工科数学分析

贺丹（东南大学）

第五章 多元函数微分学及其应用

第五章 多元函数微分学及其应用

本章主要内容：

第五章 多元函数微分学及其应用

本章主要内容:

- $\mathbf{R}^n$中点集的初步知识

第五章 多元函数微分学及其应用

本章主要内容：

- $\mathbf{R}^n$中点集的初步知识
- 多元函数的极限与连续

第五章 多元函数微分学及其应用

本章主要内容:

- $\mathbf{R}^n$中点集的初步知识
- 多元函数的极限与连续
- 多元数量值函数的偏导数与全微分

第五章 多元函数微分学及其应用

本章主要内容：

- $\mathbf{R}^n$中点集的初步知识
- 多元函数的极限与连续
- 多元数量值函数的偏导数与全微分
- 多元函数的Taylor公式与极值

第五章 多元函数微分学及其应用

本章主要内容:

- $\mathbf{R}^n$中点集的初步知识
- 多元函数的极限与连续
- 多元数量值函数的偏导数与全微分
- 多元函数的Taylor公式与极值
- 多元向量值函数的导数与微分

第五章 多元函数微分学及其应用

本章主要内容：

- $\mathbf{R}^n$中点集的初步知识
- 多元函数的极限与连续
- 多元数量值函数的偏导数与全微分
- 多元函数的Taylor公式与极值
- 多元向量值函数的导数与微分
- 多元函数微分学的几何应用

第一节 n维Euclid空间$\mathbb{R}^n$中点集的初步知识

第一节 n维Euclid空间$\mathbb{R}^n$中点集的初步知识

本节主要内容：

第一节 n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$中点集的初步知识

本节主要内容：

- n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$

第一节 n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$中点集的初步知识

本节主要内容：

- n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$
- $\mathbf{R}^n$中点列的极限

第一节 n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$中点集的初步知识

本节主要内容：

- n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$
- $\mathbf{R}^n$中点列的极限
- $\mathbf{R}^n$中的开集和闭集

第一节 n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$中点集的初步知识

本节主要内容：

- n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$
- $\mathbf{R}^n$中点列的极限
- $\mathbf{R}^n$中的开集和闭集
- $\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

n维Euclid空间

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \mathbf{R}}_{n}$$

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n}\\ &= \{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积，即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n} \\ &= \{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

n维实向量，

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n}\\ &= \{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

n维实向量, 也记作$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n} \\ &= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}\end{aligned}$$

n维实向量, 也记作$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

- 定义两个向量的加法和数乘

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n} \\ &= \{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

n维实向量, 也记作$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

- 定义两个向量的加法和数乘

给定: $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,
$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, 以及 $\alpha\in\mathbf{R}$, 定义

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n} \\ &= \{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

n维实向量, 也记作$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

- 定义两个向量的加法和数乘

给定: $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,
$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, 以及 $\alpha\in\mathbf{R}$, 定义

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &= \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n}\\ &= \{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

n维实向量, 也记作$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

- 定义两个向量的加法和数乘

给定: $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,
$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, 以及 $\alpha\in\mathbf{R}$, 定义

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),$$

n维Euclid空间

$\mathbf{R}^n$ 为n个实数集$\mathbf{R}$的Descartes乘积, 即

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R}}_{n}$$
$$= \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

n维实向量, 也记作$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

- 定义两个向量的加法和数乘

给定: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,
$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, 以及 $\alpha \in \mathbf{R}$, 定义

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n),$$ 于是 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间(或n维实线性空间).

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间

(或n维实线性空间).

$\mathbf{R}^n$中的向量也称为点, $\boldsymbol{x}$ 的第i个分量x_i称为点$\boldsymbol{x}$的第i个坐标.

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间(或n维实线性空间).

$\mathbf{R}^n$中的向量也称为点, $\boldsymbol{x}$ 的第i个分量x_i称为点$\boldsymbol{x}$的第i个坐标.

特殊地,

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间(或n维实线性空间).

$\mathbf{R}^n$中的向量也称为点, $\boldsymbol{x}$ 的第i个分量x_i称为点$\boldsymbol{x}$的第i个坐标.

特殊地, $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ——二维实向量空间

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间(或n维实线性空间).

$\mathbf{R}^n$中的向量也称为点, $\boldsymbol{x}$ 的第i个分量x_i称为点$\boldsymbol{x}$的第i个坐标.

特殊地, $\mathbf{R}^2 = \{(x, y)|x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ——二维实向量空间

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z)|x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$$——三维实向量空间

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间 (或n维实线性空间).

