工科数学分析

贺丹（东南大学）

第二节 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

第二节 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

本节主要内容:

第二节 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

本节主要内容:

第二节 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

本节主要内容:

- 空间直角坐标系

第二节 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

本节主要内容:

- 空间直角坐标系
- 向量的坐标表示

第二节 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

本节主要内容：

- 空间直角坐标系
- 向量的坐标表示
- 向量运算的坐标表示

一、空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

1. 取O点——坐标原点；

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

1. 取O点——坐标原点；
2. 三条互相垂直的数轴Ox, Oy, Oz

——坐标轴；

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

1. 取O点——坐标原点；
2. 三条互相垂直的数轴Ox, Oy, Oz

   ——坐标轴；
3. Oxy面,Oyz面,Ozx面——坐标平面.

一、空间直角坐标系

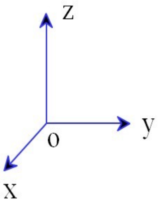
1. 空间直角坐标系的建立

❶ 取O点——坐标原点；

❷ 三条互相垂直的数轴Ox, Oy, Oz

——坐标轴；

❸ Oxy面,Oyz面,Ozx面——坐标平面.



一、空间直角坐标系

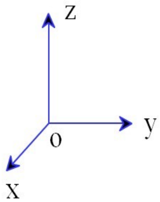
1. 空间直角坐标系的建立

❶ 取O点——坐标原点；

❷ 三条互相垂直的数轴Ox, Oy, Oz

——坐标轴；

❸ Oxy面,Oyz面,Ozx面——坐标平面.

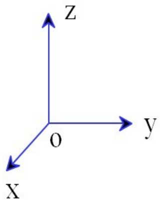


2. 卦限

一、空间直角坐标系

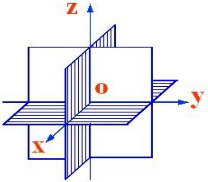
1. 空间直角坐标系的建立

1. 取O点——坐标原点;
2. 三条互相垂直的数轴Ox, Oy, Oz
   ——坐标轴;
3. Oxy面,Oyz面,Ozx面——坐标平面.



2. 卦限

三个坐标平面将空间分成八个部分, 称为八个卦限.



各卦限中点的坐标的符号

各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

3. 空间点的坐标

各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

3. 空间点的坐标

空间点$M \leftrightarrow$有序实数组(x, y, z).

各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

3. 空间点的坐标

空间点$M \leftrightarrow$有序实数组(x, y, z).

x—点M的横坐标;

各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

3. 空间点的坐标

空间点$M \leftrightarrow$有序实数组(x, y, z).

x—点M的横坐标；
y—点M的纵坐标；

各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

3. 空间点的坐标

空间点$M \leftrightarrow$有序实数组(x, y, z).

x—点M的横坐标；
y—点M的纵坐标；
z—点M的竖坐标.

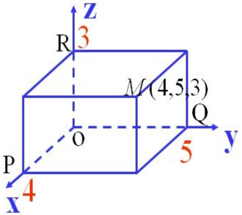
各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

3. 空间点的坐标

空间点$M\leftrightarrow$有序实数组(x,y,z).

x—点M的横坐标;
y—点M的纵坐标;
z—点M的竖坐标.



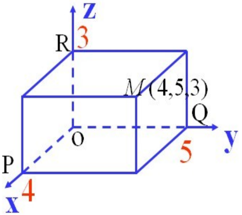
各卦限中点的坐标的符号

	一	二	三	四	五	六	七	八
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

3. 空间点的坐标

空间点$M \leftrightarrow$有序实数组(x, y, z).

x—点M的横坐标；
y—点M的纵坐标；
z—点M的竖坐标.



特殊点的坐标

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

2. 坐标轴上的点

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；
2. 坐标轴上的点 $\left\{ Ox\text{轴上的点：}(x,0,0); \right.$

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；
2. 坐标轴上的点$\begin{cases} Ox\text{轴上的点：}(x,0,0); \\ Oy\text{轴上的点：}(0,y,0); \\ \end{cases}$

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

2. 坐标轴上的点$\begin{cases} Ox\text{轴上的点：}(x,0,0); \\ Oy\text{轴上的点：}(0,y,0); \\ Oz\text{轴上的点：}(0,0,z). \end{cases}$

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

2. 坐标轴上的点$\begin{cases} Ox\text{轴上的点：} & (x,0,0); \\ Oy\text{轴上的点：} & (0,y,0); \\ Oz\text{轴上的点：} & (0,0,z). \end{cases}$

3. 坐标平面上的点

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

2. 坐标轴上的点 $\begin{cases} Ox\text{轴上的点：} (x,0,0); \\ Oy\text{轴上的点：} (0,y,0); \\ Oz\text{轴上的点：} (0,0,z). \end{cases}$

3. 坐标平面上的点 $\begin{cases} Oxy\text{平面上的点：} (x,y,0); \\ \\ \\ \end{cases}$

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

2. 坐标轴上的点 $\begin{cases} Ox\text{轴上的点：}(x,0,0); \\ Oy\text{轴上的点：}(0,y,0); \\ Oz\text{轴上的点：}(0,0,z). \end{cases}$

3. 坐标平面上的点 $\begin{cases} Oxy\text{平面上的点：}(x,y,0); \\ Oyz\text{平面上的点：}(0,y,z); \\ \end{cases}$

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

2. 坐标轴上的点 $\begin{cases} Ox\text{轴上的点：} (x,0,0); \\ Oy\text{轴上的点：} (0,y,0); \\ Oz\text{轴上的点：} (0,0,z). \end{cases}$

3. 坐标平面上的点 $\begin{cases} Oxy\text{平面上的点：} (x,y,0); \\ Oyz\text{平面上的点：} (0,y,z); \\ Ozx\text{平面上的点：} (x,0,z). \end{cases}$

特殊点的坐标

1. 原点$O(0,0,0)$；

2. 坐标轴上的点
$$\begin{cases} Ox\text{轴上的点：} & (x,0,0); \\ Oy\text{轴上的点：} & (0,y,0); \\ Oz\text{轴上的点：} & (0,0,z). \end{cases}$$

3. 坐标平面上的点
$$\begin{cases} Oxy\text{平面上的点：} & (x,y,0); \\ Oyz\text{平面上的点：} & (0,y,z); \\ Ozx\text{平面上的点：} & (x,0,z). \end{cases}$$

4. 坐标轴的平移

4. 坐标轴的平移

设有两个坐标系$O-xyz$(旧)和$O'-x'y'z'$(新), 假设这两个坐标系的各轴对应平行且指向相同.

