工科数学分析

贺 丹 (东南大学)

7.3 第二型曲面积分

本节主要内容:

- 有向曲面的概念
- 第二型曲面积分的概念与性质
- 第二型曲面积分的计算

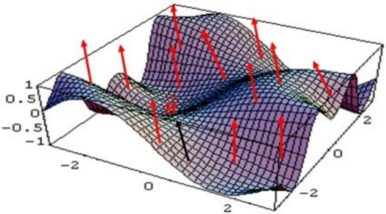
有向曲面的概念

有向曲面的概念

设Σ为光滑曲面，过Σ上任一点P作曲面的法向量并选定其指向，如果当点P在Σ上任意连续移动而不越过其边界再回到原来的位置，法向量的指向不变，则称这样的曲面为双侧曲面，否则称为单侧曲面.

有向曲面的概念

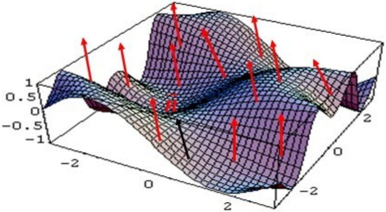
设Σ为光滑曲面，过Σ上任一点P作曲面的法向量并选定其指向，如果当点P在Σ上任意连续移动而不越过其边界再回到原来的位置，法向量的指向不变，则称这样的曲面为**双侧曲面**，否则称为**单侧曲面**.



典型的双侧曲面

有向曲面的概念

设Σ为光滑曲面, 过Σ上任一点P作曲面的法向量并选定其指向, 如果当点P在Σ上任意连续移动而不越过其边界再回到原来的位置, 法向量的指向不变, 则称这样的曲面为**双侧曲面**, 否则称为**单侧曲面**.



典型的双侧曲面

单侧曲面: 莫比乌斯带

对于双侧曲面, 可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧, 称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为有向曲面.

对于双侧曲面, 可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧, 称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为有向曲面.

- 由方程$z=z(x,y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

对于双侧曲面，可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧，称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为**有向曲面**.

- 由方程$z = z(x, y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上，即法向量为

对于双侧曲面, 可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧, 称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为有向曲面.

- 由方程$z = z(x, y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上, 即法向量为

$$\{-z_x, -z_y, 1\}$$

对于双侧曲面, 可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧, 称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为有向曲面.

- 由方程$z=z(x,y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上, 即法向量为

$$\{-z_x,-z_y,1\}$$

  下侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝下, 即法向量为

对于双侧曲面，可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧，称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为有向曲面.

- 由方程$z=z(x,y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上，即法向量为

$$\{-z_x,-z_y,1\}$$

  下侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝下，即法向量为

$$\{z_x,z_y,-1\}$$

对于双侧曲面, 可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧, 称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为有向曲面.

- 由方程$z=z(x,y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上, 即法向量为

  $$\{-z_x,-z_y,1\}$$

  下侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝下, 即法向量为

  $$\{z_x,z_y,-1\}$$

- 由方程$x=x(y,z)$表示的曲面Σ可分为前侧和后侧;

对于双侧曲面, 可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧, 称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为**有向曲面**.

- 由方程$z=z(x,y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上, 即法向量为
  $$\{-z_x,-z_y,1\}$$
  下侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝下, 即法向量为
  $$\{z_x,z_y,-1\}$$

- 由方程$x=x(y,z)$表示的曲面Σ可分为前侧和后侧;
- 由方程$y=y(x,z)$表示的曲面Σ可分为左侧和右侧;

对于双侧曲面, 可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧, 称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为**有向曲面**.

- 由方程$z=z(x,y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上, 即法向量为
  $$\{-z_x,-z_y,1\}$$
  下侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝下, 即法向量为
  $$\{z_x,z_y,-1\}$$

- 由方程$x=x(y,z)$表示的曲面Σ可分为前侧和后侧;
- 由方程$y=y(x,z)$表示的曲面Σ可分为左侧和右侧;
- 若是封闭曲面, 则分为内侧和外侧,

对于双侧曲面，可以通过曲面上法向量的指向来区别曲面的两侧，称确定了法向量指向(或选定了侧)的曲面为**有向曲面**.