$\mathbf{R}^n$中的向量也称为点, $\boldsymbol{x}$ 的第i个分量x_i称为点$\boldsymbol{x}$的第i个坐标.

特殊地, $\mathbf{R}^2 = \{(x,y)|x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ——二维实向量空间

$$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z)|x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}\text{——三维实向量空间}$$

- 在n维实向量空间$\mathbf{R}^n$也可以像二维实向量空间一样，定义两个向量$\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$ 的内积：

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间(或n维实线性空间).

$\mathbf{R}^n$中的向量也称为点, $\boldsymbol{x}$ 的第i个分量x_i称为点$\boldsymbol{x}$的第i个坐标.

特殊地, $\mathbf{R}^2=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ ——二维实向量空间

$\mathbf{R}^3=\{(x,y,z)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}$——三维实向量空间

- 在n维实向量空间$\mathbf{R}^n$也可以像二维实向量空间一样，定义两个向量$\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$ 的内积:

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

则称$\mathbf{R}^n$ 按照上述向量的加法及数乘构成一个n维实向量空间

(或n维实线性空间).

$\mathbf{R}^n$中的向量也称为点, $\boldsymbol{x}$ 的第i个分量x_i称为点$\boldsymbol{x}$的第i个坐标.

特殊地, $\mathbf{R}^2=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ ——二维实向量空间

$$\mathbf{R}^3=\{(x,y,z)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}\text{——三维实向量空间}$$

- 在n维实向量空间$\mathbf{R}^n$也可以像二维实向量空间一样，定义两个向量$\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$ 的内积:

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

则$\mathbf{R}^n$按照上述内积构成一个n维Euclid空间.

距离的定义

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量x的长度(或范数)定义为

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量x的长度(或范数)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量x的长度(或范数)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- $\mathbf{R}^n$中任意两点x与y之间的距离 定义为:

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量x的长度(或范数)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- $\mathbf{R}^n$中任意两点x与y之间的距离 定义为:

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量x的长度(或范数)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- $\mathbf{R}^n$中任意两点x与y之间的距离 定义为:

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- 可以证明距离$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 满足下列性质：

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量x的长度(或范数)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- $\mathbf{R}^n$中任意两点x与y之间的距离 定义为:

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- 可以证明距离$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 满足下列性质:
  - 非负性 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0, \ \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y};$

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量x的长度(或范数)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- $\mathbf{R}^n$中任意两点x与y之间的距离 定义为:

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- 可以证明距离$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 满足下列性质:
  - 非负性 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0$, $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
  - 对称性 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;

距离的定义

- $\mathbf{R}^n$中向量$\boldsymbol{x}$的长度(或范数)定义为

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- $\mathbf{R}^n$中任意两点$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$之间的距离 定义为:

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- 可以证明距离$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 满足下列性质:
  - 非负性 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0$, $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
  - 对称性 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;
  - 三角不等式 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个点列, 其中$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$,

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个点列，其中$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$，

又设$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$是$\mathbf{R}^n$中的一固定点，若当$k \to \infty$时，

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个点列, 其中$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$,

又设$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$是$\mathbf{R}^n$中的一固定点, 若当$k \to \infty$时,

$\rho(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}) \to 0$, 即

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个点列, 其中$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$,

又设$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$是$\mathbf{R}^n$中的一固定点, 若当$k \to \infty$时,

$\rho(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}) \to 0$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall k > N, \text{恒有} \parallel \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a} \parallel < \varepsilon,$$

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个点列, 其中$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$,

又设$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$是$\mathbf{R}^n$中的一固定点, 若当$k \to \infty$时,

$\rho(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}) \to 0$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall k > N, \text{恒有} \parallel \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a} \parallel < \varepsilon,$$

则称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的**极限存在**, 且称$\boldsymbol{a}$为它的**极限**, 记为

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个点列, 其中$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$,

又设$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$是$\mathbf{R}^n$中的一固定点, 若当$k \to \infty$时,

$\rho(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}) \to 0$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall k > N, \text{恒有} \| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a} \| < \varepsilon,$$

则称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限存在, 且称$\boldsymbol{a}$为它的极限, 记为

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \quad \text{或} \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a} \ (k \to \infty).$$

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义1.1 点列的极限

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个点列，其中$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$，又设$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$是$\mathbf{R}^n$中的一固定点，若当$k \to \infty$时，$\rho(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}) \to 0$，即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall k > N, \text{恒有} \parallel \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a} \parallel < \varepsilon,$$

则称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限存在，且称$\boldsymbol{a}$为它的极限，记为

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \quad \text{或} \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}\ (k \to \infty).$$

这时也称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于$\boldsymbol{a}$.

