贪心算法

东南大学计算机学院 方效林

本章内容

- 贪心算法要素
- 活动选择问题
- 哈夫曼编码问题
- 最小生成树问题
- 单源最短路径问题

贪心算法要素

- 贪心算法的基本思想
  - 求解最优化问题的算法包含一系列步骤
  - 每一步都有一组选择
  - 作出在当前看来最好的选择
  - 希望通过作出局部最优选择达到全局最优选择
  - 贪心算法不一定总产生最优解
  - 贪心算法是否产生优化解，需严格证明
- 贪心算法产生最优解的条件
  - 最优子结构
  - 贪心选择性

贪心算法要素

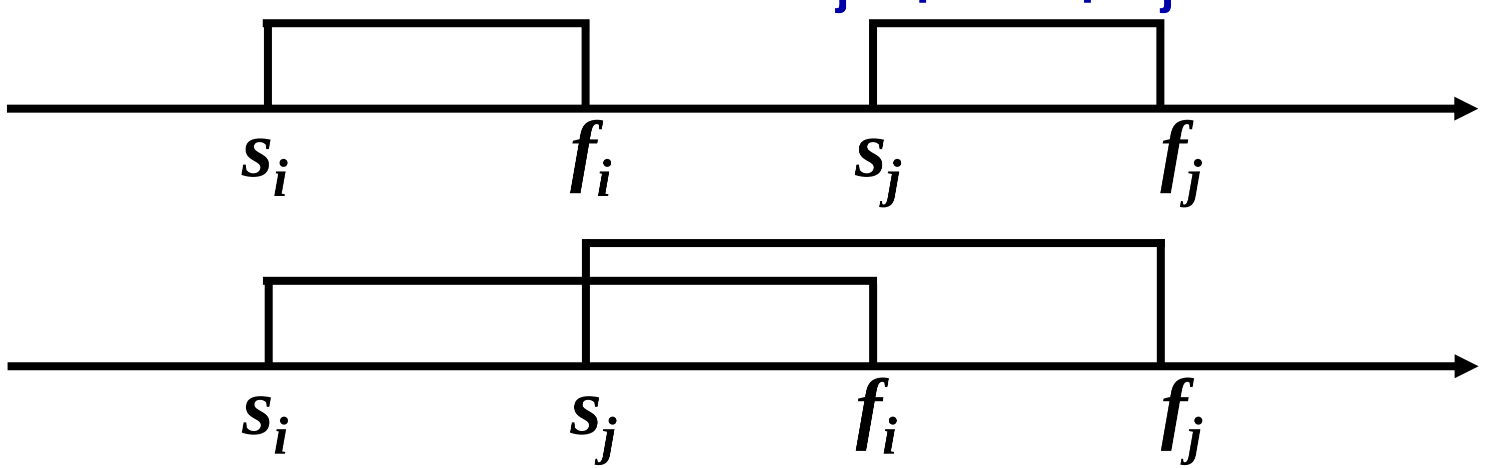
- 最优子结构
  - 当一个问题的最优解包含子问题的最优解时，称这个问题具有最优子结构
- 贪心选择性
  - 当一个问题的全局最优解可以通过局部最优解得到，称这个问题具有贪心选择性
  - 证明思路：
    - 假定首选元素不是贪心选择所要的元素，证明将首元素替换成贪心选择所需元素，依然得到最优解
    - 数学归纳法证明每一步均可通过贪心选择得到最优解

贪心算法要素

- 动态规划方法可用的条件
  - 最优子结构
  - 子问题重叠性
- 贪心算法产生最优解的条件
  - 最优子结构
  - 贪心选择性
- 适用贪心算法时，动态规划可能不适用
- 适用动态规划时，贪心算法可能不适用

活动选择问题

- 活动
  - S={1,2,…,n}是n个活动的集合，活动共用同一资源，同一时间只有一个活动使用。活动 i有起始时间 s_i，终止时间 f_i，$s_i \le f_i$，表示为$x_i=[s_i, f_i]$
- 相容活动
  - 活动i和j是相容的，若 $s_j \ge f_i$ 或 $s_i \ge f_j$



活动选择问题

- 问题定义
  - 输入：S={1, 2, …, n}，x_i=[s_i, f_i]，1 ≤ i ≤ n
  - 输出：S的最大相容集合
- 贪心思想
  - 为了选择更多活动，每次选择 f_i 最小的活动

活动选择问题

S按结束时间排序，$f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n$

```
Greedy-Activity-Selector(S, F)
    n = length(S);
    A = {1};
    j = 1;
    for  i=2  to  n  do
        if  s_i ≥ f_j  then
            A = A∪{i};
            j=i;
    return  A
```

$$T(n) = \theta(n)+\theta(nlogn) = \theta(nlogn)$$

活动选择问题

- 最优子结构性质
  - 设活动S={1, 2, …, n}已按结束时间递增排序，即 $f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n$，设A是包括活动 1 的最优解，则 A'=A-{1} 是 $S'=\{i \in S \mid s_i \ge f_1\}$的最优解。
  - 证明：
    - 显然A'中的活动是相容的，只需证A'是最大的。
    - 若不然，假设B'是最大的，且|B'| > |A'|。
    - 那么B={1}∪B'是最优解，但|B| =1+|B'| > 1+|A'|=|A|
    - 这与A是最大的（最优解）矛盾。

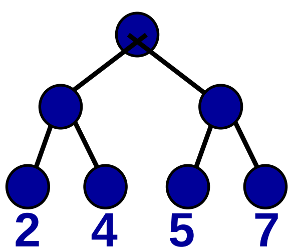
问题的最优解包含子问题的最优解

活动选择问题

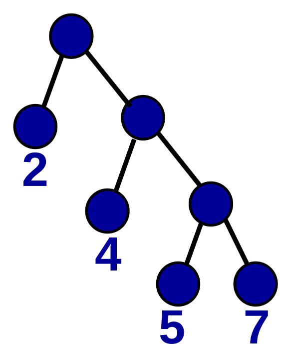
- 贪心选择性
  - 设活动S={1, 2, …, n}已按结束时间递增排序，即$f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n$。每次选结束时间最小的相容活动，可得最优解A。
  - 证明：
    - 设贪心最优解 A 也按结束时间递增排序，设其第一个活动为 k，第二个活动为 j
    - 若k=1，则成立
    - 若k≠1，由于 A 中活动相容，有$f_k \le s_j$，由于$f_1 \le f_k$，因此，可以用活动 1 代替活动 k

哈夫曼编码

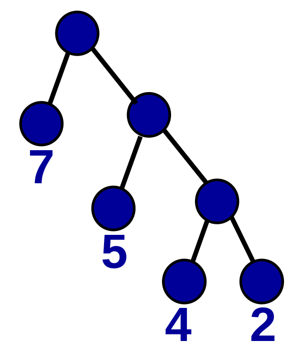
- 带权路径长度
  - 假设二叉树中每个叶结点有一个权值w_i，到根的路径长度为l_i，其他结点权值为0，则有n个叶子结点的树的带权路径长度为 $$WPL=\sum_{i=0}^{n-1} w_i * l_i$$



