工科数学分析

贺丹（东南大学）

第四节 多元函数的Taylor公式与极值问题

本节主要内容：

- 多元函数的Taylor公式
- 多元函数的极值
- 多元函数的最值
- 条件极值

n元函数无约束极值的定义

n元函数无约束极值的定义

定义4.2

设函数$f: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 若$\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, 恒成立不等式

n元函数无约束极值的定义

定义4.2

设函数$f: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 若$\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, 恒成立不等式

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) \ (f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)),$$

n元函数无约束极值的定义

定义4.2

设函数$f: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 若$\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, 恒成立不等式

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) \ (f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)),$$

则称函数f 在点$\boldsymbol{x}_0$取得无约束极大(小)值$f(\boldsymbol{x}_0)$,

简称为极大(小)值; 点$\boldsymbol{x}_0$称为f的极大(小)值点.

n元函数无约束极值的定义

定义4.2

设函数$f:U(\boldsymbol{x}_0)\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, 若$\forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0)$, 恒成立不等式

$$f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{x}_0)\ (f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_0)),$$

则称函数f 在点$\boldsymbol{x}_0$取得无约束极大(小)值$f(\boldsymbol{x}_0)$,

简称为极大(小)值; 点$\boldsymbol{x}_0$称为f的极大(小)值点.

极大值和极小值统称为极值, 极大值点与极小值点统称为极值点.

二元函数无约束极值的定义

二元函数无约束极值的定义

定义

设函数$f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$的某个邻域$U(M_0)$内有定义，

对$\forall(x,y) \in \mathring{U}(M_0)$，有

二元函数无约束极值的定义

定义

设函数$f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$的某个邻域$U(M_0)$内有定义，对$\forall (x,y)\in \mathring{U}(M_0)$，有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (f(x,y)>f(x_0,y_0)),$$

二元函数无约束极值的定义

定义

设函数$f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$的某个邻域$U(M_0)$内有定义，

对$\forall(x,y)\in \mathring{U}(M_0)$，有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (f(x,y)>f(x_0,y_0)),$$

则称函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$取得极大(小)值$f(x_0,y_0)$;

二元函数无约束极值的定义

定义

设函数$f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$的某个邻域$U(M_0)$内有定义，

对$\forall (x,y)\in \mathring{U}(M_0)$，有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (f(x,y)>f(x_0,y_0)),$$

则称函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$取得**极大(小)值**$f(x_0,y_0)$;

点$M_0(x_0,y_0)$称为f的**极大(小)值点**.

二元函数无约束极值的定义

定义

设函数$f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$的某个邻域$U(M_0)$内有定义，

对$\forall(x,y)\in \mathring{U}(M_0)$，有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ \left(f(x,y)>f(x_0,y_0)\right),$$

则称函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$取得**极大(小)值**$f(x_0,y_0)$；

点$M_0(x_0,y_0)$称为f的**极大(小)值点**.

例如，函数$f(x,y)=x^2+y^2$在$(0,0)$点有极小值$f(0,0)=0$;

二元函数无约束极值的定义

定义

设函数$f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$的某个邻域$U(M_0)$内有定义,

对$\forall(x,y)\in \mathring{U}(M_0)$, 有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (f(x,y)>f(x_0,y_0)),$$

则称函数$f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$取得极大(小)值$f(x_0,y_0)$;

点$M_0(x_0,y_0)$称为f的极大(小)值点.

例如, 函数$f(x,y)=x^2+y^2$在$(0,0)$点有极小值$f(0,0)=0$;

函数$f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$在$(0,0)$点有极大值$f(0,0)=a$.

极值存在的必要条件

极值存在的必要条件

定理4.3 （极值的必要条件）

若可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得极值, 则必有$\mathbf{grad}\,f(M_0)=0$, 即 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

极值存在的必要条件

定理4.3 (极值的必要条件)

若可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得极值, 则必有$\mathbf{grad}\,f(M_0)=0$, 即 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

- 该定理可以推广到n元函数.

极值存在的必要条件

定理4.3 (极值的必要条件)

若可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得极值, 则必有$\mathbf{grad}\,f(M_0)=0$, 即 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

- 该定理可以推广到n元函数.
- 称满足$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=0$ (即$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$) 的点$(x_0,y_0)$为函数$f$的驻点(或稳定点).

极值存在的必要条件

定理4.3 (极值的必要条件)

若可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得极值，则必有$\mathbf{grad}\, f(M_0)=0$，即 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

- 该定理可以推广到n元函数.
- 称满足$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)=0$ (即$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$) 的点$(x_0,y_0)$为函数$f$的驻点(或稳定点).
- 定理4.3的条件不是充分的，即驻点不一定是极值点。

极值存在的必要条件

定理4.3 (极值的必要条件)

若可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得极值, 则必有$\mathbf{grad}\, f(M_0)=0$, 即 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

- 该定理可以推广到n元函数.
- 称满足$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)=0$ (即$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$) 的点$(x_0,y_0)$为函数$f$的驻点(或稳定点).
- 定理4.3的条件不是充分的, 即驻点不一定是极值点。

  例如: 点$(0,0)$为函数$f(x,y)=xy$的驻点, 但不是极值点.

极值存在的必要条件

定理4.3 (极值的必要条件)

若可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得极值, 则必有$\mathbf{grad}\,f(M_0)=0$, 即 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

- 该定理可以推广到n元函数.
- 称满足$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)$=0 (即$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$)的点$(x_0,y_0)$为函数$f$的驻点(或稳定点).
- 定理4.3的条件不是充分的, 即驻点不一定是极值点。

  例如: 点$(0,0)$为函数$f(x,y)=xy$的驻点, 但不是极值点.
- 偏导数不存在的点也可能是极值点.

