第三节　非周期信号的傅立叶变换

1　熟练掌握非周期信号傅立叶变换定义

2　深刻理解从周期信号傅立叶级数到非周期信号傅立叶变换的演变

3　理解非周期信号的频谱密度

周期信号指数形式的傅立叶级数:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$\dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

当$T_0\to\infty$, 复数振幅的模 $A_k\to$无穷小

为了表示各量相对幅度的函数，定义一个新的量

$$X(\Omega)=\lim_{T_0\to\infty}T_0\cdot\dot{A}_k=\lim_{T\to\infty}T_0\cdot\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

当$T_0\to\infty$, $\Omega_0\to d\Omega$, $k\Omega_0\to\Omega$

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

频谱密度函数（频谱）

$$X(\Omega)=\lim_{T\to\infty}T_0\cdot\dot{A}_k=\lim_{\Omega_0\to 0}2\pi\frac{\dot{A}_k}{\Omega_0}$$

具有单位频带的振幅量纲

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$\dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt\right]e^{jk\Omega_0 t}$$

当$T_0\to\infty$, $\Omega_0\to d\Omega$, $k\Omega_0\to\Omega$,

$$T_0=\frac{2\pi}{\Omega_0}\to\frac{2\pi}{d\Omega}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt\right]e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$\boxed{X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega}$$

非周期信号的傅立叶积分

$$\frac{X(\Omega)\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\to\dot{A}_k$$

一、非周期信号的傅立叶变换

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

傅立叶正变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

傅立叶反变换

傅立叶变换存在的充分条件:

1.平方可积条件: $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt<\infty$

2.狄利赫利条件:

（1） $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$

（2）在任何有限区间内只有有限个极值点，且极值有限

（3）在任何有限区间内只有有限个间断点，且不连续值有限

傅立叶级数收敛条件: $\int_{0}^{T}|x(t)|^2dt<\infty$

二、非周期信号的频谱密度

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt \quad =\left|X(\Omega)\right|e^{j\varphi(\Omega)}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \quad =\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\Omega)|e^{j(\Omega t+\varphi)}d\Omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|X(\Omega)|\cos(\Omega t+\varphi)d\Omega$$

与周期信号的频谱相比:

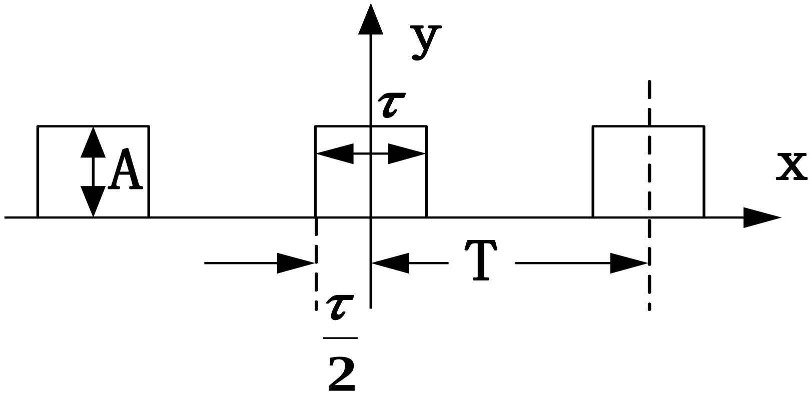
相同: **非周期信号也可分解为不同频率的正弦分量**

$\left|X(\Omega)\right|$:幅度频谱　　　$\varphi(\Omega)$:相位频谱

不同: **正弦分量包含（0—∞）一切频率**

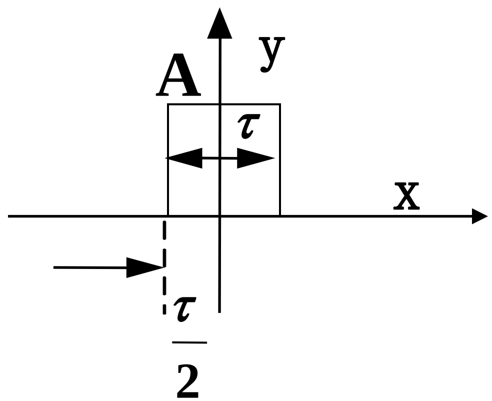
$$\frac{|X(\Omega)|d\Omega}{\pi}\to 0$$

频谱密度→频谱图



傅立叶级数：

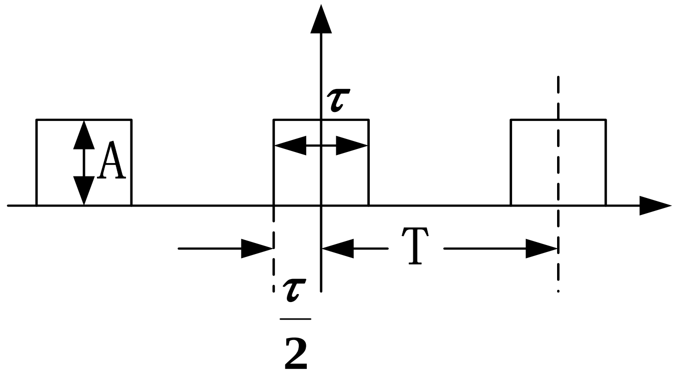
$$x(t) = \frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right)e^{jk\Omega_0 t}$$

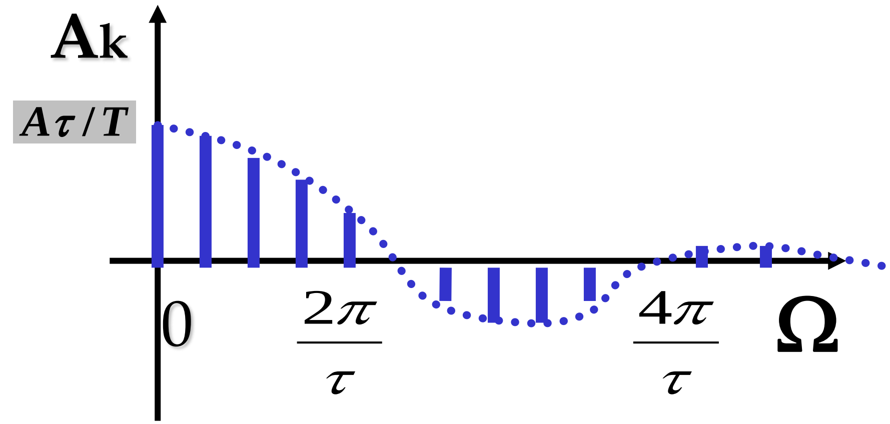


$$\dot{A}_k = \frac{A\tau}{T}\cdot Sa\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right)$$

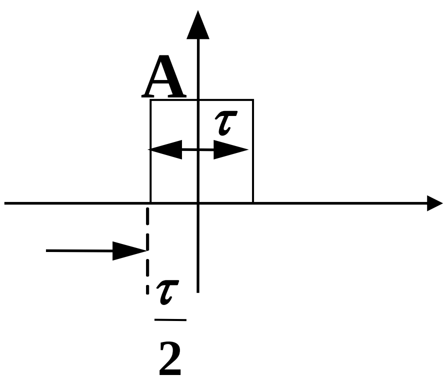
解1： $$\boxed{X(\Omega) = \lim_{T\to\infty} T\cdot \dot{A}_k = A\tau Sa(\tau\Omega/2)}$$