WPL=2*(2+4+5+7)=36



WPL=2+2*4+3*(5+7)=46



WPL=7+2*5+3*(4+2)=35

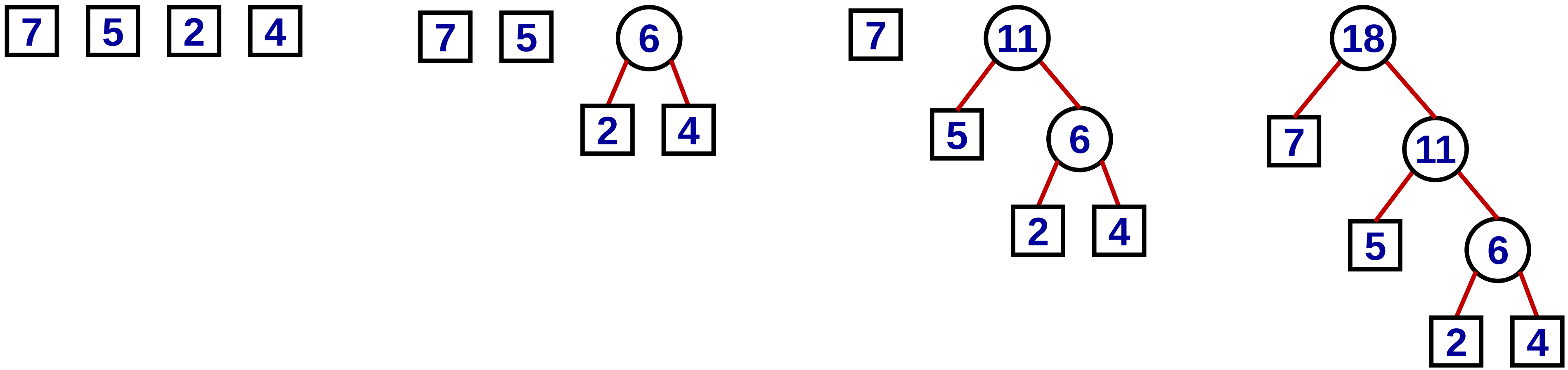
带权路径长度达到最小的二叉树即为Huffman树。
在Huffman树中，权值越大的结点离根越近。

哈夫曼编码

- 构造权值为$\{w_1,w_2, \ldots, w_n\}$的Huffman树
  - 构造n棵二叉树的森林$F=\{T_1,T_2, \ldots, T_n\}$，每棵二叉树$T_i$只有一个带权值为$w_i$的根结点
  - 重复以下步骤，直到只剩一棵树为止：
    - 1. 在F中选两棵根结点权值最小的二叉树，作为左、右子树构造一棵新的二叉树，新树的根结点权值等于其左、右子树根结点权值之和
    - 2. 在F中删除这两棵二叉树
    - 3. 把新构造的二叉树加入F

哈夫曼编码

F: {7} {5} {2} {4}　　F: {7} {5} {6}　　F: {7} {11}　　F: {18}



(a) 初始　　(b) 合并{2}{4}　　(b) 合并{2}{4}　　(b) 合并{7}{11}

哈夫曼编码

- **Huffman编码，进行数据压缩**
  - **计算机领域数据用二进制表示**
  - **若已统计出某文本中各字符出现的概率，可以用Huffman编码进行数据压缩**

$$概率=\frac{某字符出现次数}{总字符数}$$

哈夫曼编码

- Huffman编码，进行数据压缩
  - 假设某文本共有1000个字符，且只由 a, b, c, d, e 5种字符组成
    - 固定长度编码可将每个字符用3比特表示，整个文本要3*1000=3000比特表示，平均编码长度3比特

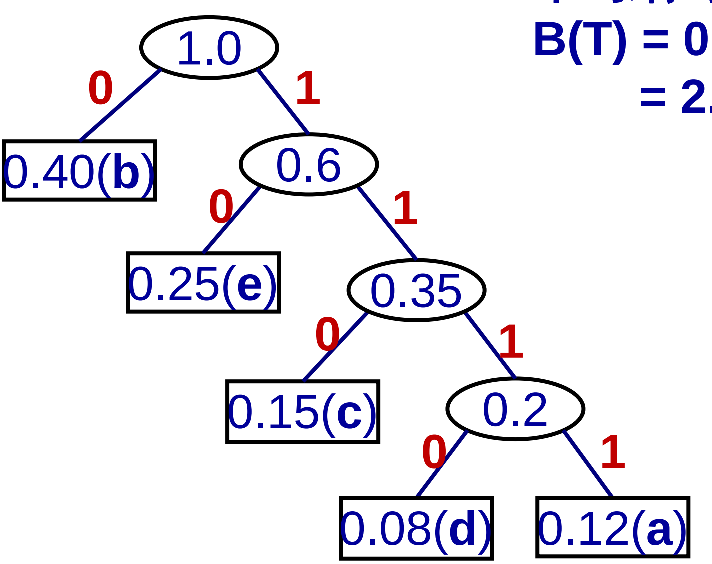
符号	定长编码
a	000
b	001
c	100
d	101
e	110

哈夫曼编码

- **Huffman编码，进行数据压缩**
  - **假设某文本共有1000个字符，且只由 a, b, c, d, e 5种字符组成**
    - **若已统计出各字符出现的概率分别为0.12, 0.40, 0.15, 0.08, 0.25，则整个文本可用2150比特表示**

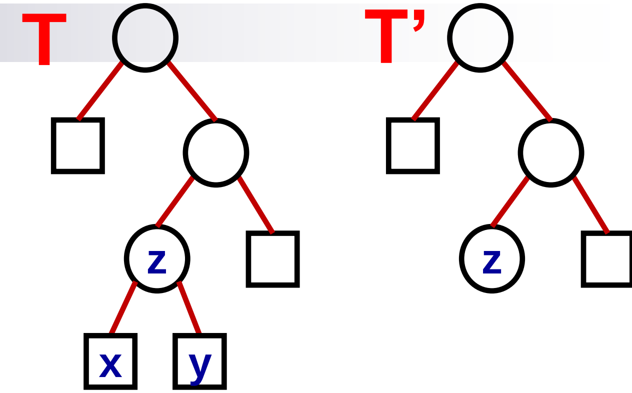
平均编码长度(带权路径长度)

B(T) = 0.12*4 + 0.08*4 + 0.15*3 + 0.25*2 + 0.40*1
= 2.15



符号	概率	Huffman编码
a	0.12	1111
b	0.40	0
c	0.15	110
d	0.08	1110
e	0.25	10

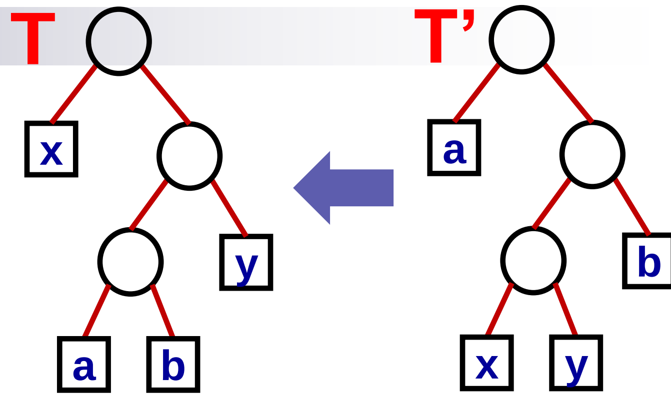
哈夫曼编码



- 最优子结构
  - T是字符表C一棵哈夫曼树。设字符x和y是T中任意两个相邻叶结点，z是其父结点，f(x)和f(y)是其频率。将z看作频率是f(z)=f(x)+f(y)的字符，T'=T-{x,y}是字母表C'=C- {x,y}∪{z}的哈夫曼树
  - 证明：
    - 若T'不是C'的哈夫曼树(最优解)，则必存在T''，使B(T'')<B(T')。因为z是C'中字符，它必为T''中的叶子。把结点x与y加入T''，作为z的子结点，得到C的哈夫曼树T'''，B(T''')=B(T'')+f(x)+f(y)<B(T')+f(x)+f(y)<B(T)。这与T是C的哈夫曼树矛盾。

问题的最优解包含子问题的最优解

哈夫曼编码



- 贪心选择性
  - 设C是字符表，字符x和y是C中频率最小的两个字符，则存在一棵哈夫曼树，使得x与y编码长度最长(即到根路径长度最长)
  - 证明：
    - 假设一哈夫曼树编码长度最长的不是x和y，是a和b，且f(a)≥f(x), f(b)≥f(y), 则L(a)≥L(x), L(b)≥L(y), L指编码长度，如左图所示。分别将a和x，b和y交换，得到
    - B(T') = B(T) -f(x)L(x)-f(y)L(y)-f(a)L(a)-f(b)L(b)
    - +f(x)L(a)+f(y)L(b)+f(a)L(x)+f(b)L(y)
    - =B(T)+(fx-fa)(La-Lx)+(fy-fb)(Lb-Ly) ≤ B(T)

