工科数学分析

贺　丹(东南大学)

第二节 函数项级数

本章主要内容：

- 函数项级数的处处收敛性
- 函数项级数的一致收敛性概念和判别方法
- 一致收敛级数的性质

2.1 函数项级数的处处收敛性

定义

2.1 函数项级数的处处收敛性

定义

设$\{u_n(x)\}$为定义在同一个集合$A \subseteq \mathbf{R}$上, 由无穷多项组成的一列函数(称为函数列), 将它的各项依次加起来得到的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \text{ 或者 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

称为集合A上的函数项级数, $u_n(x)$称为它的通项,

2.1 函数项级数的处处收敛性

定义

设$\{u_n(x)\}$为定义在同一个集合$A \subseteq \mathbf{R}$上, 由无穷多项组成的一列函数(称为**函数列**), 将它的各项依次加起来得到的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \text{ 或者 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

称为集合A上的**函数项级数**, $u_n(x)$称为它的**通项**, 前n项之和 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$称为它的**部分和**.

定义2.1

定义2.1

在函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中，令$x = x_0 \in A$，则得一数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

定义2.1

在函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中，令$x = x_0 \in A$，则得一数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

若收敛，则称点x_0为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个**收敛点**；

定义2.1

在函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中，令$x = x_0 \in A$，则得一数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

若收敛，则称点x_0为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个**收敛点**；

若发散，则称x_0为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个**发散点**.

定义2.1

在函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中，令$x = x_0 \in A$，则得一数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

若收敛，则称点x_0为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个收敛点；

若发散，则称x_0为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个发散点.

由收敛点组成的集合称为收敛域；

定义2.1

在函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中，令$x = x_0 \in A$，则得一数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

若收敛，则称点x_0为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个收敛点;

若发散，则称x_0为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个发散点.

由收敛点组成的集合称为收敛域;

由发散点组成的集合称为发散域.

定义1.2

设D为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域, 则$\forall x \in D$, 级数都收敛, 称该级数的这种收敛为在$D$上处处收敛(或逐点收敛).

定义1.2

设D为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域, 则$\forall x \in D$, 级数都收敛, 称该级数的这种收敛为在$D$上处处收敛(或逐点收敛).

此时, 称由$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ (x \in D)$定义的函数$S : D \to \mathbf{R}$ 为级数的和函数, 简称和, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),\quad x \in D.$

定义1.2

设D为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域, 则$\forall x \in D$, 级数都收敛, 称该级数的这种收敛为在$D$上处处收敛(或逐点收敛).

此时, 称由$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ (x \in D)$定义的函数$S: D \to \mathbf{R}$ 为级数的和函数, 简称和, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),\quad x \in D.$

并称$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$为余项,

定义1.2

设D为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域, 则$\forall x \in D$, 级数都收敛, 称该级数的这种收敛为在$D$上处处收敛(或逐点收敛).

此时, 称由$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ (x \in D)$定义的函数$S: D \to \mathbf{R}$ 为级数的和函数, 简称和, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),\quad x \in D$.

并称$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$为余项,

且$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0\ (x \in D)$.

定义1.2

设D为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域, 则$\forall x \in D$, 级数都收敛, 称该级数的这种收敛为在$D$上**处处收敛**(或**逐点收敛**).

此时, 称由$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ $(x \in D)$定义的函数$S : D \to \mathbf{R}$ 为级数的**和函数**, 简称**和**, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in D.$

并称$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$为**余项**,

且$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ $(x \in D)$.

- 例如：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots,$

定义1.2

设D为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域, 则$\forall x \in D$, 级数都收敛, 称该级数的这种收敛为在$D$上处处收敛(或逐点收敛).

此时, 称由$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ $(x \in D)$定义的函数$S : D \to \mathbf{R}$ 为级数的和函数, 简称和, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in D.$

并称$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$为余项,

且$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ $(x \in D)$.

- 例如：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots,$

  收敛域为$|x| < 1$, 即$(-1, 1)$,

定义1.2

设D为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域, 则$\forall x \in D$, 级数都收敛, 称该级数的这种收敛为在$D$上处处收敛(或逐点收敛).

此时, 称由$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ (x \in D)$定义的函数$S : D \to \mathbf{R}$ 为级数的和函数, 简称和, 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in D.$

并称$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$为余项,

且$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0\ (x \in D)$.

- 例如：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots$,

  收敛域为$|x| < 1$, 即$(-1, 1)$, 和函数为$S(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

例1. 求下列函数项级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3-4n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

例1．求下列函数项级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3-4n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

答： (1) 收敛域为$(-1,1]$;

例1. 求下列函数项级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3-4n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

答： (1) 收敛域为$(-1,1]$;　　(2) 收敛域为$(0,+\infty)$;

例1. 求下列函数项级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3-4n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

答: (1) 收敛域为$(-1,1]$; (2) 收敛域为$(0,+\infty)$;

(3) 收敛域为$(0,+\infty)$.