- 由方程$z = z(x, y)$表示的曲面Σ可分为上侧和下侧

  上侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝上，即法向量为

  $$\{-z_x, -z_y, 1\}$$

  下侧是指Σ上任一点处的法向量指向朝下，即法向量为

  $$\{z_x, z_y, -1\}$$

- 由方程$x = x(y, z)$表示的曲面Σ可分为前侧和后侧;
- 由方程$y = y(x, z)$表示的曲面Σ可分为左侧和右侧;
- 若是封闭曲面，则分为内侧和外侧，例如球面.

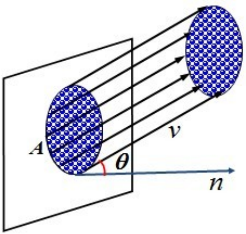
第二型曲面积分的物理背景——流体流向曲面一侧的流量问题

第二型曲面积分的物理背景——流体流向曲面一侧的流量问题

- 流速为常向量$\vec{v}$, Σ为平面上面积为A的一块有向区域, 则单位时间流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ为

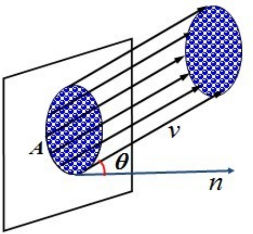
第二型曲面积分的物理背景——流体流向曲面一侧的流量问题

- 流速为常向量$\vec{v}$, Σ为平面上面积为A的一块有向区域, 则单位时间流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ为



第二型曲面积分的物理背景——流体流向曲面一侧的流量问题

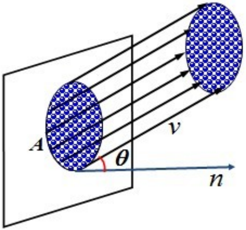
- 流速为常向量$\vec{v}$, Σ为平面上面积为A的一块有向区域, 则单位时间流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ为



$$\Phi = A|\vec{v}|\cos\theta = A\vec{v}\cdot\vec{n}$$

第二型曲面积分的物理背景——流体流向曲面一侧的流量问题

- 流速为常向量$\vec{v}$, Σ为平面上面积为A的一块有向区域, 则单位时间流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ为



$$\Phi = A|\vec{v}|\cos\theta = A\vec{v}\cdot\vec{n}$$

其中$\vec{n}$为Σ指定侧的单位法向量.

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面, 求单位时间内流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ.

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面, 求单位时间内流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ.

(1) 分割:

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面, 求单位时间内流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ.

(1) 分割: 将Σ任意分成n小块$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面, 求单位时间内流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ.

(1) 分割：将Σ任意分成n小块$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.

(2) 近似：

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面, 求单位时间内流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ.

(1) **分割**：将Σ任意分成n小块$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.

(2) **近似**：若分割很细, 可用$\Delta\Sigma_i$中任一点M_i处的流速

$\vec{v}_i=\vec{v}(M_i)$ 作为流速的近似,

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面, 求单位时间内流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ.

(1) **分割**： 将Σ任意分成n小块$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.

(2) **近似**： 若分割很细, 可用$\Delta\Sigma_i$中任一点M_i处的流速 $\vec{v}_i=\vec{v}(M_i)$ 作为流速的近似, 用$\Delta\Sigma_i$在点M_i处的单位法向量 $\vec{n}_i=\vec{n}(M_i)$来近似其他各点的单位法向量,

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面, 求单位时间内流过Σ, 并流向指定侧的流量Φ.

(1) **分割**: 将Σ任意分成n小块$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.

(2) **近似**: 若分割很细, 可用$\Delta\Sigma_i$中任一点M_i处的流速 $\vec{v}_i=\vec{v}(M_i)$ 作为流速的近似, 用$\Delta\Sigma_i$在点M_i处的单位法向量 $\vec{n}_i=\vec{n}(M_i)$来近似其他各点的单位法向量,于是流体流过$\Delta\Sigma_i$ 并流向指定侧的流量$\Delta\Phi_i$的近似为:

- 设一稳定流动(即流体的流速不随时间而变化)的不可压缩(即流体的密度不随时间而变化)流体的流速为

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

Σ是一块光滑的有向曲面，求单位时间内流过Σ，并流向指定侧的流量Φ.

