工科数学分析

贺丹（东南大学）

第一章 向量代数与空间解析几何

本章主要内容：

第一章 向量代数与空间解析几何

本章主要内容：

- 向量及其运算

第一章 向量代数与空间解析几何

本章主要内容：

- 向量及其运算
- 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

第一章 向量代数与空间解析几何

本章主要内容：

- 向量及其运算
- 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示
- 平面和直线

第一章 向量代数与空间解析几何

本章主要内容：

- 向量及其运算
- 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示
- 平面和直线
- 空间曲线和曲面

第一节 向量及其运算

本节主要内容：

第一节 向量及其运算

本节主要内容：

- 向量的概念

第一节 向量及其运算

本节主要内容：

- 向量的概念
- 向量的线性运算

第一节 向量及其运算

本节主要内容：

- 向量的概念
- 向量的线性运算
- 向量的数量积与向量积

1. 向量的概念

定义1.1

1. 向量的概念

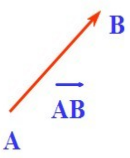
定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为**向量**.

1. 向量的概念

定义1.1

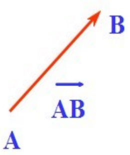
如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为向量.



1. 向量的概念

定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为**向量**.

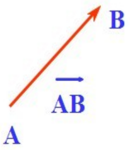


常用有向线段来表示向量.

1. 向量的概念

定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为**向量**.



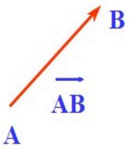
常用有向线段来表示向量.

以A为起点, B为终点的有向线段所表示的向量, 记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$.

1. 向量的概念

定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为向量.



常用有向线段来表示向量.

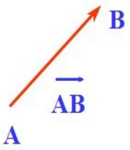
以A为起点, B为终点的有向线段所表示的向量, 记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$.

向量的模

1. 向量的概念

定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为**向量**.



常用有向线段来表示向量.

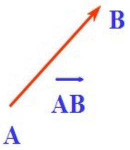
以A为起点, B为终点的有向线段所表示的向量, 记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$.

向量的模 向量的大小, 记作$|\vec{a}|$ (也称为向量$\vec{a}$的范数).

1. 向量的概念

定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为向量.



常用有向线段来表示向量.

以A为起点, B为终点的有向线段所表示的向量, 记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$.

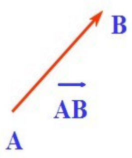
向量的模　向量的大小, 记作$|\vec{a}|$ (也称为向量$\vec{a}$的范数).

单位向量

1. 向量的概念

定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为**向量**.



常用有向线段来表示向量.

以A为起点, B为终点的有向线段所表示的向量, 记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$.

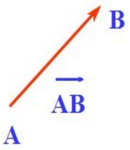
向量的模 向量的大小, 记作$|\vec{a}|$ (也称为向量$\vec{a}$的范数).

单位向量 模等于1的向量.

1. 向量的概念

定义1.1

如果一个量既有大小(用一个非负实数表示)又有方向, 则称这个量为**向量**.



常用有向线段来表示向量.

以A为起点, B为终点的有向线段所表示的向量, 记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$.

向量的模 向量的大小, 记作$|\vec{a}|$ (也称为向量$\vec{a}$的范数).

单位向量 模等于1的向量.

与非零向量$\vec{a}$同向的单位向量称为向量$\vec{a}$ 的单位向量, 记作$\vec{a}_0$.

零向量

零向量 模等于零的向量, 记为$\vec{0}$, 其方向不定.

零向量　模等于零的向量，记为$\vec{0}$，其方向不定.

负向量

零向量 模等于零的向量, 记为$\vec{0}$, 其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量,

零向量 模等于零的向量，记为$\vec{0}$，其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量，记为$-\vec{a}$.

零向量 模等于零的向量, 记为$\vec{0}$, 其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量, 记为$-\vec{a}$.

- 若$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**平行**或**共线**,

零向量 模等于零的向量, 记为$\vec{0}$, 其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量, 记为$-\vec{a}$.

- 若$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**平行**或**共线**, 记为$\vec{a}//\vec{b}$.

零向量 模等于零的向量，记为$\vec{0}$，其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量，记为$-\vec{a}$.

- 若$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**平行**或**共线**，记为$\vec{a}//\vec{b}$.
  - 显然零向量$\vec{0}$与任何向量$\vec{a}$平行.

零向量 模等于零的向量，记为$\vec{0}$，其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量，记为$-\vec{a}$.

- 若$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**平行**或**共线**，记为$\vec{a}//\vec{b}$.
  - 显然零向量$\vec{0}$与任何向量$\vec{a}$平行.

定义1.2

设$\vec{a},\vec{b}$是两个向量，如果$|\vec{a}|=|\vec{b}|$且$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**相等**，记作$\vec{a}=\vec{b}$.

零向量 模等于零的向量，记为$\vec{0}$，其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量，记为$-\vec{a}$.

- 若$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**平行**或**共线**，记为$\vec{a}//\vec{b}$.
  - 显然零向量$\vec{0}$与任何向量$\vec{a}$平行.

定义1.2

设$\vec{a},\vec{b}$是两个向量，如果$|\vec{a}|=|\vec{b}|$且$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**相等**，记作$\vec{a}=\vec{b}$.

- 两个相等的向量，其起点未必是同一点.

零向量 模等于零的向量, 记为$\vec{0}$, 其方向不定.

负向量 模为$|\vec{a}|$而方向与$\vec{a}$相反的向量称为$\vec{a}$的负向量, 记为$-\vec{a}$.

- 若$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**平行**或**共线**, 记为$\vec{a}//\vec{b}$.
  - 显然零向量$\vec{0}$与任何向量$\vec{a}$平行.

