工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第二节 二重积分的计算

本章主要内容：

第二节 二重积分的计算

本章主要内容：

- 二重积分的几何意义

第二节 二重积分的计算

本章主要内容：

- 二重积分的几何意义
- 直角坐标系下的二重积分的计算

第二节 二重积分的计算

本章主要内容:

- 二重积分的几何意义
- 直角坐标系下的二重积分的计算
- 极坐标系下二重积分的计算

第二节　二重积分的计算

本章主要内容：

- 二重积分的几何意义
- 直角坐标系下的二重积分的计算
- 极坐标系下二重积分的计算
- 曲线坐标下二重积分的计算(二重积分的换元法)

二重积分的几何意义

二重积分的几何意义

- 曲顶柱体

二重积分的几何意义

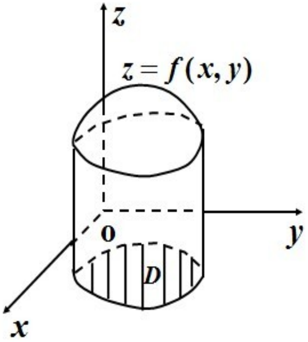
- 曲顶柱体

设有一立体，它的底是Oxy面上的有界闭区域D，侧面是以D的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面，它的顶是曲面$z = f(x, y)$，$f(x, y) \geqslant 0$且在D上连续．这种立体称为曲顶柱体．

二重积分的几何意义

- 曲顶柱体

设有一立体，它的底是Oxy面上的有界闭区域D，侧面是以D的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面，它的顶是曲面$z = f(x,y)$，$f(x,y) \geqslant 0$且在D上连续. 这种立体称为曲顶柱体.



曲顶柱体的体积

曲顶柱体的体积

当$f(x,y)=h$(h为常数, $h>0$)时, 形体为平顶柱体, 其体积为

$V=$高$\times$底面积.

曲顶柱体的体积

当$f(x,y)=h$(h为常数, $h>0$)时, 形体为平顶柱体, 其体积为

$V=$高$\times$底面积. 求曲顶柱体的体积, 可采用微元的思想.

曲顶柱体的体积

当$f(x,y)=h$(h为常数, $h>0$)时, 形体为平顶柱体, 其体积为

$V=$高$\times$底面积. 求曲顶柱体的体积, 可采用微元的思想.

(1)分割:

曲顶柱体的体积

当$f(x,y)=h$(h为常数, $h>0$)时, 形体为平顶柱体, 其体积为 $V=$高$\times$底面积. 求曲顶柱体的体积, 可采用微元的思想.

(1)分割:

将区域(D)任意分成n个子域, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

曲顶柱体的体积

当$f(x,y)=h$(h为常数, $h>0$)时, 形体为平顶柱体, 其体积为$V=$高$\times$底面积. 求曲顶柱体的体积, 可采用微元的思想.

(1)分割:

将区域(D)任意分成n个子域, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积. 以每个子域的边界曲线为准线, 作母线平行于z轴的柱面, 这些柱面把原来的曲顶柱体分成n个小的曲顶柱体.

曲顶柱体的体积

当$f(x,y)=h$(h为常数, $h>0$)时, 形体为平顶柱体, 其体积为

$V=$高$\times$底面积. 求曲顶柱体的体积, 可采用微元的思想.

(1)分割:

将区域(D)任意分成n个子域, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积. 以每个子域的边界曲线为准线, 作母线平行于z轴的柱面, 这些柱面把原来的曲顶柱体分成n个小的曲顶柱体.

(2)近似:

曲顶柱体的体积

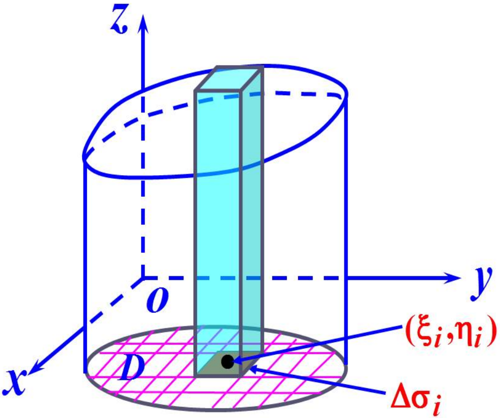
当$f(x,y)=h$(h为常数, $h>0$)时, 形体为平顶柱体, 其体积为$V=$高$\times$底面积. 求曲顶柱体的体积, 可采用微元的思想.

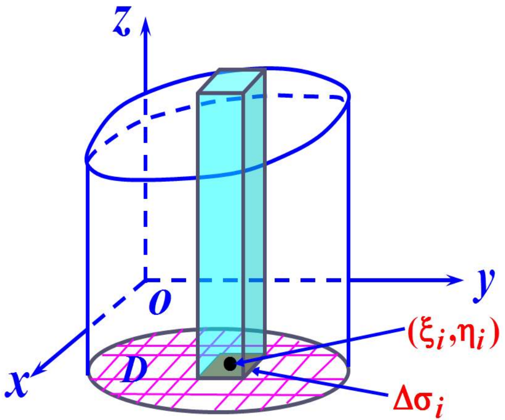
(1)分割:

将区域(D)任意分成n个子域, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积. 以每个子域的边界曲线为准线, 作母线平行于z轴的柱面, 这些柱面把原来的曲顶柱体分成n个小的曲顶柱体.