4. 坐标轴的平移

设有两个坐标系$O-xyz$(旧)和$O'-x'y'z'$(新), 假设这两个坐标系的各轴对应平行且指向相同.

设点M关于坐标系$O-xyz$的坐标为$M(x,y,z)$,

点M关于坐标系$O'-x'y'z'$的坐标为$M(x',y',z')$,

4. 坐标轴的平移

设有两个坐标系$O-xyz$(旧)和$O'-x'y'z'$(新), 假设这两个坐标系的各轴对应平行且指向相同.

设点M关于坐标系$O-xyz$的坐标为$M(x,y,z)$,

点M关于坐标系$O'-x'y'z'$的坐标为$M(x',y',z')$,

新坐标系$O'-x'y'z'$的原点在旧坐标系$O-xyz$中的坐标为(a,b,c),

4. 坐标轴的平移

设有两个坐标系$O-xyz$(旧)和$O'-x'y'z'$(新), 假设这两个坐标系的各轴对应平行且指向相同.

设点M关于坐标系$O-xyz$的坐标为$M(x,y,z)$,

点M关于坐标系$O'-x'y'z'$的坐标为$M(x',y',z')$,

新坐标系$O'-x'y'z'$的原点在旧坐标系$O-xyz$中的坐标为(a,b,c),

$$\text{则}\begin{cases} x=a+x', \\ y=b+y', \\ z=c+z'. \end{cases}$$

4. 坐标轴的平移

设有两个坐标系$O-xyz$(旧)和$O'-x'y'z'$(新), 假设这两个坐标系的各轴对应平行且指向相同.

设点M关于坐标系$O-xyz$的坐标为$M(x,y,z)$,

点M关于坐标系$O'-x'y'z'$的坐标为$M(x',y',z')$,

新坐标系$O'-x'y'z'$的原点在旧坐标系$O-xyz$中的坐标为(a,b,c),

则 $\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y', \\ z = c + z'. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b, \\ z' = z - c. \end{cases}$

5. 空间两点间的距离

5. 空间两点间的距离

- 空间中点$M(x, y, z)$ 到原点的距离

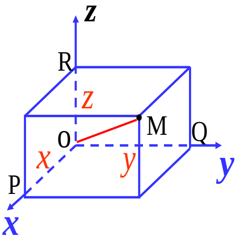
5. 空间两点间的距离

▶ 空间中点$M(x,y,z)$ 到原点的距离

点M 到原点O 的距离就是三棱之长分别为$|x|$, $|y|$, $|z|$的长方体的对角线长,

5. 空间两点间的距离

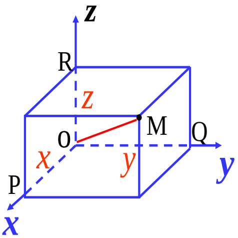
▶ 空间中点$M(x, y, z)$ 到原点的距离



点M 到原点O 的距离就是三棱之长分别为$|x|$, $|y|$, $|z|$的长方体的对角线长,

5. 空间两点间的距离

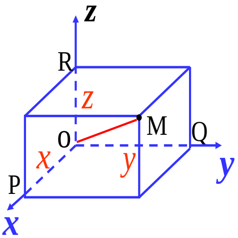
▶ 空间中点$M(x, y, z)$ 到原点的距离



点M 到原点O 的距离就是三棱之长分别为$|x|, |y|, |z|$的长方体的对角线长，

于是点M 到原点O 的距离为

5. 空间两点间的距离



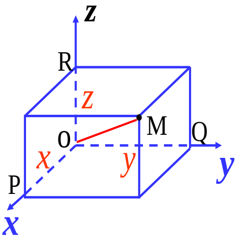
▶ 空间中点$M(x, y, z)$ 到原点的距离

点M 到原点O 的距离就是三棱之长分别为$|x|$, $|y|$, $|z|$的长方体的对角线长，

于是点M 到原点O 的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5. 空间两点间的距离

▶ 空间中点$M(x,y,z)$ 到原点的距离

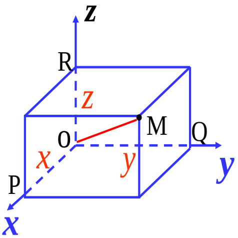


点M 到原点O 的距离就是三棱之长分别为$|x|$, $|y|$, $|z|$的长方体的对角线长，

于是点M 到原点O 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

▶ 空间两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离

5. 空间两点间的距离



▶ 空间中点 $M(x, y, z)$ 到原点的距离

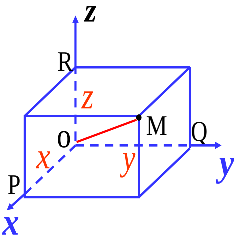
点 M 到原点 O 的距离就是三棱之长分别为 $|x|, |y|, |z|$ 的长方体的对角线长，

于是点 M 到原点 O 的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

▶ 空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离

若把坐标原点移到 M_1 处且保持轴的方向，则 M_1 是新系的坐标的坐标原点，而 M_2 关于新系的坐标为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

5. 空间两点间的距离



▶ 空间中点$M(x, y, z)$ 到原点的距离

点M 到原点O 的距离就是三棱之长分别为$|x|$, $|y|$, $|z|$的长方体的对角线长，

于是点M 到原点O 的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

▶ 空间两点$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离

若把坐标原点移到M_1 处且保持轴的方向，则M_1 是新系的坐标的坐标原点，而M_2 关于新系的坐标为$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

由此得所求距离为

$$|M_1M_2| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例1. 试在Ox 轴上求出一点P, 使它与点$M(4,1,2)$ 的距离为$\sqrt{30}$.

例1. 试在Ox 轴上求出一点P, 使它与点$M(4,1,2)$ 的距离为$\sqrt{30}$.

解: 设点P 的坐标为$(x,0,0)$,

例1. 试在Ox 轴上求出一点P, 使它与点$M(4,1,2)$ 的距离为$\sqrt{30}$.

解: 设点P 的坐标为$(x,0,0)$,

则有$|PM|=\sqrt{30}$,

即 $\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{30}$,

例1. 试在Ox 轴上求出一点P, 使它与点$M(4,1,2)$ 的距离为$\sqrt{30}$.

解: 设点P 的坐标为$(x,0,0)$,

则有$|PM| = \sqrt{30}$,

即 $\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{30}$,

$\therefore (x-4)^2 = 25$, $x = 9$ 或$x = -1$.

例1. 试在Ox 轴上求出一点P, 使它与点$M(4,1,2)$ 的距离为$\sqrt{30}$.

