工科数学分析

贺 丹 (东南大学)

第二节　二重积分的计算

本章主要内容：

- 二重积分的几何意义
- 直角坐标系下的二重积分的计算
- 极坐标系下二重积分的计算
- 曲线坐标下二重积分的计算(二重积分的换元法)

极坐标系下二重积分的计算方法

极坐标系下二重积分的计算方法

1. 把二重积分 $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式

极坐标系下二重积分的计算方法

1. 把二重积分 $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 (D) 上连续，(D) 的边界曲线可写为极坐标方程 $\rho=\rho_1(\varphi)$ 和 $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$，其中 $\rho_1,\rho_2\in C_{[\alpha,\beta]}$.

极坐标系下二重积分的计算方法

1. 把二重积分 $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式

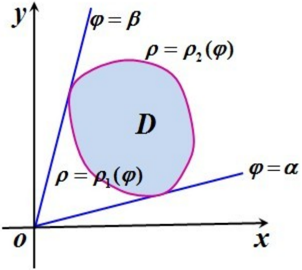
设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 (D) 上连续, (D) 的边界曲线可写为极坐标方程 $\rho=\rho_1(\varphi)$ 和 $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$, 其中 $\rho_1,\rho_2\in C_{[\alpha,\beta]}$.

假设从极点 O 出发且穿过闭区域 (D) 内部的射线与 (D) 的边界曲线相交不多于两点.

极坐标系下二重积分的计算方法

1. 把二重积分$\displaystyle\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为极坐标形式

设函数$f(x,y)$在闭区域(D)上连续，(D)的边界曲线可写为极坐标方程$\rho=\rho_1(\varphi)$和$\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$, 其中$\rho_1,\rho_2\in C_{[\alpha,\beta]}$.



假设从极点O出发且穿过闭区域(D)内部的射线与(D)的边界曲线相交不多于两点.

(1) 划分

(1) 划分

用以极点为中心的一族同心圆
$\rho=$常数, 以及从极点出发的
一族射线$\varphi=$常数, 把区域(D)
分成了n个小闭区域$(\Delta\sigma_i)$.

(1) 划分

用以极点为中心的一族同心圆 $\rho=$常数, 以及从极点出发的一族射线$\varphi=$常数, 把区域(D)分成了n个小闭区域$(\Delta\sigma_i)$.

(2) 近似

(1) 划分

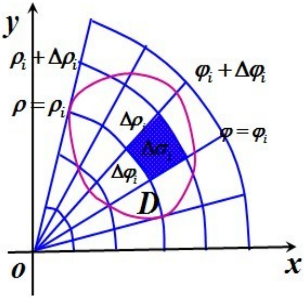
用以极点为中心的一族同心圆 $\rho=$常数, 以及从极点出发的一族射线$\varphi=$常数, 把区域(D)分成了n个小闭区域$(\Delta\sigma_i)$.

(2) 近似

除了包含边界的一些小闭区域外, $\Delta\sigma_i$可用近似视为两个扇形面积的差, 即

(1) 划分

用以极点为中心的一族同心圆 $\rho=$常数，以及从极点出发的一族射线$\varphi=$常数，把区域(D)分成了n个小闭区域$(\Delta\sigma_i)$.

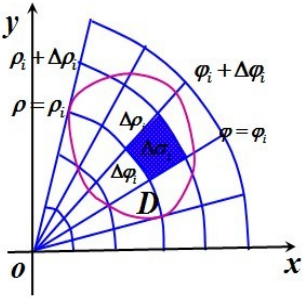


(2) 近似

除了包含边界的一些小闭区域外，$\Delta\sigma_i$可用近似视为两个扇形面积的差，即

(1) 划分

用以极点为中心的一族同心圆 $\rho=$常数, 以及从极点出发的一族射线$\varphi=$常数, 把区域(D)分成了n个小闭区域$(\Delta\sigma_i)$.



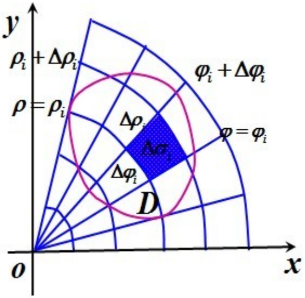
(2) 近似

除了包含边界的一些小闭区域外, $\Delta\sigma_i$可用近似视为两个扇形面积的差, 即

$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_i-\frac{1}{2}\rho_i^2\cdot\Delta\varphi_i$$

(1) 划分

用以极点为中心的一族同心圆 $\rho=$常数, 以及从极点出发的一族射线$\varphi=$常数, 把区域(D)分成了n个小闭区域$(\Delta\sigma_i)$.