(2)近似:

$\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 用以$f(\xi_i,\eta_i)$为高, $\Delta\sigma_i$ 为底的平顶柱体的体积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 近似代替第i 个小曲顶柱体的体积, 即$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.


z
y
o
x
D
(ξ_i,η_i)
$\Delta\sigma_i$



$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

(3)求和:

(3)求和:

将这n个小平顶柱体的体积相加, 得到原曲顶柱体体积的近似值,

(3)求和:

将这n个小平顶柱体的体积相加, 得到原曲顶柱体体积的近似值,

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(3)求和:

将这n个小平顶柱体的体积相加，得到原曲顶柱体体积的近似值，

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(4)取极限:

(3)求和:

将这n个小平顶柱体的体积相加, 得到原曲顶柱体体积的近似值,

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(4)取极限:

设$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(\Delta\sigma_i)$的直径$\}$, 当$d\to 0$ 时, 上面和式的极限就是曲顶柱体的体积, 即

(3)求和:

将这n个小平顶柱体的体积相加, 得到原曲顶柱体体积的近似值,

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

(4)取极限:

设$d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{(\Delta\sigma_i)$的直径$\}$, 当$d \to 0$ 时, 上面和式的极限就是曲顶柱体的体积, 即

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

二重积分的几何意义

二重积分的几何意义

- 当$f(x,y)\geqslant 0$时, 曲顶柱体的体积$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

二重积分的几何意义

- 当$f(x,y)\geqslant 0$时, 曲顶柱体的体积$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$
- 当$f(x,y)<0$时, 曲顶柱体在Oxy面下方, 曲顶柱体的体积为

二重积分的几何意义

- 当$f(x,y)\geqslant 0$时, 曲顶柱体的体积$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$
- 当$f(x,y)<0$时, 曲顶柱体在Oxy面下方, 曲顶柱体的体积为

$$V=-\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad \text{或} \quad V=\iint\limits_{(\sigma)} |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

二重积分的几何意义

- 当$f(x,y)\geqslant 0$时, 曲顶柱体的体积$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$
- 当$f(x,y)<0$时, 曲顶柱体在Oxy面下方, 曲顶柱体的体积为
$$V=-\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad 或 \quad V=\iint\limits_{(\sigma)} |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$
- 当$f(x,y)$在(σ)上有正有负时, 若规定在Oxy平面上方的柱体体积取正号, 在Oxy平面下方的柱体体积取负号,

二重积分的几何意义

- 当$f(x,y)\geqslant 0$时, 曲顶柱体的体积$V=\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.
- 当$f(x,y)<0$时, 曲顶柱体在Oxy面下方, 曲顶柱体的体积为
$$V=-\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad \text{或} \quad V=\iint\limits_{(\sigma)} |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$
- 当$f(x,y)$在(σ)上有正有负时, 若规定在Oxy平面上方的柱体体积取正号, 在Oxy平面下方的柱体体积取负号, 则这些上下方柱体体积的代数和就是积分$\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值.

例. 使二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)}(4-4x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$的值达到最大的平面闭区域$(\sigma)$为_________________.

例. 使二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)}(4-4x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的值达到最大的平面闭区域 (σ) 为____________.

答案： $\{(x,y)|4x^2+y^2\leqslant 4\}$

直角坐标系下二重积分的计算

直角坐标系下二重积分的计算

平行截面面积为已知的立体的体积可以用定积分来计算, 故可以用二重积分的几何意义来寻求二重积分的计算方法.

直角坐标系下二重积分的计算

平行截面面积为已知的立体的体积可以用定积分来计算, 故可以用二重积分的几何意义来寻求二重积分的计算方法.

1、积分区域(D)为X型区域

直角坐标系下二重积分的计算

平行截面面积为已知的立体的体积可以用定积分来计算, 故可以用二重积分的几何意义来寻求二重积分的计算方法.

1、积分区域(D)为X型区域

所谓的X 型区域是指区域(D)

可以表示为

$$(D):\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \end{cases}$$

其中$\varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$.

直角坐标系下二重积分的计算

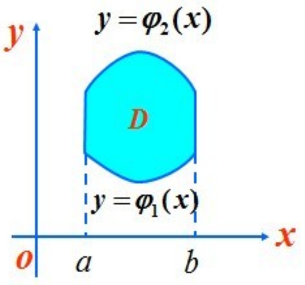
平行截面面积为已知的立体的体积可以用定积分来计算, 故可以用二重积分的几何意义来寻求二重积分的计算方法.

1、积分区域(D)为X型区域

所谓的X 型区域是指区域(D)可以表示为

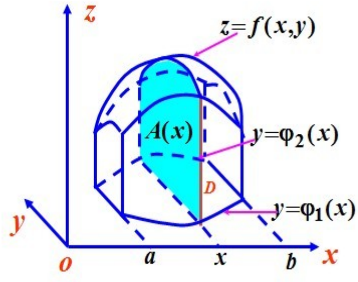
$$(D):\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \end{cases}$$

其中$\varphi_1, \varphi_2 \in C[a, b]$.