优先选择频率最小的x和y结果并不会变坏

并查集

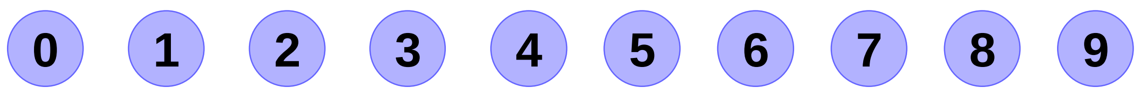
- 互不相交的集合 (等价类的划分)
  - 需要经常合并集合 (等价类的合并)
  - 需要经常查找元素属于哪个集合

并查集

- 并查集支持以下操作
  - 初始化UFSets(s): 将s中每个元素自成一个集合
  - 合并Union(Root1,Root2): 集合Root2并入Root1
  - 查找Find(x): 查找元素x属于哪个集合

并查集

- 用树表示集合
  - 初始化时，每个元素自成为一棵树



全集合S初始化时形成的森林

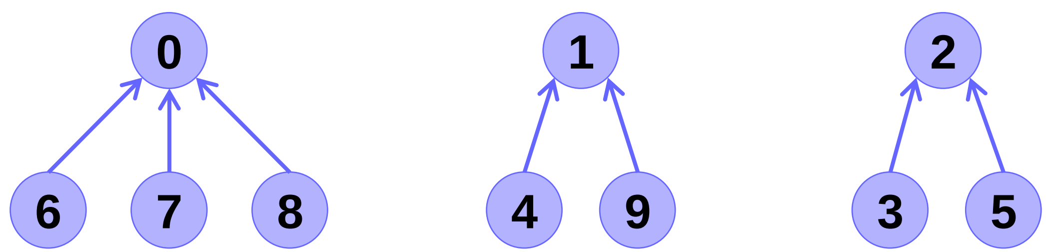
负数表示没有父结点
-1表示树中有1个结点
-2表示有2个结点，
以此类推

下标	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
父指针	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

初始化时形成的父指针表示

并查集

- 用树表示集合
  - 假设经过若干合并后有3个集合{0,6,7,8}，{1,4,9} {2,3,5}



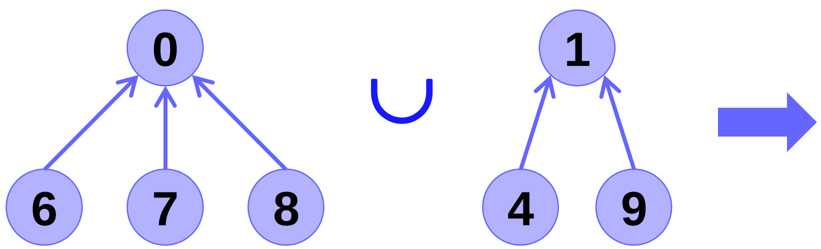
集合的树形表示

下标	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
父指针	-4	-3	-3	2	1	2	0	0	0	1

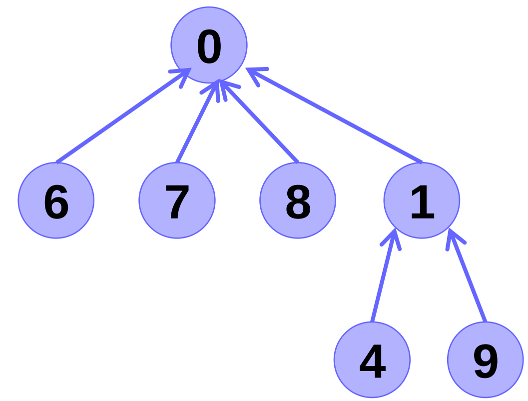
集合的父指针表示

并查集

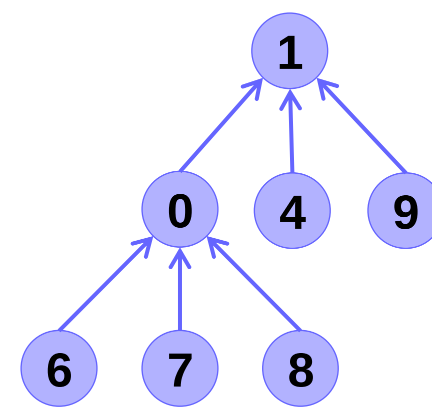
- 用树表示集合
  - 合并$s_1=\{0,6,7,8\}\cup s_2=\{1,4,9\}$
    - s_2作为s_1根的子树，或相反



合并集合



第一种合并方式



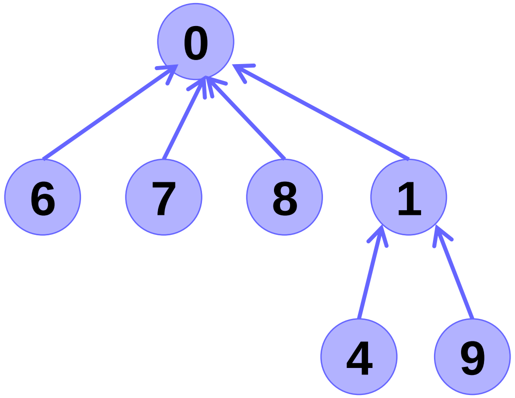
第二种合并方式

下标	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
父指针	-7	0	-3	2	0	2	0	0	0	0

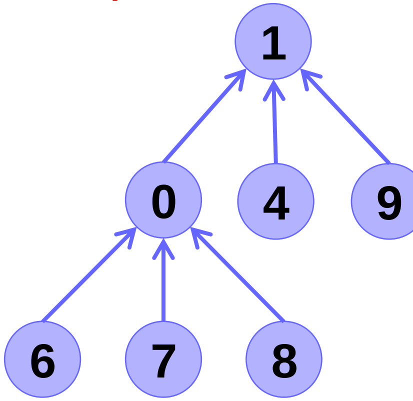
第一种合并的父指针表示

并查集

- 用树表示集合
  - 合并$s_1=\{0,6,7,8\} \cup s_2=\{1,4,9\}$
    - s_2作为s_1根的子树，或相反
    - 哪一种合并方式好？
    - 先介绍查找Find操作
      - Find(4)表示4所属集合，返回值0号结点(即根结点)
      - Find操作时间相当于结点到根路径长度