定义1.2

设$\vec{a},\vec{b}$是两个向量, 如果$|\vec{a}|=|\vec{b}|$且$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$**相等**, 记作$\vec{a}=\vec{b}$.

- 两个相等的向量, 其起点未必是同一点.
- 一个向量和它经过平移后得到的向量是相等的.

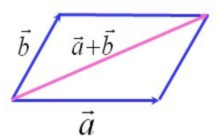
2. 向量的线性运算

2. 向量的线性运算

- 向量的加法与减法

2. 向量的线性运算

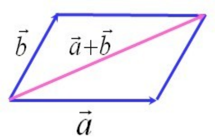
- 向量的加法与减法



2. 向量的线性运算

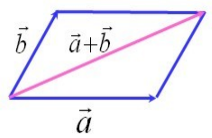
▶ 向量的加法与减法

平行四边形法则



2. 向量的线性运算

▶ **向量的加法与减法**

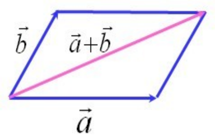


平行四边形法则

以两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形的对角线所表示的向量，称为两向量的和向量，记为$\vec{a}+\vec{b}$.

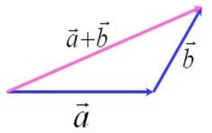
2. 向量的线性运算

▶ 向量的加法与减法



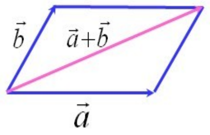
平行四边形法则

以两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形的对角线所表示的向量, 称为两向量的和向量, 记为$\vec{a}+\vec{b}$.



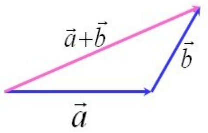
2. 向量的线性运算

▶ 向量的加法与减法



平行四边形法则

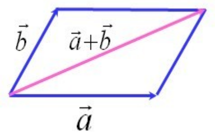
以两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形的对角线所表示的向量, 称为两向量的和向量, 记为$\vec{a}+\vec{b}$.



三角形法则

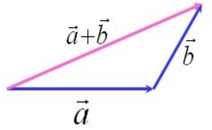
2. 向量的线性运算

▶ 向量的加法与减法



平行四边形法则

以两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形的对角线所表示的向量, 称为两向量的和向量, 记为$\vec{a}+\vec{b}$.

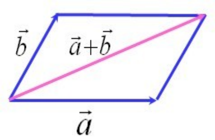


三角形法则

若以向量$\vec{a}$的终点为向量$\vec{b}$的起点, 则由$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$ 的终点的向量为$\vec{a}$与$\vec{b}$的和向量.

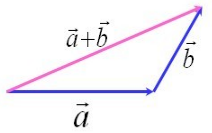
2. 向量的线性运算

▶ 向量的加法与减法



平行四边形法则

以两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形的对角线所表示的向量, 称为两向量的和向量, 记为$\vec{a}+\vec{b}$.



三角形法则

若以向量$\vec{a}$的终点为向量$\vec{b}$的起点, 则由$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$ 的终点的向量为$\vec{a}$与$\vec{b}$的和向量.

该法则可以推广到任意有限个向量相加的情形.

- 减法是加法的逆运算.

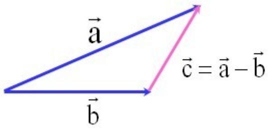
- 减法是加法的逆运算.

如果$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, 则称$\vec{c}$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的差, 或$\vec{b}$ 是$\vec{a}$与$\vec{c}$的差, 分别记为

$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$.

- 减法是加法的逆运算.

如果$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, 则称$\vec{c}$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的差, 或$\vec{b}$ 是$\vec{a}$与$\vec{c}$的差, 分别记为 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$.

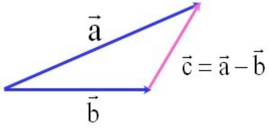


- 减法是加法的逆运算.

如果$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, 则称$\vec{c}$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的差, 或$\vec{b}$ 是$\vec{a}$与$\vec{c}$的差, 分别记为

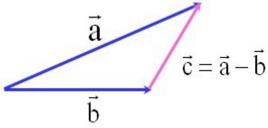
$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$.

减法法则



- 减法是加法的逆运算.

如果$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, 则称$\vec{c}$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的差, 或$\vec{b}$ 是$\vec{a}$与$\vec{c}$的差, 分别记为 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$.



减法法则

将向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的起点重合, 由向量$\vec{b}$ 的终点指向向量$\vec{a}$ 的终点的向量$\vec{c}$就是$\vec{a}-\vec{b}$.

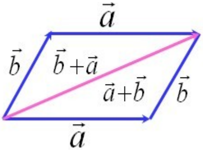
向量的加法具有下列性质：

向量的加法具有下列性质：

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律);

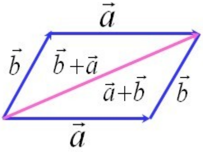
向量的加法具有下列性质：

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律);



向量的加法具有下列性质：

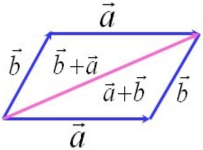
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律);

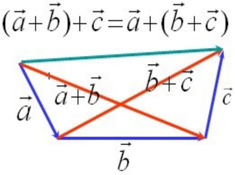


- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (结合律);

向量的加法具有下列性质：

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律);

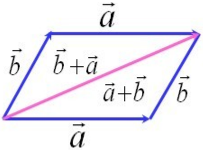


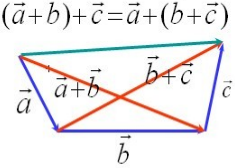


- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (结合律);

向量的加法具有下列性质：

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律);