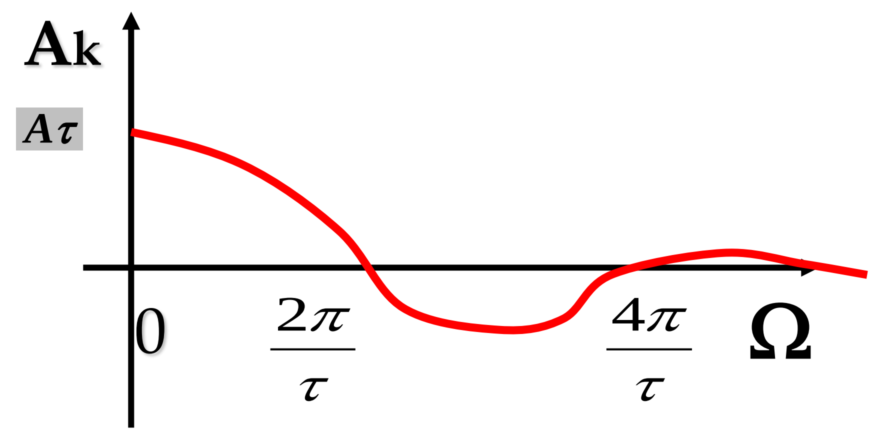
解2： $$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \quad = \frac{A}{-j\Omega}e^{-j\Omega t}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \boxed{= A\tau Sa(\tau\Omega/2)}$$





傅立叶级数：$x(t)=\dfrac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa(\dfrac{k\Omega_0\tau}{2})e^{jk\Omega_0 t}$





频谱密度：$X(\Omega)=A\tau Sa(\tau\Omega/2)$

三、非周期信号频谱密度的特点

1：时域非周期—>频域连续

时域周期—>频域离散

2：包络一致性

$$X(\Omega)=T\cdot\dot{A}_k\Big|_{k\Omega_0=\Omega}$$

$$\dot{A}_k=\frac{1}{T}X(\Omega)\Big|_{\Omega=k\Omega_0}$$

3：收敛性

定义非周期信号有效频宽

以信号振幅频谱中的第一个过零点为限，零点以外部分忽略不计;

以频谱最大幅度的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $\frac{1}{10}$ 为限，其它部分忽略不计;

以包含信号总能量的90%处为限，其余部分忽略不计;

几个常用信号傅立叶变换

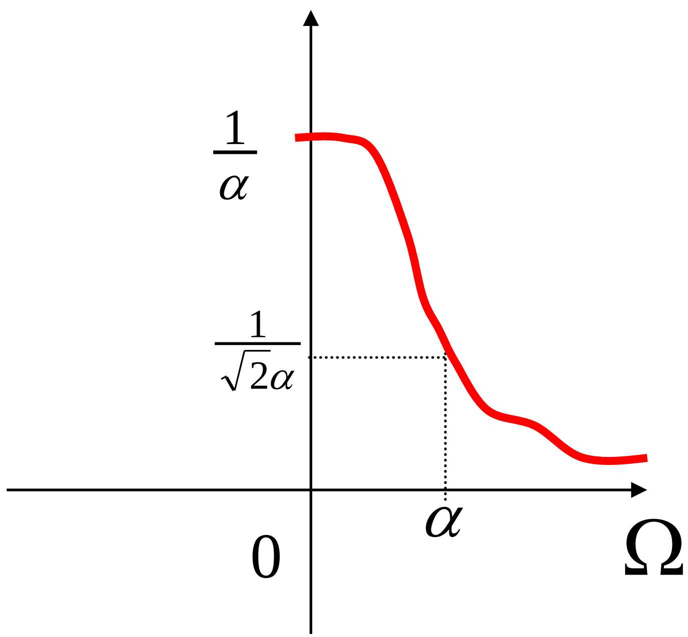
1. 单边指数信号

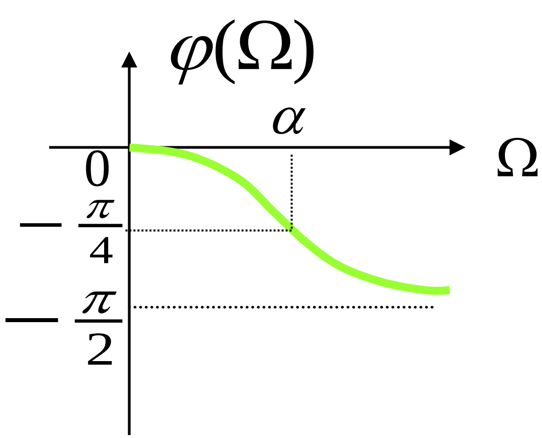
$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad \alpha > 0$$

$$X(\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\Omega}$$

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}}$$

$$\varphi(\Omega) = -arctg(\frac{\Omega}{\alpha})$$





2. 单位冲激信号

$$\boxed{X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\Omega t}dt=1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{j\Omega t}d\Omega \overset{?}{\rightarrow} \delta(t)$$

$$\lim_{\beta\to 0}e^{-\beta|\Omega|},\beta>0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\beta\to 0}e^{-\beta|\Omega|}\cdot e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\beta\Omega}\cdot e^{j\Omega t}d\Omega+\int_{-\infty}^{0}e^{\beta\Omega}\cdot e^{j\Omega t}d\Omega\right)$$

$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\beta-jt}+\frac{1}{\beta+jt}\right)$$

$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\beta}{\beta^2+t^2}\right) \Rightarrow \begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\beta}{\beta^2+t^2}\right)dt=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(t/\beta)^2}d(t/\beta)=\mathbf{1}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\Omega t}d\Omega\rightarrow\delta(t)$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\Omega t}d\Omega=\delta(t)}$$

3. 单位阶跃信号

注意：u(t)不满足绝对可积条件

$$x(t)=e^{-at}u(t),\quad a>0 \Longrightarrow \lim_{a\to 0} e^{-at}u(t)=u(t)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$X(\Omega)=\frac{1}{a+j\Omega} \qquad \lim_{a\to 0}\frac{1}{a+j\Omega}=\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$$

$$\boxed{\frac{1}{a+j\Omega}=\frac{a}{a^2+\Omega^2}-\frac{j\Omega}{a^2+\Omega^2}}$$

$$u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$$

$$\frac{a}{a^2+\Omega^2}\qquad a\to 0\begin{cases}0 & \Omega\neq 0\\ \infty & \Omega=0\end{cases} \Longrightarrow \pi\delta(\Omega)$$

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2+\Omega^2}d\Omega=\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(\Omega/a)^2}d\left(\frac{\Omega}{a}\right)=\lim_{a\to 0} arctg\left(\frac{\Omega}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$$

4. 复指数信号

$x(t) = e^{j\Omega_0 t}$　周期信号 $\rightarrow$ 傅立叶变换?