第一种合并方式



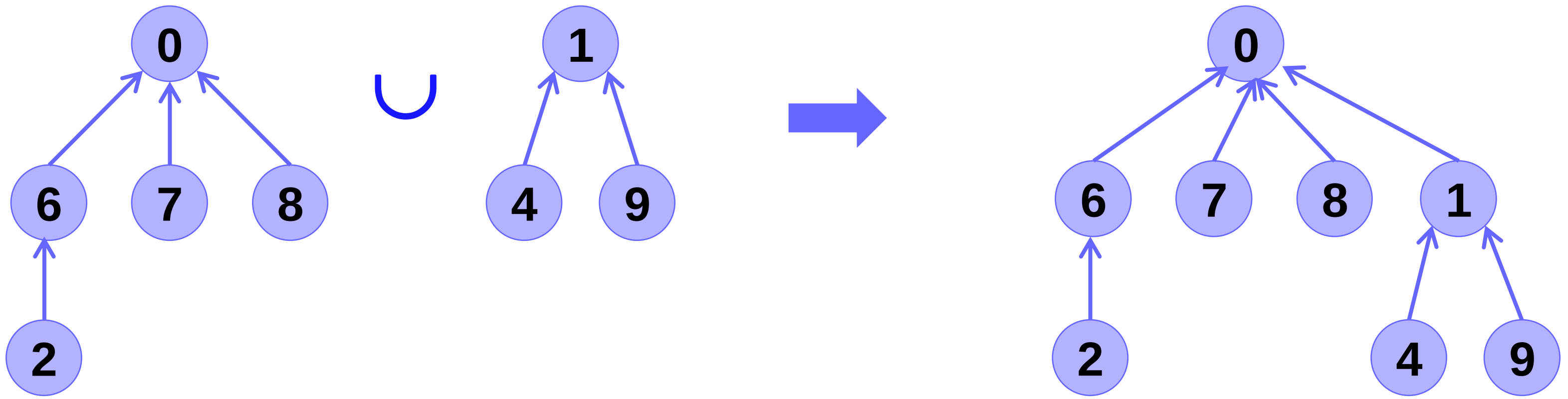
第二种合并方式

第一种方式好：查找时间更优

合并方式：
将结点数更少的集合作为结点数更多的集合的根的子树

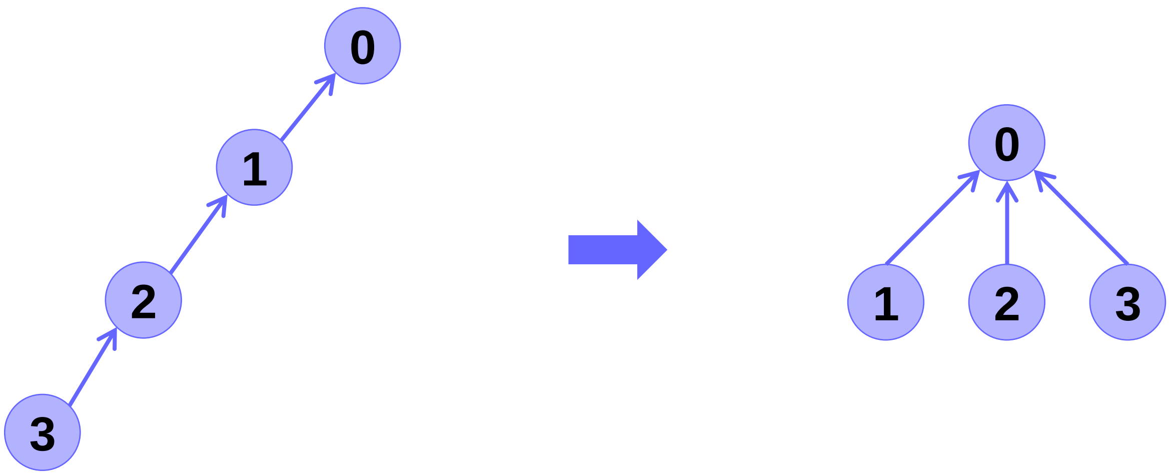
并查集

- 用树表示集合
  - 合并$s_1=\{0,2,6,7,8\} \cup s_2=\{1,4,9\}$
    - 令秩表示树的深度
    - 将秩更小的树作为秩更大的树的根的子树



并查集

- 用树表示集合
  - 路径压缩，在find过程中顺便压缩



按秩合并与路径压缩方式，
操作的平均代价为 $O(\alpha(n))$

$\alpha(n)$是$n = f(x) = A(x,x)$的反函数
其中A是急速增加的阿克曼函数
$\alpha(n)$在n十分巨大时还是小于5.

最小生成树

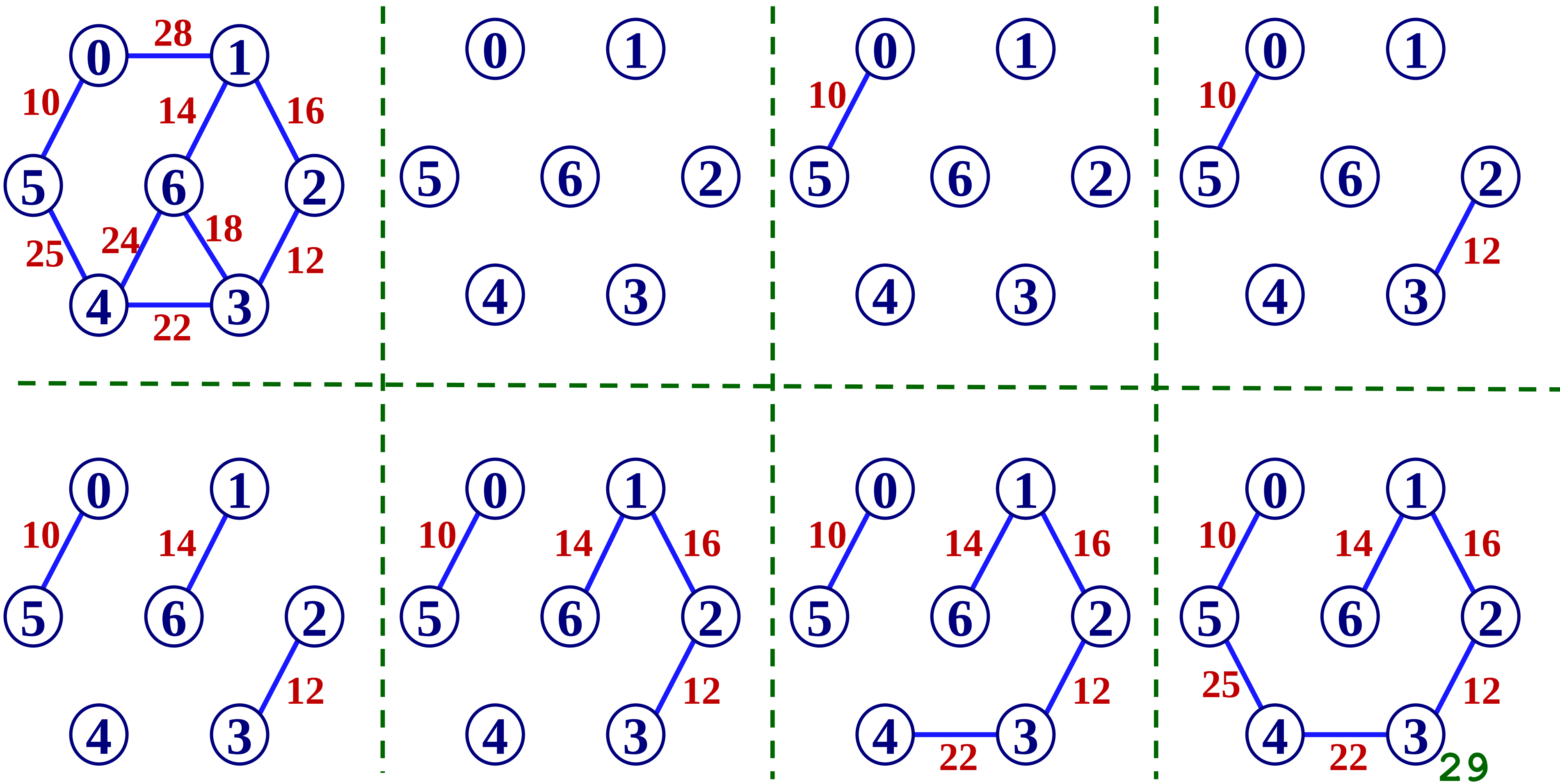
- 生成树
  - 设G=(V, E)是一个边加权无向连通图。G的生成树是无向树S=(V, T), T$\subseteq$E。W是G的权函数, T权值定义为$W(T)=\sum_{(u,v)\in T}W(u,v)$
- 最小生成树
  - G的最小生成树是W(T)最小的G的生成树
- 问题的定义
  - 输入: 无向连通图G=(V, E)，权函数W
  - 输出: G的最小生成树

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 初始时所有顶点自成一集合
  - 在图上选权值最小的边e_{min}，判断e_{min}两端点是否属于不同集合c_i,c_j
    - 若是，将c_i,c_j用e_{min}连接成同一个集合
    - 否则，舍弃e_{min}
  - 重复上一过程，直到所有顶点在同一集合