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$，点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，则$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \text{都有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 都有 } \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n,\ \text{都有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列, 则

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 都有 } \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列, 则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是唯一的;

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \text{都有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列, 则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列, 即

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n,\ \text{都有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列, 则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列, 即

$$\exists M(\in \mathbf{R}) > 0,\ \text{使得}\forall k \in \mathbf{N}_+,\ \text{恒有}\| \boldsymbol{x}_k \| \leqslant M;$$

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 都有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列, 则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列, 即

$$\exists M (\in \mathbf{R}) > 0, \text{ 使得} \forall k \in \mathbf{N}_+, \text{ 恒有} \| \boldsymbol{x}_k \| \leqslant M;$$

(3) 若$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{b}$ 且$\alpha \in \mathbf{R}$, 则

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 都有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列, 则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列, 即

$$\exists M (\in \mathbf{R}) > 0, \text{ 使得} \forall k \in \mathbf{N}_+, \text{ 恒有} \| \boldsymbol{x}_k \| \leqslant M;$$

(3) 若$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{b}$ 且$\alpha \in \mathbf{R}$, 则

$$\boldsymbol{x}_k \pm \boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b},\ \alpha \boldsymbol{x}_k \to \alpha \boldsymbol{a},\ \ < \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k > \to < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >;$$

定理1.1

设点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \in \mathbf{R}^n$, 点$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 都有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i.$$

定理1.2

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列, 则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列, 即

$$\exists M (\in \mathbf{R}) > 0, \text{ 使得} \forall k \in \mathbf{N}_+, \text{ 恒有} \| \boldsymbol{x}_k \| \leqslant M;$$

(3) 若$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{b}$ 且$\alpha \in \mathbf{R}$, 则

$$\boldsymbol{x}_k \pm \boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}, \ \alpha \boldsymbol{x}_k \to \alpha \boldsymbol{a}, \ < \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k > \to < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >;$$

(4) 若$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于$\boldsymbol{a}$, 则它的任一子(点)列也收敛于$\boldsymbol{a}$.

由于$\mathbf{R}^n$中的向量不能比较大小, 也不能相除, 因此数列极限中与单调性、保序性确界以及商有关的概念和命题不能直接推广到$\mathbf{R}^n$的点列中.

由于$\mathbf{R}^n$中的向量不能比较大小，也不能相除，因此数列极限中与单调性、保序性确界以及商有关的概念和命题不能直接推广到$\mathbf{R}^n$的点列中.

下面的定理与Cauchy收敛原理在$\mathbf{R}^n$中仍然成立.

由于$\mathbf{R}^n$中的向量不能比较大小，也不能相除，因此数列极限中与单调性、保序性确界以及商有关的概念和命题不能直接推广到$\mathbf{R}^n$的点列中.

下面的定理与Cauchy收敛原理在$\mathbf{R}^n$中仍然成立.

定理1.3 Bolzano-Weierstrass定理

$\mathbf{R}^n$中的有界点列必有收敛子列.

由于$\mathbf{R}^n$中的向量不能比较大小，也不能相除，因此数列极限中与单调性、保序性确界以及商有关的概念和命题不能直接推广到$\mathbf{R}^n$的点列中.

下面的定理与Cauchy收敛原理在$\mathbf{R}^n$中仍然成立.

定理1.3 Bolzano-Weierstrass定理

$\mathbf{R}^n$中的有界点列必有收敛子列.

- $\mathbf{R}^n$中点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的收敛子列的极限称为$\{\boldsymbol{x}_k\}$的**极限点**.

- 设$\{x_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的点列, 若

- 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的点列, 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+,$ 使得$\forall k > N$及$p \in \mathbf{N}_+,$ 恒有 $\| \boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k \| < \varepsilon,$

- 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的点列, 若

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,$使得$\forall k>N$及$p\in\mathbf{N}_+,$恒有$\|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon,$

则$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的基本点列或Cauchy点列.

- 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的点列, 若

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得$\forall k > N$及$p \in \mathbf{N}_+$, 恒有$\| \boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k \| < \varepsilon$,

则$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的基本点列或Cauchy点列.

- 由定理1.1可知, $\{\boldsymbol{x}_k\}$是Cauchy点列的充要条件是

- 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的点列, 若

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得$\forall k > N$及$p \in \mathbf{N}_+$, 恒有 $\| \boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k \| < \varepsilon$,

则$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的基本点列或Cauchy点列.