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t} dt$$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t} d\Omega = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} d\Omega = 2\pi\delta(-t) = 2\pi\delta(t)$$

$\delta(t)$ 为偶函数

$$\Omega \leftrightarrow t, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} dt = 2\pi\delta(\Omega)$$

$$\Omega \rightarrow \Omega - \Omega_0,$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$\boxed{e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)}$$

$$\begin{cases} 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega) \\ \cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)] \\ \sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{j}[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)] \end{cases}$$

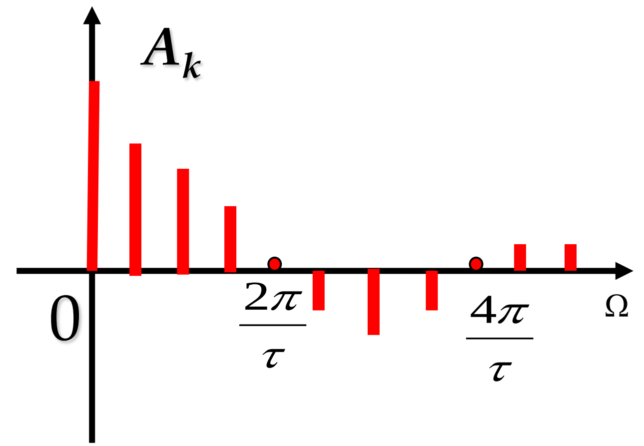
5 周期信号的傅里叶变换

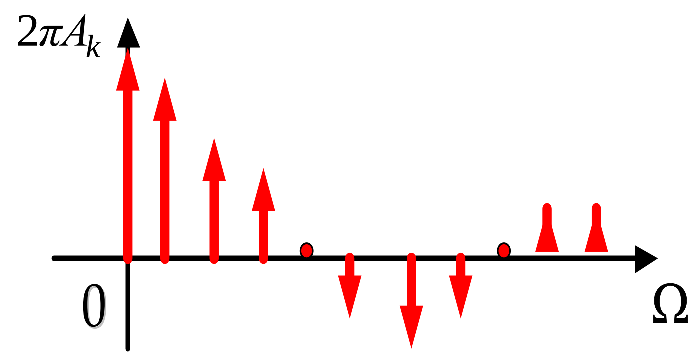
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\cdot e^{jk\Omega_0 t},\quad \Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$\dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$\boxed{e^{j\Omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)}$$

$$\boxed{x(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\delta(\Omega-k\Omega_0)}$$





周期信号依旧存在傅立叶变换，周期信号的频谱和频谱密度有什么关系？

- 由一些冲激组成离散频谱
- 各个冲激位于信号的谐波处（**kΩ$_0$**）
- 每个谐波分量的大小是有限的,但占据的频带为无穷小

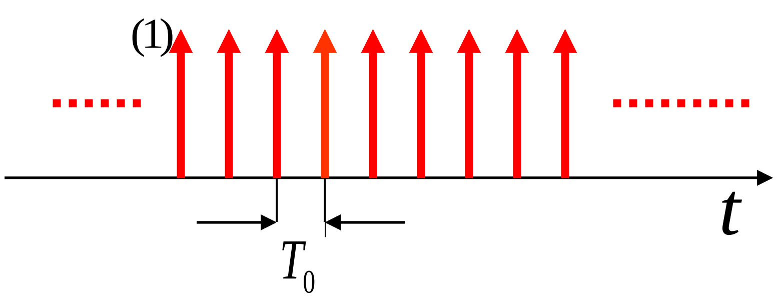
例：求周期冲激序列的傅立叶变换

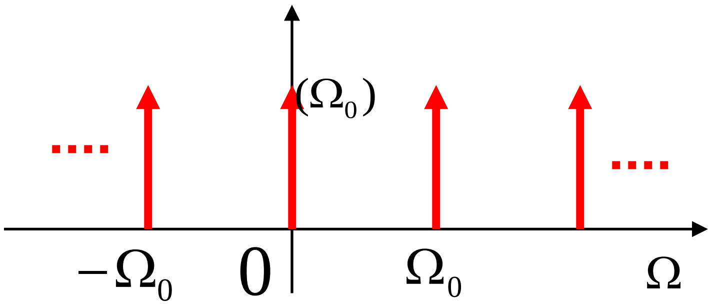
$$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$$

$$\boxed{x(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\delta(\Omega-k\Omega_0)}$$

解： $$\dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}$$

$$X(\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\delta(\Omega-k\Omega_0)=\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)=\Omega_0\delta_{\Omega_0}(\Omega)$$





**第四节 傅立叶变换的基本性质

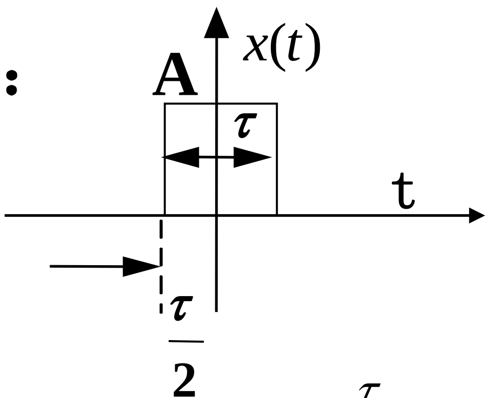
1 线性特性：

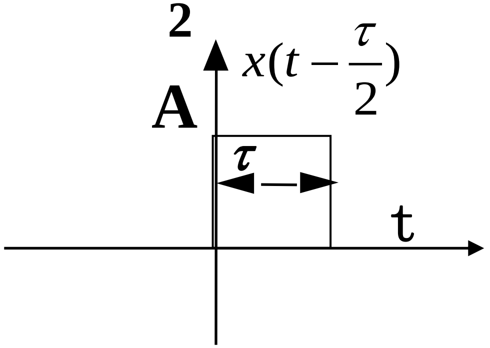
$$a\cdot x_1(t)+b\cdot x_2(t)\leftrightarrow a\cdot X_1(\Omega)+b\cdot X_2(\Omega)$$

2 延时特性：

$$x(t)\leftrightarrow X(\Omega) \Rightarrow x(t-t_0)\leftrightarrow X(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$$

例1：





$$X(\Omega)=A\tau Sa(\Omega\tau/2)$$

$$X_1(\Omega)=A\tau Sa(\Omega\tau/2)e^{-j\Omega\tau/2}$$

$$\boxed{|X_1(\Omega)|=|X(\Omega)|}$$

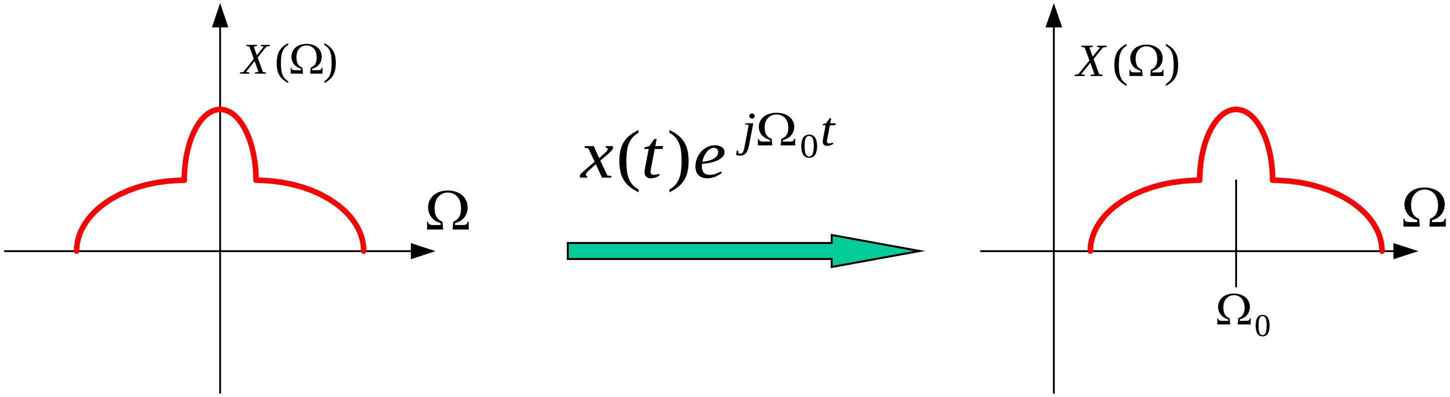
$$\boxed{\varphi_1(\Omega)=\varphi(\Omega)-\Omega\tau/2}$$

信号延时，幅度频谱不变，相位频谱产生一个滞后线性相移.