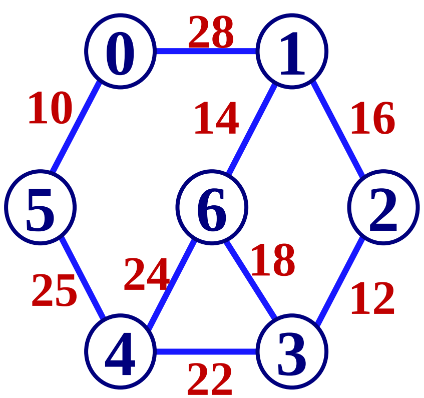
最小生成树

- **克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法**



最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度

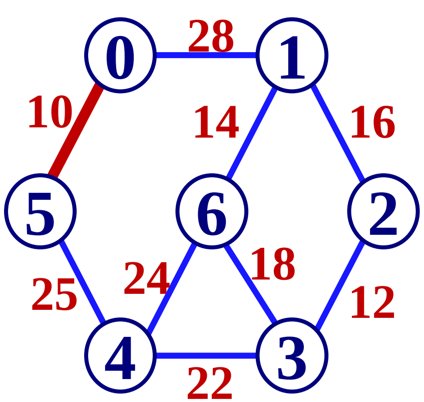


10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)

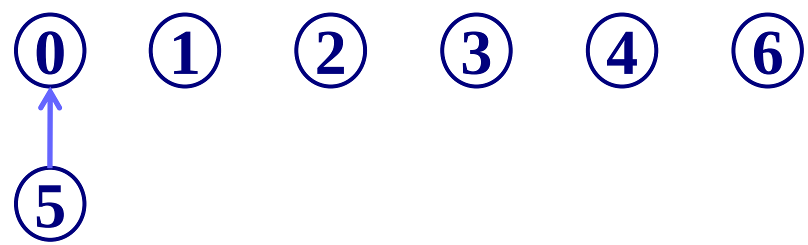
初始时

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



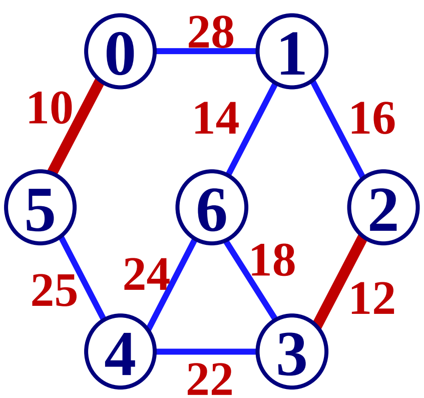
10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



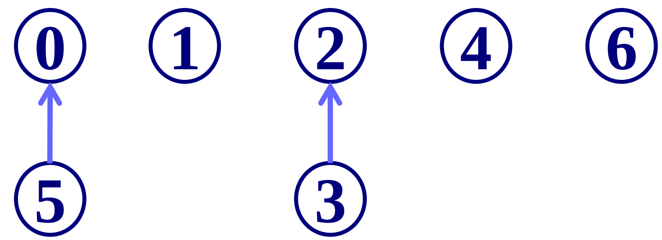
取边(0,5)

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



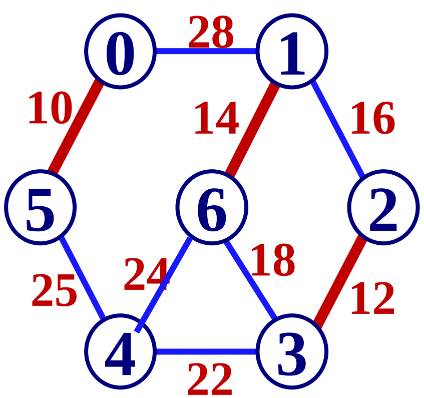
10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



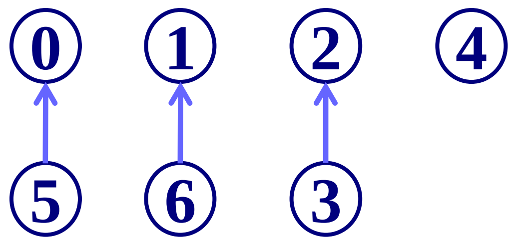
取边(2,3)

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



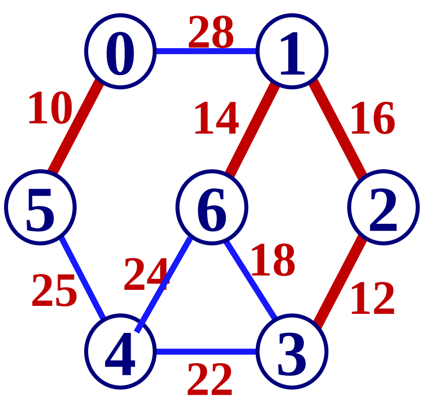
10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



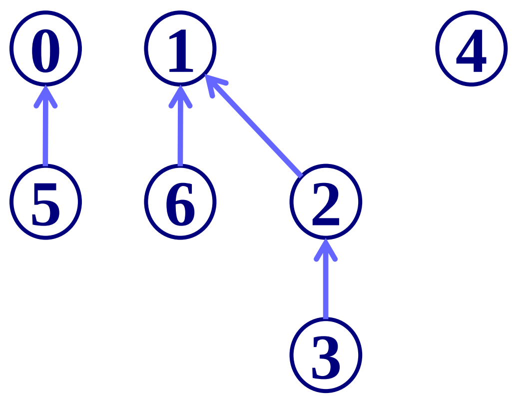
取边(1,6)

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



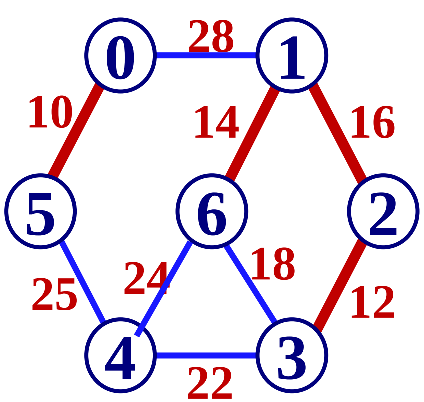
10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



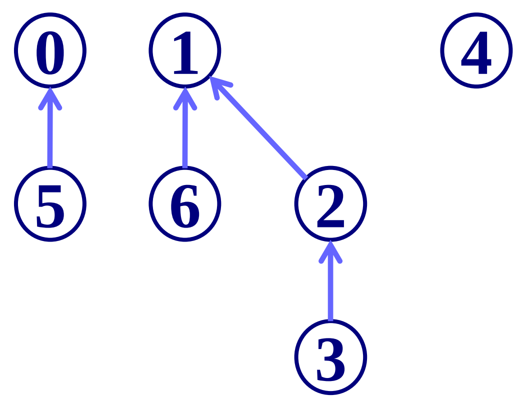
取边(1,2)

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



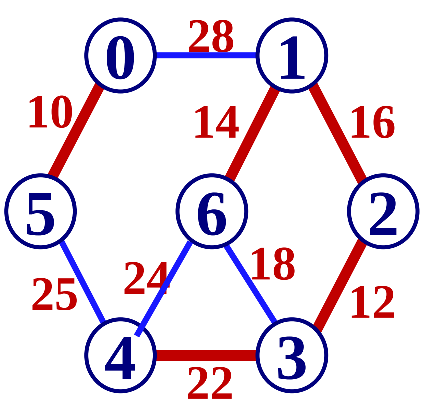
10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



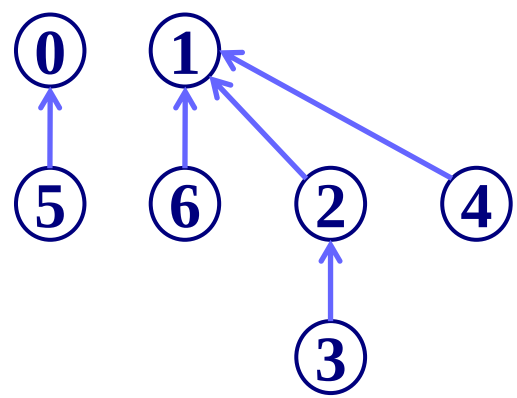
取边(3,6)