(1) 分割：将Σ任意分成n小块$\Delta\Sigma_i$，$\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.

(2) 近似：若分割很细，可用$\Delta\Sigma_i$中任一点M_i处的流速 $\vec{v}_i=\vec{v}(M_i)$ 作为流速的近似，用$\Delta\Sigma_i$在点M_i处的单位法向量 $\vec{n}_i=\vec{n}(M_i)$来近似其他各点的单位法向量，于是流体流过$\Delta\Sigma_i$并流向指定侧的流量$\Delta\Phi_i$的近似为：$\Delta\Phi_i=(\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i)\Delta S_i$.

(3) 求和

(3) 求和

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_i) \Delta S_i$$

(3) 求和

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_i) \Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i$$

(3) 求和

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_i) \Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i$$

其中$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $\{\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i\}$为曲面在点$M_i$的与曲面方向一致的单位法向量.

(3) 求和

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_i) \Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i$$

其中$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $\{\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i\}$为曲面在点$M_i$的与曲面方向一致的单位法向量.

(4) 取极限

(3) 求和

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_i)\Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

其中$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $\{\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i\}$为曲面在点$M_i$的与曲面方向一致的单位法向量.

(4) 取极限 令$d = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Sigma_i$的直径$\}$, 则流量为

(3) 求和

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_i)\Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

其中$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $\{\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i\}$为曲面在点$M_i$的与曲面方向一致的单位法向量.

(4) 取极限 令$d = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Sigma_i$的直径$\}$, 则流量为

$$\Phi = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{\boldsymbol{v}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_i)\Delta S_i$$

第二型曲面积分的定义

第二型曲面积分的定义

定义7.2 (第二型曲面积分)

第二型曲面积分的定义

定义7.2 (第二型曲面积分)

设Σ是一块光滑的有向曲面, 向量函数$\vec{F}(M)$ 在Σ上有定义.

将Σ任意分成n块小有向曲面$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.

令$d = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Sigma_i\text{的直径}\}$,

第二型曲面积分的定义

定义7.2 (第二型曲面积分)

设Σ是一块光滑的有向曲面，向量函数$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$ 在Σ上有定义.
将Σ任意分成n块小有向曲面$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i.
令$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Sigma_i$的直径$\}$, 任取点$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$, 作和
式$\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}(M_i)\cdot[\vec{\boldsymbol{n}}(M_i)\Delta S_i]$, 其中$\vec{\boldsymbol{n}}(M_i)$表示$\Sigma$在点$M_i$处指定侧的单位法向量.

第二型曲面积分的定义

定义7.2 (第二型曲面积分)

设Σ是一块光滑的有向曲面，向量函数$\vec{F}(M)$ 在Σ上有定义．将Σ任意分成n块小有向曲面$\Delta\Sigma_i$，$\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i．令$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Sigma_i\text{的直径}\}$，任取点$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}(M_i)\cdot[\vec{n}(M_i)\Delta S_i]$，其中$\vec{n}(M_i)$表示$\Sigma$在点$M_i$处指定侧的单位法向量．如果无论将$\Sigma$如何分割，点$M_i\in\Delta\Sigma_i$如何选取，当$d\to 0$时，上述和式有确定的极限，则称向量函数$\vec{F}$在$\Sigma$上可积，并称该极限值为向量函数$\vec{F}$在有向曲面$\Sigma$的第二型曲面积分，简称为第二型曲面积分，记为$\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}(M)\cdot\vec{n}(M)\mathrm{d}S$，即

第二型曲面积分的定义

定义7.2 (第二型曲面积分)

设Σ是一块光滑的有向曲面, 向量函数$\vec{F}(M)$ 在Σ上有定义. 将Σ任意分成n块小有向曲面$\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$的面积为ΔS_i. 令$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Sigma_i$的直径$\}$, 任取点$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Sigma_i$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}(M_i)\cdot[\vec{n}(M_i)\Delta S_i]$, 其中$\vec{n}(M_i)$表示$\Sigma$在点$M_i$处指定侧的单位法向量. 如果无论将$\Sigma$如何分割, 点$M_i\in\Delta\Sigma_i$如何选取, 当$d\to 0$时, 上述和式有确定的极限, 则称向量函数$\vec{F}$在$\Sigma$上可积, 并称该极限值为向量函数$\vec{F}$在有向曲面$\Sigma$的第二型曲面积分, 简称为第二型曲面积分, 记为$\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}(M)\cdot\vec{n}(M)\mathrm{d}S$, 即