- 由定理1.1可知, $\{\boldsymbol{x}_k\}$是Cauchy点列的充要条件是

$$\text{对}\forall i = 1, 2, \cdots, n\text{有}\{x_{k,i}\}\text{都是Cauchy列.}$$

- 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的点列, 若

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}_+$, 使得$\forall k>N$及$p\in\mathbf{N}_+$, 恒有$\|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon$,

则$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的基本点列或Cauchy点列.

- 由定理1.1可知, $\{\boldsymbol{x}_k\}$是Cauchy点列的充要条件是

$$\text{对}\forall i=1,2,\cdots,n\text{有}\{x_{k,i}\}\text{都是Cauchy列.}$$

定理1.4 Cauchy收敛定理

$\mathbf{R}^n$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于$\mathbf{R}^n$中的点的充分必要条件为$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的Cauchy点列.

- 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的点列, 若

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}_+$, 使得$\forall k>N$及$p\in\mathbf{N}_+$, 恒有$\|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon$,

则$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的基本点列或Cauchy点列.

- 由定理1.1可知, $\{\boldsymbol{x}_k\}$是Cauchy点列的充要条件是

$$对\forall i=1,2,\cdots,n有\{x_{k,i}\}都是Cauchy列.$$

定理1.4 Cauchy收敛定理

$\mathbf{R}^n$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于$\mathbf{R}^n$中的点的充分必要条件为$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的Cauchy点列.

- 这个定理刻画了空间$\mathbf{R}^n$的完备性, 就是说, $\mathbf{R}^n$中的Cauchy点列必收敛于$\mathbf{R}^n$中的点. 现代数学中就是以此作为抽象空间完备性的定义的.

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

定义1.2

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

定义1.2

设A是$\mathbf{R}^n$中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

定义1.2

设A是$\mathbf{R}^n$中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，

- 若存在A中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a} (k = 1, 2, \cdots)$，使得$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a} (k \to \infty)$，则称$\boldsymbol{a}$是$A$的一个**聚点**.

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

定义1.2

设A是$\mathbf{R}^n$中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,

- 若存在A中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}(k = 1, 2, \cdots)$, 使得$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}(k \to \infty)$, 则称$\boldsymbol{a}$是$A$的一个聚点.
- A的所有聚点构成的集合称为A的导集, 记为A'.

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

定义1.2

设A是$\mathbf{R}^n$中的一个点集, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,

- 若存在A中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}(k = 1, 2, \cdots)$, 使得$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}(k \to \infty)$, 则称$\boldsymbol{a}$是$A$的一个聚点.
- A的所有聚点构成的集合称为A的导集, 记为A'.
- 集合$\bar{A} = A \cup A'$称为A的闭包.

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

定义1.2

设A是$\mathbf{R}^n$中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，

- 若存在A中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}(k = 1, 2, \cdots)$，使得$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}(k \to \infty)$，则称$\boldsymbol{a}$是$A$的一个聚点.
- A的所有聚点构成的集合称为A的导集，记为A'.
- 集合$\bar{A} = A \cup A'$称为A的闭包.
- 若$\boldsymbol{a} \in A$，但$\boldsymbol{a} \notin A'$，则称$\boldsymbol{a}$为A的孤立点.

$\mathbf{R}^n$中的开集与闭集

定义1.2

设A是$\mathbf{R}^n$中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,

- 若存在A中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}(k = 1, 2, \cdots)$, 使得$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}(k \to \infty)$, 则称$\boldsymbol{a}$是$A$的一个**聚点**.
- A的所有聚点构成的集合称为A的**导集**, 记为A'.
- 集合$\bar{A} = A \cup A'$称为A的**闭包**.
- 若$\boldsymbol{a} \in A$, 但$\boldsymbol{a} \notin A'$, 则称$\boldsymbol{a}$为A的**孤立点**.
- 若$A' \subseteq A$, 则称A为**闭集**.

- 例如, 设$A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \middle| k \in \mathbf{N}_+ \right\}$是一个平面点集, 则有

- 例如, 设$A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \middle| k \in \mathbf{N}_+ \right\}$是一个平面点集, 则有
  - 点$(0,0)$是A的唯一聚点, 且它不属于A;

- 例如, 设$A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \middle| k \in \mathbf{N}_+ \right\}$是一个平面点集, 则有
  - 点$(0,0)$是A的唯一聚点, 且它不属于A;
  - A的导集为$A' = \{(0,0)\}$;

- 例如, 设$A=\left\{\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\Big| k\in\mathbf{N}_+\right\}$是一个平面点集, 则有
  - 点$(0,0)$是A的唯一聚点, 且它不属于A;
  - A的导集为$A'=\{(0,0)\}$; A 的闭包为$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$;

- 例如, 设$A=\left\{\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\middle| k\in\mathbf{N}_+\right\}$是一个平面点集, 则有
  - 点$(0,0)$是A的唯一聚点, 且它不属于A;
  - A的导集为$A'=\{(0,0)\}$; A 的闭包为$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$;
  - A 中所有点都是A 的孤立点, A不是闭集,

- 例如, 设$A=\left\{\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\Big| k\in \mathbf{N}_+\right\}$是一个平面点集, 则有
  - 点$(0,0)$是A的唯一聚点, 且它不属于A;
  - A的导集为$A'=\{(0,0)\}$; A 的闭包为$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$;
  - A 中所有点都是A 的孤立点, A不是闭集,

    但$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$是闭集.