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



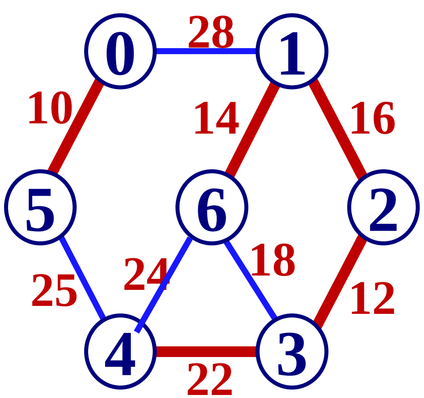
10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



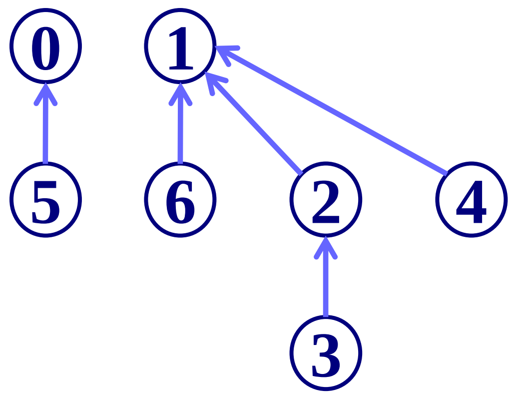
取边(3,4)

最小生成树

- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



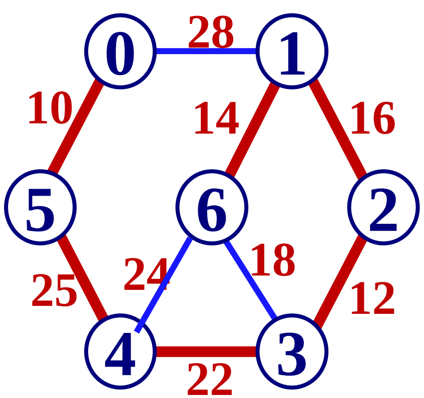
10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



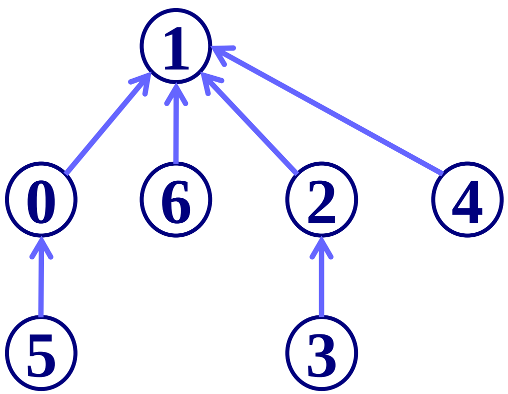
取边(4,6)

最小生成树

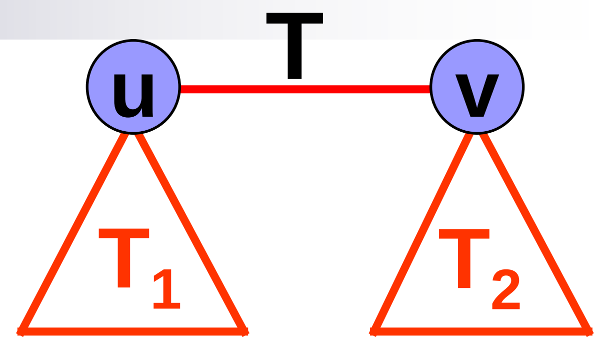
- 克鲁斯卡尔 (Kruskal) 算法
  - 经常需要判断权值最小的边的两端是否属于不同连通分量
    - 可使用并查集技术加快判断速度



10 (0,5)
12 (2,3)
14 (1,6)
16 (1,2)
18 (3,6)
22 (3,4)
24 (4,6)
25 (4,5)



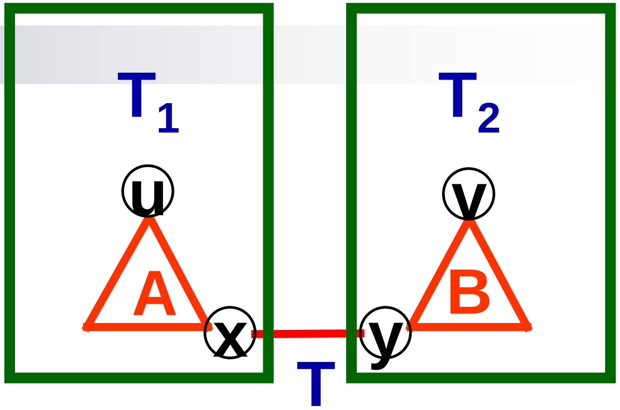
取边(4,5)
此时所有顶点属于同一连通分量，结束



最小生成树

- 最优子结构
  - 设T是 G的最小生成树。不妨设T 包含子树T_1和T_2，T_1是G的子连通图G_1的生成树，T_2是G的子连通图G_2的生成树，则T_1是G_1的最小生成树，T_2是G_2的最小生成树
  - 证明：
    - 若T_1和T_2不是G_1和G_2的最小生成树，而最小生成树分别是T'_1和T'_2，即$W(T'_1) \le W(T_1)$，$W(T'_2) \le W(T_2)$，则存在最小生成树$W(T')=W(T'_1)+W(T'_2)+W(u,v) \le W(T_1)+W(T_2)+W(u,v)\ W(T)$，与T是最小生成树矛盾。

最小生成树



- 贪心选择性
  - 设边(u,v)是当前权值最小且两端点分别属于不同两个集合A和B的边，则必然存在一棵最小生成树包含边(u,v)。
  - 证明：
    - 如图所示，假设不存在一棵最小生成树包含边(u,v)。为了得到生成树，A和B之间必然有一条路径连接。假设这条路径连接A和B包含边(x,y) 得到最小生成树T。W(u,v)≤W(x,y)，边(x,y)可将T划分两棵子树T_1和T_2。不妨设$A \subseteq T_1$，$B \subseteq T_2$，$W(T') = W(T_1)+W(T_2)+W(u,v) \le W(T_1)+W(T_2)+W(x,y) = W(T)$，与T最小矛盾。得证。