例1. 求下列函数项级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3-4n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

答：(1) 收敛域为$(-1,1]$; (2) 收敛域为$(0,+\infty)$;

(3) 收敛域为$(0,+\infty)$.

例2. 求函数项级数$x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$的收敛域$D$及和函数$S(x)$.

例1. 求下列函数项级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3-4n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

答：(1) 收敛域为$(-1,1]$; (2) 收敛域为$(0,+\infty)$;

(3) 收敛域为$(0,+\infty)$.

例2. 求函数项级数$x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$的收敛域$D$及和函数$S(x)$.

答: 收敛域为$D=(-1,1]$, 和函数为$S(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

2.2 函数项级数的一致收敛概念与判别方法

2.2 函数项级数的一致收敛概念与判别方法

- 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上处处收敛于$S(x)$,

2.2 函数项级数的一致收敛概念与判别方法

- 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上处处收敛于$S(x)$,

即 $\forall x \in D, \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$,

2.2 函数项级数的一致收敛概念与判别方法

- 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上处处收敛于$S(x)$,

即 $\forall x \in D, \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$,

也即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 当$n > N$时, 恒有$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

2.2 函数项级数的一致收敛概念与判别方法

- 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上处处收敛于 $S(x)$,

即 $\forall x \in D, \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$,

也即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

- 在上述极限定义中, N 不仅与 ε 有关, 而且与 x 有关.

2.2 函数项级数的一致收敛概念与判别方法

- 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上处处收敛于$S(x)$,

即 $\forall x \in D, \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$,

也即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 当$n > N$时, 恒有$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

- 在上述极限定义中, N不仅与ε有关, 而且与x有关.

- 下面讨论是否存在N对收敛域D中的任意x都成立, 也即函数项级数的一致收敛概念.

定义2.2 (函数项级数的一致收敛性)

定义2.2 (函数项级数的一致收敛性)

若存在一个函数$S(x): D \to \mathbf{R}$, 满足

定义2.2 (函数项级数的一致收敛性)

若存在一个函数$S(x):D\to\mathbf{R}$, 满足

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}_+, \text{当}n>N\text{时}, \forall x\in D, \text{恒有}|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,$$

定义2.2 (函数项级数的一致收敛性)

若存在一个函数$S(x): D \to \mathbf{R}$, 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+, \text{当} n > N \text{时}, \forall x \in D, \text{恒有} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$.

定义2.2 (函数项级数的一致收敛性)

若存在一个函数$S(x): D \to \mathbf{R}$, 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+, \text{当} n > N \text{时}, \forall x \in D, \text{恒有} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$.

- 由定义知, 若级数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$, 则它必处处收敛于$S(x)$, 反之不一定成立.

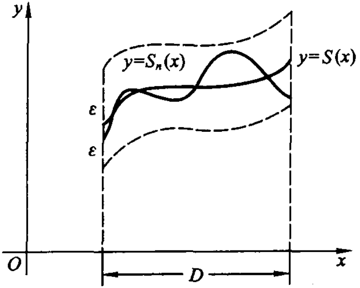
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$的几何意义是：

- 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$的几何意义是：

  对于任给的$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbf{N}_+$, 当$n > N$时, 该级数的部分和函数列S_n的图像全落在关于函数$S(x)$图像对称的宽为2ε的带形区域中.

- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的几何意义是：

  对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，该级数的部分和函数列 S_n 的图像全落在关于函数 $S(x)$ 图像对称的宽为 2ε 的带形区域中.



例1. 证明：函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

例1．证明：函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

证明： 该级数的部分函数列为$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

例1．证明：函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

证明： 该级数的部分函数列为$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

于是, 对$\forall x\in[0,1]$有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$.

例1．证明：函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

证明： 该级数的部分函数列为$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

于是, 对$\forall x\in[0,1]$有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$.

下面证明该级数在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

例1．证明：函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

证明： 该级数的部分函数列为$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

于是, 对$\forall x\in[0,1]$有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$.

下面证明该级数在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

由于 $|S_n(x)-S(x)|=\dfrac{x}{1+n^2x^2}=\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\dfrac{1}{2n}$,

例1. 证明：函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

证明： 该级数的部分函数列为$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

于是, 对$\forall x\in[0,1]$有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0.$

下面证明该级数在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

由于 $|S_n(x)-S(x)|=\dfrac{x}{1+n^2x^2}=\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\dfrac{1}{2n}$,

因此, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$, 当$n>N$时, 对$\forall x\in[0,1]$, 有

$|S_n(x)-0|<\varepsilon$, 故该级数在区间$[0,1]$上一致收敛于0.