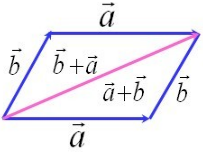


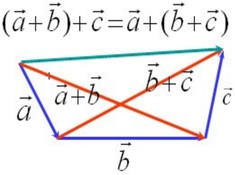


- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (结合律);
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;

向量的加法具有下列性质:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律);

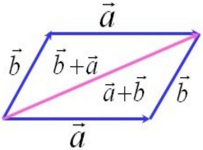




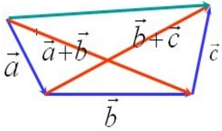
- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (结合律);
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$;

向量的加法具有下列性质：

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律);



$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (结合律);
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$;
- $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

- 向量与数的乘法(数乘)

- **向量与数的乘法(数乘)**

设$\vec{a}$是一个非零向量, λ是一个非零实数, 则λ与$\vec{a}$ 的乘积(简称数乘)仍是一个向量, 记作$\lambda\vec{a}$, 且

向量与数的乘法(数乘)

设$\vec{a}$是一个非零向量, λ是一个非零实数, 则λ与$\vec{a}$ 的乘积(简称数乘)仍是一个向量, 记作$\lambda\vec{a}$, 且

- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

▶ 向量与数的乘法(数乘)

设$\vec{a}$是一个非零向量, λ是一个非零实数, 则λ与$\vec{a}$ 的乘积(简称数乘)仍是一个向量, 记作$\lambda\vec{a}$, 且

- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- $\lambda\vec{a}$的方向为$\begin{cases} \text{与}\vec{a}\text{同向, 当}\lambda > 0, \\ \text{与}\vec{a}\text{反向, 当}\lambda < 0. \end{cases}$

▶ 向量与数的乘法(数乘)

设$\vec{a}$是一个非零向量, λ是一个非零实数, 则λ与$\vec{a}$ 的乘积(简称数乘)仍是一个向量, 记作$\lambda\vec{a}$, 且

- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$;
- $\lambda\vec{a}$的方向为$\begin{cases} 与\vec{a}同向, 当\lambda > 0, \\ 与\vec{a}反向, 当\lambda < 0. \end{cases}$
- 当$\lambda = 0$或$\vec{a} = \vec{0}$时, 规定$\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

向量的数乘具有下列性质:

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; $\quad (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; $\quad (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
- $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$, $\quad (-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$;

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; $\quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, $\quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; $\quad (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
- $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$, $\quad (-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$;
- $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$, $\quad \lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}$;
- 若$\vec{a}$是非零向量，则$\vec{a}$的单位向量$\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$;

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;　$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
- $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$,　$(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$;
- $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$,　$\lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}$;
- 若$\vec{a}$是非零向量，则$\vec{a}$的单位向量$\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$;

  故任一非零向量$\vec{a}$都可以表示为$\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{a}_0$.

向量的数乘具有下列性质:

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; $\quad (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
- $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$, $\quad (-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$;
- $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$, $\quad \lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}$;
- 若$\vec{a}$是非零向量，则$\vec{a}$的单位向量$\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$;

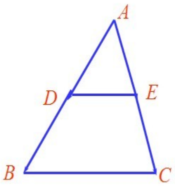
  故任一非零向量$\vec{a}$都可以表示为$\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{a}_0$.

结论: 设向量$\vec{a}\neq\vec{0}$, 则向量$\vec{b}$ 平行于$\vec{a}$的充分必要条件是:

存在唯一的实数λ, 使$\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

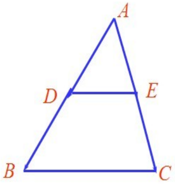
例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.

例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.

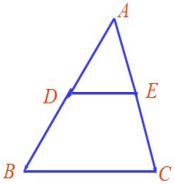


例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.

证明:



例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.

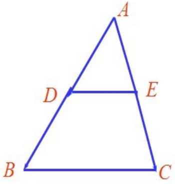


证明: 如图, 设D是AB的中点,

E是AC的中点,

例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.

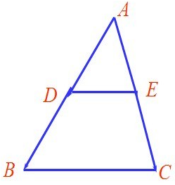
证明: 如图, 设D是AB的中点, E是AC的中点,



则$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.

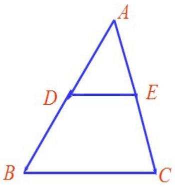
证明: 如图, 设D是AB的中点, E是AC的中点,



则$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$\because\ \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$

例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.



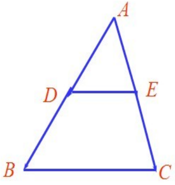
证明: 如图, 设D是AB的中点,

E是AC的中点,

则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\because\ \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.



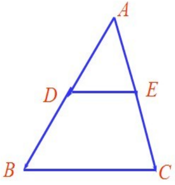
证明: 如图, 设D是AB的中点,

E是AC的中点,

则$\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\because\ \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

例1. 试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.



证明: 如图, 设D是AB的中点, E是AC的中点,

则$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\because\ \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\therefore\ \overrightarrow{DE}//\overrightarrow{BC},\ 且|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

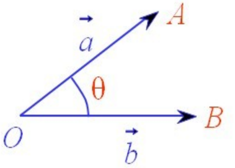
3. 向量的数量积与向量积

3. 向量的数量积与向量积

- 向量在轴上的投影

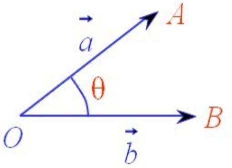
3. 向量的数量积与向量积

- 向量在轴上的投影



3. 向量的数量积与向量积

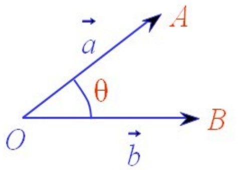
- 向量在轴上的投影



两个向量的夹角

3. 向量的数量积与向量积

▶ 向量在轴上的投影

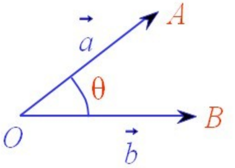


两个向量的夹角

设有两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$, 任取空间一点O 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 规定不超过

3. 向量的数量积与向量积

▶ 向量在轴上的投影

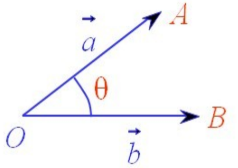


两个向量的夹角

设有两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$, 任取空间一点O 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 规定不超过$\pi$的角$\angle AOB$称为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角.