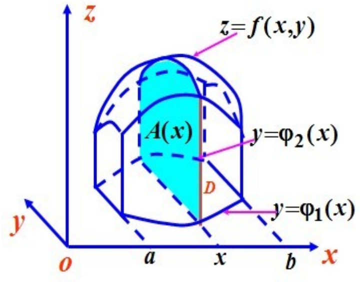


用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.

用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.

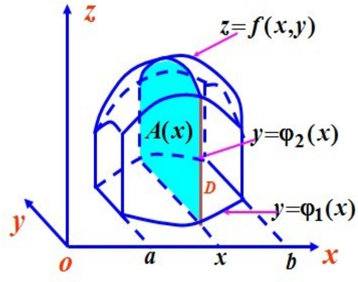


用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.



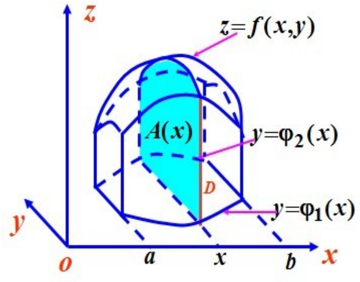
在x轴上区间$[a,b]$内任取一点x, 过该点作垂直于x轴的平面, 用此平面去切这个曲顶柱体, 所得的截面是曲边梯形, 记该曲边梯形的面积为$A(x)$, 则曲顶柱体的体积为:

用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.



在x轴上区间$[a, b]$内任取一点x，过该点作垂直于x轴的平面，用此平面去切这个曲顶柱体，所得的截面是曲边梯形，记该曲边梯形的面积为$A(x)$，则曲顶柱体的体积为：$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

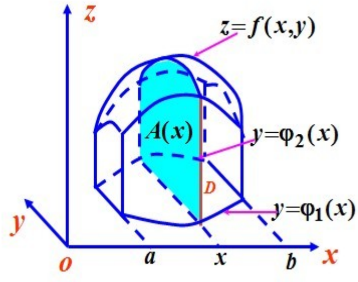
用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.



在x轴上区间$[a,b]$内任取一点x，过该点作垂直于x轴的平面，用此平面去切这个曲顶柱体，所得的截面是曲边梯形，记该曲边梯形的面积为$A(x)$，则曲顶柱体的体积为：$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

而$A(x)=$

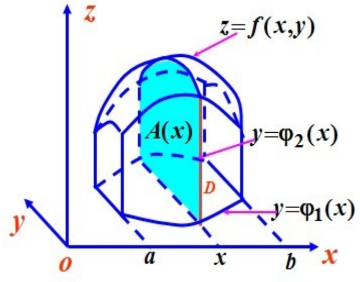
用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.



在x轴上区间$[a,b]$内任取一点x, 过该点作垂直于x轴的平面, 用此平面去切这个曲顶柱体, 所得的截面是曲边梯形, 记该曲边梯形的面积为$A(x)$, 则曲顶柱体的体积为: $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

而$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$

用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.

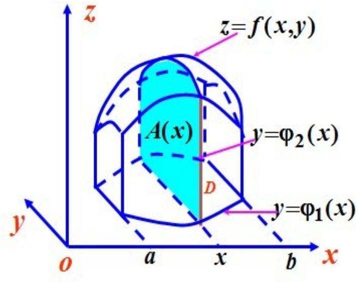


在x轴上区间$[a,b]$内任取一点x, 过该点作垂直于x轴的平面, 用此平面去切这个曲顶柱体, 所得的截面是曲边梯形, 记该曲边梯形的面积为$A(x)$, 则曲顶柱体的体积为: $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

而$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$

故所求曲顶柱体的体积为

用已知平行截面面积求体积的方法来计算该曲顶柱体的体积.



在x轴上区间$[a,b]$内任取一点x，过该点作垂直于x轴的平面，用此平面去切这个曲顶柱体，所得的截面是曲边梯形，记该曲边梯形的面积为$A(x)$，则曲顶柱体的体积为: $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

而$A(x)=\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$

故所求曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

- 由二重积分的几何意义得到二重积分在直角坐标系下的**计算公式**:

- 由二重积分的几何意义得到二重积分在直角坐标系下的计算公式:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

- 由二重积分的几何意义得到二重积分在直角坐标系下的**计算公式**:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

这样的积分称为先对y后对x的**二次积分**(或**累次积分**).

- 由二重积分的几何意义得到二重积分在直角坐标系下的计算公式:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

这样的积分称为先对y后对x的二次积分(或累次积分).

- 在上述公式中, 可将方括号去掉, 在直角坐标系中, 面积元素 $\mathrm{d}\sigma$也可记作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 于是可写成如下形式:

- 由二重积分的几何意义得到二重积分在直角坐标系下的计算公式:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

这样的积分称为先对y后对x的二次积分(或累次积分).