(2) 近似

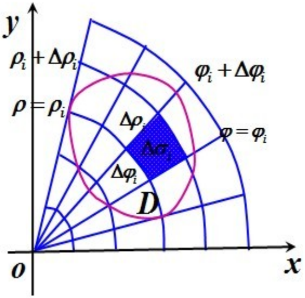
除了包含边界的一些小闭区域外, $\Delta\sigma_i$可用近似视为两个扇形面积的差, 即

$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_i-\frac{1}{2}\rho_i^2\cdot\Delta\varphi_i$$

$$=\rho_i\Delta\rho_i\Delta\varphi_i+\frac{1}{2}(\Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_i$$

(1) 划分

用以极点为中心的一族同心圆 $\rho=$常数，以及从极点出发的一族射线$\varphi=$常数，把区域(D)分成了n个小闭区域$(\Delta\sigma_i)$.



(2) 近似

除了包含边界的一些小闭区域外，$\Delta\sigma_i$可用近似视为两个扇形面积的差，即

$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_i-\frac{1}{2}\rho_i^2\cdot\Delta\varphi_i$$

$$=\rho_i\Delta\rho_i\Delta\varphi_i+\frac{1}{2}(\Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_i$$

$$\approx\rho_i\Delta\rho_i\Delta\varphi_i$$

(3) 求和取极限

(3) 求和取极限

由于$f(\xi_i,\eta_i)=f(\rho_i\cos\varphi_i,\rho_i\sin\varphi_i)$, 故

(3) 求和取极限

由于$f(\xi_i,\eta_i)=f(\rho_i\cos\varphi_i,\rho_i\sin\varphi_i)$，故

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\rho_i\cos\varphi_i,\rho_i\sin\varphi_i)\rho_i\Delta\rho_i\Delta\varphi_i$$

(3) 求和取极限

由于$f(\xi_i,\eta_i)=f(\rho_i\cos\varphi_i,\rho_i\sin\varphi_i)$, 故

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\rho_i\cos\varphi_i,\rho_i\sin\varphi_i)\rho_i\Delta\rho_i\Delta\varphi_i$$

- 二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式:

(3) 求和取极限

由于$f(\xi_i,\eta_i)=f(\rho_i\cos\varphi_i,\rho_i\sin\varphi_i)$, 故

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\rho_i\cos\varphi_i,\rho_i\sin\varphi_i)\rho_i\Delta\rho_i\Delta\varphi_i$$

- 二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

其中$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$称为极坐标系中的面积元素.

2. 把二重积分的极坐标形式化为二次积分

2. 把二重积分的极坐标形式化为二次积分

一般地, 都是化为先对ρ后对φ的二次积分.

2. 把二重积分的极坐标形式化为二次积分

一般地, 都是化为先对ρ后对φ的二次积分.

- 极点O位于积分区域(D)的外部, 即

2. 把二重积分的极坐标形式化为二次积分

一般地, 都是化为先对ρ后对φ的二次积分.

- 极点O位于积分区域(D)的外部, 即

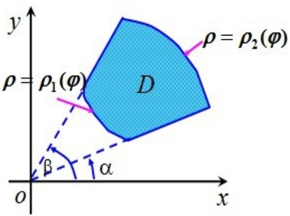
$$(D)=\{(\rho,\varphi)|\rho_1(\varphi)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\varphi),\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\},$$

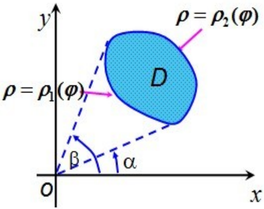
2. 把二重积分的极坐标形式化为二次积分

一般地，都是化为先对ρ后对φ的二次积分.