3. 向量的数量积与向量积

▶ 向量在轴上的投影



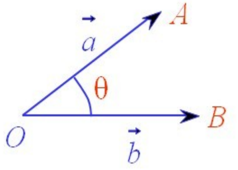
两个向量的夹角

设有两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$, 任取空间一点O 作$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. 规定不超过$\pi$的角$\angle AOB$称为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的**夹角**.

设$\theta = \angle AOB (0 \le \theta \le \pi)$, 记为$(\vec{a}, \vec{b})$或$(\vec{a} \wedge \vec{b})$,

3. 向量的数量积与向量积

▶ 向量在轴上的投影



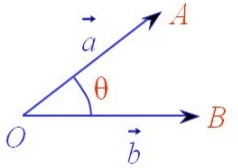
两个向量的夹角

设有两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$, 任取空间一点O 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 规定不超过$\pi$的角$\angle AOB$称为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角.

设$\theta=\angle AOB(0\le\theta\le\pi)$, 记为$(\vec{a},\vec{b})$或$(\vec{a}\wedge\vec{b})$, 即$(\vec{a},\vec{b})=\theta$.

3. 向量的数量积与向量积

▶ 向量在轴上的投影



两个向量的夹角

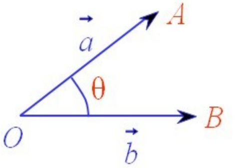
设有两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$, 任取空间一点O 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 规定不超过$\pi$的角$\angle AOB$称为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的**夹角**.

设$\theta=\angle AOB(0\le\theta\le\pi)$, 记为$(\vec{a},\vec{b})$或$(\vec{a}\wedge\vec{b})$, 即$(\vec{a},\vec{b})=\theta$.

- 如果向量$\vec{a}$和$\vec{b}$中有一个是零向量, 规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

3. 向量的数量积与向量积

▶ 向量在轴上的投影



两个向量的夹角

设有两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$, 任取空间一点O 作$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. 规定不超过$\pi$的角$\angle AOB$称为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的**夹角**.

设$\theta = \angle AOB (0 \le \theta \le \pi)$, 记为$(\vec{a}, \vec{b})$或$(\vec{a} \wedge \vec{b})$, 即$(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$.

- 如果向量$\vec{a}$和$\vec{b}$中有一个是零向量, 规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.
- 类似地可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

向量在轴上的投影

向量在轴上的投影

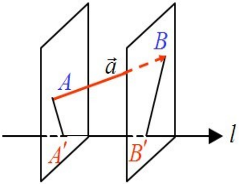
设有一个向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$及一轴$\vec{l}$,

向量在轴上的投影

设有一个向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$及一轴$\vec{l}$, 过$\overrightarrow{AB}$的起点$A$和终点$B$, 分别作垂直于$\vec{l}$的平面, 它们与轴$\vec{l}$分别交于$A'$和$B'$,

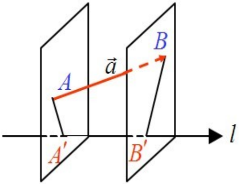
向量在轴上的投影

设有一个向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$及一轴$\vec{l}$, 过$\overrightarrow{AB}$ 的起点A和终点B, 分别作垂直于$\vec{l}$的平面, 它们与轴$\vec{l}$ 分别交于A'和B',

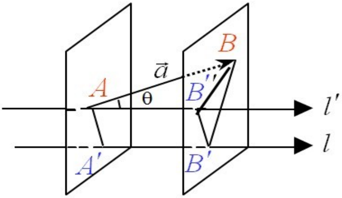


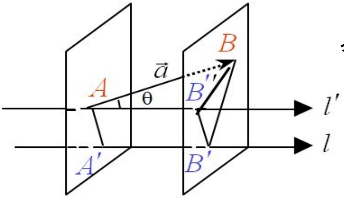
向量在轴上的投影

设有一个向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$及一轴$\vec{l}$, 过$\overrightarrow{AB}$ 的起点A和终点B, 分别作垂直于$\vec{l}$的平面, 它们与轴$\vec{l}$ 分别交于A'和B',



则有向线段$\overrightarrow{A'B'}$ 的值$A'B'$, 叫做向量$\overrightarrow{AB}$在$\vec{l}$轴上的**投影**, 记为$(\overrightarrow{AB})_{\vec{l}}$ 或$(\vec{a})_{\vec{l}}$, 即$(\overrightarrow{AB})_{\vec{l}}=A'B'$, 轴$\vec{l}$称为**投影轴**, 其中$A'B'$是一个数, 其绝对值等于$\overrightarrow{A'B'}$ 的长度, 当$\overrightarrow{A'B'}$ 与轴$\vec{l}$ 同方向时, 其值为正; 反方向时, 其值为负.