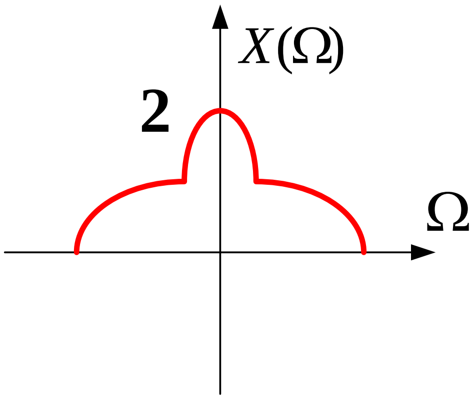
3 移频特性

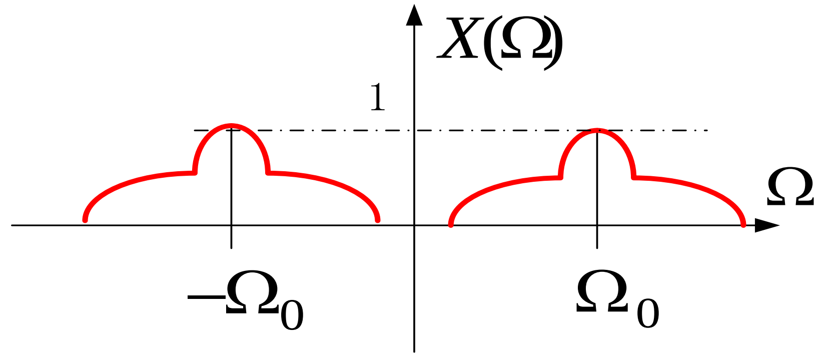
$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

则：$x(t)e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$



例3：某信号x(t)的频谱如下图所示，求x(t) $\cos\Omega_0 t$ 的频谱





分析:

$$\cos\Omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right)$$

$x(t)$ $\quad \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t}$ $\quad \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}$ $\quad x(t)$

$\frac{1}{2}X(\Omega-\Omega_0)$ $\quad \frac{1}{2}X(\Omega+\Omega_0)$

$$x(t)\cos\Omega_0 t \rightarrow \frac{1}{2}[X(\Omega-\Omega_0)+X(\Omega+\Omega_0)]$$

信号调制

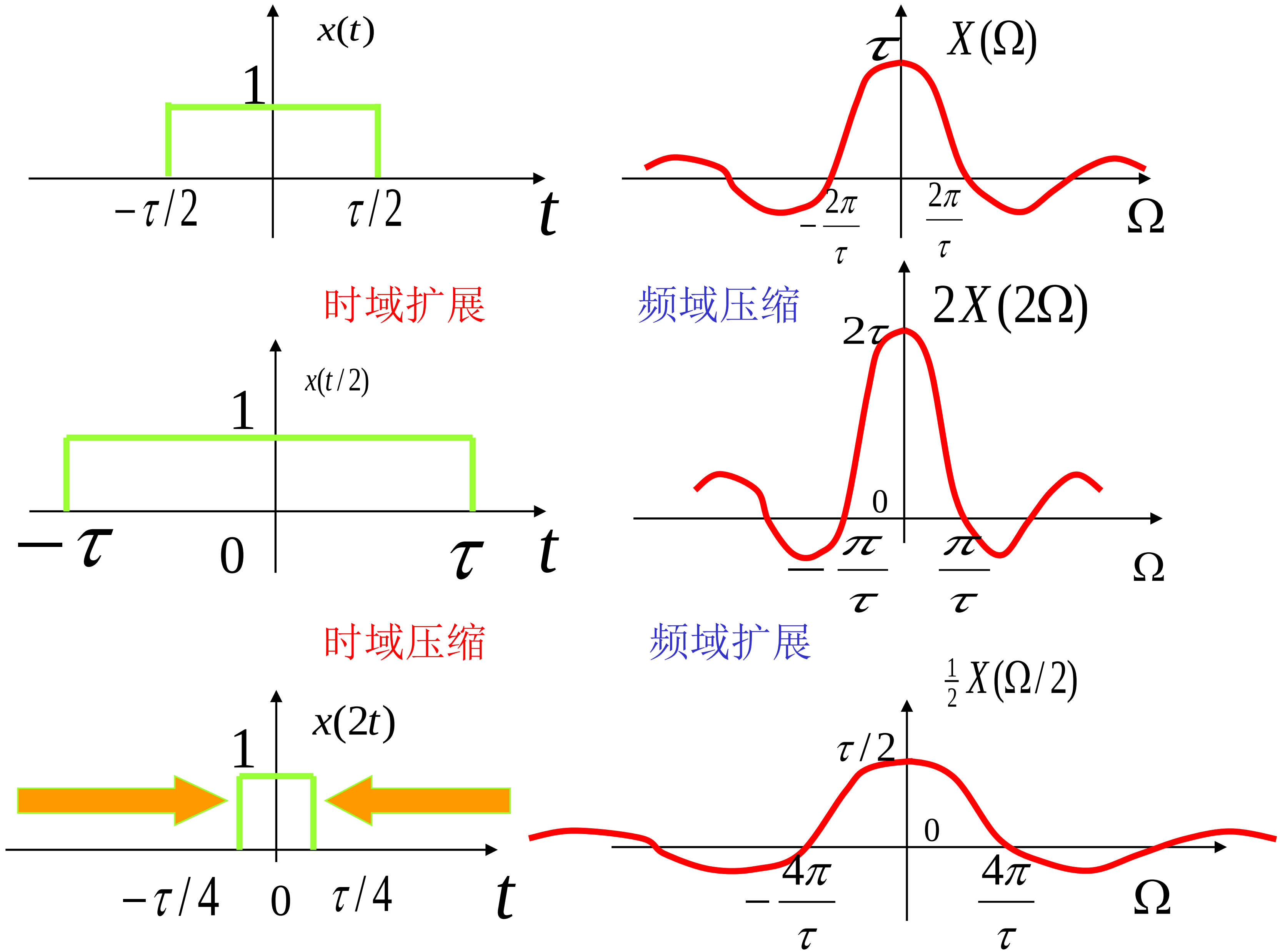
4 尺度变换特性

- 若: $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$
- 则: $x(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} X(\dfrac{\Omega}{a})$

$$a > 0 \quad x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X(\frac{\Omega}{a})$$

$$a < 0 \quad x(at) \leftrightarrow -\frac{1}{a} X(\frac{\Omega}{a})$$

$$\boxed{a = -1 \quad x(-t) \leftrightarrow X(-\Omega)}$$



脉冲宽度和频带宽度成反比关系

例4：求下列信号的傅立叶变换

1) $u(-t) \quad \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) - \dfrac{1}{j\Omega}$

2) $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} = u(t) - u(-t) \leftrightarrow \dfrac{2}{j\Omega}$

3) $e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$

$$\left.\begin{aligned} e^{-at}u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{a + j\Omega} \\ e^{at}u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{a - j\Omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \Omega^2}$$

例5：若$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$，求$x(at-t_0)$的傅立叶变换

分析：$x(t) \xrightarrow{\text{延时}} x(t-t_0) \xrightarrow{\text{尺度变换}} x(at-t_0)$

解：$x(t) \xrightarrow{\text{延时}} x(t-t_0) \xrightarrow{\text{尺度变换}} x(at-t_0)$

$$X(\Omega) \qquad X(\Omega)e^{-j\Omega t_0} \qquad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)e^{-j\frac{\Omega}{a}t_0}$$

另解：$x(t) \xrightarrow{\text{尺度变换}} x(at) \xrightarrow{\text{延时}} x(a(t-t_0/a))$

$$\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right) \qquad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)e^{-j\frac{\Omega}{a}t_0}$$