- 例如, 设$A=\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\Big|k\in\mathbf{N}_+\right\}$是一个平面点集, 则有
  - 点$(0,0)$是A的唯一聚点, 且它不属于A;
  - A的导集为$A'=\{(0,0)\}$; A 的闭包为$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$;
  - A 中所有点都是A 的孤立点, A不是闭集,

    但$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$是闭集.
- 闭集对极限的运算是封闭的, 即若A 是闭集, $\{\boldsymbol{x}_k\}$是A中的任一点列, 且$\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}(k\to\infty)$, 则$\boldsymbol{a}\in A$, 反之亦真.

- 例如, 设$A=\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\middle|k\in\mathbf{N}_+\right\}$是一个平面点集, 则有
  - 点$(0,0)$是A的唯一聚点, 且它不属于A;
  - A的导集为$A'=\{(0,0)\}$; A 的闭包为$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$;
  - A 中所有点都是A 的孤立点, A不是闭集,

    但$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}$是闭集.
- 闭集对极限的运算是封闭的, 即若A 是闭集, $\{\boldsymbol{x}_k\}$是A中的任一点列, 且$\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}(k\to\infty)$, 则$\boldsymbol{a}\in A$, 反之亦真.
- 若$A'=\emptyset$, 则A 必为闭集, 从而单点集和有限点集都是闭集.

定义1.3

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel < \delta\}$$

为以$\boldsymbol{a}$为中心、δ为半径的开球或点$\boldsymbol{a}$的δ邻域,

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel < \delta\}$$

为以a为中心、δ为半径的开球或点a的δ邻域,

点a的去心δ邻域为: $\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel < \delta\}$$

为以$\boldsymbol{a}$为中心、δ为半径的开球或点$\boldsymbol{a}$的δ邻域,

点$\boldsymbol{a}$的去心δ邻域为: $\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

若不需要强调邻域半径δ, 它们分别简记为$U(\boldsymbol{a})$ 和$\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel < \delta\}$$

为以$\boldsymbol{a}$为中心、δ为半径的开球或点$\boldsymbol{a}$的δ邻域,

点$\boldsymbol{a}$的去心δ邻域为: $\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

若不需要强调邻域半径δ, 它们分别简记为$U(\boldsymbol{a})$ 和$\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

- 有了邻域的概念, $\mathbf{R}^n$ 中点列极限的概念可以用邻域来刻画.

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel < \delta\}$$

为以$\boldsymbol{a}$为中心、δ为半径的开球或点$\boldsymbol{a}$的δ邻域,

点$\boldsymbol{a}$的去心δ邻域为: $\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

若不需要强调邻域半径δ, 它们分别简记为$U(\boldsymbol{a})$ 和$\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

- 有了邻域的概念, $\mathbf{R}^n$ 中点列极限的概念可以用邻域来刻画.

  设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点列, 若

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel < \delta\}$$

为以$\boldsymbol{a}$为中心、δ为半径的开球或点$\boldsymbol{a}$的δ邻域,

点$\boldsymbol{a}$的去心δ邻域为: $\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

若不需要强调邻域半径δ, 它们分别简记为$U(\boldsymbol{a})$ 和$\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

- 有了邻域的概念, $\mathbf{R}^n$ 中点列极限的概念可以用邻域来刻画.

  设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点列, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall k > N, \text{恒有 } \boldsymbol{x}_k \in U(\boldsymbol{a}, \varepsilon),$$

定义1.3

设$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\delta > 0$, 称点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \| < \delta\}$$

为以$\boldsymbol{a}$为中心、δ为半径的开球或点$\boldsymbol{a}$的δ邻域,

点$\boldsymbol{a}$的去心δ邻域为: $\mathring{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

若不需要强调邻域半径δ, 它们分别简记为$U(\boldsymbol{a})$ 和$\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

- 有了邻域的概念, $\mathbf{R}^n$ 中点列极限的概念可以用邻域来刻画.