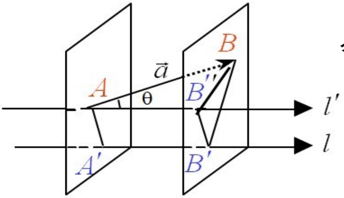

B
$\vec{a}$
A
B''
θ
l'
l
A'
B'



易见, $(\overrightarrow{AB})_{\vec{l}} = A'B' = AB''$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cos\theta$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{l}).$$

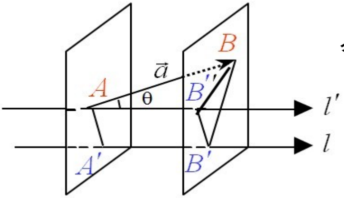


易见, $(\overrightarrow{AB})_{\vec{l}} = A'B' = AB''$

$$= |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

$$= |\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{l}).$$

向量$\overrightarrow{AB}$ 在轴$\vec{l}$ 上的投影, 等于该向量的模乘以这个向量与轴$\vec{l}$的夹角的余弦, 即

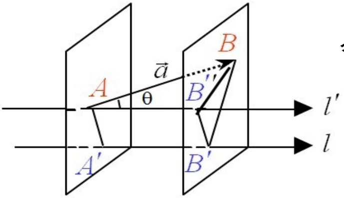


$$\text{易见}, \ (\overrightarrow{AB})_{\vec{l}} = A'B' = AB''$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cos\theta$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{l}).$$

向量$\overrightarrow{AB}$ 在轴$\vec{l}$ 上的投影, 等于该向量的模乘以这个向量与轴$\vec{l}$ 的夹角的余弦, 即 $(\overrightarrow{AB})_{\vec{l}} = |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{l})$.



易见, $(\overrightarrow{AB})_{\vec{l}} = A'B' = AB''$

$$= |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

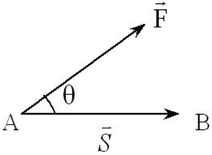
$$= |\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{l}).$$

向量$\overrightarrow{AB}$ 在轴$\vec{l}$ 上的投影, 等于该向量的模乘以这个向量与轴$\vec{l}$ 的夹角的余弦, 即 $(\overrightarrow{AB})_{\vec{l}} = |\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{l}).$

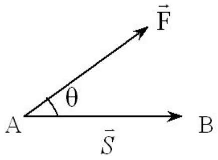
由此可知，两个相等向量在同一轴上的投影相等.

数量积

数量积



▶ 数量积

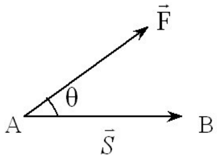


设物体在常力$\vec{F}$作用下沿某直线移动, 位移为$\vec{S}$, 则作用在物体上的常力$\vec{F}$ 所作的功为

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\theta,$$

其中θ为力$\vec{F}$与位移$\vec{S}$的夹角.

▶ 数量积



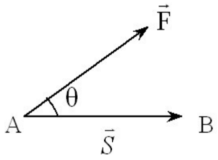
设物体在常力$\vec{F}$作用下沿某直线移动, 位移为$\vec{S}$, 则作用在物体上的常力$\vec{F}$ 所作的功为

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \theta,$$

其中θ为力$\vec{F}$与位移$\vec{S}$的夹角.

定义1.3

▶ 数量积



设物体在常力$\vec{F}$作用下沿某直线移动, 位移为$\vec{S}$, 则作用在物体上的常力$\vec{F}$ 所作的功为

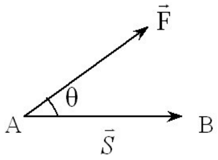
$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\theta,$$

其中θ为力$\vec{F}$与位移$\vec{S}$的夹角.

定义1.3

两向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的模与它们夹角的余弦的乘积, 称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**, 记为$\vec{a} \cdot \vec{b}$,

▶ 数量积



设物体在常力$\vec{F}$作用下沿某直线移动, 位移为$\vec{S}$, 则作用在物体上的常力$\vec{F}$ 所作的功为

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\theta,$$

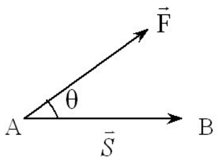
其中θ为力$\vec{F}$与位移$\vec{S}$的夹角.

定义1.3

两向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的模与它们夹角的余弦的乘积, 称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**, 记为$\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

▶ 数量积



设物体在常力$\vec{F}$作用下沿某直线移动, 位移为$\vec{S}$, 则作用在物体上的常力$\vec{F}$ 所作的功为

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\theta,$$

其中θ为力$\vec{F}$与位移$\vec{S}$的夹角.

定义1.3

两向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的模与它们夹角的余弦的乘积, 称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**, 记为$\vec{a}\cdot\vec{b}$, 即

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b}).$$

其中$\vec{a},\vec{b}$只要有一个是零向量, 则规定它们的数量积为零.

- 数量积也称为点积或内积.

- 数量积也称为点积或内积.

因为 $(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}), \quad (\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b}),$

- 数量积也称为点积或内积.

因为 $(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}), \quad (\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b}),$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}}.$

- 数量积也称为点积或内积.

因为 $(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}), \quad (\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b}),$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}}.$

数量积的性质

- 数量积也称为点积或内积.

因为 $(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}),\quad (\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b}),$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}}.$

数量积的性质

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2;$

- 数量积也称为点积或内积.

因为 $(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}), \quad (\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b}),$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}}.$

数量积的性质

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2;$

  ($\vec{a}\cdot\vec{a}$常记为$\vec{a}^2$, 即$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$)

- 数量积也称为点积或内积.

因为 $(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}), \quad (\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})$,

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}}$.

数量积的性质

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$;

  ($\vec{a}\cdot\vec{a}$常记为$\vec{a}^2$, 即$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$)

- 设$\vec{a}$与$\vec{b}$是两个非零向量，则$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$;

- 数量积也称为点积或内积.

