}
r_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \\
&= (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),
\end{aligned}
$$

可得级数 $u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 仍满足定理的条件,

故由上可知 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leqslant u_{n+1}$.

例1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{n^2}$.

因为余项可写为

$$\begin{aligned} r_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \\ &= (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots), \end{aligned}$$

可得级数 $u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 仍满足定理的条件,

故由上可知 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leqslant u_{n+1}$.

例1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{n^2}$.

答： (1) 收敛；

因为余项可写为

$$\begin{aligned} r_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \\ &= (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots), \end{aligned}$$

可得级数 $u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 仍满足定理的条件,

故由上可知 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leqslant u_{n+1}$.

例1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n^2}$.

答: (1) 收敛; (2) 发散;

因为余项可写为

$$\begin{aligned} r_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \\ &= (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots), \end{aligned}$$

可得级数 $u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 仍满足定理的条件,

故由上可知 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leqslant u_{n+1}$.

例1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{n^2}}{n!}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n-1}{n^2}$.

答: (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛.

判定数列$\{a_n\}$单调减少的方法：

判定数列$\{a_n\}$单调减少的方法：

- 差值法，即判定$a_{n+1} - a_n < 0$;

判定数列$\{a_n\}$单调减少的方法：

- 差值法，即判定$a_{n+1} - a_n < 0$;
- 比值法，即判定$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$;

判定数列$\{a_n\}$单调减少的方法:

- 差值法, 即判定$a_{n+1} - a_n < 0$;
- 比值法, 即判定$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$;
- 导数法: 设$a_n = f(n)$, 判定在区间$[a, +\infty)$内$f'(x) \leqslant 0$.

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数;

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数;
- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$——取绝对值构成的正项级数.

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数；
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$——取绝对值构成的正项级数.

定理1.9 (绝对收敛准则)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$——取绝对值构成的正项级数.

定理1.9 (绝对收敛准则)

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证法一: Cauchy收敛定理证明(略).

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\quad a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$——取绝对值构成的正项级数.

定理1.9 (绝对收敛准则)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证法一: Cauchy收敛定理证明(略).

证法二: 令$u_n=\dfrac{1}{2}(|a_n|+a_n),\quad v_n=\dfrac{1}{2}(|a_n|-a_n)$

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\quad a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数；
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$——取绝对值构成的正项级数.

定理1.9 (绝对收敛准则)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证法一: Cauchy收敛定理证明(略).

证法二: 令$u_n = \dfrac{1}{2}(|a_n| + a_n),\quad v_n = \dfrac{1}{2}(|a_n| - a_n)$

则由$0 \leqslant u_n \leqslant |a_n|,\ 0 \leqslant v_n \leqslant |a_n|$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛可得,

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数；
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$——取绝对值构成的正项级数.

定理1.9 (绝对收敛准则)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证法一: Cauchy收敛定理证明(略).

证法二: 令$u_n = \dfrac{1}{2}(|a_n| + a_n)$, $v_n = \dfrac{1}{2}(|a_n| - a_n)$

则由$0 \leqslant u_n \leqslant |a_n|$, $0 \leqslant v_n \leqslant |a_n|$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛可得,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,

任意项级数的绝对收敛与条件收敛

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数——任意项级数;
- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$——取绝对值构成的正项级数.

定理1.9 (绝对收敛准则)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

证法一: Cauchy收敛定理证明(略).

证法二: 令$u_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$, $v_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n)$

则由$0 \leqslant u_n \leqslant |a_n|$, $0 \leqslant v_n \leqslant |a_n|$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛可得,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛.

定义

- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛, 则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$**绝对收敛**.

定义

- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.
- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

定义

- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.
- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

结论: 绝对收敛的级数一定收敛.

- 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可先用正项级数的判别法去判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$是否收敛.

- 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 可先用正项级数的判别法去判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$是否收敛.
  - 当它收敛时, 原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

- 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 可先用正项级数的判别法去判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$是否收敛.
  - 当它收敛时, 原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;
  - 当它发散时, 原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$未必发散, 需要用其他方法来进行判定.

- 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可先用正项级数的判别法去判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$是否收敛.
  - 当它收敛时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;
  - 当它发散时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$未必发散, 需要用其他方法来进行判定.
  - 但如果是由比值判别法或根值判别法判别出 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$发散时, 则可断定原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也发散.

例1. 判别级数的敛散性；若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}\quad(\alpha\text{为常数})$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^2}{2^n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\quad(\alpha>0\text{为常数})$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

例1. 判别级数的敛散性；若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ （α为常数）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^2}{2^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n})$ （$\alpha > 0$为常数）

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

答：(1) 绝对收敛；

例1. 判别级数的敛散性；若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ （α为常数）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^2}{2^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n})$ （$\alpha > 0$为常数）

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

答：(1) 绝对收敛； (2) 绝对收敛；

例1. 判别级数的敛散性；若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ （α为常数）

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^2}{2^n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n})$ （$\alpha > 0$为常数）

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

答：(1) 绝对收敛；　　(2) 绝对收敛；

(3) 绝对收敛；

例1. 判别级数的敛散性；若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ （α为常数）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^2}{2^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\cos\frac{\alpha}{n})$ （$\alpha > 0$为常数）

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

答：(1) 绝对收敛； (2) 绝对收敛；

(3) 绝对收敛； (4) 条件收敛.

例2. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$

例2. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

答：(1) 当$p \leqslant 0$时，发散；当$0 < p \leqslant 1$时，条件收敛；

当$p > 1$时，绝对收敛.

例2. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$

答：(1) 当$p\leqslant 0$时，发散；当$0<p\leqslant 1$时，条件收敛；

当$p>1$时，绝对收敛.

(2) 当$|x|>1$时，发散；当$|x|<1$时，绝对收敛；

当$x=1$时，条件收敛；当$x=-1$时，发散.

- 绝对收敛级数与条件收敛级数的差异主要表现在关于有限和的某些运算性质对条件收敛的级数不成立, 但对绝对收敛级数成立.

- 绝对收敛级数与条件收敛级数的差异主要表现在关于有限和的某些运算性质对条件收敛的级数不成立, 但对绝对收敛级数成立.

例如, 绝对收敛级数具有可交换性, 并且两个绝对收敛级数的乘积也绝对收敛.

- 绝对收敛级数与条件收敛级数的差异主要表现在关于有限和的某些运算性质对条件收敛的级数不成立，但对绝对收敛级数成立.

例如，绝对收敛级数具有可交换性，并且两个绝对收敛级数的乘积也绝对收敛.

定理1.10

▶ 绝对收敛级数与条件收敛级数的差异主要表现在关于有限和的某些运算性质对条件收敛的级数不成立, 但对绝对收敛级数成立.

例如, 绝对收敛级数具有可交换性, 并且两个绝对收敛级数的乘积也绝对收敛.

定理1.10

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛, 那么任意交换它的各项次序所得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ (称它为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的一个重排)也绝对收敛, 而且它们的和相等.

定理1.11

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 它们的和分别为A与B, 那么, 它们各项相乘得到的所有可能的乘积项$a_n b_m$按任何次序排列所得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛, 并且其和为AB.