5 共轭对称特性

$x(t)$为实信号，$X^*(\Omega)=X(-\Omega)$

$$X^*(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{j\Omega t}dt \quad =\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\Omega t}dt \quad =X(-\Omega)$$

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos(\Omega t)dt-j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin(\Omega t)dt$$

$$=X_{\mathrm{Re}}(\Omega)+jX_{\mathrm{Im}}(\Omega)$$

$$\left.\begin{aligned}X^*(\Omega)&=X_{\mathrm{Re}}(\Omega)-jX_{\mathrm{Im}}(\Omega)\\ X(-\Omega)&=X_{\mathrm{Re}}(-\Omega)+jX_{\mathrm{Im}}(-\Omega)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}X_{\mathrm{Re}}(\Omega)&=X_{\mathrm{Re}}(-\Omega)\quad \text{偶函数}\\ X_{\mathrm{Im}}(\Omega)&=-X_{\mathrm{Im}}(-\Omega)\quad \text{奇函数}\end{aligned}$$

若$x(t)$为实偶函数$\rightarrow X_{\mathrm{Im}}(\Omega)=0$，　$X(\Omega)=X_{\mathrm{Re}}(\Omega)\rightarrow$实偶函数

若$x(t)$为实奇函数$\rightarrow X_{\mathrm{Re}}(\Omega)=0$，　$X(\Omega)=jX_{\mathrm{Im}}(\Omega)\rightarrow$虚奇函数

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)\Rightarrow\begin{cases}x_e(t)\rightarrow X_{\mathrm{Re}}(\Omega)\\ x_o(t)\rightarrow jX_{\mathrm{Im}}(\Omega)\end{cases}$$

6 对偶特性（互易特性）

若已知：$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$

则：$X(t) \leftrightarrow 2\pi\, x(-\Omega)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$t \rightarrow \Omega$$

$$2\pi x(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j\Omega t}dt$$

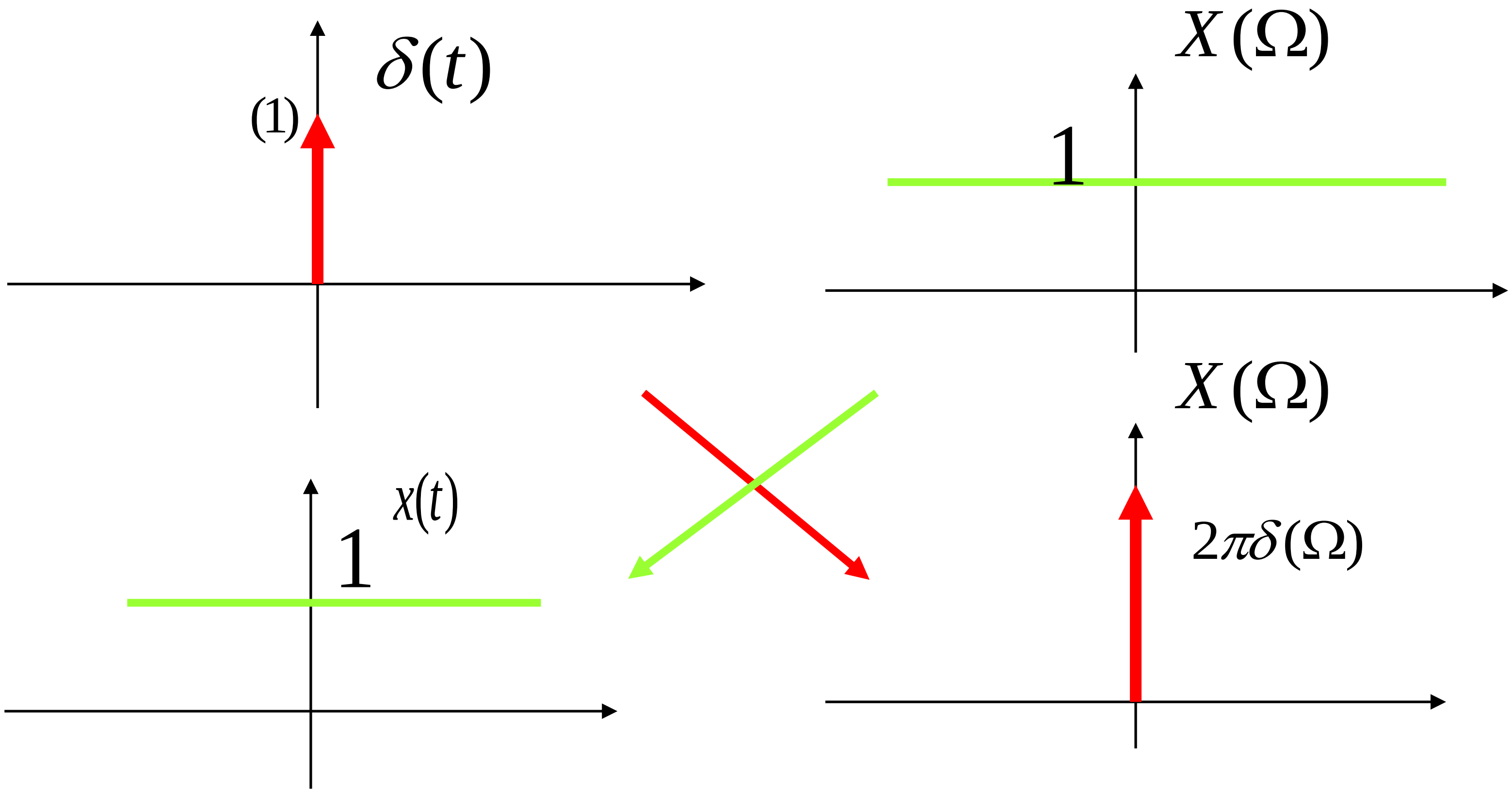
$$2\pi x(-\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\Omega t}dt$$

两种特殊情况:

(1) 若x(t)为实偶函数 $\longrightarrow$ **X(Ω)为实偶函数=$X_{Re}(\Omega)$**

$X_{Re}(t)$ $\longrightarrow$ $2\pi x(\Omega)$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \xrightarrow{\text{对偶性}} 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