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}(M)\cdot\vec{n}(M)\mathrm{d}S=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i)\Delta S_i$$

第二型曲面积分的数量表示形式

第二型曲面积分的数量表示形式

设向量函数$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$,

曲面Σ在点M处指定侧的单位法向量为

第二型曲面积分的数量表示形式

设向量函数$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$,

曲面Σ在点M处指定侧的单位法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\cos\alpha\vec{\boldsymbol{i}}+\cos\beta\vec{\boldsymbol{j}}+\cos\gamma\vec{\boldsymbol{k}}$$

第二型曲面积分的数量表示形式

设向量函数$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$,

曲面Σ在点M处指定侧的单位法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\cos\alpha\vec{\boldsymbol{i}}+\cos\beta\vec{\boldsymbol{j}}+\cos\gamma\vec{\boldsymbol{k}}$$

所以

第二型曲面积分的数量表示形式

设向量函数$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$,

曲面Σ在点M处指定侧的单位法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\cos\alpha\vec{\boldsymbol{i}}+\cos\beta\vec{\boldsymbol{j}}+\cos\gamma\vec{\boldsymbol{k}}$$

所以

$$\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

第二型曲面积分的数量表示形式

设向量函数$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$,

曲面Σ在点M处指定侧的单位法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\cos\alpha\vec{\boldsymbol{i}}+\cos\beta\vec{\boldsymbol{j}}+\cos\gamma\vec{\boldsymbol{k}}$$

所以

$$\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

记 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\{\cos\alpha\mathrm{d}S,\cos\beta\mathrm{d}S,\cos\gamma\mathrm{d}S\}$

$$\triangleq\{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\}$$

称$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$为曲面$\Sigma$的曲面面积微元向量.

于是第二型曲面积分可以记为

于是第二型曲面积分可以记为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}(M) \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

于是第二型曲面积分可以记为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}(M)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \qquad \text{向量形式}$$

于是第二型曲面积分可以记为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}(M)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \qquad \text{向量形式}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

于是第二型曲面积分可以记为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}(M)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \qquad \text{向量形式}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

上式称为第二型曲面积分的**数量形式**或**坐标形式**.

于是第二型曲面积分可以记为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}(M)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \qquad \text{向量形式}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

上式称为第二型曲面积分的数量形式或坐标形式.

因此第二型曲面积分也称为对坐标的曲面积分.

第二型曲面积分的特殊形式

第二型曲面积分的特殊形式

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{P(x,y,z),0,0\}$, 则称为对坐标$y,z$的曲面积分:

第二型曲面积分的特殊形式

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{P(x,y,z),0,0\}$, 则称为**对坐标$y,z$的曲面积分**:

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}P\cos\alpha\mathrm{d}S$$

第二型曲面积分的特殊形式

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{P(x,y,z),0,0\}$, 则称为对坐标$y,z$的曲面积分:

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}P\cos\alpha\mathrm{d}S$$

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{0,Q(x,y,z),0\}$, 则称为对坐标$z,x$的曲面积分:

第二型曲面积分的特殊形式

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{P(x,y,z),0,0\}$, 则称为对坐标$y,z$的曲面积分:

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}P\cos\alpha \mathrm{d}S$$

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{0,Q(x,y,z),0\}$, 则称为对坐标$z,x$的曲面积分:

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma}Q\cos\beta \mathrm{d}S$$

第二型曲面积分的特殊形式

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{P(x,y,z),0,0\}$, 则称为对坐标$y,z$的曲面积分:

$$\iint_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}P\cos\alpha\mathrm{d}S$$

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{0,Q(x,y,z),0\}$, 则称为对坐标$z,x$的曲面积分:

$$\iint_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}Q\cos\beta\mathrm{d}S$$

- 若$\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\{0,0,R(x,y,z)\}$, 则称为对坐标$x,y$的曲面积分:

第二型曲面积分的特殊形式

- 若$\vec{F}(M)=\{P(x,y,z),0,0\}$, 则称为对坐标$y,z$的曲面积分:

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}P\cos\alpha\mathrm{d}S$$

- 若$\vec{F}(M)=\{0,Q(x,y,z),0\}$, 则称为对坐标$z,x$的曲面积分:

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma}Q\cos\beta\mathrm{d}S$$

- 若$\vec{F}(M)=\{0,0,R(x,y,z)\}$, 则称为对坐标$x,y$的曲面积分:

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}R\cos\gamma\mathrm{d}S$$

第二型曲面积分的物理意义

第二型曲面积分的物理意义

- 流量：由第二型曲面积分的物理背景可知，流体以流速

第二型曲面积分的物理意义

- 流量：由第二型曲面积分的物理背景可知, 流体以流速

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

在单位时间内流过Σ 指定侧的流量为

第二型曲面积分的物理意义

- 流量：由第二型曲面积分的物理背景可知, 流体以流速

$$\vec{\boldsymbol{v}}(M)=\vec{\boldsymbol{v}}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

在单位时间内流过Σ 指定侧的流量为

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{v}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

第二型曲面积分的物理意义

- 流量：由第二型曲面积分的物理背景可知, 流体以流速

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

在单位时间内流过Σ 指定侧的流量为

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

第二型曲面积分的物理意义

- 流量：由第二型曲面积分的物理背景可知, 流体以流速

$$\vec{v}(M)=\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

在单位时间内流过Σ 指定侧的流量为

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

- 通量：称向量函数$\vec{F}(M)$在有向曲面Σ上的第二型曲面积分称为$\vec{F}(M)$关于Σ的通量.

第二型曲面积分的性质

第二型曲面积分的性质

- 线性性

第二型曲面积分的性质

- **线性性**

$$\iint\limits_{\Sigma} [k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1 + k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2] \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = k_1 \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} + k_2 \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

第二型曲面积分的性质

- 线性性

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2]\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=k_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_1\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}+k_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_2\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- 方向性

第二型曲面积分的性质

- 线性性

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2]\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=k_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_1\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}+k_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_2\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- 方向性　用Σ^-表示与曲线Σ方向相反的曲面，则

第二型曲面积分的性质

- **线性性**

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2]\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=k_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}+k_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_2\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- **方向性** 用Σ^-表示与曲线Σ方向相反的曲面，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=-\iint\limits_{\Sigma^-}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

第二型曲面积分的性质

- **线性性**

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2]\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=k_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_1\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}+k_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_2\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- **方向性**　用Σ^-表示与曲线Σ方向相反的曲面, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=-\iint\limits_{\Sigma^-}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- **对积分曲面的可加性**

第二型曲面积分的性质

- **线性性**

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2]\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=k_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_1\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}+k_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_2\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- **方向性** 用Σ^-表示与曲线Σ方向相反的曲面, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=-\iint\limits_{\Sigma^-}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- **对积分曲面的可加性** 若把曲面Σ分成Σ_1和Σ_2两块, 则

第二型曲面积分的性质

- **线性性**

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1\vec{\boldsymbol{F}}_1+k_2\vec{\boldsymbol{F}}_2]\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=k_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}+k_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}_2\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- **方向性**　用Σ^-表示与曲线Σ方向相反的曲面, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=-\iint\limits_{\Sigma^-}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

- **对积分曲面的可加性**　若把曲面Σ分成Σ_1和Σ_2两块, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint\limits_{\Sigma_1}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}+\iint\limits_{\Sigma_2}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

第二型曲面积分的计算

第二型曲面积分的计算

以 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为例来说明第二型曲面积分的计算方法.

第二型曲面积分的计算

以$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$为例来说明第二型曲面积分的计算方法.

将有向曲面Σ的方程表示为$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 取上侧, 则

第二型曲面积分的计算

以 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 为例来说明第二型曲面积分的计算方法.

将有向曲面Σ的方程表示为$z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$, 取上侧, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i \Delta S_i$$

第二型曲面积分的计算

以$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$为例来说明第二型曲面积分的计算方法.