极值存在的必要条件

定理4.3 (极值的必要条件)

若可微函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得极值，则必有$\mathbf{grad}\, f(M_0)=0$，即 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

- 该定理可以推广到n元函数.
- 称满足$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$=0 (即$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$)的点$(x_0,y_0)$为函数$f$的驻点(或稳定点).
- 定理4.3的条件不是充分的，即驻点不一定是极值点。

  例如：点$(0,0)$为函数$f(x,y)=xy$的驻点，但不是极值点.
- 偏导数不存在的点也可能是极值点.

  例如：$(0,0)$点为函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$的极小值点.

极值存在的充分条件

对一元函数，可根据二阶导数的符号来判别驻点是否极值点.

类似的，应用二元函数的Taylor公式和二次型的简单知识，可以得到二元函数判别驻点为极值点的充分条件.

极值存在的充分条件

对一元函数, 可根据二阶导数的符号来判别驻点是否极值点.

类似的, 应用二元函数的Taylor公式和二次型的简单知识, 可以得到二元函数判别驻点为极值点的充分条件.

定理 (二元函数极值存在的充分条件)

设(x_0, y_0)为f的驻点, f在该点附近具有二阶连续偏导数.
记$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 则

极值存在的充分条件

对一元函数, 可根据二阶导数的符号来判别驻点是否极值点.

类似的, 应用二元函数的Taylor公式和二次型的简单知识, 可以得到二元函数判别驻点为极值点的充分条件.

定理 (二元函数极值存在的充分条件)

设(x_0, y_0)为f的驻点, f在该点附近具有二阶连续偏导数.

记$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 则

(1) 当$AC - B^2 > 0$时有$f(x, y)$在(x_0, y_0)点有极值,

极值存在的充分条件

对一元函数, 可根据二阶导数的符号来判别驻点是否极值点.

类似的, 应用二元函数的Taylor公式和二次型的简单知识, 可以得到二元函数判别驻点为极值点的充分条件.

定理 (二元函数极值存在的充分条件)

设(x_0, y_0)为f的驻点, f在该点附近具有二阶连续偏导数.
记$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 则

(1) 当$AC - B^2 > 0$时有$f(x, y)$在(x_0, y_0)点有极值,

且$A > 0$时$f(x_0, y_0)$为极小值; $A < 0$时, $f(x_0, y_0)$为极大值;

极值存在的充分条件

对一元函数, 可根据二阶导数的符号来判别驻点是否极值点.

类似的, 应用二元函数的Taylor公式和二次型的简单知识, 可以得到二元函数判别驻点为极值点的充分条件.

定理 (二元函数极值存在的充分条件)

设(x_0, y_0)为f的驻点, f在该点附近具有二阶连续偏导数.
记$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 则

(1) 当$AC - B^2 > 0$时有$f(x, y)$在(x_0, y_0)点有极值,

且$A > 0$时$f(x_0, y_0)$为极小值; $A < 0$时, $f(x_0, y_0)$为极大值;

(2) $AC - B^2 < 0$时, $f(x_0, y_0)$不是极值;

极值存在的充分条件

对一元函数, 可根据二阶导数的符号来判别驻点是否极值点.

类似的, 应用二元函数的Taylor公式和二次型的简单知识, 可以得到二元函数判别驻点为极值点的充分条件.

定理 (二元函数极值存在的充分条件)

设(x_0, y_0)为f的驻点, f在该点附近具有二阶连续偏导数.
记$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 则

(1) 当$AC - B^2 > 0$时有$f(x, y)$在(x_0, y_0)点有极值,

且$A > 0$时$f(x_0, y_0)$为极小值; $A < 0$时, $f(x_0, y_0)$为极大值;

(2) $AC - B^2 < 0$时, $f(x_0, y_0)$不是极值;

(3) $AC - B^2 = 0$时, $f(x_0, y_0)$可能为极值, 也可能不是极值.

- 二元函数极值存在的充分条件推广到n 元函数:

- 二元函数极值存在的充分条件推广到n 元函数:

定理4.4 (极值的充分条件)

设n 元函数$f \in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, 且$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 为f 在点$\boldsymbol{x}_0$ Hesse矩阵.

- 二元函数极值存在的充分条件推广到n 元函数:

定理4.4 (极值的充分条件)

设n 元函数$f \in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, 且$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 为f 在点$\boldsymbol{x}_0$ Hesse矩阵.

若$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$正定, 则$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为f 的极小值;

- 二元函数极值存在的充分条件推广到n 元函数:

定理4.4 (极值的充分条件)

设n 元函数$f \in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, 且$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 为f 在点$\boldsymbol{x}_0$ Hesse矩阵.

若$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$正定, 则$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为f 的极小值;

若$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$负定, 则$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为f 的极大值.

求函数$z = f(x, y)$的极值的步骤

求函数$z = f(x, y)$的极值的步骤

- 求偏导数$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$;

求函数$z = f(x,y)$的极值的步骤

- 求偏导数$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$;
- 解方程组$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$, 求出所有驻点.

求函数$z=f(x,y)$的极值的步骤

- 求偏导数$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$;
- 解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$, 求出所有驻点.
- 对每个驻点(x,y), 分别求出

$$A=f_{xx}(x,y), B=f_{xy}(x,y), C=f_{yy}(x,y);$$

求函数$z=f(x,y)$的极值的步骤

- 求偏导数$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$;
- 解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$, 求出所有驻点.
- 对每个驻点(x,y), 分别求出
$$A=f_{xx}(x,y), B=f_{xy}(x,y), C=f_{yy}(x,y);$$
- 对每个驻点(x,y), 根据$AC-B^2$的符号, 按照定理的结论判定点(x,y)是否为极值点, 如是极值点, 是极大值点还是极小值点.