解: 设点P 的坐标为$(x,0,0)$,

则有$|PM|=\sqrt{30}$,

即 $\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{30}$,

$\therefore (x-4)^2=25$, $x=9$ 或$x=-1$.

故所求点P 的坐标为$(9,0,0)$ 或$(-1,0,0)$.

例2. 求点$M(4,-3,5)$到原点及各坐标轴的距离.

例2. 求点$M(4,-3,5)$到原点及各坐标轴的距离.

解: 过点M分别作x,y,z轴的垂线, 垂足分别为点A,B,C, 则

它们的坐标为

例2. 求点$M(4,-3,5)$到原点及各坐标轴的距离.

解: 过点M分别作x,y,z轴的垂线, 垂足分别为点A,B,C, 则它们的坐标为

$$A(4,0,0),\quad B(0,-3,0),\quad C(0,0,5),$$

例2. 求点$M(4,-3,5)$到原点及各坐标轴的距离.

解: 过点M分别作x,y,z轴的垂线, 垂足分别为点A,B,C, 则它们的坐标为

$$A(4,0,0),\quad B(0,-3,0),\quad C(0,0,5),$$

于是$|MO|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

例2. 求点$M(4,-3,5)$到原点及各坐标轴的距离.

解: 过点M分别作x,y,z轴的垂线, 垂足分别为点A,B,C, 则它们的坐标为

$$A(4,0,0),\quad B(0,-3,0),\quad C(0,0,5),$$

于是$|MO|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

$$|MA|=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34},$$

例2. 求点$M(4,-3,5)$到原点及各坐标轴的距离.

解: 过点M分别作x,y,z轴的垂线, 垂足分别为点A,B,C, 则它们的坐标为

$$A(4,0,0),\quad B(0,-3,0),\quad C(0,0,5),$$

于是$|MO|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

$$|MA|=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34},$$

$$|MB|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41},$$

例2. 求点$M(4,-3,5)$到原点及各坐标轴的距离.

解: 过点M分别作x,y,z轴的垂线, 垂足分别为点A,B,C, 则它们的坐标为

$$A(4,0,0),\quad B(0,-3,0),\quad C(0,0,5),$$

于是$|MO|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

$$|MA|=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34},$$

$$|MB|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41},$$

$$|MC|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$$

二、向量的坐标表示

二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

- 基向量(或基本坐标向量)

二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

▶ **基向量(或基本坐标向量)** 在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量，

二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

- **基向量(或基本坐标向量)** 在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量，分别记为$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

- **基向量(或基本坐标向量)** 在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量，分别记为$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- **向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式**

二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

- **基向量(或基本坐标向量)** 在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量，分别记为$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

- **向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式**

设$M(x, y, z)$为空间一点，作向量$\overrightarrow{OM}$，点A、B、C 分别为点$M(x, y, z)$ 在x轴上、y轴上、z轴上的投影点，

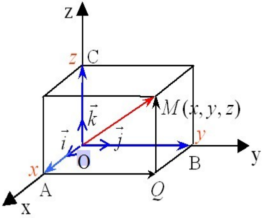
二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

- **基向量(或基本坐标向量)** 在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量，分别记为$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

- **向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式**

设$M(x,y,z)$为空间一点，作向量$\overrightarrow{OM}$，点A、B、C 分别为点$M(x,y,z)$ 在x轴上、y轴上、z轴上的投影点，



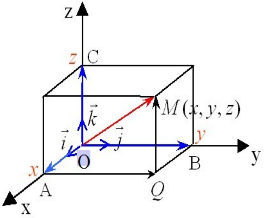
二、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

- **基向量(或基本坐标向量)** 在空间直角坐标系中，与x轴、y轴、z轴的正向同向的单位向量，分别记为$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

- **向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式**

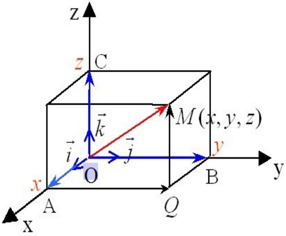
设$M(x,y,z)$为空间一点，作向量$\overrightarrow{OM}$，点A、B、C 分别为点$M(x,y,z)$ 在x轴上、y轴上、z轴上的投影点，

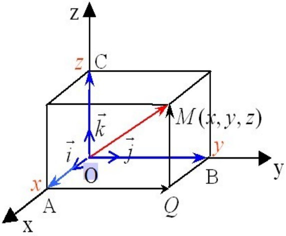


则有 $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}$,

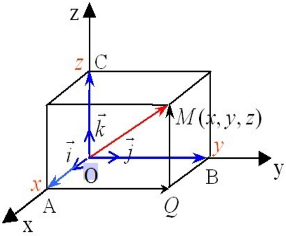
$\overrightarrow{OB}=y\vec{j}$,

$\overrightarrow{OC}=z\vec{k}$.


z
C
z
$\vec{k}$
$M(x, y, z)$
$\vec{i}$
$\vec{j}$
y
y
O
B
x
A
Q
x

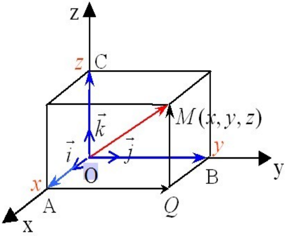


由向量的加法得



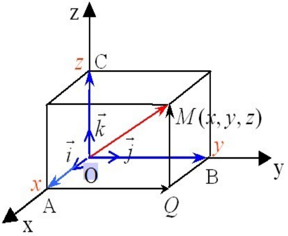
由向量的加法得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QM}$$



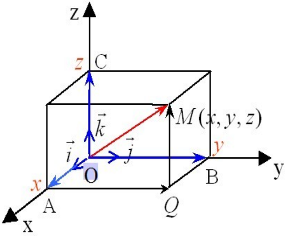
由向量的加法得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QM}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$



由向量的加法得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

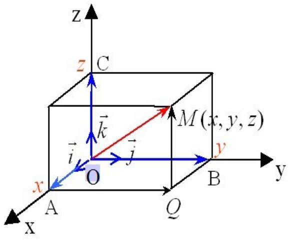


由向量的加法得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QM}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

上式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式，记作$\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$

或$\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$，其中$(x, y, z)$称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标.