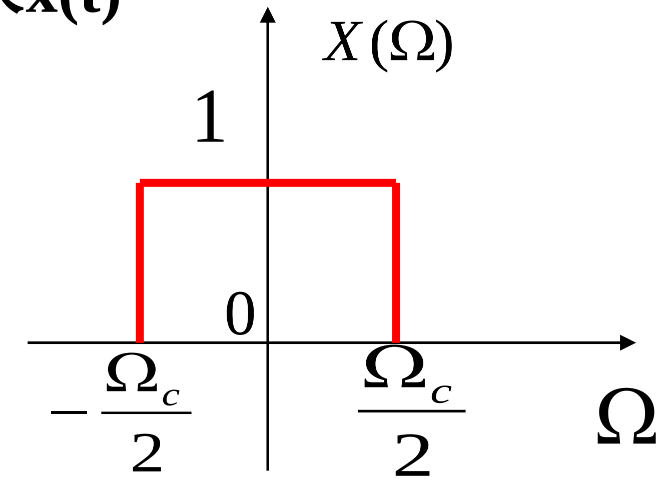


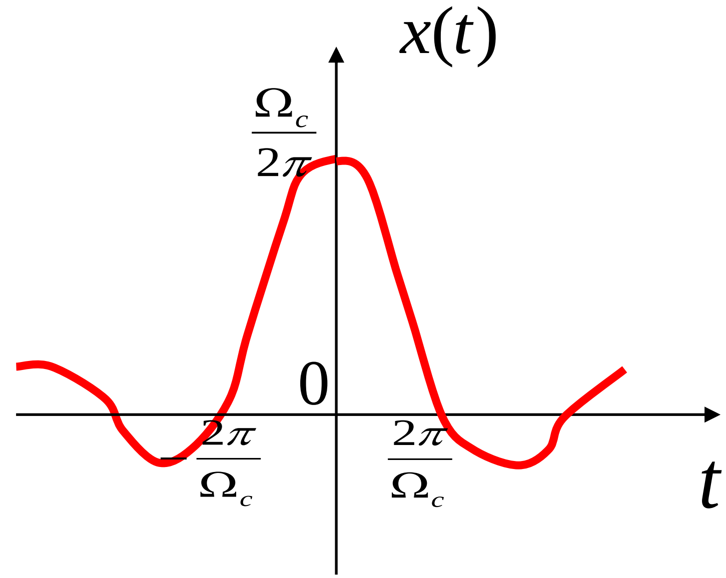
注意：这种对称关系只适用与实偶函数

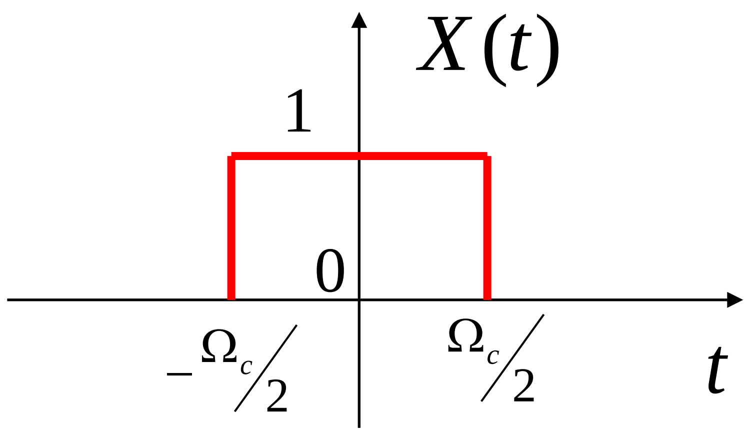
(2) 若x(t)为实奇函数 → X(Ω)为虚奇函数=jX_{Im}(Ω)

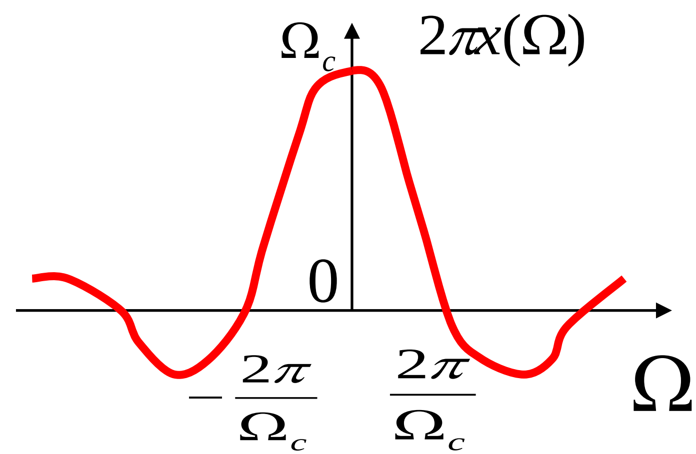
$jX_{\text{Im}}(t)$ → $-2\pi x(\Omega)$

例6：求x(t)



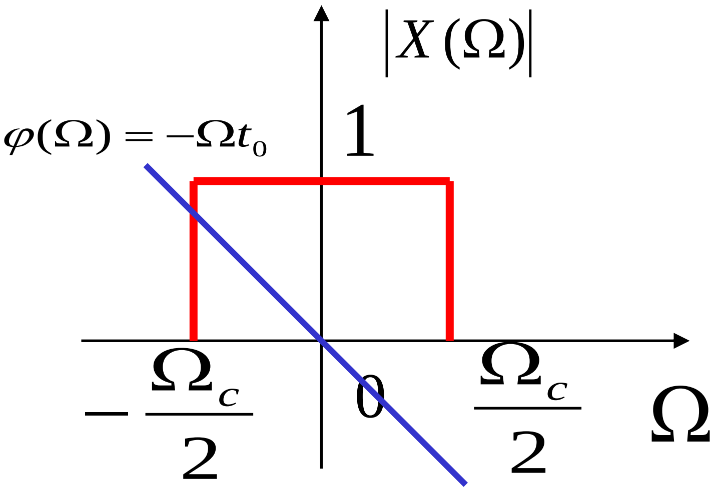


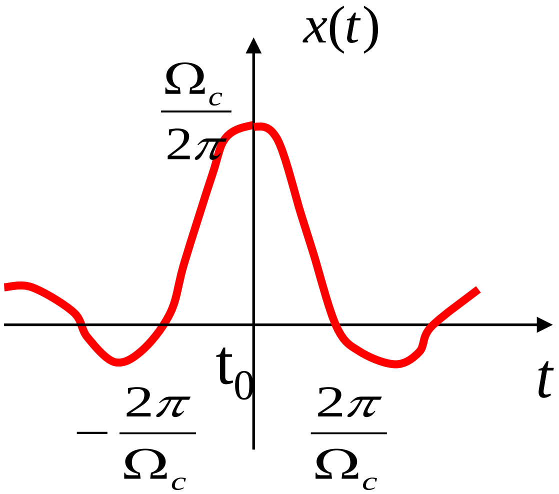




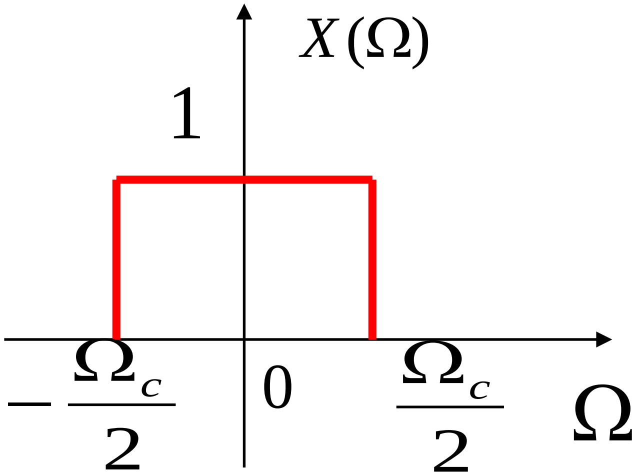
$$2\pi x(\Omega) = \Omega_c Sa(\frac{\Omega_c \Omega}{2}) \Rightarrow x(t) = \frac{\Omega_c}{2\pi} Sa(\frac{\Omega_c t}{2})$$

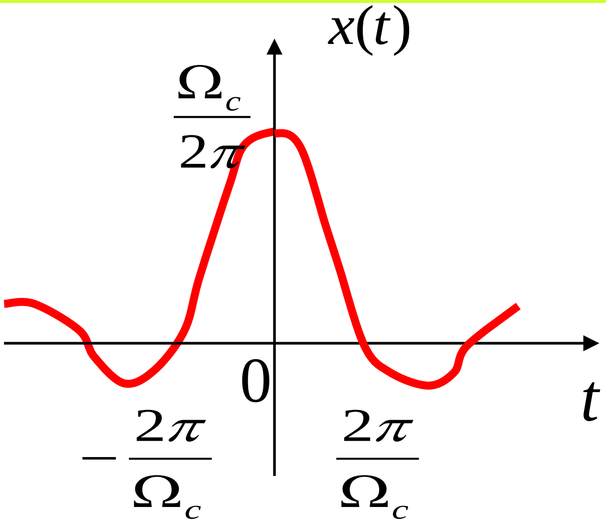
例7：求x(t)　　$X(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$





$$x(t) = \frac{\Omega_c}{2\pi} Sa\left(\frac{\Omega_c(t-t_0)}{2}\right)$$





$$x(t) = \frac{\Omega_c}{2\pi} Sa\left(\frac{\Omega_c t}{2}\right)$$

例8：已知 $x(t)=\frac{2}{t^2+1}$，求$X(\Omega)$。

由于：$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\Omega^2} \qquad a>0$

当 $a=1$， $e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\Omega^2}$

根据对偶特性： $x(t) \leftrightarrow X(\Omega) \qquad X(t) \leftrightarrow 2\pi\, x(-\Omega)$