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm1,\pm1)$和$(0,0)$.

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm1,\pm1)$和$(0,0)$.

再由二阶偏导数$f_{xx}=12x^2-2, f_{xy}=-2, f_{yy}=12y^2-2$得:

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm1,\pm1)$和$(0,0)$.

再由二阶偏导数$f_{xx}=12x^2-2, f_{xy}=-2, f_{yy}=12y^2-2$得:

在$(\pm1,\pm1)$点处$AC-B^2=96>0$ 且$A=f_{xx}=10>0$,

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm1,\pm1)$和$(0,0)$.

再由二阶偏导数$f_{xx}=12x^2-2, f_{xy}=-2, f_{yy}=12y^2-2$得:

在$(\pm1,\pm1)$点处$AC-B^2=96>0$ 且$A=f_{xx}=10>0$,

所以$f(\pm1,\pm1)=-2$ 为极小值;

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm1,\pm1)$和$(0,0)$.

再由二阶偏导数$f_{xx}=12x^2-2,\ f_{xy}=-2,\ f_{yy}=12y^2-2$得:

在$(\pm1,\pm1)$点处$AC-B^2=96>0$ 且$A=f_{xx}=10>0$,

所以$f(\pm1,\pm1)=-2$ 为极小值;

在$(0,0)$点处$AC-B^2=0$, 无法用定理2来判定,

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm 1,\pm 1)$和$(0,0)$.

再由二阶偏导数$f_{xx}=12x^2-2, f_{xy}=-2, f_{yy}=12y^2-2$得:

在$(\pm 1,\pm 1)$点处$AC-B^2=96>0$ 且$A=f_{xx}=10>0$,

所以$f(\pm 1,\pm 1)=-2$ 为极小值;

在$(0,0)$点处$AC-B^2=0$, 无法用定理2来判定,

在曲线$y=-x$ 上$f(x,-x)=2x^4>0$,

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm1,\pm1)$和$(0,0)$.

再由二阶偏导数$f_{xx}=12x^2-2, f_{xy}=-2, f_{yy}=12y^2-2$得:

在$(\pm1,\pm1)$点处$AC-B^2=96>0$ 且$A=f_{xx}=10>0$,

所以$f(\pm1,\pm1)=-2$ 为极小值;

在$(0,0)$点处$AC-B^2=0$, 无法用定理2来判定,

在曲线$y=-x$ 上$f(x,-x)=2x^4>0$, 在曲线$x=0(|y|<1)$ 上$f(0,y)=y^2(y^2-1)<0$,

例. 讨论$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的极值.

解: 解方程组$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$,

得到驻点$(\pm1,\pm1)$和$(0,0)$.

再由二阶偏导数$f_{xx}=12x^2-2$, $f_{xy}=-2$, $f_{yy}=12y^2-2$得:

在$(\pm1,\pm1)$点处$AC-B^2=96>0$ 且$A=f_{xx}=10>0$,

所以$f(\pm1,\pm1)=-2$ 为极小值;

在$(0,0)$点处$AC-B^2=0$, 无法用定理2来判定,

在曲线$y=-x$ 上$f(x,-x)=2x^4>0$, 在曲线$x=0(|y|<1)$

上$f(0,y)=y^2(y^2-1)<0$, 因此$f(0,0)=0$不是极值.

最大值和最小值

最大值和最小值

几点说明:

最大值和最小值

几点说明:

1、连续函数在有界闭区域上必有最值.

最大值和最小值

几点说明:

1、连续函数在有界闭区域上必有最值.

2、最值点出现在有界闭区域的内部时必为极值点, 但在边界上的时候未必是极值点.

最大值和最小值

几点说明:

1、连续函数在有界闭区域上必有最值.

2、最值点出现在有界闭区域的内部时必为极值点, 但在边界上的时候未必是极值点.

3、求有界闭区域上最值的步骤:

最大值和最小值

几点说明:

1、连续函数在有界闭区域上必有最值.

2、最值点出现在有界闭区域的内部时必为极值点, 但在边界上的时候未必是极值点.

3、求有界闭区域上最值的步骤:

(1) 求出驻点;

最大值和最小值

几点说明:

1、连续函数在有界闭区域上必有最值.

2、最值点出现在有界闭区域的内部时必为极值点, 但在边界上的时候未必是极值点.

3、求有界闭区域上最值的步骤:

(1) 求出驻点;

(2) 求出边界上函数的最值;

最大值和最小值

几点说明:

1、连续函数在有界闭区域上必有最值.

2、最值点出现在有界闭区域的内部时必为极值点, 但在边界上的时候未必是极值点.

3、求有界闭区域上最值的步骤:

(1) 求出驻点;

(2) 求出边界上函数的最值;

(3) 比较边界上的最值和驻点的最值即可.

最大值和最小值

几点说明:

1、连续函数在有界闭区域上必有最值.

2、最值点出现在有界闭区域的内部时必为极值点, 但在边界上的时候未必是极值点.

3、求有界闭区域上最值的步骤:

(1) 求出驻点;

(2) 求出边界上函数的最值;

(3) 比较边界上的最值和驻点的最值即可.

4、非有界区域上的连续函数是否存在最值要具体讨论.

例1. 求函数$f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$在有界闭区域

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

例1. 求函数$f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$在有界闭区域

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

解: 由$\begin{cases} f_x=y-2x=0, \\ f_y=x-2y=0 \end{cases}$ 得D内驻点$(0,0)$, 且$f(0,0)=4$.

例1. 求函数$f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$在有界闭区域

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

解: 由$\begin{cases} f_x=y-2x=0, \\ f_y=x-2y=0 \end{cases}$ 得D内驻点$(0,0)$, 且$f(0,0)=4$.