将有向曲面Σ的方程表示为$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 取上侧, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

因为$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Sigma$,

所以$\zeta_i=z(\xi_i,\eta_i)$.

第二型曲面积分的计算

以 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为例来说明第二型曲面积分的计算方法.

将有向曲面Σ的方程表示为$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 取上侧, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

因为$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Sigma$,

所以$\zeta_i=z(\xi_i,\eta_i)$.

由于Σ取上侧, 故$\cos\gamma_i>0$,

$\cos\gamma_i\Delta A_i$表示ΔA_i在xOy平

面的投影区域$\Delta\sigma_i$的面积的近

似值, 即 $\Delta\sigma_i\approx\cos\gamma_i\Delta S_i$

第二型曲面积分的计算

以 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$为例来说明第二型曲面积分的计算方法.

将有向曲面Σ的方程表示为$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 取上侧, 则

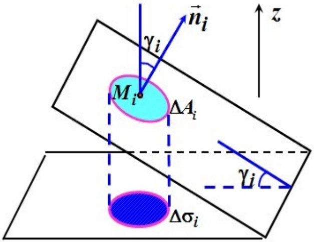
$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

因为$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Sigma$,

所以$\zeta_i=z(\xi_i,\eta_i)$.

由于Σ取上侧, 故$\cos\gamma_i>0$,

$\cos\gamma_i\Delta A_i$表示ΔA_i在xOy平面的投影区域$\Delta\sigma_i$的面积的近似值, 即 $\Delta\sigma_i\approx\cos\gamma_i\Delta S_i$



令$d' = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$, 当$d \to 0$时, $d' \to 0$,故

令$d' = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$, 当$d\to 0$时, $d'\to 0$,故

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

令$d' = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$, 当$d\to 0$时, $d'\to 0$,故

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

$$= \lim_{d'\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\Delta\sigma_i$$

令$d' = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$, 当$d\to 0$时, $d'\to 0$,故

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

$$= \lim_{d'\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\Delta\sigma_i = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令$d' = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$，当$d\to 0$时，$d'\to 0$,故

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

$$= \lim_{d'\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\Delta\sigma_i = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若Σ取下侧，则$\cos\gamma_i < 0$，$\Delta\sigma_i = -\cos\gamma_i\Delta S_i$，于是

令$d' = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$, 当$d\to 0$时, $d'\to 0$,故

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i$$

$$= \lim_{d'\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\Delta\sigma_i = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若Σ取下侧, 则$\cos\gamma_i < 0$, $\Delta\sigma_i = -\cos\gamma_i\Delta S_i$, 于是

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第二型曲面积分的计算方法

第二型曲面积分的计算方法

设函数$R(x, y, z)$在有向光滑曲面$\Sigma : z = z(x, y),\ (x, y) \in D_{xy}$上连续，则有

第二型曲面积分的计算方法

设函数$R(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$上连续, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第二型曲面积分的计算方法

设函数$R(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: z=z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$上连续，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中符号$\pm$的选取由Σ所取的侧决定：Σ取上侧，则为“$+$”；Σ取下侧，则为“$-$”.

- 若$P(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$上连续，则有

- 若$P(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: x=x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$上连续, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- 若$P(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: x=x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$上连续, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中符号$\pm$的选取由Σ所取的侧决定: Σ取前侧, 则为“$+$”; 侧, Σ取后则为“$-$”.

- 若$P(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: x=x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$上连续, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中符号$\pm$的选取由Σ所取的侧决定: Σ取前侧, 则为"$+$"; 侧, Σ取后则为"$-$".

- 若$Q(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: y=y(x,z),\ (x,z)\in D_{xz}$上连续, 则有

- 若$P(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$上连续, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中符号$\pm$的选取由Σ所取的侧决定: Σ取前侧, 则为"$+$"; 侧, Σ取后则为"$-$".

- 若$Q(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: y = y(x,z),\ (x,z) \in D_{xz}$上连续, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

- 若$P(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: x=x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$上连续, 则有
$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中符号$\pm$的选取由Σ所取的侧决定: Σ取前侧, 则为“$+$”; 侧, Σ取后则为“$-$”.