- 极点O位于积分区域(D)的外部，即

$$(D) = \{(\rho,\varphi)|\rho_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\varphi), \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta\},$$



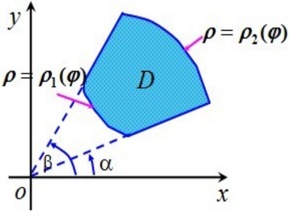


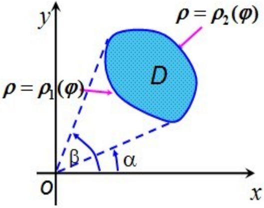
2. 把二重积分的极坐标形式化为二次积分

一般地, 都是化为先对ρ后对φ的二次积分.

- 极点O位于积分区域(D)的外部, 即

$$(D)=\{(\rho,\varphi)|\rho_1(\varphi)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\varphi),\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\},$$





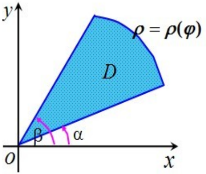
$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

- 极点O在区域(D)的边界,

$(D) = \{(\rho, \varphi) | 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi),$
$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta\}$, 则

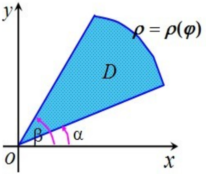
- 极点O在区域(D)的边界,

$(D)=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi),$
$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$, 则



- 极点O在区域(D)的边界,

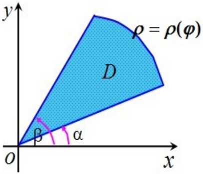
$(D)=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi),$
$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$, 则



$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\int_0^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

- 极点O在区域(D)的边界,

$(D)=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi),$
$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$, 则



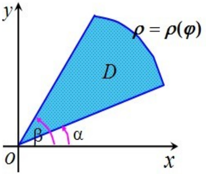
$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

- 极点O在区域(D)的内部,

$(D)=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi),$
$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, 则

- 极点O在区域(D)的边界,

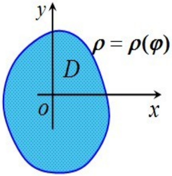
$(D)=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi),$
$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$, 则



$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi\int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

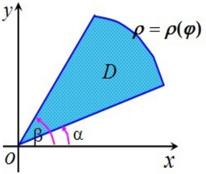
- 极点O在区域(D)的内部,

$(D)=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi),$
$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, 则



- 极点O在区域(D)的边界,

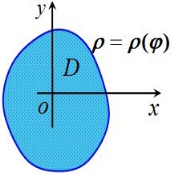
$(D) = \{(\rho, \varphi)|0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi),$
$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta\}$, 则



$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

- 极点O在区域(D)的内部,

$(D) = \{(\rho, \varphi)|0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi),$
$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, 则



$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$

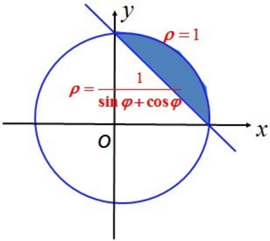
例1. 将积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分.

例1. 将积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分.

解:

例1. 将积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分.

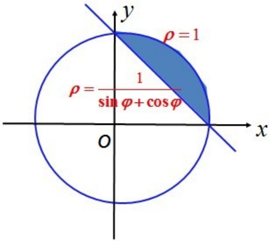
解:



例1. 将积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分.

解:

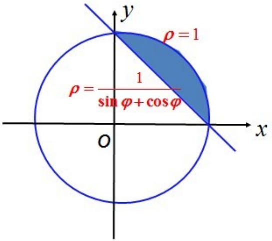
$$D: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} \leqslant \rho \leqslant 1 \end{cases}$$



例1. 将积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分.

解:

$$D:\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi} \leqslant \rho \leqslant 1 \end{cases}$$

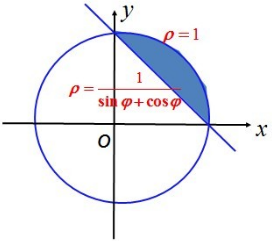


故 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

例1. 将积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分.

解:

$$D:\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi} \leqslant \rho \leqslant 1 \end{cases}$$



故 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho.$$

例2. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,

其中 $(\sigma)=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x\}$.

例2. 计算二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \arctan \dfrac{y}{x} \mathrm{d}\sigma$,

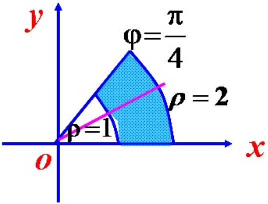
其中 $(\sigma) = \{(x, y) | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x\}$.