- 在上述公式中, 可将方括号去掉, 在直角坐标系中, 面积元素$\mathrm{d}\sigma$也可记作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 于是可写成如下形式:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 积分区域(D)为Y型区域

2. 积分区域(D)为Y型区域

所谓的Y 型区域是指区域(D)

可以表示为

2. 积分区域(D)为Y型区域

所谓的Y 型区域是指区域(D)

可以表示为

$$(D):\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \end{cases}$$

其中$\psi_1, \psi_2 \in C[c, d]$.

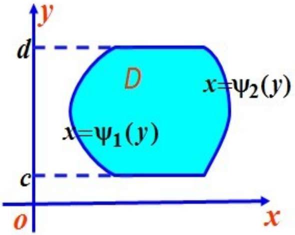
2. 积分区域(D)为Y型区域

所谓的Y 型区域是指区域(D)

可以表示为

$$(D):\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \end{cases}$$

其中$\psi_1, \psi_2 \in C[c, d]$.



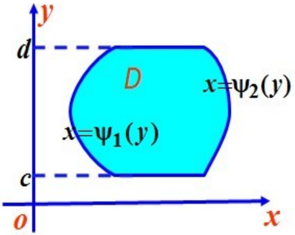
2. 积分区域(D)为Y型区域

所谓的Y 型区域是指区域(D)

可以表示为

$$(D):\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \end{cases}$$

其中$\psi_1, \psi_2 \in C[c,d]$.



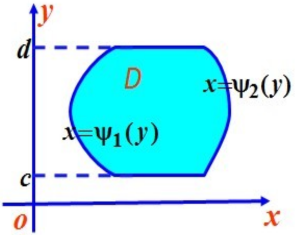
类似地, 二重积分有计算公式

2. 积分区域(D)为Y型区域

所谓的Y 型区域是指区域(D)
可以表示为

$$(D): \begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \end{cases}$$

其中$\psi_1, \psi_2 \in C[c,d]$.



类似地, 二重积分有计算公式

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

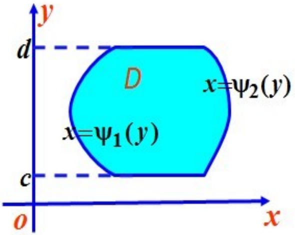
2. 积分区域(D)为Y型区域

所谓的Y 型区域是指区域(D)

可以表示为

$$(D):\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \end{cases}$$

其中$\psi_1, \psi_2 \in C[c,d]$.



类似地, 二重积分有计算公式

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

这样的积分称为先对x后对y的二次积分(或累次积分).

3. 积分区域(D)既不是X型区域, 也不是Y型区域

3. 积分区域(D)既不是X型区域，也不是Y型区域

此时可把(D)分成几个子区域，分别按X型或Y型区域计算，然后再根据区域可加性得到在整个区域(D)上的二重积分.

3. 积分区域(D)既不是X型区域, 也不是Y型区域

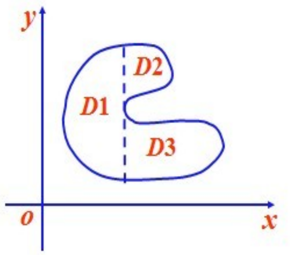
此时可把(D)分成几个子区域, 分别按X型或Y型区域计算, 然后再根据区域可加性得到在整个区域(D)上的二重积分.

例如在图中, 把(D)分成三部分, 它们都是X型区域.

3. 积分区域(D)既不是X型区域, 也不是Y型区域

此时可把(D)分成几个子区域, 分别按X型或Y型区域计算, 然后再根据区域可加性得到在整个区域(D)上的二重积分.

例如在图中, 把(D)分成三部分, 它们都是X型区域.



计算方法总结

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分，确定积分限是关键，方法如下:

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分, 确定积分限是关键, 方法如下:

- 在Oxy平面上画出积分区域(σ)的图形;

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分, 确定积分限是关键, 方法如下:

- 在Oxy平面上画出积分区域(σ)的图形;
- 确定积分区域的类型, 或是X型, 或是Y型, 或者将区域划分为几个X型或Y型的小区域;

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分, 确定积分限是关键, 方法如下:

- 在Oxy平面上画出积分区域(σ)的图形;
- 确定积分区域的类型, 或是X型, 或是Y型, 或者将区域划分为几个X型或Y型的小区域;
- 以X区域为例, 把(σ)为投影到x轴上, 得投影区间$[a, b]$, a和b是对x积分的下限和上限.

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分，确定积分限是关键，方法如下:

- 在Oxy平面上画出积分区域(σ)的图形;
- 确定积分区域的类型，或是X型，或是Y型，或者将区域划分为几个X型或Y型的小区域;
- 以X区域为例，把(σ)为投影到x轴上，得投影区间$[a, b]$，a和b是对x积分的下限和上限. $\forall x \in [a, b]$，过x画一条与y轴平行的直线，得到它与边界曲线交点的纵坐标$y = \varphi_1(x)$和$y = \varphi_2(x)$，就是对y积分的下限和上限.

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分，确定积分限是关键，方法如下：

- 在Oxy平面上画出积分区域(σ)的图形；
- 确定积分区域的类型，或是X型，或是Y型，或者将区域划分为几个X型或Y型的小区域；
- 以X区域为例，把(σ)为投影到x轴上，得投影区间$[a,b]$，a和b是对x积分的下限和上限. $\forall x \in [a,b]$，过x画一条与y轴平行的直线，得到它与边界曲线交点的纵坐标$y=\varphi_1(x)$和$y=\varphi_2(x)$，就是对y积分的下限和上限.