在区域D的边界上, 令$x=\cos t, y=\sin t(t\in[0,2\pi])$, 则

例1. 求函数$f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$在有界闭区域

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

解: 由$\begin{cases} f_x=y-2x=0, \\ f_y=x-2y=0 \end{cases}$ 得D内驻点$(0,0)$, 且$f(0,0)=4$.

在区域D的边界上, 令$x=\cos t, y=\sin t(t\in[0,2\pi])$, 则

$$f(x,y)=f(t)=3+\sin t\cos t$$

例1. 求函数$f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$在有界闭区域

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

解: 由$\begin{cases} f_x=y-2x=0, \\ f_y=x-2y=0 \end{cases}$ 得D内驻点$(0,0)$, 且$f(0,0)=4$.

在区域D的边界上, 令$x=\cos t, y=\sin t (t\in[0,2\pi])$, 则

$$f(x,y)=f(t)=3+\sin t\cos t=3+\frac{1}{2}\sin 2t,$$

例1. 求函数$f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$在有界闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

解: 由$\begin{cases} f_x=y-2x=0, \\ f_y=x-2y=0 \end{cases}$ 得D内驻点$(0,0)$, 且$f(0,0)=4$.

在区域D的边界上, 令$x=\cos t, y=\sin t(t\in[0,2\pi])$, 则

$$f(x,y)=f(t)=3+\sin t\cos t=3+\frac{1}{2}\sin 2t,$$

当$t\in[0,2\pi]$时, $f(t)$的最大值为$\frac{7}{2}$, 最小值为$\frac{5}{2}$,

例1. 求函数$f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$在有界闭区域

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

解: 由$\begin{cases} f_x=y-2x=0, \\ f_y=x-2y=0 \end{cases}$ 得D内驻点$(0,0)$, 且$f(0,0)=4$.

在区域D的边界上, 令$x=\cos t, y=\sin t (t\in[0,2\pi])$, 则

$$f(x,y)=f(t)=3+\sin t\cos t=3+\frac{1}{2}\sin 2t,$$

当$t\in[0,2\pi]$时, $f(t)$的最大值为$\frac{7}{2}$, 最小值为$\frac{5}{2}$,

故函数在闭区域D的最大值为4, 最小值为$\frac{5}{2}$.

例2. 在以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形所围成的闭区域上求一点, 使它到三个顶点的距离的平方和达到最大和最小, 并求出最值.

例2. 在以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形所围成的闭区域上求一点, 使它到三个顶点的距离的平方和达到最大和最小, 并求出最值.

解: 设$P(x,y)$为$\triangle ABC$上一点, 则P到顶点的距离平方和为

例2. 在以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形所围成的闭区域上求一点, 使它到三个顶点的距离的平方和达到最大和最小, 并求出最值.

解: 设$P(x,y)$为$\triangle ABC$上一点, 则P到顶点的距离平方和为

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2$$

例2. 在以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形所围成的闭区域上求一点, 使它到三个顶点的距离的平方和达到最大和最小, 并求出最值.

解: 设$P(x,y)$为$\triangle ABC$上一点, 则P到顶点的距离平方和为

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2$$

$$= 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2.$$

例2. 在以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形所围成的闭区域上求一点, 使它到三个顶点的距离的平方和达到最大和最小, 并求出最值.

解: 设$P(x,y)$为$\triangle ABC$上一点, 则P到顶点的距离平方和为

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2$$
$$= 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2.$$

先求函数f在$\triangle ABC$内部的驻点.

例2. 在以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形所围成的闭区域上求一点, 使它到三个顶点的距离的平方和达到最大和最小, 并求出最值.

解: 设$P(x,y)$为$\triangle ABC$上一点, 则P到顶点的距离平方和为

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2$$
$$= 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2.$$

先求函数f在$\triangle ABC$内部的驻点.

解方程组$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = 6y - 2 = 0 \end{cases}$,

例2. 在以$O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$为顶点的三角形所围成的闭区域上求一点, 使它到三个顶点的距离的平方和达到最大和最小, 并求出最值.

解: 设$P(x,y)$为$\triangle ABC$上一点, 则P到顶点的距离平方和为

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2 \\ &= 3x^2+3y^2-2x-2y+2. \end{aligned}$$

先求函数f在$\triangle ABC$内部的驻点.

解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=6x-2=0 \\ f_y(x,y)=6y-2=0 \end{cases}$,

得到$\triangle ABC$内的驻点$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, 且$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$.

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

线段$OA: y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 因此$f=f(x)=3x^2-2x+2$,

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

线段$OA: y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 因此$f=f(x)=3x^2-2x+2$,

令$f'(x)=6x-2=0$, 则$x=\dfrac{1}{3}$. 比较$f(0)=2, f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{5}{3}$,

$f(1)=3$可得, 最大值为$f(1)=3$, 最小值为$f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{5}{3}$.

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

线段$OA: y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 因此$f=f(x)=3x^2-2x+2$,

令$f'(x)=6x-2=0$, 则$x=\frac{1}{3}$. 比较$f(0)=2$, $f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$,

$f(1)=3$可得, 最大值为$f(1)=3$, 最小值为$f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$.

线段$OB: x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$, $f=f(y)=3y^2-2y+2$, 结论同上.

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

线段$OA: y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 因此$f=f(x)=3x^2-2x+2$,

令$f'(x)=6x-2=0$, 则$x=\frac{1}{3}$. 比较$f(0)=2$, $f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$,

$f(1)=3$可得, 最大值为$f(1)=3$, 最小值为$f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$.

线段$OB: x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$, $f=f(y)=3y^2-2y+2$, 结论同上.