- 若$Q(x,y,z)$在有向光滑曲面$\Sigma: y=y(x,z),\ (x,z)\in D_{xz}$上连续, 则有
$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$
其中符号$\pm$的选取由Σ所取的侧决定: Σ取右侧, 则为“$+$”; Σ取左侧, 则为“$-$”.

例1. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

(1) Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在$0\leq z\leq 1$部分的下侧;

(2) Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围曲面的内侧.

例2. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是正方体$0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$的表面, 取外侧.

例3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x\geq 0, y\geq 0$的部分.

例3. 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x \geq 0, y \geq 0$的部分.

解: 将Σ分为两部分：$\Sigma_1 : z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向下

例3. 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x \geq 0, y \geq 0$的部分.

解: 将Σ分为两部分：$\Sigma_1 : z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向下

$\Sigma_1 : z_2 = \sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向上，$D_{xy}$均为$x^2+y^2 \leq 1$，

例3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x \geq 0, y \geq 0$的部分.

解: 将Σ分为两部分：$\Sigma_1 : z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向下

$\Sigma_1 : z_2 = \sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向上，$D_{xy}$均为$x^2+y^2 \leq 1$，

于是，$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

例3. 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x\geq 0, y\geq 0$的部分.

解: 将Σ分为两部分：$\Sigma_1: z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向下

$\Sigma_1: z_2=\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向上，$D_{xy}$均为$x^2+y^2\leq 1$，

于是，
$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}\sigma$$

例3. 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x\geq 0, y\geq 0$的部分.

解：将Σ分为两部分：$\Sigma_1: z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向下

$\Sigma_1: z_2=\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向向上，$D_{xy}$均为$x^2+y^2\leq 1$，

于是，
$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}\sigma$$
$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{15}.$$

例4. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

例4. 计算$I = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

解: $I = \dfrac{1}{a^3} \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

例4. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

解: $I=\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

由计算方法易知:

例4. 计算$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

解: $I = \frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

由计算方法易知:

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

故 $I = \frac{3}{a^3}\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

例4. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

解: $I=\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

由计算方法易知:

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

故 $I=\frac{3}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{6}{a^3}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例4. 计算$I=\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

解: $I=\displaystyle\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

由计算方法易知:

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

故 $I=\displaystyle\frac{3}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{6}{a^3}\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=4\pi.$

两类曲面积分的关系

两类曲面积分的关系

第二型曲线积分为

两类曲面积分的关系

第二型曲线积分为

$$\iint_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

两类曲面积分的关系

第二型曲线积分为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

两类曲面积分的关系

第二型曲线积分为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

两类曲面积分的关系

第二型曲线积分为

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

两类曲面积分的关系

第二型曲线积分为

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S &= \iint\limits_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \\ &= \iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是曲面$\Sigma$上点$(x, y, z)$处和所给曲面方向一致的单位法向量的方向余弦.

例5. 计算$I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$x^2 + y^2 = z^2 (0 \le z \le h)$, 而$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为曲面外法线的方向余弦.

例5. 计算$I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \le z \le h)$, 而$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为曲面外法线的方向余弦.

解: 由两类曲面积分的关系，可得:

例5. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$, 而$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面外法线的方向余弦.

解: 由两类曲面积分的关系，可得:

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

例5. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$, 而$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面外法线的方向余弦.

解: 由两类曲面积分的关系，可得:

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

而$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{x=\sqrt{z^2-y^2}}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\iint\limits_{x=-\sqrt{z^2-y^2}}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0$

例5. 计算$I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面 $x^2+y^2=z^2 (0 \le z \le h)$, 而$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为曲面外法线的方向余弦.

解: 由两类曲面积分的关系，可得:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

而
$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \iint\limits_{x=\sqrt{z^2-y^2}} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \iint\limits_{x=-\sqrt{z^2-y^2}} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0$$

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = 0,$$

例5. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$, 而$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面外法线的方向余弦.

解: 由两类曲面积分的关系，可得:

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint\limits_{x=\sqrt{z^2-y^2}}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\iint\limits_{x=-\sqrt{z^2-y^2}}x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0$$

$$\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=0,\qquad \iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\frac{h^4}{2}\pi.$$