选择当前权值最小且两端点属两集合结果并不会变坏

最短路径

- 单源最短路径的Dijkstra算法
  - 给定带权图 (每条边权值 ≥ 0)
  - 给定源点v，求v到其他顶点的最短路径

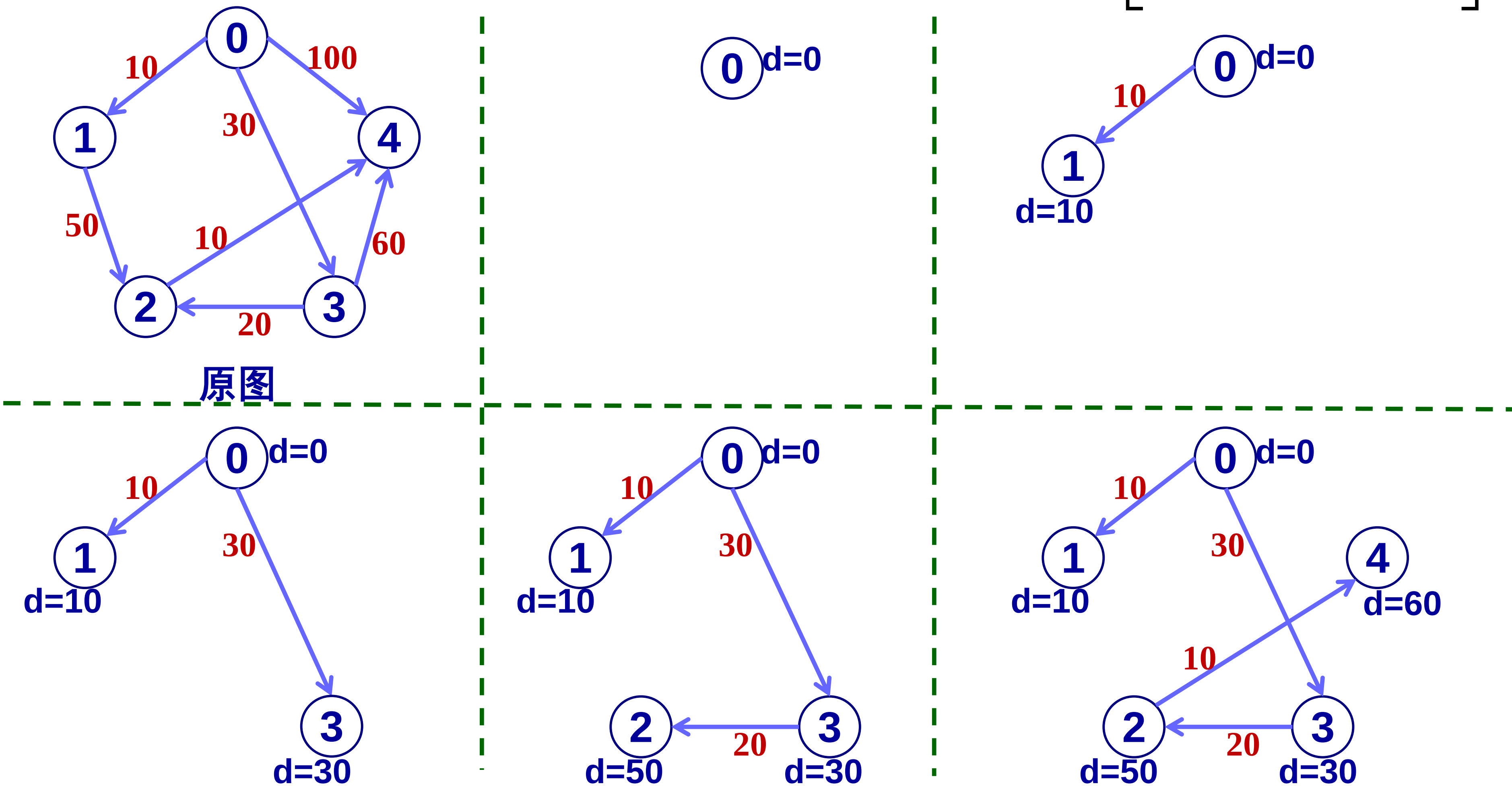
最短路径

- **Dijkstra算法**
  - 初始时令S={v_0}，dist[v_0]=0, dist[i]=Edge[v_0][i]
  - 找u∈S,v∉S,且dist[u]+Edge[u][v]最小, 则将v加入S中，dist[v]=dist[u]+Edge[u][v]
  - 重复上一步骤，直到所有顶点都加入S中

最短路径

- **Dijkstra算法(不记录路径)**

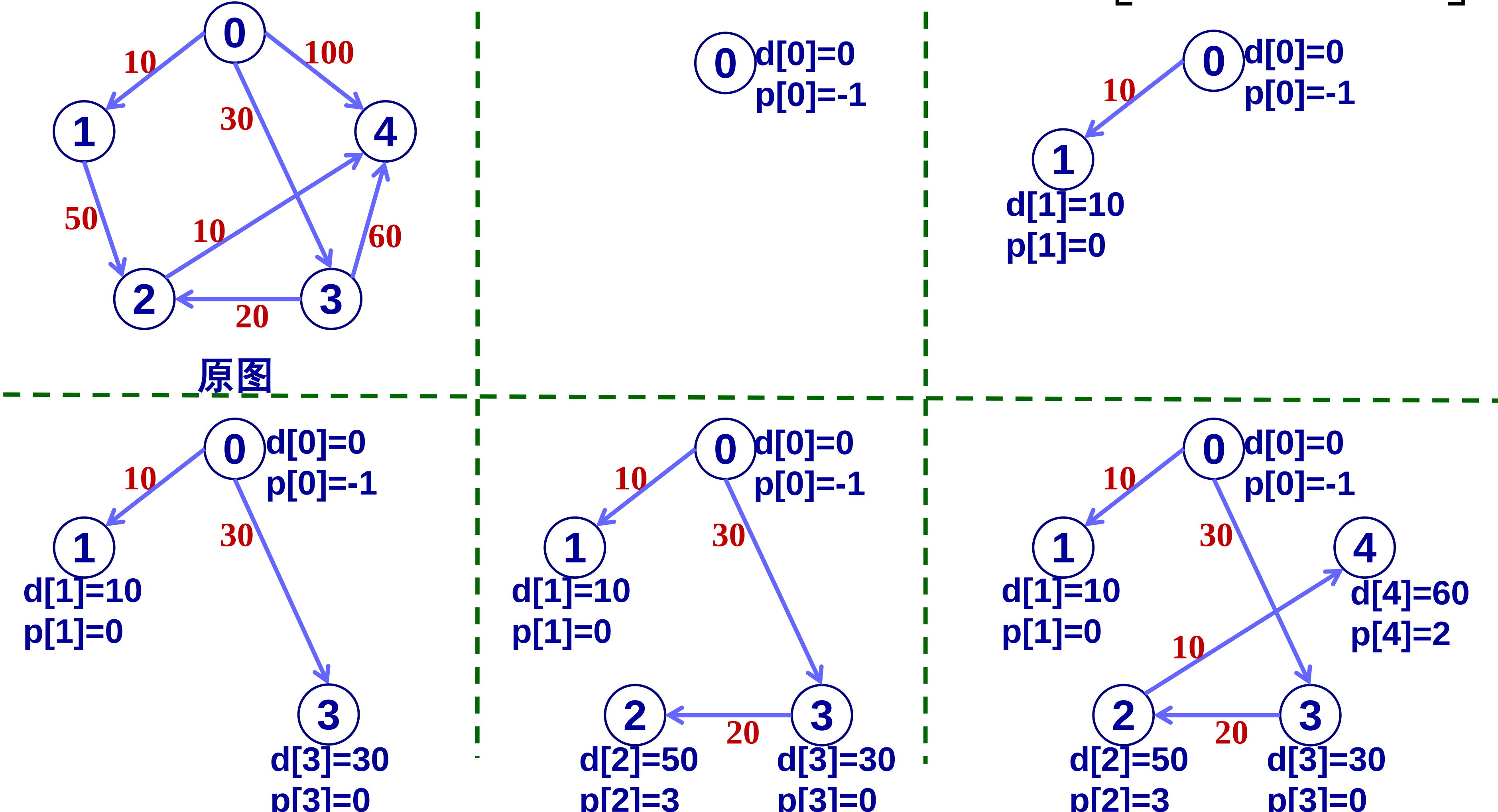
$$\text{Edge} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$



最短路径

$$Edge = \begin{bmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

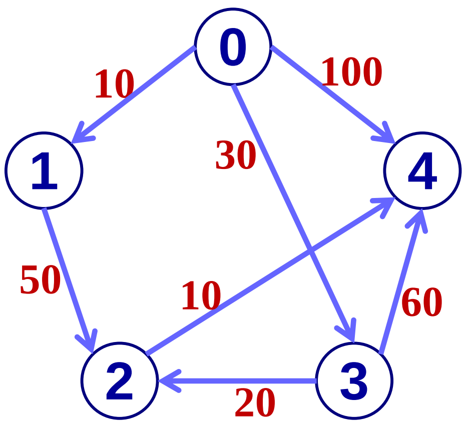
- **Dijkstra算法(记录路径)**



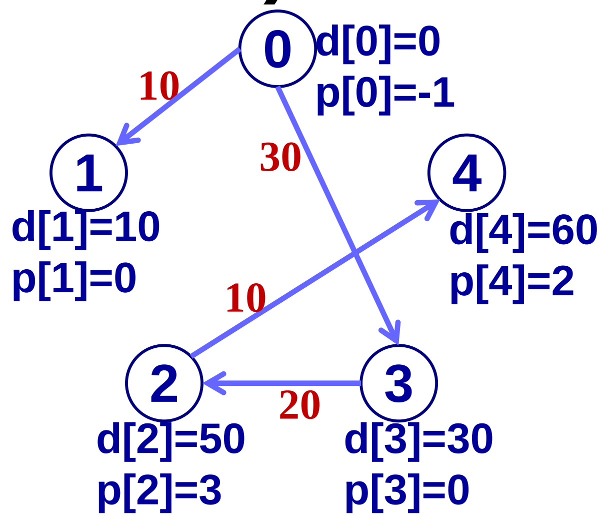
最短路径

$$
Edge = \begin{bmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}
$$

- Dijkstra算法(记录路径)