解: $D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant \rho \leqslant 2 \end{cases}$

例2. 计算二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,

其中$(\sigma) = \{(x,y)|1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x\}$.

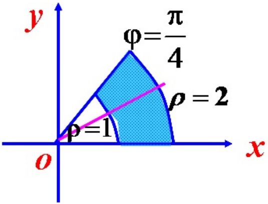
解: $D:\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant \rho \leqslant 2 \end{cases}$



例2. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} \arctan \frac{y}{x} \mathrm{d}\sigma$,

其中 $(\sigma) = \{(x,y)|1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x\}$.

解: $D: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant \rho \leqslant 2 \end{cases}$

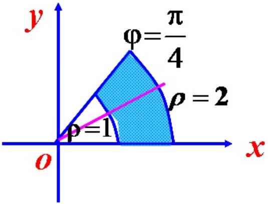


故 $\displaystyle\iint\limits_{D} \arctan \frac{y}{x} \mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 \arctan\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right) \cdot \rho \mathrm{d}\rho$

例2. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,

其中 $(\sigma) = \{(x,y)|1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x\}$.

解: $D: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant \rho \leqslant 2 \end{cases}$



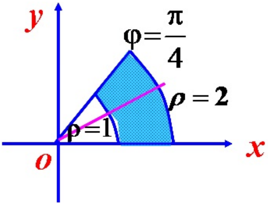
故 $\displaystyle\iint\limits_{D} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 \arctan\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right)\cdot\rho\mathrm{d}\rho$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 \varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

例2. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,

其中 $(\sigma)=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x\}$.

解: $D:\begin{cases} 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4} \\ 1\leqslant\rho\leqslant 2\end{cases}$



故 $$\iint\limits_{D}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2\arctan\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right)\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_1^2\rho\mathrm{d}\rho=\frac{3\pi^2}{64}.$$

例3. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(y^2+y\cos y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

例3. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(y^2+y\cos y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

$(\dfrac{9\pi}{4})$

例3. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(y^2+y\cos y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

$$(\frac{9\pi}{4})$$

例4. 计算积分 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)}x^2\mathrm{d}\sigma$, 其中$(\sigma)$由圆周$x^2+y^2=R^2$与直线$y=-x$所围成的右上半圆域.

例3. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(y^2+y\cos y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

$(\dfrac{9\pi}{4})$

例4. 计算积分 $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)}x^2\mathrm{d}\sigma$, 其中$(\sigma)$由圆周$x^2+y^2=R^2$与直线$y=-x$所围成的右上半圆域.

$(\dfrac{\pi}{8}R^4)$

例5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$

例5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$

解: $D:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\rho\leqslant R\cos\varphi \end{cases}$

例5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$

解: $D: \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \rho \leqslant R\cos\varphi \end{cases}$

故 $\displaystyle\iint\limits_{D} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

例5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma.$

解: $D:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\rho\leqslant R\cos\varphi \end{cases}$

故 $$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^{R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

例5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma.$

解: $D:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\rho\leqslant R\cos\varphi \end{cases}$

故 $$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^{R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\varphi|^3)\mathrm{d}\varphi$$

例5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$

解: $D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0\leqslant\rho\leqslant R\cos\varphi\end{cases}$

故 $$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{0}^{R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\varphi|^3)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{3}R^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

例5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma.$

解: $D:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\rho\leqslant R\cos\varphi \end{cases}$

故 $$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^{R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\varphi|^3)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{R^3}{9}(3\pi-4).$$

例6. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant|y|\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

例6. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,

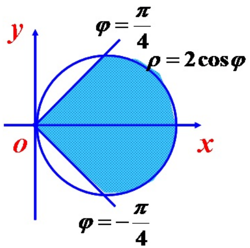
其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant |y|\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

解:

例6. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant|y|\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

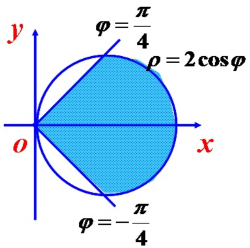
解:



例6. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant|y|\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

解: $\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho$

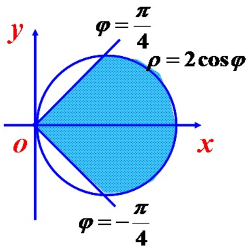


例6. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant|y|\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