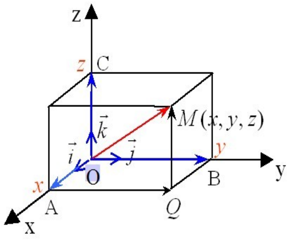
由向量的加法得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QM}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

上式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式, 记作$\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$

或$\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 其中$(x, y, z)$称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标.

$$\text{点}M \longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



由向量的加法得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QM}\\ &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\ &= x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.\end{aligned}$$

上式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式，记作$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$

或$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，其中$(x,y,z)$称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标.

$$\text{点}M \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\longleftrightarrow \text{三元有序数组}(x,y,z)$$

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，

一般地, 设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x, a_y, a_z, 将向量$\vec{a}$ 平移, 使其起点移到坐标原点O, 因平移后的向量与原向量相等, 故它在坐标轴上的投影仍为a_x, a_y, a_z,

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，将向量$\vec{a}$ 平移，使其起点移到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z,从而向量$\vec{a}$的坐标表示式为

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，将向量$\vec{a}$ 平移，使其起点移到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z，从而向量$\vec{a}$的坐标表示式为

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

或 $$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

一般地, 设 向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x, a_y, a_z, 将向量 $\vec{a}$ 平移, 使其起点移到坐标原点O, 因平移后 的向量与原向量相等, 故它在坐标轴上的投影仍为a_x, a_y, a_z,从而向量$\vec{a}$的坐标表示式为

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

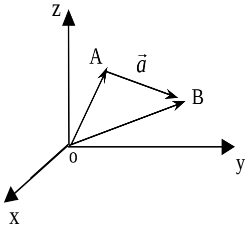
或 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$

- 以$A(x_1, y_1, z_1)$为起点,$B(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量, 有

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，将向量$\vec{a}$ 平移，使其起点移到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z，从而向量$\vec{a}$的坐标表示式为

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

或 $$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

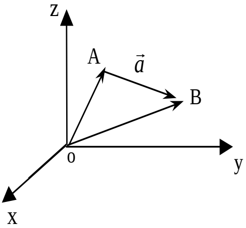


- 以$A(x_1, y_1, z_1)$为起点，$B(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量，有

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，将向量$\vec{a}$平移，使其起点移到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z，从而向量$\vec{a}$的坐标表示式为

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

或 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.



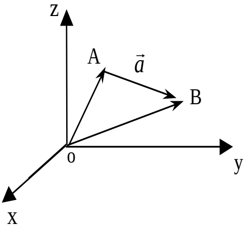
- 以$A(x_1, y_1, z_1)$为起点，$B(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量，有

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，将向量$\vec{a}$ 平移，使其起点移到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z,从而向量$\vec{a}$的坐标表示式为

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

或 $$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$



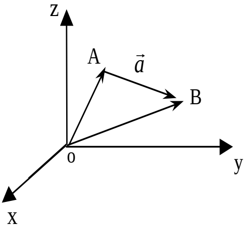
- 以$A(x_1, y_1, z_1)$为起点，$B(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量，有

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，将向量$\vec{a}$平移，使其起点移到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z，从而**向量$\vec{a}$的坐标表示式为**

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

或 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$



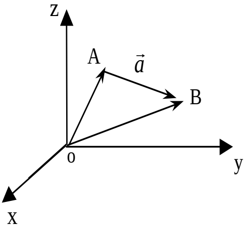
- 以$A(x_1, y_1, z_1)$为起点，$B(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量，有

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

一般地，设向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，将向量$\vec{a}$ 平移，使其起点移到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z,从而向量$\vec{a}$的坐标表示式为

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

或 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$



- 以$A(x_1, y_1, z_1)$为起点，$B(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量，有

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

于是，$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$

2. 向量的模和方向余弦

2. 向量的模和方向余弦

- 设非零向量$\vec{a}$ 起点为坐标原点, 终点为$M(a_x, a_y, a_z)$,

2. 向量的模和方向余弦

- 设非零向量$\vec{a}$ 起点为坐标原点, 终点为$M(a_x, a_y, a_z)$,

则 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,

2. 向量的模和方向余弦

- 设非零向量$\vec{a}$ 起点为坐标原点, 终点为$M(a_x, a_y, a_z)$,

则 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

2. 向量的模和方向余弦

- 设非零向量$\vec{a}$ 起点为坐标原点, 终点为$M(a_x, a_y, a_z)$,

则 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\quad |\vec{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

- $\vec{a}$的方向可由该向量与三坐标轴正向的夹角α, β, γ 或这三个角的余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 来表示(其中$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$).

2. 向量的模和方向余弦

- 设非零向量$\vec{a}$ 起点为坐标原点, 终点为$M(a_x, a_y, a_z)$,

则 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

- $\vec{a}$的方向可由该向量与三坐标轴正向的夹角α, β, γ 或这三个角的余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 来表示(其中$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$).

  - α, β, γ称为向量$\vec{a}$的**方向角**;

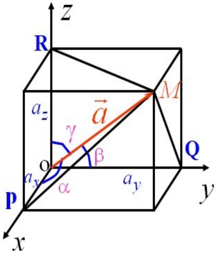
2. 向量的模和方向余弦

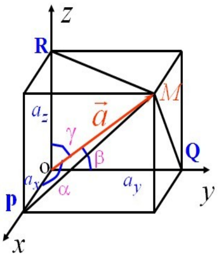
- 设非零向量$\vec{a}$ 起点为坐标原点, 终点为$M(a_x, a_y, a_z)$,

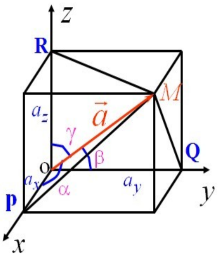
则 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

- $\vec{a}$的方向可由该向量与三坐标轴正向的夹角α, β, γ 或这三个角的余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 来表示(其中$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$).

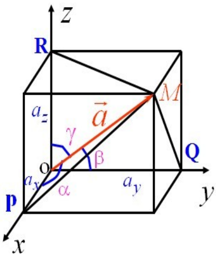
  - α, β, γ称为向量$\vec{a}$的**方向角**;
  - $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$称为向量$\vec{a}$的**方向余弦**.


z
R
M
$\vec{a}$
a_z
γ
β
Q
O
a_x
α
a_y
p
y
x


z
R
M
$\vec{a}$
a_z
γ
β
Q
O
a_x
α
a_y
p
y
x

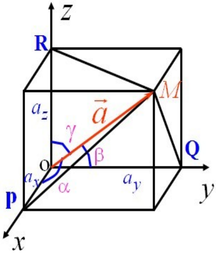


$\because \triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$是直角三角形,



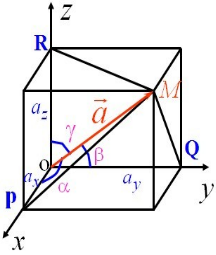
$\because \triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$是直角三角形,

$$\therefore \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}. \end{cases}$$