  设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点列, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得} \forall k > N, \text{恒有 } \boldsymbol{x}_k \in U(\boldsymbol{a}, \varepsilon),$$

则称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ 是$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限.

定理1.5

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

即$\boldsymbol{a}$为A的聚点当且仅当$\boldsymbol{a}$ 的任何去心ε 邻域中都含有A 中的点.

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

即$\boldsymbol{a}$为A的聚点当且仅当$\boldsymbol{a}$ 的任何去心ε 邻域中都含有A 中的点.

定义1.4

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

即$\boldsymbol{a}$为A的聚点当且仅当$\boldsymbol{a}$ 的任何去心ε 邻域中都含有A 中的点.

定义1.4

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

即$\boldsymbol{a}$为A的聚点当且仅当$\boldsymbol{a}$ 的任何去心ε 邻域中都含有A 中的点.

定义1.4

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，

(1) 若存在$\delta > 0$ 使得$U(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq A$，则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的内点，

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

即$\boldsymbol{a}$为A的聚点当且仅当$\boldsymbol{a}$ 的任何去心ε 邻域中都含有A 中的点.

定义1.4

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，

(1) 若存在$\delta > 0$ 使得$U(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq A$，则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的内点，

由A的所有内点构成的集合称为A 的内部，记为A° 或$\mathrm{int}A$.

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

即$\boldsymbol{a}$为A的聚点当且仅当$\boldsymbol{a}$ 的任何去心ε 邻域中都含有A 中的点.

定义1.4

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,

(1) 若存在$\delta > 0$ 使得$U(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq A$, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的内点, 由A的所有内点构成的集合称为A 的内部, 记为A° 或$\mathrm{int}A$.

(2) 若存在$\delta > 0$ 使得$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \emptyset$, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的外点,

定理1.5

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 则$\boldsymbol{a} \in A'$ 的充要条件为

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathring{U}(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

即$\boldsymbol{a}$为A的聚点当且仅当$\boldsymbol{a}$ 的任何去心ε 邻域中都含有A 中的点.

定义1.4

设A是$\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,

(1) 若存在$\delta > 0$ 使得$U(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq A$, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的内点，由A的所有内点构成的集合称为A 的内部，记为A° 或$\mathrm{int} A$.

(2) 若存在$\delta > 0$ 使得$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \emptyset$, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的外点，由A的所有外点构成的集合称为A 的外部，记为$\mathrm{ext} A$.

定义1.4

定义1.4

(3) 若对$\forall\delta>0$, $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 既含有A中的点, 又含有A 的余集中的点, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的边界点, 由A的所有边界点构成的集合称为A 的边界, 记为∂A.

定义1.4

(3) 若对$\forall\delta>0$, $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 既含有A中的点, 又含有A 的余集中的点, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的边界点, 由A的所有边界点构成的集合称为A 的边界, 记为∂A.

- 由定义可知, $\mathbf{R}^n$ 中的任一点是且仅是A 的内点、外点与边界点中的一种, 即

定义1.4

(3) 若对$\forall\delta > 0$, $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 既含有A中的点, 又含有A 的余集中的点, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的边界点, 由A的所有边界点构成的集合称为A 的边界, 记为∂A.

- 由定义可知, $\mathbf{R}^n$ 中的任一点是且仅是A 的内点、外点与边界点中的一种, 即

$$\mathbf{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \ \mathrm{ext} A,$$

定义1.4

(3) 若对$\forall\delta > 0$, $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 既含有A中的点, 又含有A 的余集中的点, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的**边界点**, 由A的所有边界点构成的集合称为A 的**边界**, 记为∂A.

- 由定义可知, $\mathbf{R}^n$ 中的任一点是且仅是A 的内点、外点与边界点中的一种, 即

$$\mathbf{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \ \mathrm{ext}A,$$

且右端三个点集互不相交.

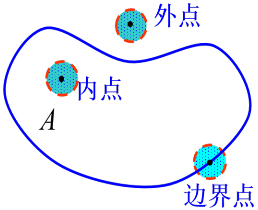
定义1.4

(3) 若对$\forall\delta>0$, $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 既含有A中的点, 又含有A 的余集中的点, 则称$\boldsymbol{a}$ 是集合A 的边界点, 由A的所有边界点构成的集合称为A 的边界, 记为∂A.

- 由定义可知, $\mathbf{R}^n$ 中的任一点是且仅是A 的内点、外点与边界点中的一种, 即

$$\mathbf{R}^n=A^\circ\cup\partial A\cup\ \mathrm{ext}A,$$

且右端三个点集互不相交.



- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leqslant \delta\}$.