原图



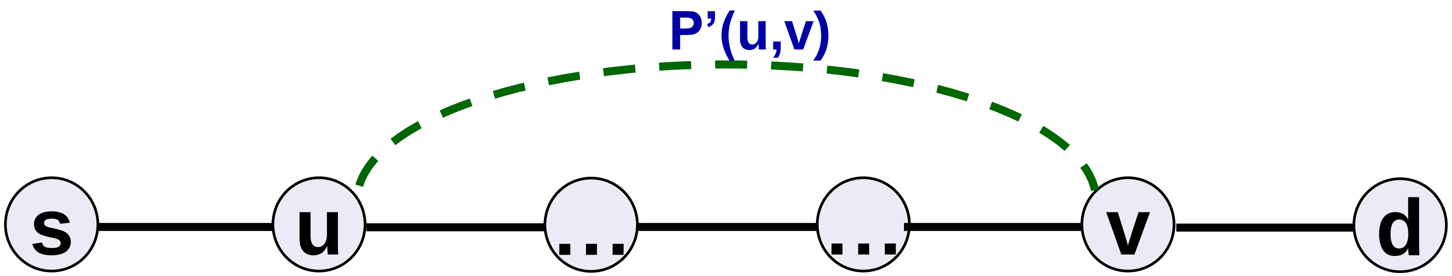
获取最短路径方法，以顶点4为例：

p[4]=3 ➡ p[3]=2 ➡ p[2]=0

反向读得0到4的最短路径为 (0,3,2,4)

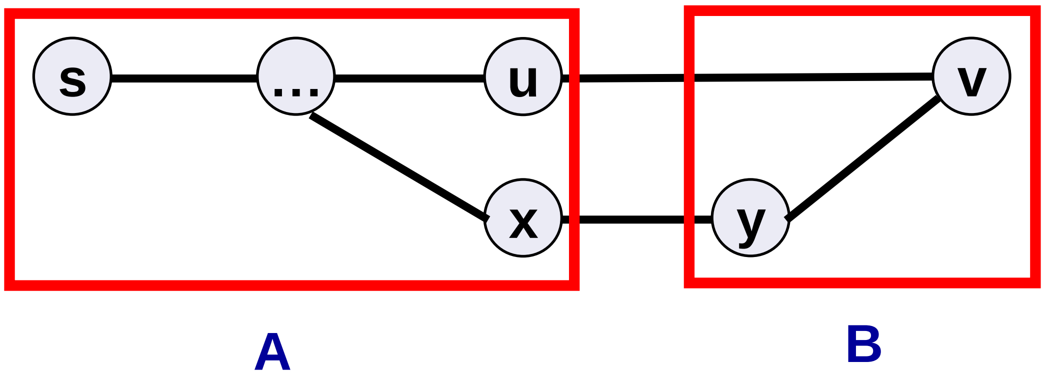
最短路径

- 最优子结构
  - 设P(s,d)是s到d的最短路径，那么这条路径上的子路径P(u,v)是u到v的最短路径。
  - 证明：
    - 如若不然，假设u到v之间存在更短路径P’(u,v)，则用其替代P(u,v)，得到一条s到d的更短路径P’(s,d)，与P(s,d)是s到d是最短路径矛盾。



最短路径

- 贪心选择性
  - 设A是已计算好最短路径的顶点集合，B是未计算好最短路径的顶点集合。P是s到u的最短路径。假设W(P)+W(u,v)对任意u∈A, v∈B最小，则P+{(u,v)}是s到v的最短路径
  - 证明：
    - 略

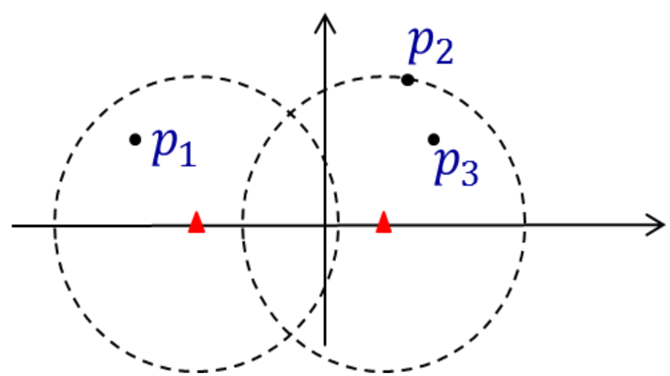


选择当前累积权值最小且两端点属两集合结果不会变坏

POJ 2393 1328

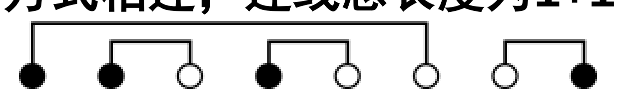
- （1）给定n个物品，物品价值分别为P_1，P_2，…，Pn，物品重量分别W_1，W_2, …, Wn，背包容量为M。每种物品可部分装入到背包中。输出X_1，X_2，…，X_n，$0 \le X_i \le 1$, 使得$\sum_{1\le i\le n} P_i X_i$最大，且$\sum_{1\le i\le n} W_i X_i \le M$。试设计一个算法求解该问题，分析算法的正确性。

- （2）海面上有一些船需要与陆地进行通信，需要在海岸线上布置一些基站。现将问题抽象为，在x轴上方，给出N条船的坐标$p_1, p_2, \ldots, p_N$，$p_i = (x_i, y_i)$，$x_i \ge 0, y_i \le \mathrm{d}, 1 \le i \le N$，在x轴上安放的基站可以覆盖半径为d的区域内的所有点，问在x轴上至少要安放几个点才可以将x轴上方的点都覆盖起来。试设计一个算法求解该问题，并分析算法的正确性。



- 某公司有个工厂和仓库。由于原材料等价格波动，工厂每个月的生产成本也会波动，令第i个月产品的单位生产成本为c_i（该月生产一个产品的成本为c_i）。仓库储存产品的也有成本，假设每个月产品的单位储存成本为固定值1（存储一个产品一个月的成本为1）。令第i个月需要供应给客户的产品数量为y_i，仓库里的和生产的产品均可供应给客户。假设仓库的容量无限大，供应给客户剩余的产品可储存在仓库中。若已知n个月中各月的单位生产成本c_i、以及产品供应量y_i，设计一算法决策每个月的产品生产数量x_i，使得n个月的总成本最低。例如：$n = 3$，c_i: 2,5,3，y_i: 2,4,5，则x_i: 6,0,5，即第1个月生产6个供应2个（代价2×2=4），储存4个供应给第2个月（代价(2+1)×4=12），第3个月生产5个供应5个（代价3×5=15），使总成本4+12+15=31最小。

- 给定直线上 2n个点的序列P[1,2,… ,2n]，每个点 P[i]要么是白点要么是黑点，其中共有n个白点和 n个黑点，相邻两个点之间距离均为1，请设计一个算法将每个白点与一黑点相连，使得连线的总长度最小。例如，图中有4个白点和4个黑点，以图中方式相连，连线总长度为1+1+1+5=8。



- **有n个作业需要在一台机器上执行，一个时刻机器上只能执行一个作业，每个作业可在单位时间内完成，作业i有截止时间di，当作业i在截止时间被执行完，则可获得pi的收益，请设计算法获得最大收益，并分析算法的正确性。**

- **假设有数目不限的面值为25美分，10美分，5美分，1美分的硬币，请使用最少个数的硬币凑出3.33美元。**