$\because \triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$是直角三角形,

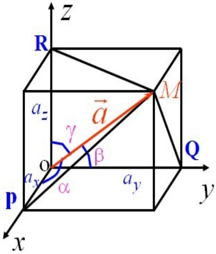
$$\therefore \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a_x &= |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_y &= |\vec{a}|\cos\beta, \\ a_z &= |\vec{a}|\cos\gamma. \end{aligned} \right.$$



$\because \triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$是直角三角形,

$$\therefore \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma. \end{cases}$$

且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

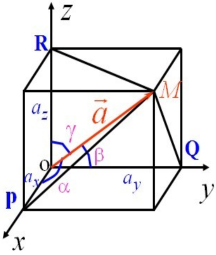


$\because \triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$是直角三角形,

$$\therefore \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma. \end{cases}$$

且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

$\because$ 向量$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$的模等于1,



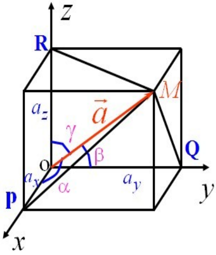
$\because \triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$是直角三角形，

$$\therefore \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma. \end{cases}$$

且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

$\because$ 向量$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$的模等于1，

$\therefore$ 由方向余弦所组成的向量是单位向量，即



$\because \triangle OPM, \triangle OQM, \triangle ORM$是直角三角形,

$$\therefore \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma. \end{cases}$$

且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

$\because$ 向量$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$的模等于1,

$\therefore$ 由方向余弦所组成的向量是单位向量，即

$$\vec{a}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

例1. 已知$\vec{a}=\{2,3,-1\}$, 求其方向余弦和与$\vec{a}$同向的单位向量$\vec{a}_0$.

例2. 已知$M_1(1,-2,3)$、$M_2(4,2,-1)$, 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

例1. 已知$\vec{a}=\{2,3,-1\}$, 求其方向余弦和与$\vec{a}$同向的单位向量$\vec{a}_0$.

例2. 已知$M_1(1,-2,3)$、$M_2(4,2,-1)$, 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

解: 1. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

例1. 已知$\vec{a}=\{2,3,-1\}$, 求其方向余弦和与$\vec{a}$同向的单位向量$\vec{a}_0$.

例2. 已知$M_1(1,-2,3)$、$M_2(4,2,-1)$, 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

解: 1. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

$$于是\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{14}}.$$

例1. 已知$\vec{a}=\{2,3,-1\}$, 求其方向余弦和与$\vec{a}$同向的单位向量$\vec{a}_0$.

例2. 已知$M_1(1,-2,3)$、$M_2(4,2,-1)$, 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

解: 1. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

于是 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}.$

故 $\vec{a}_0=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right\}.$

例1. 已知$\vec{a}=\{2,3,-1\}$, 求其方向余弦和与$\vec{a}$同向的单位向量$\vec{a}_0$.

例2. 已知$M_1(1,-2,3)$、$M_2(4,2,-1)$, 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

解: 1. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

于是 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}$.

故 $\vec{a}_0=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right\}$.

2. 由题知 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{4-1,2-(-2),-1-3\}=\{3,4,-4\}$,

例1. 已知$\vec{a}=\{2,3,-1\}$, 求其方向余弦和与$\vec{a}$同向的单位向量$\vec{a}_0$.

例2. 已知$M_1(1,-2,3)$、$M_2(4,2,-1)$, 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

解: 1. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

于是 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}$.

故 $\vec{a}_0=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right\}$.

2. 由题知 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{4-1,2-(-2),-1-3\}=\{3,4,-4\}$,

所以 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{3^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$,

例1. 已知$\vec{a}=\{2,3,-1\}$, 求其方向余弦和与$\vec{a}$同向的单位向量$\vec{a}_0$.

例2. 已知$M_1(1,-2,3)$、$M_2(4,2,-1)$, 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

解: 1. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

于是 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}.$

故 $\vec{a}_0=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right\}.$

2. 由题知 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{4-1,2-(-2),-1-3\}=\{3,4,-4\}$,

所以 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{3^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$,

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{41}},\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{41}},\quad \cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{41}}.$$

例3. 设向量$\vec{a}$的两个方向余弦$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, 又$|\vec{a}| = 6$, 求向量$\vec{a}$的坐标.

例3. 设向量$\vec{a}$的两个方向余弦$\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, 又$|\vec{a}|=6$, 求向量$\vec{a}$的坐标.

解: $\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$,

例3. 设向量$\vec{a}$的两个方向余弦$\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, 又$|\vec{a}| = 6$,

求向量$\vec{a}$的坐标.

解: $\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \pm\frac{2}{3}.$$

例3. 设向量$\vec{a}$的两个方向余弦$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, 又$|\vec{a}| = 6$, 求向量$\vec{a}$的坐标.

解: $\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$,

$$\therefore \cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \pm\frac{2}{3}.$$

于是 $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 6 \times \dfrac{1}{3} = 2,$

例3. 设向量$\vec{a}$的两个方向余弦$\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, 又$|\vec{a}|=6$, 求向量$\vec{a}$的坐标.

解: $\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\ \cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},$

$$\therefore \cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\frac{2}{3}.$$

于是 $a_x=|\vec{a}|\cos\alpha=6\times\frac{1}{3}=2,$

$$a_y=|\vec{a}|\cos\beta=6\times\frac{2}{3}=4,$$

例3. 设向量$\vec{a}$的两个方向余弦$\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, 又$|\vec{a}|=6$, 求向量$\vec{a}$的坐标.

解: $\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$,

$$\therefore \cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\frac{2}{3}.$$

于是

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha=6\times\frac{1}{3}=2,$$

$$a_y=|\vec{a}|\cos\beta=6\times\frac{2}{3}=4,$$

$$a_z=|\vec{a}|\cos\gamma=6\times(\pm\frac{2}{3})=\pm4,$$

例3. 设向量$\vec{a}$的两个方向余弦$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$, 又$|\vec{a}|=6$, 求向量$\vec{a}$的坐标.

解: $\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$,

$$\therefore \cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\frac{2}{3}.$$

于是 $$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha=6\times\frac{1}{3}=2,$$

$$a_y=|\vec{a}|\cos\beta=6\times\frac{2}{3}=4,$$

$$a_z=|\vec{a}|\cos\gamma=6\times(\pm\frac{2}{3})=\pm4,$$

$\therefore \vec{a}=\{2,4,4\}$ 或 $\vec{a}=\{2,4,-4\}$.