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^{\circ}$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^\circ$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

下面的定理描述了开集与闭集的关系:

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^\circ$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

下面的定理描述了开集与闭集的关系:

定理1.6

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^\circ$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

下面的定理描述了开集与闭集的关系:

定理1.6

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集的充分必要条件为A^c为闭集.

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^\circ$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

下面的定理描述了开集与闭集的关系:

定理1.6

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集的充分必要条件为A^c为闭集.

注:

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^\circ$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

下面的定理描述了开集与闭集的关系:

定理1.6

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集的充分必要条件为A^c为闭集.

注: 1. 内点一定是聚点;

▶ 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^\circ$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

下面的定理描述了开集与闭集的关系:

定理1.6

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集的充分必要条件为A^c为闭集.

注: 1. 内点一定是聚点;

2. 边界点可能是聚点也可能不是聚点;

- 对于$\mathbf{R}^n$中的任一点集A, 必有$\bar{A} = A \cup \partial A$. 特别地, 称开球与其边界之并为闭球, 记为 $\overline{U}(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \parallel \leqslant \delta\}$.

定义1.5

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A \subseteq A^\circ$, 即A中的点全是A 的内点, 则称A为开集.

下面的定理描述了开集与闭集的关系:

定理1.6

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集的充分必要条件为A^c为闭集.

注: 1. 内点一定是聚点;

2. 边界点可能是聚点也可能不是聚点;

3. 聚点有可能属于集合，也可能不属于集合.

例如:

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$,

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) $\{(x,y)|0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1 < x^2+y^2 < 4\}$

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

例如: (1) $\{(x,y)|0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1 < x^2+y^2 < 4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 是闭集.

(3) $E_3 = \{(x,y)|x+y>0\}$

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

(3) $E_3=\{(x,y)|x+y>0\}$ 是开集.

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

(3) $E_3=\{(x,y)|x+y>0\}$ 是开集.

(4) $\mathbf{R}^n$中的开球$U(\boldsymbol{a},\delta)$是开集, 闭球$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 是闭集.

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

(3) $E_3=\{(x,y)|x+y>0\}$ 是开集.

(4) $\mathbf{R}^n$中的开球$U(\boldsymbol{a},\delta)$是开集, 闭球$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 是闭集.

(5) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\mathbf{R}^n|a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots\}$

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

(3) $E_3=\{(x,y)|x+y>0\}$ 是开集.

(4) $\mathbf{R}^n$中的开球$U(\boldsymbol{a},\delta)$是开集, 闭球$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 是闭集.

(5) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\mathbf{R}^n|a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots\}$

是开集, 此集合称为开区间;

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

(3) $E_3=\{(x,y)|x+y>0\}$ 是开集.

(4) $\mathbf{R}^n$中的开球$U(\boldsymbol{a},\delta)$是开集, 闭球$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 是闭集.

(5) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\mathbf{R}^n|a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots\}$

是开集, 此集合称为开区间;

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\mathbf{R}^n|a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots\}$

例如: (1) $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$(0,0)$ 是边界点, 也是聚点, 但不属于集合.

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, 边界上的点是聚点也属于集合.

例如: (1) 点集$\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 是开集;

(2) 点集$\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集.

(3) $E_3=\{(x,y)|x+y>0\}$ 是开集.

(4) $\mathbf{R}^n$中的开球$U(\boldsymbol{a},\delta)$是开集, 闭球$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 是闭集.

(5) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\mathbf{R}^n|a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots\}$

是开集, 此集合称为开区间;

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\mathbf{R}^n|a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots\}$

是闭集, 此集合称为闭区间.

下面的定理刻画了开集的特征：

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 中, 开集有如下性质:

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 中, 开集有如下性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是开集;

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 中, 开集有如下性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 中，开集有如下性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

(3) 有限多个开集的交是开集.

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 中, 开集有如下性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

(3) 有限多个开集的交是开集.

根据对偶原理可以得到$\mathbf{R}^n$ 中闭集的三个对应的基本性质:

下面的定理刻画了开集的特征:

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 中, 开集有如下性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

(3) 有限多个开集的交是开集.

根据对偶原理可以得到$\mathbf{R}^n$ 中闭集的三个对应的基本性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是闭集;

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 中, 开集有如下性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

(3) 有限多个开集的交是开集.

根据对偶原理可以得到$\mathbf{R}^n$ 中闭集的三个对应的基本性质:

(1) 空集$\emptyset$ 与全空间$\mathbf{R}^n$ 是闭集;

(2) 任意多个闭集的交是闭集;

下面的定理刻画了开集的特征：

定理1.7

在n维Euclid空间$\mathbf{R}^n$中，开集有如下性质：

(1) 空集$\emptyset$与全空间$\mathbf{R}^n$是开集；

(2) 任意多个开集的并是开集；

(3) 有限多个开集的交是开集.