因为 $(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}), \quad (\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b}),$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot(\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}}.$

数量积的性质

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2;$

  ($\vec{a}\cdot\vec{a}$常记为$\vec{a}^2$, 即$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$)

- 设$\vec{a}$与$\vec{b}$是两个非零向量，则$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|};$

- 设$\vec{a}$与$\vec{b}$是两个非零向量，则$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$

数量积的运算规律

数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);

数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);

数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配律).

数量积的运算规律

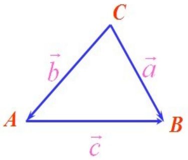
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配律).

例2. 试用向量证明余弦定理.

数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配律).

例2. 试用向量证明余弦定理.



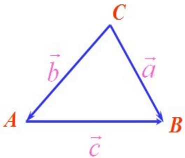
数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配律).

例2. 试用向量证明余弦定理.

证明: 如图, 作$\triangle ABC$及向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,

则有$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.



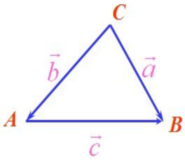
数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配律).

例2. 试用向量证明余弦定理.

证明：如图, 作$\triangle ABC$及向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,

则有$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.



从而 $$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

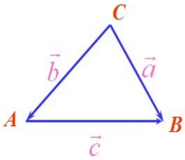
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配律).

例2. 试用向量证明余弦定理.

证明：如图, 作$\triangle ABC$及向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,



则有$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

从而 $$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

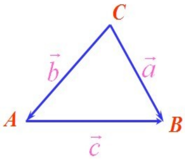
数量积的运算规律

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律);
- $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ (结合律);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配律).

例2. 试用向量证明余弦定理.

证明：如图, 作$\triangle ABC$及向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,

则有$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.



从而 $|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$,

求$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$,

求$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$,

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$,

求$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}, \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, 求$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}, \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\because |\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, 求$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}, \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\begin{aligned}\because |\vec{u}|^2 &= \vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$,

求$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}, \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$

$$\begin{aligned}
\because |\vec{u}|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, 求$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}, \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\begin{aligned}\because |\vec{u}|^2 &= \vec{u}\cdot\vec{u}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=14.\end{aligned}$$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$,

求$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}, \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\begin{aligned}\because |\vec{u}|^2 &= \vec{u}\cdot\vec{u}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=14.\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{u}|=\sqrt{14}.$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$,

求$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}, \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\begin{aligned}\because |\vec{u}|^2 &= \vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=14.\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{u}|=\sqrt{14}.$

$\because \cos(\vec{u},\vec{b})$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, 求$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}, \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\begin{aligned}\because |\vec{u}|^2 &= \vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 = 14.\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{u}| = \sqrt{14}.$$

$$\because \cos(\vec{u},\vec{b}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|} = \frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|}$$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$,

求$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}$, $\quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=0, \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\begin{aligned}\because |\vec{u}|^2 &= \vec{u}\cdot\vec{u}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=14.\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{u}|=\sqrt{14}.$

$$\because \cos(\vec{u},\vec{b})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|}=\frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{u}|}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

例3. 已知$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两垂直, 且$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$,

求$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 的长度, 它与向量$\vec{b}$的夹角.

解: $\because \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}, \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$

$$\begin{aligned} \because |\vec{u}|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 14. \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{u}| = \sqrt{14}.$$

$$\because \cos(\vec{u}, \vec{b}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{u}||\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{u}|} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore (\vec{u}, \vec{b}) = \arccos \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

▶ 向量积

▶ 向量积

定义1.4

设由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的一个向量$\vec{c}$ 满足下列条件：

▶ 向量积

定义1.4

设由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的一个向量$\vec{c}$ 满足下列条件：

▶ 向量积

定义1.4

设由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的一个向量$\vec{c}$ 满足下列条件：

- $\vec{c}$ 与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直，其方向由右手法则确定;

▶ 向量积

定义1.4

设由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的一个向量$\vec{c}$满足下列条件：

- $\vec{c}$ 与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直，其方向由右手法则确定;
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

▶ 向量积

定义1.4

设由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的一个向量$\vec{c}$ 满足下列条件：

- $\vec{c}$ 与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直，其方向由右手法则确定;
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

则称$\vec{c}$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积, 记为$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

▶ 向量积

定义1.4

设由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的一个向量$\vec{c}$ 满足下列条件：

- $\vec{c}$ 与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直，其方向由右手法则确定;
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

则称$\vec{c}$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积, 记为$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

- 如果$\vec{a}$, $\vec{b}$中有一个是零向量, 则规定它们的向量积为零向量.

▶ 向量积

定义1.4

设由向量$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的一个向量$\vec{c}$满足下列条件：

- $\vec{c}$ 与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直，其方向由右手法则确定;
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

则称$\vec{c}$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积, 记为$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

- 如果$\vec{a}$, $\vec{b}$中有一个是零向量, 则规定它们的向量积为零向量.
- 向量积也叫做叉积或外积.

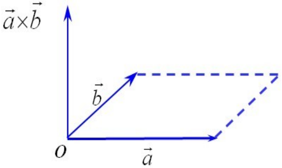
- 向量积$\vec{a} \times \vec{b}$的模的几何意义：

- 向量积$\vec{a} \times \vec{b}$的模的几何意义：

  $|\vec{a} \times \vec{b}|$等于以a, b为邻边的平行四边形的面积.

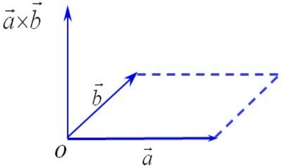
- 向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的模的几何意义：

$|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以a,b为邻边的平行四边形的面积.



- 向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的模的几何意义：

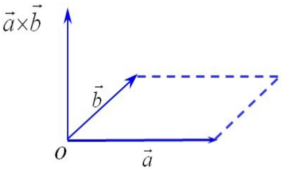
  $|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以a, b为邻边的平行四边形的面积.