线段$AB: x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$, $f=f(x)=6x^2-6x+3$,

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

线段$OA: y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 因此$f=f(x)=3x^2-2x+2$,

令$f'(x)=6x-2=0$, 则$x=\frac{1}{3}$. 比较$f(0)=2$, $f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$,

$f(1)=3$可得, 最大值为$f(1)=3$, 最小值为$f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$.

线段$OB: x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$, $f=f(y)=3y^2-2y+2$, 结论同上.

线段$AB: x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$, $f=f(x)=6x^2-6x+3$,

可得此时最大值为$f(1)=f(0)=3$, 最小值为$f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$.

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

线段$OA: y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 因此$f=f(x)=3x^2-2x+2$,

令$f'(x)=6x-2=0$, 则$x=\dfrac{1}{3}$. 比较$f(0)=2, f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{5}{3}$,

$f(1)=3$可得, 最大值为$f(1)=3$, 最小值为$f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{5}{3}$.

线段$OB: x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$, $f=f(y)=3y^2-2y+2$, 结论同上.

线段$AB: x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$, $f=f(x)=6x^2-6x+3$,

可得此时最大值为$f(1)=f(0)=3$, 最小值为$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{2}$.

综上, A, B两点到三个顶点的距离平方和最大, 最大值为3;

再讨论函数f在区域边界上的最大值与最小值.

线段$OA: y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 因此$f=f(x)=3x^2-2x+2$,

令$f'(x)=6x-2=0$, 则$x=\frac{1}{3}$. 比较$f(0)=2, f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$,

$f(1)=3$可得, 最大值为$f(1)=3$, 最小值为$f(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$.

线段$OB: x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$, $f=f(y)=3y^2-2y+2$, 结论同上.

线段$AB: x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$, $f=f(x)=6x^2-6x+3$,

可得此时最大值为$f(1)=f(0)=3$, 最小值为$f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$.

综上, A, B两点到三个顶点的距离平方和最大, 最大值为3;

点$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$到三个顶点的距离平方和最小, 最小值为$\frac{4}{3}$.

条件极值

对自变量仅仅限制在函数的定义域内，此外无其他约束条件的极值问题，称为无条件极值.

条件极值

对自变量仅仅限制在函数的定义域内，此外无其他约束条件的极值问题，称为无条件极值. 在实际问题中，在考虑函数的极值问题时，经常需要对函数的自变量附加一定的条件.

条件极值

对自变量仅仅限制在函数的定义域内, 此外无其他约束条件的极值问题, 称为无条件极值. 在实际问题中, 在考虑函数的极值问题时, 经常需要对函数的自变量附加一定的条件.

例如, 求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$的距离,

条件极值

对自变量仅仅限制在函数的定义域内, 此外无其他约束条件的极值问题, 称为无条件极值. 在实际问题中, 在考虑函数的极值问题时, 经常需要对函数的自变量附加一定的条件.

例如, 求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$的距离, 就是在限制条件$x+y+z=1$和$x+2y+3z=6$的情况下, 计算函数$f(x,y,z)$ $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的最小值.

条件极值

对自变量仅仅限制在函数的定义域内，此外无其他约束条件的极值问题，称为无条件极值. 在实际问题中，在考虑函数的极值问题时，经常需要对函数的自变量附加一定的条件.

例如，求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$的距离，就是在限制条件$x+y+z=1$和$x+2y+3z=6$的情况下，计算函数$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$的最小值. 像这类对自变量有附加条件的极值问题称为条件极值.

条件极值

对自变量仅仅限制在函数的定义域内, 此外无其他约束条件的极值问题, 称为无条件极值. 在实际问题中, 在考虑函数的极值问题时, 经常需要对函数的自变量附加一定的条件.

例如, 求原点到直线 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 的距离, 就是在限制条件 $x+y+z=1$ 和 $x+2y+3z=6$ 的情况下, 计算函数 $f(x,y,z)$ $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的最小值. 像这类对自变量有附加条件的极值问题称为条件极值.

条件极值

在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 的限制下, 求函数 $u=f(x,y,z)$ 的极值，叫做条件极值问题, 方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 叫做约束方程.

条件极值的求解——拉格朗日乘数法

设$\varphi(x, y, z), f(x, y, z)$在所考虑区域内有连续偏导数，且$\varphi$的偏导数不全为零.

条件极值的求解——拉格朗日乘数法

设$\varphi(x,y,z), f(x,y,z)$在所考虑区域内有连续偏导数，且φ的偏导数不全为零．不妨设$\varphi_z \neq 0$，由隐函数存在定理，$\varphi(x,y,z)=0$确定了隐函数$z=z(x,y)$，且

条件极值的求解——拉格朗日乘数法

设$\varphi(x,y,z), f(x,y,z)$在所考虑区域内有连续偏导数，且φ的偏导数不全为零. 不妨设$\varphi_z\neq 0$, 由隐函数存在定理, $\varphi(x,y,z)=0$确定了隐函数$z=z(x,y)$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_z}\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi_y}{\varphi_z}.$$

条件极值的求解——拉格朗日乘数法

设$\varphi(x,y,z), f(x,y,z)$在所考虑区域内有连续偏导数，且φ的偏导数不全为零．不妨设$\varphi_z \neq 0$，由隐函数存在定理，$\varphi(x,y,z)=0$确定了隐函数$z=z(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}.$$

将隐函数$z=z(x,y)$代入目标函数，原问题就转化为函数$u=f(x,y,z(x,y))$ 的无条件极值问题．

条件极值的求解——拉格朗日乘数法

设$\varphi(x,y,z), f(x,y,z)$在所考虑区域内有连续偏导数，且φ的偏导数不全为零．不妨设$\varphi_z \neq 0$，由隐函数存在定理，$\varphi(x,y,z)=0$确定了隐函数$z=z(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}.$$