三、向量运算的坐标表示

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,

即 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

即 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$;

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

即 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$;

  或者 $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y\ a_z \pm b_z\}$;

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

即 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$;

  或者 $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y\ a_z \pm b_z\}$;

- $\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$.

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

即 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$;

  或者 $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y\ a_z \pm b_z\}$;

- $\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$.

  或者 $\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

即 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$;

  或者 $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y\ a_z \pm b_z\}$;

- $\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$.

  或者 $\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

结论:

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,

即 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$;

  或者 $\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y\ a_z\pm b_z\}$;

- $\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$.

  或者 $\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

结论: 两个非零向量$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件$\vec{b}=\lambda\vec{a}$, 可以写成

三、向量运算的坐标表示

1. 向量的加减法与数乘的坐标表示

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,

即 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$;

  或者 $\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y\ a_z\pm b_z\}$;

- $\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$.

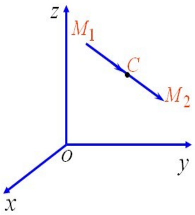
  或者 $\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

结论: 两个非零向量$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件$\vec{b}=\lambda\vec{a}$, 可以写成

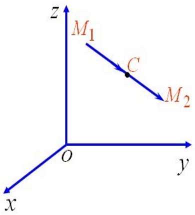
$$b_x=\lambda a_x, b_y=\lambda a_y, b_z=\lambda a_z \quad 或 \quad \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda.$$

例1. 设有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，点C将有向线段M_1M_2分成两部分，使$\dfrac{M_1C}{CM_2} = \lambda(\lambda \neq -1)$，求分点$C$的坐标.

例1. 设有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$，点C将有向线段M_1M_2分成两部分，使$\dfrac{M_1C}{CM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$，求分点$C$的坐标.

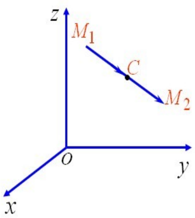


例1. 设有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$, 点C将有向线段M_1M_2分成两部分, 使$\dfrac{M_1C}{CM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$, 求分点$C$的坐标.



解: 设分点C的坐标为(x,y,z), 则有

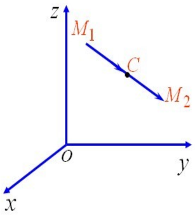
例1. 设有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$, 点C将有向线段M_1M_2分成两部分, 使$\dfrac{M_1C}{CM_2} = \lambda(\lambda \neq -1)$, 求分点$C$的坐标.



解: 设分点C的坐标为(x, y, z), 则有

$$\overrightarrow{M_1C} = \lambda\overrightarrow{CM_2},$$ 即

例1. 设有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$, 点C将有向线段M_1M_2分成两部分, 使$\dfrac{M_1C}{CM_2} = \lambda(\lambda \neq -1)$, 求分点$C$的坐标.

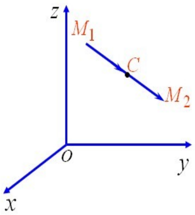


解: 设分点C的坐标为(x, y, z), 则有

$$\overrightarrow{M_1C} = \lambda\overrightarrow{CM_2}, \quad \text{即}$$

$$\{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$$

例1. 设有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$, 点C将有向线段M_1M_2 分成两部分, 使$\dfrac{M_1C}{CM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$, 求分点$C$的坐标.

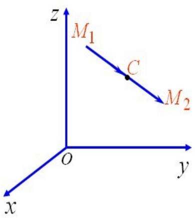


解: 设分点C的坐标为(x,y,z), 则有

$\overrightarrow{M_1C}=\lambda\overrightarrow{CM_2}$, 即

$$\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$$
$$=\lambda\{x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z\},$$

例1. 设有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，点C将有向线段M_1M_2分成两部分，使$\dfrac{M_1C}{CM_2} = \lambda(\lambda \neq -1)$，求分点$C$的坐标.



解：设分点C的坐标为(x, y, z)，则有

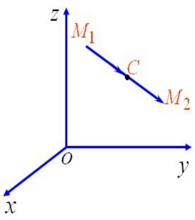
$$\overrightarrow{M_1C} = \lambda\overrightarrow{CM_2}, \quad \text{即}$$

$$\{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$$
$$= \lambda\{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\},$$

故有 $x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ \ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

例1. 设有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，点C将有向线段M_1M_2分成两部分，使$\dfrac{M_1C}{CM_2} = \lambda(\lambda \neq -1)$，求分点$C$的坐标.



解：设分点C的坐标为(x, y, z)，则有

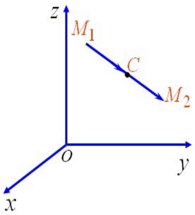
$\overrightarrow{M_1C} = \lambda\overrightarrow{CM_2}$， 即

$$\{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$$
$$= \lambda\{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\},$$

故有 $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$，$y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$，

$z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$，解之得分点$C$的坐标为：

例1. 设有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$, 点C将有向线段M_1M_2 分成两部分, 使$\dfrac{M_1C}{CM_2} = \lambda(\lambda \neq -1)$, 求分点$C$的坐标.



解: 设分点C的坐标为(x, y, z), 则有

$$\overrightarrow{M_1C} = \lambda\overrightarrow{CM_2},$$ 即

$$\{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$$
$$= \lambda\{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\},$$

故有 $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$,

$z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, 解之得分点$C$的坐标为:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

特别地，当$\lambda = 1$时，得中点C的坐标为:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

例2. 已知$\overrightarrow{AB} = \{-3, 0, 4\}, \overrightarrow{AC} = \{5, -2, -14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=15$知,

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\},\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5, |\overrightarrow{AC}|=15$知, $(\overrightarrow{AB})_0=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-\dfrac{3}{5},0,\dfrac{4}{5}\right\}$,

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\},\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5,|\overrightarrow{AC}|=15$知, $(\overrightarrow{AB})_0=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right\}$,

$$(\overrightarrow{AC})_0=\frac{1}{15}\overrightarrow{AC}=\left\{\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right\},$$

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\},\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5,|\overrightarrow{AC}|=15$知, $(\overrightarrow{AB})_0=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right\}$,

$$(\overrightarrow{AC})_0=\frac{1}{15}\overrightarrow{AC}=\left\{\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right\},$$

显然，以$(\overrightarrow{AB})_0,(\overrightarrow{AC})_0$为边的菱形的对角线向量为

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}, \overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5, |\overrightarrow{AC}|=15$知, $(\overrightarrow{AB})_0=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right\}$,

$$(\overrightarrow{AC})_0=\frac{1}{15}\overrightarrow{AC}=\left\{\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right\},$$