注意:

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分，确定积分限是关键，方法如下：

- 在Oxy平面上画出积分区域(σ)的图形；
- 确定积分区域的类型，或是X型，或是Y型，或者将区域划分为几个X型或Y型的小区域；
- 以X区域为例，把(σ)为投影到x轴上，得投影区间$[a, b]$，a和b是对x积分的下限和上限． $\forall x \in [a, b]$，过x画一条与y轴平行的直线，得到它与边界曲线交点的纵坐标$y = \varphi_1(x)$和$y = \varphi_2(x)$，就是对y积分的下限和上限．

注意：(1) 上限一定要大于下限；

计算方法总结

目标是将二重积分化为二次积分, 确定积分限是关键, 方法如下:

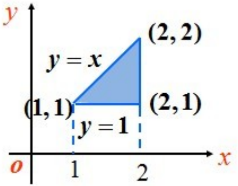
- 在Oxy平面上画出积分区域(σ)的图形;
- 确定积分区域的类型, 或是X型, 或是Y型, 或者将区域划分为几个X型或Y型的小区域;
- 以X区域为例, 把(σ)为投影到x轴上, 得投影区间$[a,b]$, a和b是对x积分的下限和上限. $\forall x \in [a,b]$, 过x画一条与y轴平行的直线, 得到它与边界曲线交点的纵坐标$y=\varphi_1(x)$和$y=\varphi_2(x)$, 就是对y积分的下限和上限.

注意: (1) 上限一定要大于下限;

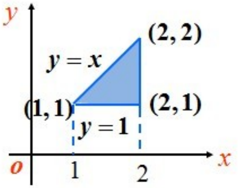
(2) 最外层的积分限不允许有积分变量.

例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线$y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.

例1. 计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线$y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.

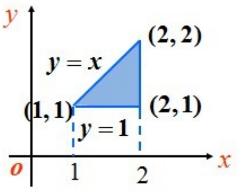


例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



解: 视区域D为X型域, 则

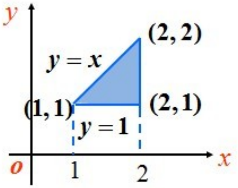
例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$$

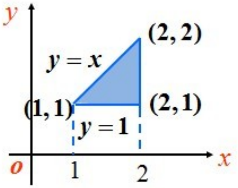
例1. 计算 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\mathrm{d}y$$

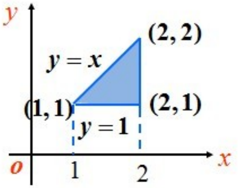
例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 - x)\mathrm{d}x$$

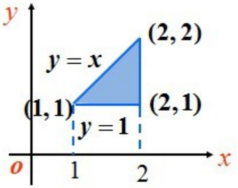
例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{9}{8}.$$

例1. 计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线$y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.

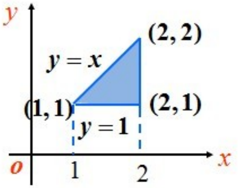


解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3-x)\mathrm{d}x = \frac{9}{8}.$$

视区域D为Y型域, 则

例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



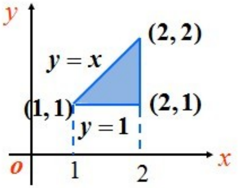
解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 - x)\mathrm{d}x = \frac{9}{8}.$$

视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$$

例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



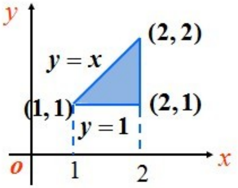
解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 - x)\mathrm{d}x = \frac{9}{8}.$$

视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 xy\mathrm{d}x$$

例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



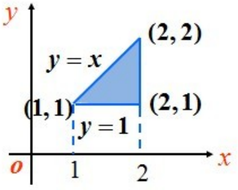
解: 视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{9}{8}.$$

视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 xy\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2(4y-y^3)\mathrm{d}y$$

例1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$ 其中D是由直线 $y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.



解: 视区域D为X型域, 则

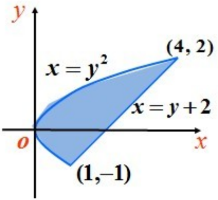
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{9}{8}.$$

视区域D为Y型域, 则

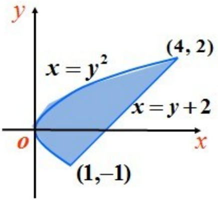
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 xy\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2(4y-y^3)\mathrm{d}y=\frac{9}{8}.$$

例2. 计算 $\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2 = x$和$y = x - 2$所围成.

例2. 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2=x$和$y=x-2$所围成.

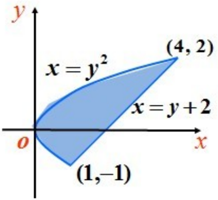


例2. 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2=x$和$y=x-2$所围成.