解: $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$$



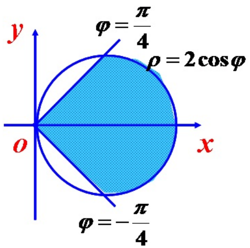
例6. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant|y|\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

解: $$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\varphi)\mathrm{d}\sin\varphi$$



例6. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

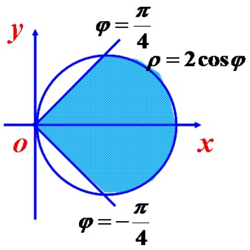
其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant|y|\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

解: $$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\sin\varphi$$

$$=\frac{20}{9}\sqrt{2}.$$



例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$,

例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma$$

例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{3\cos^3\varphi}\rho\mathrm{d}\rho$$

例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{3\cos^3\varphi}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\mathrm{d}\varphi$$

例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{3\cos^3\varphi}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=9\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45}{32}\pi.$$

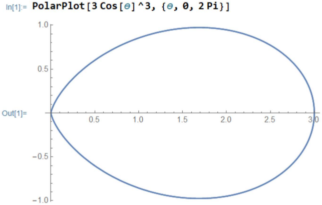
例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{3\cos^3\varphi}\rho d\rho$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=9\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45}{32}\pi.$$



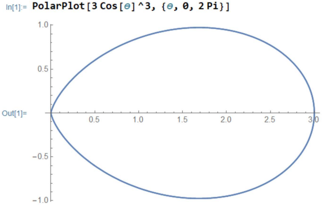
例7. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$所围成的图形的面积.

解: 曲线极坐标方程为$\rho=3\cos^3\varphi$, 由对称性可得,

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{3\cos^3\varphi}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=9\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45}{32}\pi.$$



练习. 求由曲线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)(a>0)$所围成的图形的面积.

例8. 求由球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得(含在圆柱内的部分)的立体体积.

例8. 求由球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得(含在圆柱内的部分)的立体体积.

解: 由对称性, 所求体积为第一卦限的4倍.

例8. 求由球体$x^2+y^2+z^2 \leqslant 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$

$(a>0)$所截得(含在圆柱内的部分)的立体体积.

解: 由对称性, 所求体积为第一卦限的4倍.

立体在第一卦限的部分可以视为一个曲顶柱体, 其顶为球面,

在xoy面的投影区域为$D=\{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 2ax, y \geqslant 0\}$,

例8. 求由球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$

$(a>0)$所截得(含在圆柱内的部分)的立体体积.

解：由对称性, 所求体积为第一卦限的4倍.

立体在第一卦限的部分可以视为一个曲顶柱体, 其顶为球面,

在xoy面的投影区域为$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2ax, y\geqslant 0\}$,

故 $V=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$

例8. 求由球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$

$(a>0)$所截得(含在圆柱内的部分)的立体体积.

解: 由对称性, 所求体积为第一卦限的4倍.

立体在第一卦限的部分可以视为一个曲顶柱体, 其顶为球面,

在xoy面的投影区域为$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2ax, y\geqslant 0\}$,

故 $$V=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

例8. 求由球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$

$(a>0)$所截得(含在圆柱内的部分)的立体体积.

解：由对称性, 所求体积为第一卦限的4倍.

立体在第一卦限的部分可以视为一个曲顶柱体, 其顶为球面,

在xoy面的投影区域为$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2ax, y\geqslant 0\}$,

故 $$V=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

例9. 计算无穷积分$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

例9. 计算无穷积分$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解: $I=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}.$

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}.$

化为极坐标区域为

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

化为极坐标区域为$D=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho<+\infty,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$,

例9. 计算无穷积分$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D = \{(x, y)|x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$

化为极坐标区域为$D = \{(\rho, \varphi)|0 \leqslant \rho < +\infty, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\},$

所以 $I^2 = \iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

化为极坐标区域为$D=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho<+\infty,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$,

所以 $I^2=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}.$

化为极坐标区域为$D=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho<+\infty,0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\}$,

所以 $I^2=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{4}$,

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

化为极坐标区域为$D=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho<+\infty,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$,

所以 $I^2=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}$,

故 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例9. 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

化为极坐标区域为$D=\{(\rho,\varphi)|0\leqslant\rho<+\infty,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$,

所以 $I^2=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}$,

故 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 此积分称为概率积分.