显然，以$(\overrightarrow{AB})_0, (\overrightarrow{AC})_0$为边的菱形的对角线向量为

$$\vec{c}=(\overrightarrow{AB})_0+(\overrightarrow{AC})_0=\left\{-\frac{4}{15},-\frac{2}{15},-\frac{2}{15}\right\},$$

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=15$知, $(\overrightarrow{AB})_0=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-\dfrac{3}{5},0,\dfrac{4}{5}\right\}$,

$$(\overrightarrow{AC})_0=\frac{1}{15}\overrightarrow{AC}=\left\{\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right\},$$

显然，以$(\overrightarrow{AB})_0,(\overrightarrow{AC})_0$为边的菱形的对角线向量为

$$\vec{c}=(\overrightarrow{AB})_0+(\overrightarrow{AC})_0=\left\{-\frac{4}{15},-\frac{2}{15},-\frac{2}{15}\right\},$$

它平分$\angle BAC$,

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=15$知, $(\overrightarrow{AB})_0=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-\dfrac{3}{5},0,\dfrac{4}{5}\right\}$,

$$(\overrightarrow{AC})_0=\frac{1}{15}\overrightarrow{AC}=\left\{\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right\},$$

显然，以$(\overrightarrow{AB})_0,(\overrightarrow{AC})_0$为边的菱形的对角线向量为

$$\vec{c}=(\overrightarrow{AB})_0+(\overrightarrow{AC})_0=\left\{-\frac{4}{15},-\frac{2}{15},-\frac{2}{15}\right\},$$

它平分$\angle BAC$，故所求的单位向量为

例2. 已知$\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$, 求等分$\angle BAC$的单位向量.

解: 由$|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=15$知, $(\overrightarrow{AB})_0=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left\{-\dfrac{3}{5},0,\dfrac{4}{5}\right\}$,

$$(\overrightarrow{AC})_0=\frac{1}{15}\overrightarrow{AC}=\left\{\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right\},$$

显然，以$(\overrightarrow{AB})_0,(\overrightarrow{AC})_0$为边的菱形的对角线向量为

$$\vec{c}=(\overrightarrow{AB})_0+(\overrightarrow{AC})_0=\left\{-\frac{4}{15},-\frac{2}{15},-\frac{2}{15}\right\},$$

它平分$\angle BAC$，故所求的单位向量为

$$\vec{c}_0=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}.$$

2. 数量积的坐标表示

2. 数量积的坐标表示

设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, 则

2. 数量积的坐标表示

设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

2. 数量积的坐标表示

设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, 则

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\
&= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k} \\
&\quad + a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k} \\
&\quad + a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k} \\
&= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.
\end{aligned}
$$

2. 数量积的坐标表示

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}\\&\quad+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}\\&\quad+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

即若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

2. 数量积的坐标表示

设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, 则

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\
&= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} \\
&\quad + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} \\
&\quad + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} \\
&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .
\end{aligned}
$$

即若 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示

利用两向量数量积的坐标表示式，可得到以下重要结果：

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示

利用两向量数量积的坐标表示式，可得到以下重要结果：

若$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$，则

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示

利用两向量数量积的坐标表示式，可得到以下重要结果：

若$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示

利用两向量数量积的坐标表示式，可得到以下重要结果：

若$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示

利用两向量数量积的坐标表示式，可得到以下重要结果：

若$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

例3. 已知$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, 求$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

例3. 已知$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, 求$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

解: 由已知知$\vec{a}=\{1,-1,1\}$, $\vec{b}=\{3,2,-2\}$, 故

例3. 已知$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, 求$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

解: 由已知知$\vec{a}=\{1,-1,1\}$, $\vec{b}=\{3,2,-2\}$, 故

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 3+(-1)\times 2+1\times(-2)=-1,$$ 且

例3. 已知$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, 求$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

解: 由已知知$\vec{a}=\{1,-1,1\}$, $\vec{b}=\{3,2,-2\}$, 故

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 3+(-1)\times 2+1\times(-2)=-1$, 且

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

例3. 已知$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, 求$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

解: 由已知知$\vec{a}=\{1,-1,1\}$, $\vec{b}=\{3,2,-2\}$, 故

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 3+(-1)\times 2+1\times(-2)=-1$, 且

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}$$

例3. 已知$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, 求$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

解: 由已知知$\vec{a}=\{1,-1,1\}$, $\vec{b}=\{3,2,-2\}$, 故

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+(-1)\times2+1\times(-2)=-1$, 且

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{51}}.$$

例4. 求在Oxy平面上与向量$\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$垂直的单位向量.

例4. 求在Oxy平面上与向量$\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$垂直的单位向量.

解: $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$, 设所求的单位向量为$\vec{b} = \{x, y, 0\}$,

例4. 求在Oxy平面上与向量$\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$垂直的单位向量.

解: $\vec{a}=\{-4,3,7\}$, 设所求的单位向量为$\vec{b}=\{x,y,0\}$,

则有 $|\vec{b}|=1$ 且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,

例4. 求在Oxy平面上与向量$\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$垂直的单位向量.

解: $\vec{a}=\{-4,3,7\}$, 设所求的单位向量为$\vec{b}=\{x,y,0\}$,

则有 $|\vec{b}|=1$ 且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,

$$\text{从而得}\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1,\\ -4x+3y=0.\end{cases}$$

例4. 求在Oxy平面上与向量$\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$垂直的单位向量.

解: $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$, 设所求的单位向量为$\vec{b} = \{x, y, 0\}$,

则有 $|\vec{b}| = 1$ 且$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

从而得$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1, \\ -4x + 3y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{3}{5}, \\ y = \pm\dfrac{4}{5}. \end{cases}$

例4. 求在Oxy平面上与向量$\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$垂直的单位向量.

解: $\vec{a}=\{-4,3,7\}$, 设所求的单位向量为$\vec{b}=\{x,y,0\}$,

则有 $|\vec{b}|=1$ 且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,

从而得$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1,\\ -4x+3y=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{3}{5},\\ y=\pm\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

$\therefore\ \vec{b}=\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\}$, 或$\vec{b}=\{-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\}$.