可得： $X(\Omega)=2\pi e^{-|\Omega|}$

例8：已知 $x(t)=\frac{2}{t^2+1}$，求$X(\Omega)$。

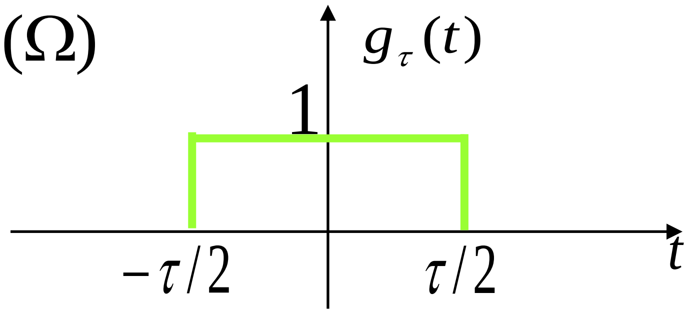
由于：$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\Omega^2} \qquad a>0$

当 $a=1$，$\quad e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\Omega^2}$

根据对偶特性：$\quad x(t) \leftrightarrow X(\Omega) \qquad X(t) \leftrightarrow 2\pi\, x(-\Omega)$

可得：$\quad X(\Omega)=2\pi e^{-|\Omega|}$

例9：已知 $x(t)=\dfrac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$ 求 $X(\Omega)$



解：设 $x_1(t)=\dfrac{\sin 2\pi t}{\pi t}=2Sa(2\pi t)$

则 $x(t)=x_1(t-1)$ $\quad X(\Omega)=X_1(\Omega)e^{-j\Omega}$

由于 $g_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa(\dfrac{\Omega\tau}{2})$

所以 $g_{4\pi}(t)\leftrightarrow 4\pi Sa(2\pi\Omega)$

根据对偶特性： $\boxed{x(t)\leftrightarrow X(\Omega)}$ $\boxed{X(t)\leftrightarrow 2\pi\, x(-\Omega)}$

可得 $4\pi Sa(2\pi t)\leftrightarrow 2\pi g_{4\pi}(\Omega)$

$$2Sa(2\pi t)\leftrightarrow g_{4\pi}(\Omega)$$

$$X(\Omega)=X_1(\Omega)e^{-j\Omega}=g_{4\pi}(\Omega)e^{-j\Omega}$$

例10: 利用对偶特性证明频移特性: $x(t)e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$

证明: 设：$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$

利用对偶特性可得: $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$

利用时移特性可得: $X(t-\Omega_0) \leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)e^{-j\Omega\Omega_0}$

再次利用对偶特性可得:

$$2\pi x(-t)e^{-j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi X(-\Omega-\Omega_0)$$

利用尺度变换特性: $x(-t) \leftrightarrow X(-\Omega)$

所以: $x(t)e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$

7 时域微分特性

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

若 $x(t)\leftrightarrow X(\Omega)$

则 $\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow j\Omega X(\Omega)$ $\frac{d^n x(t)}{dt^n}\leftrightarrow (j\Omega)^n X(\Omega)$

8 时域积分特性

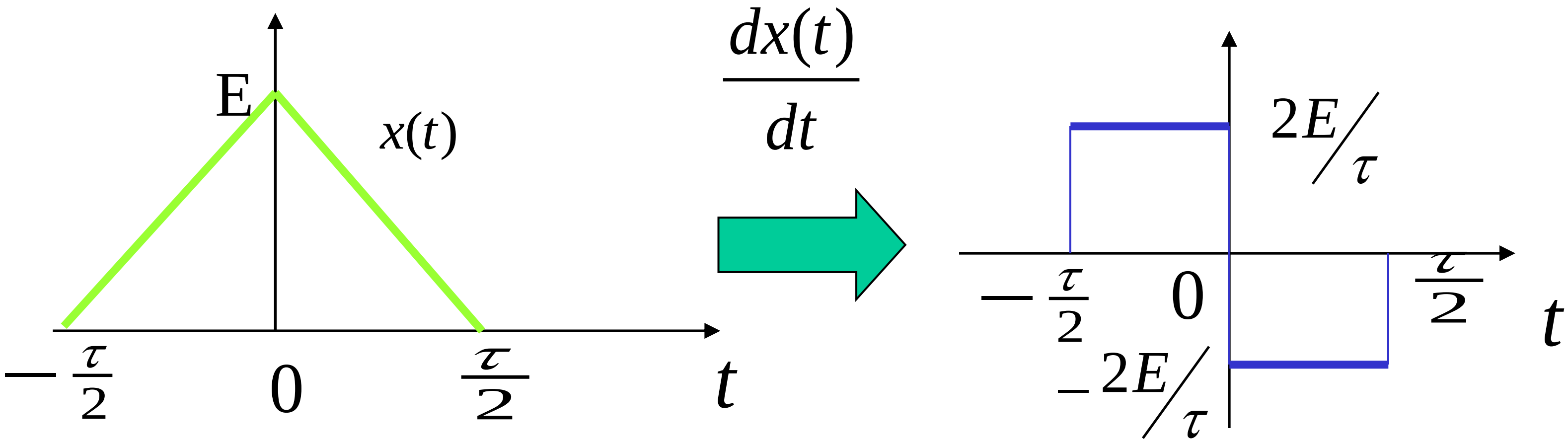
若 $x(t)\leftrightarrow X(\Omega)$

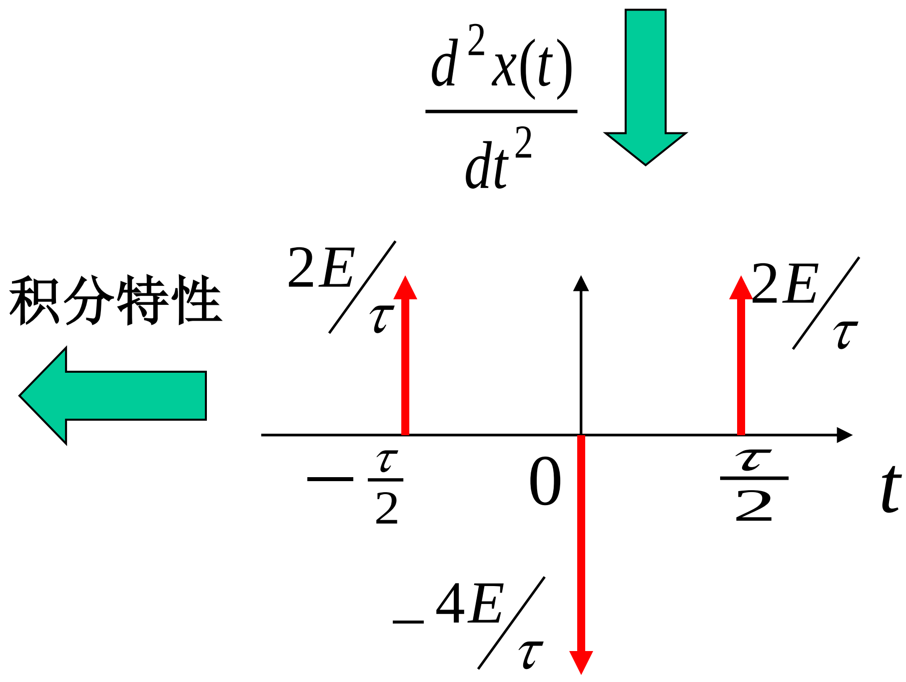
则 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{X(\Omega)}{j\Omega}+\pi X(0)\delta(\Omega)$