将隐函数$z=z(x,y)$代入目标函数，原问题就转化为函数$u=f(x,y,z(x,y))$ 的无条件极值问题．

于是 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f_x + f_z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = f_x - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = f_y + f_z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = f_y - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_y \end{cases}$$

由极值存在的必要条件得

由极值存在的必要条件得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} f_x - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_x = 0 \\ f_y - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

由极值存在的必要条件得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} f_x - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_x = 0 \\ f_y - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

$$\text{令} -\frac{f_z}{\varphi_z} = \lambda, \text{方程组可改写为} \begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ f_z + \lambda\varphi_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

由极值存在的必要条件得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} f_x - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_x = 0 \\ f_y - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

令$-\dfrac{f_z}{\varphi_z} = \lambda$, 方程组可改写为$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ f_z + \lambda \varphi_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$,

从方程组中求解出x_0, y_0, z_0, λ, 则(x_0, y_0, z_0)就是可能极值点.

由极值存在的必要条件得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} f_x - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_x = 0 \\ f_y - \dfrac{f_z}{\varphi_z} \cdot \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

令$-\dfrac{f_z}{\varphi_z} = \lambda$, 方程组可改写为
$$\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ f_z + \lambda\varphi_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

从方程组中求解出x_0, y_0, z_0, λ, 则(x_0, y_0, z_0)就是可能极值点.

这种方法称为拉格朗日乘数法.

上面的方程组表示了函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

的四个一阶偏导数等于0. 故函数$F(x,y,z,\lambda)$称为拉格朗日函数, 数λ称为拉格朗日乘数.

上面的方程组表示了函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

的四个一阶偏导数等于0. 故函数$F(x,y,z,\lambda)$称为拉格朗日函数, 数λ称为拉格朗日乘数.

用拉格朗日乘数法求条件极值的步骤:

上面的方程组表示了函数

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$$

的四个一阶偏导数等于0. 故函数$F(x,y,z,\lambda)$称为拉格朗日函数, 数λ称为拉格朗日乘数.

用拉格朗日乘数法求条件极值的步骤:

(1) 确定问题的目标函数$f(x,y,z)$和约束条件$\varphi(x,y,z) = 0$;

上面的方程组表示了函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

的四个一阶偏导数等于0. 故函数$F(x,y,z,\lambda)$称为拉格朗日函数, 数λ称为拉格朗日乘数.

用拉格朗日乘数法求条件极值的步骤:

(1) 确定问题的目标函数$f(x,y,z)$和约束条件$\varphi(x,y,z)=0$;

(2) 构造拉格朗日函数$F(x,y,z,\lambda)$;

上面的方程组表示了函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

的四个一阶偏导数等于0. 故函数$F(x,y,z,\lambda)$称为拉格朗日函数, 数λ称为拉格朗日乘数.

用拉格朗日乘数法求条件极值的步骤:

(1) 确定问题的目标函数$f(x,y,z)$和约束条件$\varphi(x,y,z)=0$;

(2) 构造拉格朗日函数$F(x,y,z,\lambda)$;

(3) 求解由$F_x=0, F_y=0, F_z=0, F_\lambda=0$所构成的方程组, 得到可能极值点.

说明:

说明:

- 若由问题的实际意义知必存在条件极值, 且只有唯一的驻点, 则该驻点即为所求的极值点.

说明:

- 若由问题的实际意义知必存在条件极值, 且只有唯一的驻点, 则该驻点即为所求的极值点.
- 拉格朗日乘数法可推广到自变量多于三个, 约束条件多于一个的情形.

说明:

- 若由问题的实际意义知必存在条件极值, 且只有唯一的驻点, 则该驻点即为所求的极值点.
- 拉格朗日乘数法可推广到自变量多于三个, 约束条件多于一个的情形.

  例如: 求函数$u=f(x,y,z,t)$在约束条件$\varphi(x,y,z,t)=0$和$\psi(x,y,z,t)=0$下的极值, 可以构造辅助函数:

说明:

- 若由问题的实际意义知必存在条件极值, 且只有唯一的驻点, 则该驻点即为所求的极值点.
- 拉格朗日乘数法可推广到自变量多于三个, 约束条件多于一个的情形.

例如: 求函数$u=f(x,y,z,t)$在约束条件$\varphi(x,y,z,t)=0$和$\psi(x,y,z,t)=0$下的极值, 可以构造辅助函数:

$$F(x,y,z,t,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)$$
$$+\lambda_2\psi(x,y,z,t).$$

例1. 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

例1. 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

解: 问题化为$\begin{cases} \max & V = xyz \ (x>0, y>0, z>0) \\ \text{s.t} & 2xy + 2yz + 2xz = a^2 \end{cases}$,

例1. 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

解: 问题化为$\begin{cases} \max & V = xyz \ (x>0, y>0, z>0) \\ \text{s.t} & 2xy+2yz+2xz = a^2 \end{cases}$,

作拉格朗日函数$F = xyz + \lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$,

例1. 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

解: 问题化为$\begin{cases} \max & V = xyz \ (x>0, y>0, z>0) \\ \text{s.t} & 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases}$,

作拉格朗日函数$F = xyz + \lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$,

解方程组$\begin{cases} F_x = yz + \lambda(2y+2z) = 0 \\ F_y = xz + \lambda(2x+2z) = 0 \\ F_z = xy + \lambda(2x+2y) = 0 \\ 2xy+2yz+2xz-a^2 = 0 \end{cases}$,

例1. 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

解: 问题化为$\begin{cases} \max \quad V = xyz \ (x>0, y>0, z>0) \\ \text{s.t} \quad 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases}$,

作拉格朗日函数$F = xyz + \lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$,

解方程组$\begin{cases} F_x = yz + \lambda(2y+2z) = 0 \\ F_y = xz + \lambda(2x+2z) = 0 \\ F_z = xy + \lambda(2x+2y) = 0 \\ 2xy+2yz+2xz-a^2 = 0 \end{cases}$, 可得$x = y = z = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