4. 向量积的坐标表示

4. 向量积的坐标表示

设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

4. 向量积的坐标表示

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

4. 向量积的坐标表示

设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, 则

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\
&= a_xb_x\vec{i} \times \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \times \vec{j} + a_xb_z\vec{i} \times \vec{k} \\
&\quad + a_yb_x\vec{j} \times \vec{i} + a_yb_y\vec{j} \times \vec{j} + a_yb_z\vec{j} \times \vec{k} \\
&\quad + a_zb_x\vec{k} \times \vec{i} + a_zb_y\vec{k} \times \vec{j} + a_zb_z\vec{k} \times \vec{k}
\end{aligned}
$$

4. 向量积的坐标表示

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) \\
&= a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k} \\
&\quad +a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k} \\
&\quad +a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k} \\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j} \\
&\qquad +(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k},
\end{aligned}$$

4. 向量积的坐标表示

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) \\
&= a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k} \\
&\quad +a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k} \\
&\quad +a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k} \\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j} \\
&\qquad +(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}, \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}
\end{aligned}
$$

即若 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

即若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

即若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

结论: 若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$为两个非零向量, 则

即若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

结论: 若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$为两个非零向量, 则

$$\vec{a}//\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

即若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

结论: 若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$为两个非零向量, 则

$$\vec{a}//\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

当b_x,b_y,b_z中出现零时, 约定相应的分子也为零, 例如:

即若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

结论: 若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$为两个非零向量, 则

$$\vec{a}//\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

当b_x,b_y,b_z中出现零时, 约定相应的分子也为零, 例如:

$$\frac{a_x}{0}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\quad\text{理解为}$$

即若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

结论: 若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$为两个非零向量, 则

$$\vec{a}//\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

当b_x,b_y,b_z中出现零时, 约定相应的分子也为零, 例如:

$$\frac{a_x}{0}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\quad\text{理解为}\ a_x=0,\quad\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

例5. 求以$A(2,-2,0),B(-1,0,1),C(1,1,2)$为顶点的三角形的面积.

例5. 求以$A(2,-2,0), B(-1,0,1), C(1,1,2)$为顶点的三角形的面积.

解：因为$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$,

例5. 求以$A(2,-2,0), B(-1,0,1), C(1,1,2)$为顶点的三角形的面积.

解：因为$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$,

且 $\overrightarrow{AB}=\{-3,2,1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-1,3,2\}$, 于是

例5. 求以$A(2,-2,0),B(-1,0,1),C(1,1,2)$为顶点的三角形的面积.

解：因为$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$,

且 $\overrightarrow{AB}=\{-3,2,1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-1,3,2\}$, 于是

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

例5. 求以$A(2,-2,0), B(-1,0,1), C(1,1,2)$为顶点的三角形的面积.

解：因为$\triangle ABC$的面积$S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$,

且 $\overrightarrow{AB} = \{-3,2,1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1,3,2\}$, 于是

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k} = \{1,5,-7\},$$

例5. 求以$A(2,-2,0), B(-1,0,1), C(1,1,2)$为顶点的三角形的面积.

解：因为$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$,

且 $\overrightarrow{AB}=\{-3,2,1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-1,3,2\}$, 于是

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}=\{1,5,-7\},$$

所以, $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+5^2+(-7)^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}.$

例5. 求以$A(2,-2,0)$, $B(-1,0,1)$, $C(1,1,2)$为顶点的三角形的面积.

解: 因为$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$,

且 $\overrightarrow{AB}=\{-3,2,1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-1,3,2\}$, 于是

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&2&1\\-1&3&2\end{vmatrix}=\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}=\{1,5,-7\},$$

所以, $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+5^2+(-7)^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}.$

问: 如何求AB边上的高h?

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

解: 取 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}$,

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

解: 取 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}$, 则 $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{i}$.

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

解: 取 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}$, 则 $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{i}$.

$$\text{于是 } \vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\{0,8,-6\},$$

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

解: 取 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}$, 则 $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{i}$.

$$\text{于是 } \vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 8\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,8,-6\},$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+8^2+(-6)^2}=10,$$

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

解：取 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}$, 则 $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{i}$.

于是 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\{0,8,-6\}$,

$$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+8^2+(-6)^2}=10,$$

则与$\vec{c}$ 平行的单位向量有两个：

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

解：取 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}$, 则 $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{i}$.

于是 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 8\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,8,-6\}$,

$$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+8^2+(-6)^2}=10,$$

则与$\vec{c}$ 平行的单位向量有两个：

$$\vec{c}_0=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\{0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\},\ (\ \vec{c}_0 \text{ 与}\vec{c}\text{ 同向}),$$

例6. 求同时垂直于向量$\vec{a}=\{3,6,8\}$和Ox轴的单位向量.

解: 取 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}$, 则 $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{i}$.

于是 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 8\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,8,-6\}$,

$$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+8^2+(-6)^2}=10,$$

则与$\vec{c}$平行的单位向量有两个:

$$\vec{c}_0=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\{0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\},\ (\ \vec{c}_0 \text{ 与}\vec{c}\text{ 同向}),$$

或 $-\vec{c}_0=\{0,-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\}$, ($-\vec{c}_0$ 与$\vec{c}$ 反向).

5. 混合积的坐标表示

5. 混合积的坐标表示

设$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, 则

5. 混合积的坐标表示

设$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$, 则

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_y&b_z\\ c_y&c_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_x&b_z\\ c_x&c_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_x&b_y\\ c_x&c_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

5. 混合积的坐标表示

设$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$, 则

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

故 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}$

5. 混合积的坐标表示

设$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, 则

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

故 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

由此, 可以得到如下结论:

- 三向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面

由此，可以得到如下结论:

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面

$$\Longleftrightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0\ ;$$

由此，可以得到如下结论:

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面

$$\Longleftrightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0\ ;$$

- 四点$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$共面

由此，可以得到如下结论：

- 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面

$$\Longleftrightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0\ ;$$

- 四点$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$共面

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

例7. 已知不在一平面上的四点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体$ABCD$的体积.

例7. 已知不在一平面上的四点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体$ABCD$的体积.

解: 由立体几何知识可知, 四面体的体积V等于以向量$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体体积的六分之一,

例7. 已知不在一平面上的四点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体$ABCD$的体积.

解: 由立体几何知识可知, 四面体的体积V等于以向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体体积的六分之一,

因而 $V = \dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]|$

例7. 已知不在一平面上的四点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体$ABCD$的体积.

解: 由立体几何知识可知, 四面体的体积V等于以向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体体积的六分之一,

因而 $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]|$

$$= \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

例7. 已知不在一平面上的四点$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$, 求四面体$ABCD$的体积.

解: 由立体几何知识可知, 四面体的体积V等于以向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体体积的六分之一,

因而 $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]|$

$$= \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

上式的符号选择必须和行列式的符号一致.