解: 视区域D为Y型域, 则

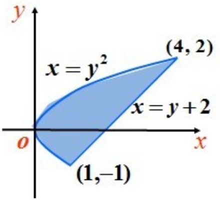
例2. 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2 = x$和$y = x - 2$所围成.



解: 视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$$

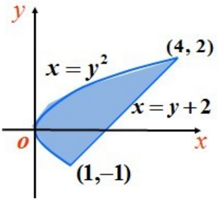
例2. 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2=x$和$y=x-2$所围成.



解: 视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}y\mathrm{d}x$$

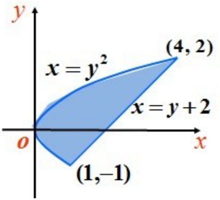
例2. 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2=x$和$y=x-2$所围成.



解: 视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}y\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(y^2+2y-y^3)\mathrm{d}y$$

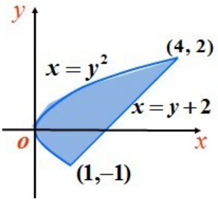
例2. 计算$\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2 = x$和$y = x - 2$所围成.



解: 视区域D为Y型域, 则

$$\iint_D y\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}(y^2 + 2y - y^3)\mathrm{d}y = \frac{9}{4}.$$

例2. 计算$\displaystyle\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2=x$和$y=x-2$所围成.

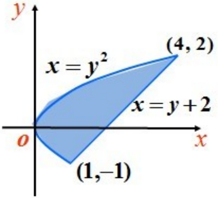


解: 视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}y\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(y^2+2y-y^3)\mathrm{d}y=\frac{9}{4}.$$

视区域D为X型域, 则

例2. 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2=x$和$y=x-2$所围成.



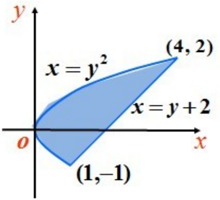
解: 视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}y\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(y^2+2y-y^3)\mathrm{d}y=\frac{9}{4}.$$

视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$$

例2. 计算 $\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2=x$和$y=x-2$所围成.



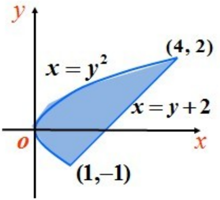
解: 视区域D为Y型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}y\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(y^2+2y-y^3)\mathrm{d}y=\frac{9}{4}.$$

视区域D为X型域, 则

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}y\mathrm{d}y+\int_{1}^{4}\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}y\mathrm{d}y$$

例2. 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$y^2 = x$和$y = x - 2$所围成.



解: 视区域D为Y型域, 则

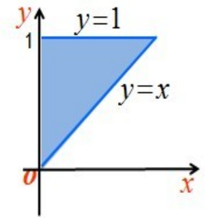
$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}(y^2 + 2y - y^3)\mathrm{d}y = \frac{9}{4}.$$

视区域D为X型域, 则

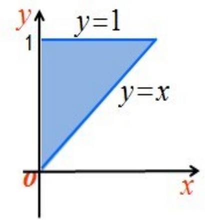
$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma = \int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y + \int_{1}^{4}\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y = \frac{9}{4}.$$

例3. 计算$\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.

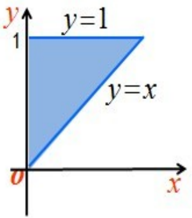
例3. 计算$\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.



例3. 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.

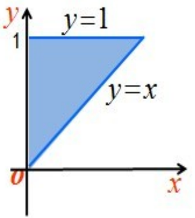


例3. 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.



解: 因为e^{-y^2}的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 所以只能化为先x 后y 的二次积分, 故要视积分区域为Y型域, 则

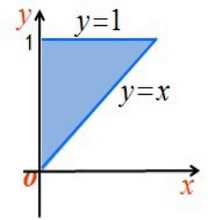
例3. 计算 $\iint\limits_D e^{-y^2}d\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.



解: 因为e^{-y^2}的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 所以只能化为先x 后y 的二次积分, 故要视积分区域为Y型域, 则

$$\iint\limits_D e^{-y^2}d\sigma$$

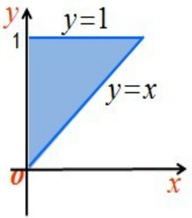
例3. 计算 $\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.



解: 因为e^{-y^2}的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 所以只能化为先x 后y 的二次积分, 故要视积分区域为Y型域, 则

$$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y e^{-y^2}\mathrm{d}x$$

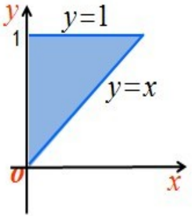
例3. 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.



解: 因为e^{-y^2}的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 所以只能化为先x 后y 的二次积分, 故要视积分区域为Y型域, 则

$$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y e^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 ye^{-y^2}\mathrm{d}y$$

例3. 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线$y=x$, $y=1$和y轴所围成.



解: 因为e^{-y^2}的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 所以只能化为先x 后y 的二次积分, 故要视积分区域为Y型域, 则

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

例4. 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x.$

例4. 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x.$

解: 因为$\cos x^5$的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 故要先化为先y 后x 的二次积分, 即要先交换积分次序.

例4. 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x.$

解: 因为$\cos x^5$的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 故要先化为先y 后x 的二次积分, 即要先交换积分次序.