- 用定义来判断函数项级数的一致收敛需先知道它的和函数, 一般比较困难, 下面介绍无需知道和函数的Cauchy收敛准则.

- 用定义来判断函数项级数的一致收敛需先知道它的和函数，一般比较困难，下面介绍无需知道和函数的Cauchy收敛准则.

定理2.1 (Cauchy一致收敛原理)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛的充要条件是：

- 用定义来判断函数项级数的一致收敛需先知道它的和函数，一般比较困难，下面介绍无需知道和函数的Cauchy收敛准则.

定理2.1 (Cauchy一致收敛原理)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛的充要条件是：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+$, 当$n > N(\varepsilon)$时，对$\forall p \in \mathbf{N}_+$及$\forall x \in D$, 恒有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

- 下面给出利用Cauchy一致收敛定理推出的常用判别准则.

- 下面给出利用Cauchy一致收敛定理推出的常用判别准则.

定理2.2 (M 判别准则或Weierstrass准则)

- 下面给出利用Cauchy一致收敛定理推出的常用判别准则.

定理2.2 (M 判别准则或Weierstrass准则)

如果存在一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, 对$\forall n \in \mathbf{N}_+$以及$\forall x \in D$, 恒有$|u_n(x)| \leqslant M_n$, 那么函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛.

- 下面给出利用Cauchy一致收敛定理推出的常用判别准则.

定理2.2 (M 判别准则或Weierstrass准则)

如果存在一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, 对$\forall n \in \mathbf{N}_+$以及$\forall x \in D$,

恒有$|u_n(x)| \leqslant M_n$, 那么函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛.

- 定理中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的优级数

  或控制级数.

例2. 判别下列级数在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2 x}{n^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+n^6x^4}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

例2. 判别下列级数在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^6 x^4}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

证明: (1) 因为$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$,

例2. 判别下列级数在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^6x^4},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

证明： (1) 因为$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有$\displaystyle\left|\frac{\sin n^2x}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,

所以由级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛及定理2.2知结论成立.

例2. 判别下列级数在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2},\ x\in(-\infty,+\infty);$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^6x^4},\ x\in(-\infty,+\infty);$

证明： (1) 因为$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$\displaystyle\left|\frac{\sin n^2x}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,

所以由级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛及定理2.2知结论成立.

(2) 因为$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$\displaystyle\left|\frac{x^2}{1+n^6x^4}\right|\leqslant\frac{1}{2n^3}$,

例2. 判别下列级数在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2 x}{n^2},\ x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+n^6x^4},\ x \in (-\infty, +\infty)$;

证明： (1) 因为$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有$\left|\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$,

所以由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$收敛及定理2.2知结论成立.

(2) 因为$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有$\left|\dfrac{x^2}{1+n^6x^4}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n^3}$,

所以由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^3}$收敛及定理2.2知结论成立.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n}, \ x \in (-2, +\infty).$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x \in (-2, +\infty)$.

证明： 因为$\forall x \in (-2, +\infty)$, 有

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x \in (-2, +\infty)$.

证明： 因为$\forall x \in (-2, +\infty)$, 有

$$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n - 2} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n},\ x\in(-2,+\infty).$

证明： 因为$\forall x\in(-2,+\infty)$, 有

$$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n-2}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},$$

所以由级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛及定理2.2知结论成立.

2.3 一致收敛级数的性质

2.3 一致收敛级数的性质

下面来讨论在一致收敛的条件下，函数项级数的和函数保持了有限个函数之和的一些重要分析性质.

2.3 一致收敛级数的性质

下面来讨论在一致收敛的条件下，函数项级数的和函数保持了有限个函数之和的一些重要分析性质.

定理2.3 (和函数的连续性)

设$u_n(x) \in C(I)\ (n \in \mathbf{N}_+)$，若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$I$上一致收敛于$S(x) : I \to \mathbf{R}$，则$S(x) \in C(I)$.

2.3 一致收敛级数的性质

下面来讨论在一致收敛的条件下，函数项级数的和函数保持了有限个函数之和的一些重要分析性质.

定理2.3 (和函数的连续性)

设$u_n(x) \in C(I)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$，若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$I$上一致收敛于$S(x): I \to \mathbf{R}$，则$S(x) \in C(I)$.

- 由上述定理可以看出：

2.3 一致收敛级数的性质

下面来讨论在一致收敛的条件下，函数项级数的和函数保持了有限个函数之和的一些重要分析性质.

定理2.3 (和函数的连续性)

设$u_n(x) \in C(I)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$，若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$I$上一致收敛于$S(x): I \to \mathbf{R}$，则$S(x) \in C(I)$.