根据对偶原理可以得到$\mathbf{R}^n$中闭集的三个对应的基本性质：

(1) 空集$\emptyset$与全空间$\mathbf{R}^n$是闭集；

(2) 任意多个闭集的交是闭集；

(3) 有限多个闭集的并是闭集.

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集,

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集,

- 有界集与无界集:

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集,

- 有界集与无界集: 若存在一个常数$M > 0$, 使得$\forall \boldsymbol{x} \in A$, 都有$\| \boldsymbol{x} \| \leqslant M$, 则称$A$ 为有界集, 否则称为无界集.

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集,

- 有界集与无界集: 若存在一个常数$M > 0$, 使得$\forall \boldsymbol{x} \in A$, 都有$\| \boldsymbol{x} \| \leqslant M$, 则称$A$ 为有界集, 否则称为无界集.

  有界集的几何意义是它能包含在$\mathbf{R}^n$中一个以原点$\mathbf{0}$ 为中心、M 为半径的闭球$\overline{U}(\mathbf{0}, M)$中.

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集,

- 有界集与无界集: 若存在一个常数$M > 0$, 使得$\forall \boldsymbol{x} \in A$, 都有$\| \boldsymbol{x} \| \leqslant M$, 则称$A$ 为有界集, 否则称为无界集.

  有界集的几何意义是它能包含在$\mathbf{R}^n$中一个以原点$\mathbf{0}$ 为中心、M 为半径的闭球$\overline{U}(\mathbf{0}, M)$中.

- 紧集:

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集,

- 有界集与无界集: 若存在一个常数$M > 0$, 使得$\forall \boldsymbol{x} \in A$, 都有$\| \boldsymbol{x} \| \leqslant M$, 则称$A$ 为有界集, 否则称为无界集.

  有界集的几何意义是它能包含在$\mathbf{R}^n$中一个以原点$\mathbf{0}$ 为中心、M 为半径的闭球$\overline{U}(\mathbf{0}, M)$中.

- 紧集: 若A 是有界闭集, 则称A 为紧集.

$\mathbf{R}^n$中的紧集与区域

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集,

- 有界集与无界集: 若存在一个常数$M > 0$, 使得$\forall \boldsymbol{x} \in A$, 都有$\| \boldsymbol{x} \| \leqslant M$, 则称$A$ 为有界集, 否则称为无界集.

  有界集的几何意义是它能包含在$\mathbf{R}^n$中一个以原点$\mathbf{0}$ 为中心、M 为半径的闭球$\overline{U}(\mathbf{0}, M)$中.

- 紧集: 若A 是有界闭集, 则称A 为紧集.

  结论: 根据Bolzano-Weierstrass定理可知, 若A 是紧集, 则A 中任何点列都有收敛于A 中的子列.

- 连通集:

- 连通集: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.

- **连通集**: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是**连通集**.

- **区域**:

- 连通集: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.
- 区域：连通的开集称为区域.

- 连通集: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.
- 区域：连通的开集称为区域.
- 闭区域：

- 连通集: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.
- 区域：连通的开集称为区域.
- 闭区域：区域与它的边界的并称为闭区域.

- 连通集: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.
- 区域：连通的开集称为区域.
- 闭区域：区域与它的边界的并称为闭区域.
- 凸集：

- 连通集: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.
- 区域：连通的开集称为区域.
- 闭区域：区域与它的边界的并称为闭区域.
- 凸集：若联结A 中的任意两点的线段都属于A,

- 连通集: 如果A 内任何两点x 与y 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.
- 区域：连通的开集称为区域.
- 闭区域：区域与它的边界的并称为闭区域.
- 凸集：若联结A 中的任意两点的线段都属于A,

  即若$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in A$, 则$\forall t \in [0,1]$, 有$t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 \in A$,

  则称A 是凸集.

- 连通集: 如果A 内任何两点$\boldsymbol{x}$ 与$\boldsymbol{y}$ 都能用完全属于A 的有限个线段联结起来, 则称A 是连通集.
- 区域: 连通的开集称为区域.
- 闭区域: 区域与它的边界的并称为闭区域.
- 凸集: 若联结A 中的任意两点的线段都属于A, 即若$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in A$, 则$\forall t \in [0,1]$, 有$t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 \in A$, 则称$A$ 是凸集.

结论: 因为任何凸集都是连通的, 故任何凸开集都是区域.