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x$$

例4. 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x.$

解: 因为$\cos x^5$的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 故要先化为先y 后x 的二次积分, 即要先交换积分次序.

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^3} y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}y$$

例4. 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x$.

解: 因为$\cos x^5$的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 故要先化为先y 后x 的二次积分, 即要先交换积分次序.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^3} y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{4} \int_0^1 x^4 \cos x^5 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

例4. 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x.$

解: 因为$\cos x^5$的原函数不是初等函数, 无法计算积分的值, 故要先化为先y 后x 的二次积分, 即要先交换积分次序.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^3} y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 \mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{4} \int_0^1 x^4 \cos x^5 \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{20} \sin 1.
\end{aligned}$$

积分次序的选择原则

积分次序的选择原则

- 函数原则：

积分次序的选择原则

- **函数原则：** 保证各层积分的原函数能够求出.

积分次序的选择原则

- **函数原则：** 保证各层积分的原函数能够求出.
- **区域原则：**

积分次序的选择原则

- **函数原则：** 保证各层积分的原函数能够求出.
- **区域原则：** 对积分区域分析, 观察是否是X (或Y)型区域.

积分次序的选择原则

- **函数原则：** 保证各层积分的原函数能够求出.
- **区域原则：** 对积分区域分析, 观察是否是X (或Y)型区域.
- **分块原则：**

积分次序的选择原则

- **函数原则：** 保证各层积分的原函数能够求出.
- **区域原则：** 对积分区域分析, 观察是否是X (或Y)型区域.
- **分块原则：** 若积分区域既不是X型又不是Y型, 则在满足第一原则时, 要使分块越少越好.

例5. 交换二次积分的积分次序:

例5. 交换二次积分的积分次序:

$$(1)\ \int_0^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x;$$

例5. 交换二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

$$= \int_{-2}^{0} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

例5. 交换二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

$$= \int_{-2}^{0} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

例5. 交换二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

$$= \int_{-2}^0 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

$$= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^x f(x,y)\mathrm{d}y$$

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

- 若$f(-x,y)=f(x,y)$(或$f(x,-y)=f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为偶函数;

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

- 若$f(-x,y)=f(x,y)$(或$f(x,-y)=f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为偶函数;
- 若$f(-x,y)=-f(x,y)$(或$f(x,-y)=-f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为奇函数.

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

- 若$f(-x,y)=f(x,y)$(或$f(x,-y)=f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为偶函数;
- 若$f(-x,y)=-f(x,y)$(或$f(x,-y)=-f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为奇函数.

▶ 设$f(x,y)$在有界闭区域(D)上可积, $(D)=(D_1)\cup(D_2)$, 则

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

- 若$f(-x,y)=f(x,y)$(或$f(x,-y)=f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为偶函数;
- 若$f(-x,y)=-f(x,y)$(或$f(x,-y)=-f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为奇函数.

▶ 设$f(x,y)$在有界闭区域(D)上可积, $(D)=(D_1)\cup(D_2)$, 则

(1) 若(D_1)与(D_2)关于x轴对称, 则

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

- 若$f(-x,y)=f(x,y)$(或$f(x,-y)=f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为偶函数;
- 若$f(-x,y)=-f(x,y)$(或$f(x,-y)=-f(x,y)$), 则称$f(x,y)$关于变量x(或y)为奇函数.

▶ 设$f(x,y)$在有界闭区域(D)上可积, $(D)=(D_1)\cup(D_2)$, 则

(1) 若(D_1)与(D_2)关于x轴对称, 则

$$\iint_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases} 2\displaystyle\iint_{(D_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{关于变量}y\text{是偶函数;} \\ 0, & f\text{关于变量}y\text{是奇函数;} \end{cases}$$

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

(2) 若(D_1)与(D_2)关于y轴对称, 则

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

(2) 若(D_1)与(D_2)关于y轴对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{关于变量}x\text{是偶函数;} \\ 0, & f\text{关于变量}x\text{是奇函数;} \end{cases}$$

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

(2) 若(D_1)与(D_2)关于y轴对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{关于变量}x\text{是偶函数}; \\ 0, & f\text{关于变量}x\text{是奇函数}; \end{cases}$$

(3) 若积分区域(D)关于直线$y=x$对称, 则

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

(2) 若(D_1)与(D_2)关于y轴对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{关于变量}x\text{是偶函数;} \\ 0, & f\text{关于变量}x\text{是奇函数;} \end{cases}$$

(3) 若积分区域(D)关于直线$y=x$对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(D)} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

(2) 若(D_1)与(D_2)关于y轴对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\displaystyle\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{关于变量}x\text{是偶函数;} \\ 0, & f\text{关于变量}x\text{是奇函数;} \end{cases}$$

(3) 若积分区域(D)关于直线$y=x$对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(D)} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

又若$(D)=(D_1)\cup(D_2)$, 且(D_1)与(D_2)关于直线$y=x$对称, 则

利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算

(2) 若(D_1)与(D_2)关于y轴对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{关于变量}x\text{是偶函数;} \\ 0, & f\text{关于变量}x\text{是奇函数;} \end{cases}$$

(3) 若积分区域(D)关于直线$y=x$对称, 则

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(D)} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

又若$(D)=(D_1)\cup(D_2)$, 且(D_1)与(D_2)关于直线$y=x$对称, 则

$$\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(D_2)} f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$

例6. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(xy^2+y\cos y+2)\mathrm{d}\sigma=$

例6. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(xy^2+y\cos y+2)\mathrm{d}\sigma=$ _____2π_____.

