**3.24*** 证明一个行向量和一个列向量的积等于这两个向量的二维卷积。向量长度不必相同。你可采用图形方法（如图 3.30 所示）来支持你的证明。

3.24. 证明一个行向量和一个列向量的积等于这两个向量的二维卷积.

证明:

设行向量 $r=[r_1, r_2, r_3 \dots r_n]$，列向量 $c=[c_1, c_2, c_3 \dots c_m]^T$

∴ 二者乘积:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} [r_1, r_2, \dots r_n] \quad \cancel{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} r_1c_1, & r_2c_1, & r_3c_1 & \dots & r_nc_1 \\ r_1c_2, & r_2c_2, & r_3c_2 & \dots & r_nc_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_1c_m, & r_2c_m, & r_3c_m & \dots & r_nc_m \end{bmatrix}$$

行向量和列向量的二维卷积可以描述为:

1. 旋转其中一个向量 $r' = [r_n, r_{n-1}, \dots, r_1]$

2. 让旋转后的向量沿另一个向量滑动，如 $r'$ 沿 $c$ 的第一行滑动:

$$[r_n, r_{n-1}, \dots \begin{bmatrix} r_1 \cdot c_1] \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad [r_n, r_{n-1}, \dots \begin{bmatrix} r_2 \cdot c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, r_1]$$

，以此类推

得到: $[r_1c_1, r_2c_1, \dots r_nc_1]$

3. $r'$ 沿 $c$ 的每一行滑动，得到:

$$\begin{bmatrix} r_1c_1, & r_2c_1, & \dots & r_nc_1 \\ r_1c_2, & r_2c_2, & \dots & r_nc_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_1c_m, & r_2c_m, & \dots & r_nc_m \end{bmatrix}$$

∴ 通过比较可得，行向量和列向量的积，等于这两个向量的二维卷积。

**3.39*** 证明式(3.50)中定义的拉普拉斯是各向同性的（旋转不变的）。假设量是连续的。根据表 2.3，角度旋转 $\theta$ 后的坐标由下式给出：

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \quad 和 \quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

式中，$(x, y)$ 和 $(x', y')$ 分别是旋转前和旋转后的坐标。

3.39. 证明定义的拉普拉斯是各向同性的.

其中 $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ $\quad$ $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

证明:

拉普拉斯算子定义为: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

先计算 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 根据链式法则可得:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\overset{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}} + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\sin\theta$$

再计算 $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\cos\theta\right)}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\cos\theta\right)}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\sin\theta\right)}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\sin\theta\right)}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\cdot\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial y'}\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y' x'}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\cdot\sin^2\theta$$

同理可得:

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\cdot\cos^2\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial x'}\cos\theta\sin\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial y'}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\cdot\sin^2\theta$$

二者相加可得:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

即可证明拉普拉斯算子是各向同性的(旋转不变)