向量积的性质

- 向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的模的几何意义：

  $|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以a,b为邻边的平行四边形的面积.

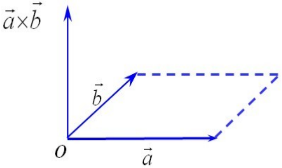


向量积的性质

- $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0},\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0};$

- 向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的模的几何意义：

  $|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以a,b为邻边的平行四边形的面积.

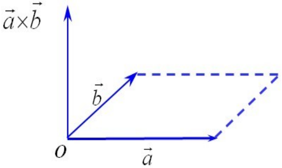


向量积的性质

- $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0},\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$;
- $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;

- 向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的模的几何意义：

$|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以a,b为邻边的平行四边形的面积.

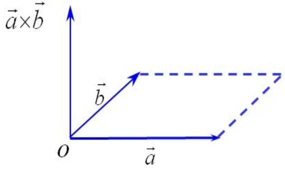


向量积的性质

- $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0},\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$;
- $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;
- 若$\vec{a},\vec{b}$是两个非零向量，则$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

- 向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的模的几何意义：

  $|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以a,b为邻边的平行四边形的面积.



向量积的性质

- $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0},\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$;
- $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;
- 若$\vec{a},\vec{b}$是两个非零向量，则$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;
- $\vec{a}\perp(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{b}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$.

向量积的运算规律

向量积的运算规律

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (反交换律)；

向量积的运算规律

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ （反交换律）;
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ （分配律）;

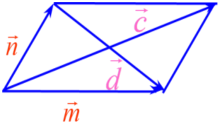
向量积的运算规律

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (反交换律);
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (分配律);
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

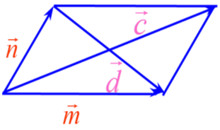
  (与数乘向量的结合律).

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求平行四边形的面积S.

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.

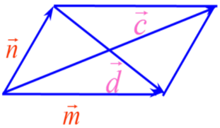


例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



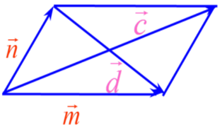
解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$,

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



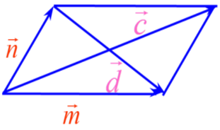
解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n}$,

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



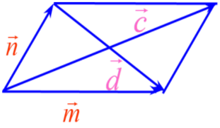
解: 设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n},\vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$,

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n},\vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$, 从而

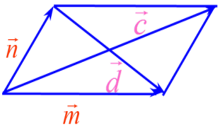
例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n}, \vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$, 从而

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(4\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b},$$

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.

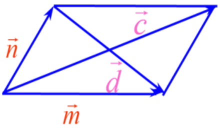


解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n},\vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$, 从而

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(4\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b},$$

$$\vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{d})=\frac{1}{2}(-2\vec{a}+6\vec{b})=-\vec{a}+3\vec{b},$$

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



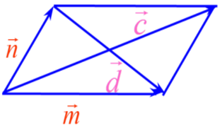
解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n},\vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$, 从而

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(4\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b},$$

$$\vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{d})=\frac{1}{2}(-2\vec{a}+6\vec{b})=-\vec{a}+3\vec{b},$$

故 $S=|\vec{m}\times\vec{n}|=|(2\vec{a}-\vec{b})\times(-\vec{a}+3\vec{b})|$

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n},\vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$, 从而

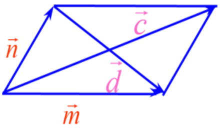
$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(4\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b},$$

$$\vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{d})=\frac{1}{2}(-2\vec{a}+6\vec{b})=-\vec{a}+3\vec{b},$$

故 $$S=|\vec{m}\times\vec{n}|=|(2\vec{a}-\vec{b})\times(-\vec{a}+3\vec{b})|$$

$$=|-2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+6\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{b}|$$

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



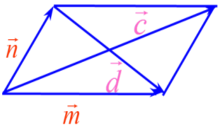
解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n},\vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$, 从而

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(4\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b},$$

$$\vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{d})=\frac{1}{2}(-2\vec{a}+6\vec{b})=-\vec{a}+3\vec{b},$$

故 $$\begin{aligned}S&=|\vec{m}\times\vec{n}|=|(2\vec{a}-\vec{b})\times(-\vec{a}+3\vec{b})|\\&=|-2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+6\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{b}|\\&=5|\vec{a}\times\vec{b}|=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})\end{aligned}$$

例4. 设平行四边形的对角线$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$, 其中$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, 求平行四边形的面积S.



解：设平行四边形的两相邻边分别为$\vec{m},\vec{n}$, 则$\vec{c}=\vec{m}+\vec{n},\vec{d}=\vec{m}-\vec{n}$, 从而

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(4\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b},$$

$$\vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{d})=\frac{1}{2}(-2\vec{a}+6\vec{b})=-\vec{a}+3\vec{b},$$

故 $$\begin{aligned}S&=|\vec{m}\times\vec{n}|=|(2\vec{a}-\vec{b})\times(-\vec{a}+3\vec{b})|\\&=|-2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+6\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{b}|\\&=5|\vec{a}\times\vec{b}|=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=5\cdot1\cdot2\cdot1=10.\end{aligned}$$

向量的混合积

▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积, 记为$[\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]$,

▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**, 记为$[\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]$,

即 $$[\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\ ).$$

▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**, 记为$[\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]$,

即 $\quad [\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\ ).$

$\because |\vec{b}\times\vec{c}|$ 在几何上表示以$\vec{b},\ \vec{c}$ 为边的平行四边形的面积S,

▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**, 记为$[\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]$,

即 $[\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\ )$.