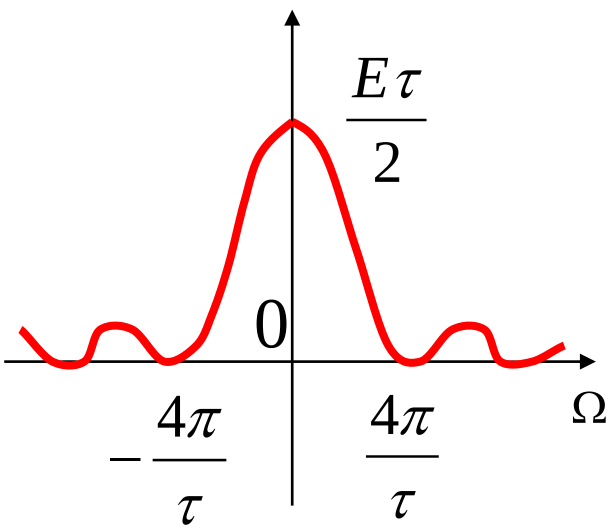
若 $X(0)=0$ 或 不包含$\Omega=0$时

则 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{X(\Omega)}{j\Omega}$ $\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t}}_{n}x(\tau)d\tau\rightarrow\frac{X(\Omega)}{(j\Omega)^n}$

例1：利用时域微分和积分性质求三角脉冲的傅立叶变换

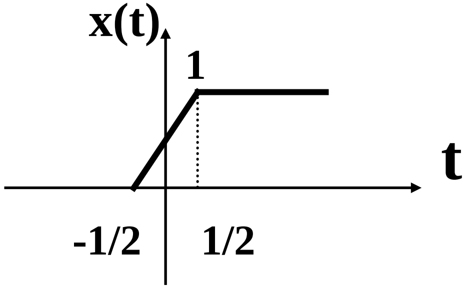




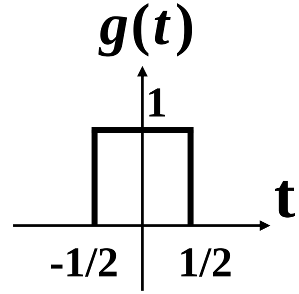


$$X(\Omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$

例2：

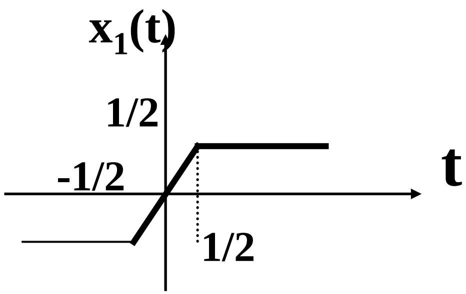


$$\xrightarrow{\dfrac{dx(t)}{dt}}$$



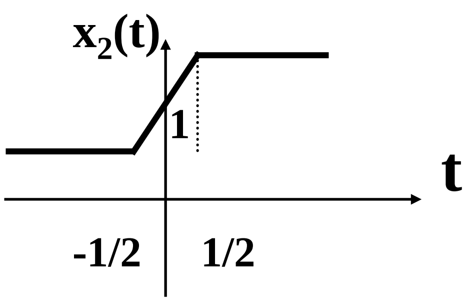
$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau = x(t)-x(-\infty)$$



$$G(\Omega)=Sa(\frac{\Omega}{2})$$

积分性质



$$X(\Omega)=\frac{G(\Omega)}{j\Omega}+\pi G(0)\delta(\Omega)$$

$$\boxed{g(t)=\frac{dx(t)}{dt},\text{则}X(\Omega)=\frac{G(\Omega)}{j\Omega}+\pi[x(\infty)+x(-\infty)]\delta(\Omega)}$$

$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}\text{，则}X(\Omega)=\frac{G(\Omega)}{j\Omega}+\pi[x(\infty)+x(-\infty)]\delta(\Omega)$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau = x(t)-x(-\infty)$$

$$\frac{G(\Omega)}{j\Omega}+\pi G(0)\delta(\Omega)=X(\Omega)-2\pi x(-\infty)\delta(\Omega)$$

$$G(0)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\Omega t}dt|_{\Omega=0}=x(\infty)-x(-\infty)$$

$$\frac{G(\Omega)}{j\Omega}+\pi[x(\infty)-x(-\infty)]\delta(\Omega)=X(\Omega)-2\pi x(-\infty)\delta(\Omega)$$

$$X(\Omega)=\frac{G(\Omega)}{j\Omega}+\pi[x(\infty)+x(-\infty)]\delta(\Omega)$$

9 频域微分与积分特性

$$x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$$

频域微分特性：

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \qquad (-jt)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(\Omega)}{d\Omega^n}$$

$$\boxed{tx(t) \leftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}}$$

证明： $tu(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(\Omega) - \dfrac{1}{\Omega^2}$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \Rightarrow tu(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(\Omega) - \frac{1}{\Omega^2}$$

频域积分特性：

$$-\frac{x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\Omega} X(\Omega)d\Omega$$

例1： $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$，求$(1-t)x(1-t)$傅立叶变换

分析： $tx(t) \to (1-t)x(1-t)$

解： $tx(t) \xrightarrow{\text{反褶}} -tx(-t) \xrightarrow{\text{平移}} -(t-1)x(-(t-1))$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \qquad -j\frac{d}{d\Omega}X(-\Omega) \qquad -je^{-j\Omega}\frac{d}{d\Omega}X(-\Omega)$$

$$(1-t)x(1-t) \to e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{2})}\frac{d}{d\Omega}X(-\Omega)$$

10 卷积特性

- 若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega)$ $\qquad x_2(t) \leftrightarrow X_2(\Omega)$

1 时域卷积 $\quad x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega)$

2 频域卷积 $\quad x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$

例1：证明积分性质 $\quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\Omega) + \dfrac{X(\Omega)}{j\Omega}$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = x(t) * u(t)$$

$$X(\Omega) \cdot (\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}) = X(0) \cdot \pi\delta(\Omega) + \frac{X(\Omega)}{j\Omega}$$

例2： 证明$x(t)e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$

$$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

$$x(t)e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\Omega)*2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)=X(\Omega-\Omega_0)$$

例3： 已知$X(\Omega)=\dfrac{1}{(a+j\Omega)^2}$，求$x(t)$

方法一： $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{a+j\Omega} \qquad (a>0)$

$$x(t)=e^{-at}u(t)*e^{-at}u(t)=te^{-at}u(t)$$

方法二： $te^{-at}u(t) \leftrightarrow j\dfrac{d}{d\Omega}\left(\dfrac{1}{a+j\Omega}\right)$

11 帕斯瓦尔定理

若： $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$

则： $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$

$|X(\Omega)|^2$ 称为**能量谱密度**

若 $x(t)$ 为周期信号

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{A}_k|^2$$

$|\dot{A}_k|^2$ 称为**功率谱**

作业： **3.8 (c)(d)**
3.11 (c) (e)
3.13
3.16