- 由上述定理可以看出：

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

2.3 一致收敛级数的性质

下面来讨论在一致收敛的条件下，函数项级数的和函数保持了有限个函数之和的一些重要分析性质.

定理2.3 (和函数的连续性)

设$u_n(x) \in C(I)\ (n \in \mathbf{N}_+)$, 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$I$上一致收敛于$S(x) : I \to \mathbf{R}$, 则$S(x) \in C(I)$.

- 由上述定理可以看出：

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

即极限运算与无限求和运算可以交换次序.

定理2.4 (和函数的可积性)

定理2.4 (和函数的可积性)

设$u_n(x) \in C[a,b]\,(n \in \mathbf{N}_+)$, 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x):[a,b] \to \mathbf{R}$,

定理2.4 (和函数的可积性)

设$u_n(x)\in C[a,b]\,(n\in\mathbf{N}_+)$, 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x):[a,b]\to\mathbf{R}$, 则和函数$S(x)$ 在$[a,b]$上可积,

定理2.4 (和函数的可积性)

设$u_n(x) \in C[a,b]\,(n \in \mathbf{N}_+)$, 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x):[a,b] \to \mathbf{R}$, 则和函数$S(x)$ 在$[a,b]$上可积, 且$\forall x \in [a,b]$, 有

定理2.4 (和函数的可积性)

设$u_n(x) \in C[a,b]\ (n \in \mathbf{N}_+)$, 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x):[a,b] \to \mathbf{R}$, 则和函数$S(x)$ 在$[a,b]$上可积, 且$\forall x \in [a,b]$, 有

$$\int_a^x S(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t.$$

定理2.4 (和函数的可积性)

设$u_n(x) \in C[a,b]\ (n \in \mathbf{N}_+)$, 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x):[a,b] \to \mathbf{R}$, 则和函数$S(x)$ 在$[a,b]$上可积, 且$\forall x \in [a,b]$, 有

$$\int_a^x S(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t.$$

- 由上述定理表明积分运算与无限求和运算可交换次序.

定理2.5 (和函数的可导性)

定理2.5 (和函数的可导性)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

定理2.5 (和函数的可导性)

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) $u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$在区间I上有连续导函数，即$u_n(x) \in C^{(1)}(I)$;

定理2.5 (和函数的可导性)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) $u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$在区间I上有连续导函数, 即$u_n(x) \in C^{(1)}(I)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在I上处处收敛于$S(x) : I \to \mathbf{R}$;

定理2.5 (和函数的可导性)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) $u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$在区间I上有连续导函数，即$u_n(x) \in C^{(1)}(I)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在I上处处收敛于$S(x) : I \to \mathbf{R}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$在$I$上一致收敛于$\sigma(x) : I \to \mathbf{R}$,

定理2.5 (和函数的可导性)

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) $u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$在区间I上有连续导函数, 即$u_n(x) \in C^{(1)}(I)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在I上处处收敛于$S(x) : I \to \mathbf{R}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$I$上一致收敛于$\sigma(x) : I \to \mathbf{R}$,

则和函数$S(x) \in C^{(1)}(I)$, 且

定理2.5 (和函数的可导性)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) $u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$在区间I上有连续导函数，即$u_n(x) \in C^{(1)}(I)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在I上处处收敛于$S(x): I \to \mathbf{R}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$I$上一致收敛于$\sigma(x): I \to \mathbf{R}$,

则和函数$S(x) \in C^{(1)}(I)$, 且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sigma(x).$$

定理2.5 (和函数的可导性)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) $u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_+)$在区间I上有连续导函数，即$u_n(x) \in C^{(1)}(I)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在I上处处收敛于$S(x) : I \to \mathbf{R}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$I$上一致收敛于$\sigma(x) : I \to \mathbf{R}$,

则和函数$S(x) \in C^{(1)}(I)$, 且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sigma(x).$$

- 由上述定理表明求导运算与无限求和运算可交换次序.

例3. 证明函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导.

例3. 证明函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导.

证明： 设$u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$,

例3. 证明函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导.

证明： 设$u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$, 由$|u_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^3}$ 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$收敛知
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛,

例3. 证明函数$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty, +\infty)$上连续可导.

证明： 设$u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$, 由$|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 由定理3知$S(x)$ 连续.

例3. 证明函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导.

证明： 设$u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$, 由$|u_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^3}$ 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 由定理3知$S(x)$ 连续.

又由

$$|u_n'(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,

例3. 证明函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导.

证明： 设$u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$, 由$|u_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^3}$ 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 由定理3知$S(x)$ 连续.

又由

$$|u_n'(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,

由定理5知$S(x)$可导, 且由$u_n'(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上连续

可得$S'(x)$也连续.