$\because |\vec{b}\times\vec{c}|$ 在几何上表示以$\vec{b}$, $\vec{c}$ 为边的平行四边形的面积S,

$\therefore [\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}\ ]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**, 记为$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$,

即 $[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)$.

$\because |\vec{b}\times\vec{c}|$ 在几何上表示以$\vec{b}$, $\vec{c}$ 为

边的平行四边形的面积S,

$$\therefore [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$=|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}$$

▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**, 记为$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$,

即 $[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)$.

$\because |\vec{b}\times\vec{c}|$ 在几何上表示以$\vec{b},\ \vec{c}$ 为边的平行四边形的面积S,

$$\begin{aligned}\therefore [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] &= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) \\ &= |\vec{b}\times\vec{c}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}} \\ &= S|\vec{a}|\cos\theta,\end{aligned}$$

▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**, 记为$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$,

即 $[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,).$

$\because |\vec{b}\times\vec{c}|$ 在几何上表示以$\vec{b}$, $\vec{c}$ 为边的平行四边形的面积S,

$$\therefore [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$
$$=|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}$$
$$=S|\vec{a}|\cos\theta,$$

其中$\theta=(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})$.

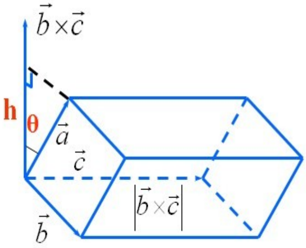
▶ 向量的混合积

定义1.5

称$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**, 记为$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$,

即 $[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,)$.

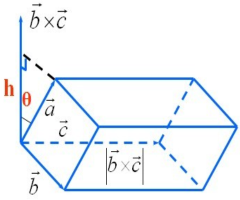
$\because |\vec{b}\times\vec{c}|$ 在几何上表示以$\vec{b}$, $\vec{c}$ 为边的平行四边形的面积S,



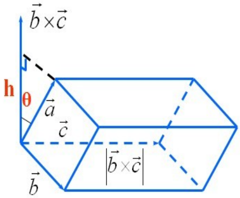
$$\begin{aligned}\therefore [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]&=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\\&=|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}\\&=S|\vec{a}|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中$\theta=(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})$.

设以$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$为棱的平行六面体的体积为$V$, 其底面积为$S$, 高为$h$.



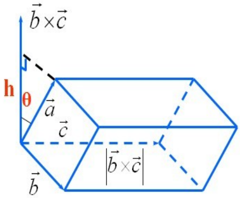
设以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积为V, 其底面积为S, 高为h.



因为当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为右手系时, θ为锐角, $\vec{a}\cos\theta=h$, 所以混合积

$$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=S|\vec{a}|\cos\theta=Sh=V.$$

设以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积为V, 其底面积为S, 高为h.



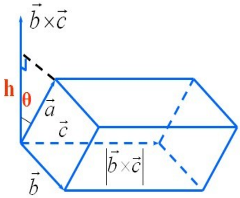
因为当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为右手系时, θ为锐角, $\vec{a}\cos\theta = h$, 所以混合积

$$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = S|\vec{a}|\cos\theta = Sh = V.$$

同理当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为左手系时, θ为钝角, $\vec{a}\cos\theta = -h$, 所以混合积

$$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = S|\vec{a}|\cos\theta = -Sh = -V.$$

设以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积为V, 其底面积为S, 高为h.



因为当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为右手系时, θ为锐角, $\vec{a}\cos\theta = h$, 所以混合积

$$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = S|\vec{a}|\cos\theta = Sh = V.$$

同理当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为左手系时, θ为钝角, $\vec{a}\cos\theta = -h$, 所以混合积

$$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = S|\vec{a}|\cos\theta = -Sh = -V.$$

综上讨论可知 $[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = \pm V$.

混合积的几何意义

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积, 其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积, 其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的性质

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积，其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的性质

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = 0$;

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积，其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的性质

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=0$;

  三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]\neq 0$.

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积，其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的性质

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=0$;

  三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]\neq 0$.
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积，其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的性质

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=0$;

  三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]\neq 0$.
- $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$
  $$=-\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}))=-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}),$$

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积，其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的性质

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=0$;

  三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]\neq 0$.

- $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$
  $$=-\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}))=-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}),$$

  或 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=[\,\vec{b}\vec{c}\vec{a}\,]=[\,\vec{c}\vec{a}\vec{b}\,]=-[\,\vec{a}\vec{c}\vec{b}\,]=-[\vec{b}\vec{a}\vec{c}\,]=-[\,\vec{c}\vec{b}\vec{a}\,]$.

混合积的几何意义

$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$的绝对值表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积, 其符号由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系还是成左手系而定.

混合积的性质

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=0$;

  三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面$\Leftrightarrow [\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]\neq 0$.

- $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$
  $$=-\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}))=-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}),$$

  或 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]=[\,\vec{b}\vec{c}\vec{a}\,]=[\,\vec{c}\vec{a}\vec{b}\,]=-[\,\vec{a}\vec{c}\vec{b}\,]=-[\vec{b}\vec{a}\vec{c}\,]=-[\,\vec{c}\vec{b}\vec{a}\,]$.

说明: 轮换混合积$[\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,]$因子的顺序, 其值不变, 对换两因子的位置, 只改变一个符号.

例5. 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

例5. 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证明：由题意可得

例5. 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证明：由题意可得 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{0}$,

例5. 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证明：由题意可得 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{0}$,

即 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0$.

例5. 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证明：由题意可得 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{0}$,

即 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0.$

$\because \vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\quad \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0.$

例5. 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证明：由题意可得 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{0}$,

即 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0.$

$\because \vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\quad \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0.$

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0,$

例5. 已知$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, 证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证明：由题意可得 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{0}$,

即 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0.$

$\because \vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\quad \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0.$

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0,$

故$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 共面.