例1. 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

解: 问题化为$\begin{cases} \max & V = xyz \ (x>0, y>0, z>0) \\ \text{s.t} & 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases}$,

作拉格朗日函数$F = xyz + \lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$,

解方程组$\begin{cases} F_x = yz + \lambda(2y+2z) = 0 \\ F_y = xz + \lambda(2x+2z) = 0 \\ F_z = xy + \lambda(2x+2y) = 0 \\ 2xy+2yz+2xz-a^2 = 0 \end{cases}$, 可得$x = y = z = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

由于在定义域内函数只有唯一的驻点, 又考虑到问题的实际意义,

例1. 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

解: 问题化为$\begin{cases} \max & V = xyz \ (x>0, y>0, z>0) \\ \text{s.t} & 2xy+2yz+2xz = a^2 \end{cases}$,

作拉格朗日函数$F = xyz + \lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$,

解方程组$\begin{cases} F_x = yz + \lambda(2y+2z) = 0 \\ F_y = xz + \lambda(2x+2z) = 0 \\ F_z = xy + \lambda(2x+2y) = 0 \\ 2xy+2yz+2xz-a^2 = 0 \end{cases}$, 可得$x = y = z = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

由于在定义域内函数只有唯一的驻点, 又考虑到问题的实际意义,

故当长、宽、高均为$\dfrac{a}{\sqrt{6}}$时, 有最大体积$V_{max} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{36}$.

例2. 在旋转椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上, 求距离平面$2x+y-z=6$的最近点和最远点.

例2. 在旋转椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上, 求距离平面

$2x+y-z=6$的最近点和最远点.

解: 椭球面上的点(x,y,z)到平面$2x+y-z=6$的距离为

例2. 在旋转椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上, 求距离平面

$2x+y-z=6$的最近点和最远点.

解: 椭球面上的点(x,y,z)到平面$2x+y-z=6$的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|2x+y-z-6|.$$

例2. 在旋转椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上, 求距离平面

$2x+y-z=6$的最近点和最远点.

解: 椭球面上的点(x,y,z)到平面$2x+y-z=6$的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|2x+y-z-6|.$$

于是, 问题转化为求函数$f(x,y,z)=6d^2=(2x+y-z-6)^2$

在约束条件$2x^2+y^2+z^2=1$下的最大值与最小值.

例2. 在旋转椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上, 求距离平面

$2x+y-z=6$的最近点和最远点.

解: 椭球面上的点(x,y,z)到平面$2x+y-z=6$的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|2x+y-z-6|.$$

于是, 问题转化为求函数$f(x,y,z)=6d^2=(2x+y-z-6)^2$

在约束条件$2x^2+y^2+z^2=1$下的最大值与最小值.

作拉格朗日函数

例2. 在旋转椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上, 求距离平面

$2x+y-z=6$的最近点和最远点.

解: 椭球面上的点(x,y,z)到平面$2x+y-z=6$的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|2x+y-z-6|.$$

于是, 问题转化为求函数$f(x,y,z)=6d^2=(2x+y-z-6)^2$

在约束条件$2x^2+y^2+z^2=1$下的最大值与最小值.

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=(2x+y-z-6)^2+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1),$$

求解方程组
$$\begin{cases} F_x = 4(2x+y-z-6)+4\lambda x = 0 \\ F_y = 2(2x+y-z-6)+2\lambda y = 0 \\ F_z = -2(2x+y-z-6)+2\lambda z = 0 \\ 2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases},$$

求解方程组$\begin{cases} F_x = 4(2x+y-z-6)+4\lambda x = 0 \\ F_y = 2(2x+y-z-6)+2\lambda y = 0 \\ F_z = -2(2x+y-z-6)+2\lambda z = 0 \\ 2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$,

由前面三式可得$x=y=-z$, 代入第四式可以求得:

求解方程组
$$\begin{cases} F_x = 4(2x+y-z-6)+4\lambda x = 0 \\ F_y = 2(2x+y-z-6)+2\lambda y = 0 \\ F_z = -2(2x+y-z-6)+2\lambda z = 0 \\ 2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases},$$

由前面三式可得$x=y=-z$, 代入第四式可以求得:

$$x=y=-z=\pm\frac{1}{2},$$

求解方程组
$$\begin{cases} F_x = 4(2x+y-z-6)+4\lambda x = 0 \\ F_y = 2(2x+y-z-6)+2\lambda y = 0 \\ F_z = -2(2x+y-z-6)+2\lambda z = 0 \\ 2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases},$$

由前面三式可得$x=y=-z$, 代入第四式可以求得:

$$x=y=-z=\pm\frac{1}{2},$$

于是可得曲面上的两点$A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$和$B=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

求解方程组 $\begin{cases} F_x = 4(2x+y-z-6)+4\lambda x = 0 \\ F_y = 2(2x+y-z-6)+2\lambda y = 0 \\ F_z = -2(2x+y-z-6)+2\lambda z = 0 \\ 2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$,

由前面三式可得$x=y=-z$, 代入第四式可以求得:

$$x=y=-z=\pm\frac{1}{2},$$

于是可得曲面上的两点$A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$和$B=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

则$d_A=\frac{2}{3}\sqrt{6}$, $d_B=\frac{4}{3}\sqrt{6}$.

