习题课七 向量值函数的积分

贺 丹 （东南大学）

一、填空选择题

1. 若 L 是上半椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$，取顺时针方向, 则

$$\int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. 曲线积分 $\oint_L \dfrac{ax\mathrm{d}y - by\mathrm{d}x}{|x|+|y|} = \underline{\qquad\qquad}$, 其中$L$是闭曲线 $|x|+|y| = 2$, 取逆时针方向.

3. 设 L 是摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t - \pi \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的弧段, 则曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \underline{\qquad\qquad}$.

4. 设 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $\int_0^4 f(u)\mathrm{d}u = 4$, 若 L 为 $y = \sqrt{2x - x^2}$, 起点为 $A(0,0)$, 终点为 $B(2,0)$, 则

$$\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = \underline{\qquad\qquad}.$$

5. 设 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分, 取下侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+\frac{4}{3}y+z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad}$.

6. 设在上半平面上, 曲线积分 $\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^n}$ 与路径无关, 则 $n = \underline{\qquad\qquad}$.

7. 曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 在数值上等于 【　　】

(A) 面密度为 z^2 的曲面 Σ 的质量;

(B) 向量 $z^2\boldsymbol{i}$ 单位时间内穿过曲面 Σ 的流量;

(C) 向量 $z^2\boldsymbol{k}$ 单位时间内穿过曲面 Σ 的流量.

8. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧, D 是 xoy 面上的区域 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2\}$, 则下列正确的是 【　　】

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}A = \iint\limits_{D} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(B) $\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint\limits_{D} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

9. 若 Σ 是给定的光滑闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量, $\boldsymbol{l}$ 为任意给定的常向量, 则曲面积分 $\displaystyle\iint_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\mathrm{d}S$ 的值 【 】

(A) 等于 0 (B) 与 $\boldsymbol{n}$ 有关, 与 $\boldsymbol{l}$ 无关

(C) 与 $\boldsymbol{n}$ 无关, 与 $\boldsymbol{l}$ 有关 (D) 为与 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{l}$ 无关的非零数

二、计算题

1. 计算 $I = \displaystyle\int_L \mathrm{e}^x \cos y\mathrm{d}x + (5xy - \mathrm{e}^x \sin y)\mathrm{d}y$, 其中 L 为曲线 $x = \sqrt{2y - y^2}$, 方向是沿 y 增大的方向.

2. 求曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y$, 其中 L 是由极坐标方程 $\rho = 2 - \sin\varphi$ 所表示的曲线上从 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧.

3. 求 $\int_L \dfrac{(y+x)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 是自点 $A(-2,1)$ 沿曲线 $y = -\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 到点 $B(2,1)$ 的曲线段.

4. 求连续可微函数 $\varphi(x)$, 使在右半平面内曲线积分

$$\int_A^B (\cos x - \varphi(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x + \varphi(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, 并求当 $A = (1,0)$, $B = (\pi,\pi)$ 时, 该曲线积分的值.

5. 设 $\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧, 求曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{ax\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

其中 $a>0$ 为常数.

6. 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

其中 Σ 是立方体$\Omega: |x|\leqslant 2,\ |y|\leqslant 2,\ |z|\leqslant 2$ 的表面外侧.

7. 设 Σ 是由曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{1+z^2} \\ x = 0 \end{cases}$ $(1 \leqslant z \leqslant 2)$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角, 且密度为 1 的流体的流速为 $\boldsymbol{v} = xz^2\boldsymbol{i} + \sin x\boldsymbol{k}$, 求单位时间内该流体流向曲面指定侧的流量.

8. 计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} (yf + x)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (xf + y)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (2xyf + z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 2$ 与平面 $z = 8$之间的部分, 取上侧, $f = f(x, y, z)$ 为连续函数.

三、空间曲线的第二型曲线积分

1. 设 L 是 $x^2+y^2=1$ 与 $x+y+z=1$ 的交线, 从 x 轴的正向看去, L 为逆时针方向, 则

$$\int_L (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. 设 L 为曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$, 且从 z 轴的正向往负向看, L 为逆时针方向, 求 $\displaystyle\int_L \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x+4x\,\mathrm{d}y+z^2\,\mathrm{d}z$.

3. 设曲线 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+z=1$ 的交线满足 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的部分上从 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,0,1)$ 的一段, 求曲线积分 $\displaystyle\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$.

四、证明题

1. 设 $f(x)>0$ 且具有连续导数, 证明不等式

$$\oint_L \frac{-y}{f(x)}\mathrm{d}x + xf(y)\mathrm{d}y \geqslant 2\pi a^2,$$

其中 L 是圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$, 取逆时针方向.

2. 证明不等式 $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \displaystyle\oint_L -y\sin x^2\mathrm{d}x + x\cos y^2\mathrm{d}y \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi,$

其中 L 是圆周 $x^2+y^2+x+y=0$, 取逆时针方向.

五、思考题

1. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{2}{x\cos^2 x}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{1}{\cos^2 y}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\frac{1}{z\cos^2 z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,
其中 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=1$, 取外侧.

2. 求积分 $\displaystyle\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s$, 其中 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\boldsymbol{n}$ 为 C 上动点 P 处的单位外法向量, $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$, $r=|\boldsymbol{r}|$.

3. 设函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在光滑曲线 L 上连续,

(1) 证明 $\left|\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right| \leqslant LM$, 其中 L 为积分路径 L 的弧长, $M = \max\limits_{(x,y)\in L} \sqrt{P^2+Q^2}$.

(2) 估计积分 $I_R = \displaystyle\int_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+xy)^2}$ 的值, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$, 并证明: $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$.