例6. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(xy^2+y\cos y+2)\mathrm{d}\sigma = \underline{\quad 2\pi \quad}$.

例7. 设(D)是Oxy平面上以$(1,1),(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域, (D_1)是(D)在第一象限的部分, 令

$$I=\iint\limits_{(D)}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

试问下列等式是否成立?

(1) $I=2\displaystyle\iint\limits_{(D_1)}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (2) $I=2\displaystyle\iint\limits_{(D_1)}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(3) $I=4\displaystyle\iint\limits_{(D_1)}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

例6. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(xy^2+y\cos y+2)\mathrm{d}\sigma=$ ____2π____.

例7. 设(D)是Oxy平面上以$(1,1),(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域, (D_1)是(D)在第一象限的部分, 令

$$I=\iint\limits_{(D)}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

试问下列等式是否成立?

(1) $I=2\displaystyle\iint\limits_{(D_1)}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (2) $I=2\displaystyle\iint\limits_{(D_1)}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(3) $I=4\displaystyle\iint\limits_{(D_1)}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

答案: (2)成立

例8. 设$f(x)$连续且恒不为零, 证明:

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\pi R^2.$$

例8. 设$f(x)$连续且恒不为零，证明：

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a+b}{2}\pi R^2.$$

证明： 因为积分区域$D: x^2+y^2\leqslant R^2$ 关于$y=x$对称，则

例8. 设$f(x)$连续且恒不为零, 证明:

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\pi R^2.$$

证明: 因为积分区域$D: x^2+y^2\leqslant R^2$ 关于$y=x$对称, 则

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

例8. 设$f(x)$连续且恒不为零，证明：

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\pi R^2.$$

证明： 因为积分区域$D: x^2+y^2\leqslant R^2$ 关于$y=x$对称，则

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $$2I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)+af(y)+af(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例8. 设$f(x)$连续且恒不为零, 证明:

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\pi R^2.$$

证明: 因为积分区域$D: x^2+y^2\leqslant R^2$ 关于$y=x$对称, 则

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $$2I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{af(x)+bf(y)+af(y)+af(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(a+b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a+b)\pi R^2,$$ 从而得证.

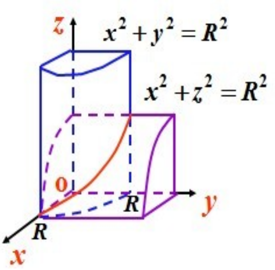
例9. 求两个底圆半径都为R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

例9. 求两个底圆半径都为R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解: 设这两个直交圆柱面的方程为$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$.
下图画出它们在第一卦限的图形:

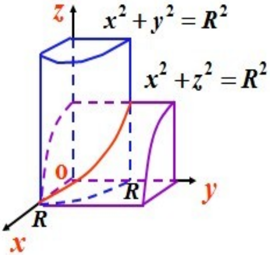
例9. 求两个底圆半径都为R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

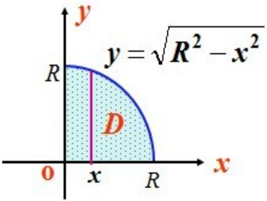
解: 设这两个直交圆柱面的方程为$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$.
下图画出它们在第一卦限的图形:



例9. 求两个底圆半径都为R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

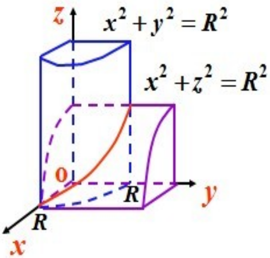
解: 设这两个直交圆柱面的方程为$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$.
下图画出它们在第一卦限的图形:

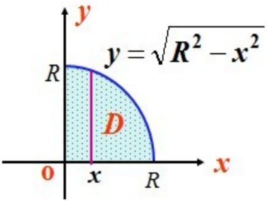




例9. 求两个底圆半径都为R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解: 设这两个直交圆柱面的方程为$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$. 下图画出它们在第一卦限的图形:

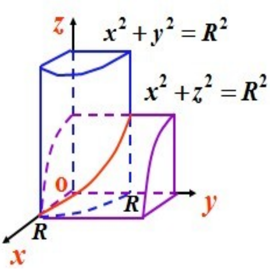


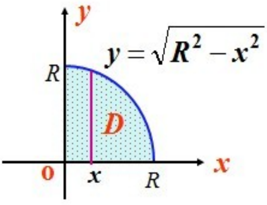


故 $V=8V_1=8\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}\sigma$

例9. 求两个底圆半径都为R的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解: 设这两个直交圆柱面的方程为$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$.
下图画出它们在第一卦限的图形:





故 $V=8V_1=8\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}\sigma$

$$=8\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y=\frac{16}{3}R^3$$