求解方程组
$$\begin{cases} F_x = 4(2x+y-z-6)+4\lambda x = 0 \\ F_y = 2(2x+y-z-6)+2\lambda y = 0 \\ F_z = -2(2x+y-z-6)+2\lambda z = 0 \\ 2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases},$$

由前面三式可得$x=y=-z$, 代入第四式可以求得:
$$x=y=-z=\pm\frac{1}{2},$$

于是可得曲面上的两点$A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$和$B=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

则$d_A=\frac{2}{3}\sqrt{6}$, $d_B=\frac{4}{3}\sqrt{6}$. 根据问题的实际意义, 可得最近点为$A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, 最远点为$B=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

例3. 求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$的距离.

例3. 求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 的距离.

解: 原问题等价于求函数$d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 下的最小值. 为此, 作拉格朗日函数

例3. 求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 的距离.

解: 原问题等价于求函数$d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 下的最小值. 为此, 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x+2y+3z-6),$$

例3. 求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 的距离.

解: 原问题等价于求函数$d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 下的最小值. 为此, 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x+2y+3z-6),$$

解方程组$\begin{cases} F_x=2x+\lambda+\mu=0, \\ F_y=2y+\lambda+2\mu=0, \\ F_z=2z+\lambda+3\mu=0, \\ x+y+z-1=0, \\ x+2y+3z-6=0 \end{cases}$

可得$x=-\dfrac{5}{3},\ \ y=\dfrac{1}{3},\ \ z=\dfrac{7}{3},\ \ \lambda=\dfrac{22}{3},\ \ \mu=-4.$

可得$x = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{7}{3}, \quad \lambda = \frac{22}{3}, \quad \mu = -4.$

由于此问题求的是点到直线的距离, 因而目标函数的最小值一定存在, 于是求得的唯一的驻点$(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3})$是最小值点,

可得$x=-\dfrac{5}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{7}{3}$, $\lambda=\dfrac{22}{3}$, $\mu=-4$.

由于此问题求的是点到直线的距离, 因而目标函数的最小值一定存在, 于是求得的唯一的驻点$(-\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3})$是最小值点,

即原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$的距离为

可得$x=-\frac{5}{3},\ \ y=\frac{1}{3},\ \ z=\frac{7}{3},\ \ \lambda=\frac{22}{3},\ \ \mu=-4.$

由于此问题求的是点到直线的距离, 因而目标函数的最小值一定存在, 于是求得的唯一的驻点$(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3})$是最小值点,

即原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$的距离为

$$\sqrt{d(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3})}=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

例4. 求函数$z=x^2+y^2$在圆域

$$D=\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9\}$$

上的最大和最小值.

例4. 求函数$z = x^2 + y^2$在圆域

$$D = \{(x, y) | (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant 9\}$$

上的最大和最小值.

解: 首先考察函数在D内部$\{(x, y) | x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 < 9\}$的极值, 这是无条件极值问题.

例4. 求函数$z=x^2+y^2$在圆域

$$D=\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9\}$$

上的最大和最小值.

解: 首先考察函数在D内部$\{(x,y)|x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2<9\}$的极值, 这是无条件极值问题.

解线性方程组$\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$,

例4. 求函数$z=x^2+y^2$在圆域

$$D=\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9\}$$

上的最大和最小值.

解: 首先考察函数在D内部$\{(x,y)|x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2<9\}$的极值, 这是无条件极值问题.

解线性方程组$\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$, 可以得到唯一解$x=0, y=0$. 于是$(0,0)$点是$D$内部的驻点, 且$f(0,0)=0$.

例4. 求函数$z=x^2+y^2$在圆域

$$D=\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9\}$$

上的最大和最小值.

解: 首先考察函数在D内部$\{(x,y)|x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2<9\}$的极值, 这是无条件极值问题.

解线性方程组$\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$, 可以得到唯一解$x=0, y=0$. 于是$(0,0)$点是$D$内部的驻点, 且$f(0,0)=0$.

再考察函数f在的边界$\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\}$上的极值, 这可以视为条件极值问题来求解. 为此作Lagrange 函数

例4. 求函数$z=x^2+y^2$在圆域

$$D=\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9\}$$

上的最大和最小值.

解: 首先考察函数在D内部$\{(x,y)|x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2<9\}$的极值, 这是无条件极值问题.

解线性方程组$\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$, 可以得到唯一解$x=0, y=0$. 于是$(0,0)$点是$D$内部的驻点, 且$f(0,0)=0$.

再考察函数f在的边界$\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\}$上的极值, 这可以视为条件极值问题来求解. 为此作Lagrange 函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda[x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9],$$

$$\text{求解方程组}\begin{cases} 2x + 2\lambda(x - \sqrt{2}) = 0 \\ 2y + 2\lambda(y - \sqrt{2}) = 0 \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9 = 0 \end{cases},$$

求解方程组$\begin{cases} 2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0 \\ 2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0 \\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9=0 \end{cases}$,

可得$x=y=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ 或 $x=y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

求解方程组$\begin{cases} 2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0 \\ 2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0 \\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9=0 \end{cases}$,

可得$x=y=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 或 $x=y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

因为f在$\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\}$上可取到最值,

求解方程组$\begin{cases} 2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0 \\ 2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0 \\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9=0 \end{cases}$,

可得$x=y=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 或 $x=y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

因为f在$\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\}$上可取到最值,

所以f在D的边界上的最大值为$f(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2})=25$;

最小值为$f(-\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2})=1$.

求解方程组
$$\begin{cases} 2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0 \\ 2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0 \\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9=0 \end{cases},$$

可得$x=y=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ 或 $x=y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

因为f在$\{(x,y)|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\}$上可取到最值,

所以f在D的边界上的最大值为$f(\dfrac{5}{2}\sqrt{2},\dfrac{5}{2}\sqrt{2})=25$;

最小值为$f(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2},-\dfrac{1}{2}\sqrt{2})=1$.

再与f在D内部驻点的函数值$f(0,0)=0$比较, 则可得所求最大值为25, 最小值为0.