习题课　多元函数微分的应用

贺丹（东南大学）

1. 函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$ 处沿着A指向$B(3,-2,2)$的方向导数为______, 在点$A(1,0,1)$处方向导数的最大值为______, 最小值为______.

2. 设$u=xy^2z^3$, 则函数u在点$A(2,-1,1)$沿方向__________增加最快; 函数u在点$A(2,-1,1)$沿方向$\vec{l}=\{2,1,-2\}$的方向导数为________.

3. 函数$f(x,y,z)=xyz$在点$M(1,0,1)$处沿曲线$\begin{cases} x=t \\ y=1-t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$在该点指向$x$ 轴负向一侧的切线方向的方向导数为________.

4. 设函数$f(x,y)$在$(0,0)$点附近有定义，且$f_x(0,0)=3$,

$f_y(0,0)=1$, 则 [ ]

(A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$;

(B) 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{3,1,1\}$;

(C) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$;

(D) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$.

5. 曲面$z-\mathrm{e}^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面方程为______.

6. 曲线$C:\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点$P(1,-1,2)$处的切线方程为__________, 法平面方程为__________.

7. 函数$z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$的极小值点是 [ ]

(A) $(0,0)$ (B) $(2,2)$ (C) $(0,2)$ (D) $(2,0)$

8. 设$f(x)$ 二阶连续可导, 且$f(x)>0$, $f'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$在点$(0,0)$ 取得极小值的一个充分条件是

(A) $f(0)>1, f''(0)>0$; (B) $f(0)>1, f''(0)<0$;

(C) $f(0)<1, f''(0)>0$; (D) $f(0)<1, f''(0)<0$.

9. 设$f(x,y)$ 在原点的某邻域内连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y} = a > 0, \text{则} \qquad [\quad]$$

(A) $f(x,y)$ 在原点处取得极大值;

(B) $f(x,y)$ 在原点处取得极小值;

(C) 不能断定$f(x,y)$ 在原点处是否取得极值;

(D) 原点一定不是$f(x,y)$ 的极值点.

10. 设$f(x,y)$ 与$\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且$\varphi_y(x,y)\neq 0$, 已知(x_0,y_0) 是$z=f(x,y)$ 在约束条件$\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 [ ]

(A) 若$f_x(x_0,y_0)=0$, 则$f_y(x_0,y_0)=0$;

(B) 若$f_x(x_0,y_0)=0$, 则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$;

(C) 若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y(x_0,y_0)=0$;

(D) 若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$.

11. 向量值函数$\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x\cos y, ye^x, \sin(xz))^T$ 的Jacobi矩阵为____________.

12. 曲线 $\boldsymbol{r}=(\mathrm{e}^t\sin t, \mathrm{e}^t\cos t)$ $\left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 的长度为________.

13. 设曲线由$\begin{cases} x=\displaystyle\int_0^{t^2}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u \\ y=\displaystyle\int_0^{t^2}\sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u \end{cases}$ 确定, 则该曲线对应于 $0\leqslant t\leqslant 1$的弧长为____________.

14. 曲线$y=\sin x$ 在点$(\frac{\pi}{2},1)$ 处的曲率为________, 曲率圆为________.

计算题

1. 求曲面$z=x^2+y^2$的与直线$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2z=2 \end{cases}$垂直的切平面方程.

2. 设可微函数$f(x,y)$对任意实数$t\,(t>0)$满足

$$f(tx,ty)=tf(x,y),$$

$P_0(1,-2,2)$是曲面$z=f(x,y)$上的一点, 且$f_y(1,-2)=4$, 求该曲面在点$P_0(1,-2,2)$处的切平面.

3. 求函数$u(x,y,z)=\int_z^{xy}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 在点$P(1,1,1)$处沿曲面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{6}=1$在该点处的法线方向的方向导数.

4. 已知函数$f(x,y)$ 满足

$$f_{xy}=2(y+1)\mathrm{e}^x,\ f_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x,\ f(0,y)=y^2+2y$$

求$f(x,y)$ 的极值.

5. 求中心在原点的椭圆$5x^2+4xy+8y^2=1$ 的长半轴与短半轴的长度.

6. 求曲面$z=x^2+y^2\ (x^2+y^2\leqslant 2x)$与平面$x+y-z=1$的最长与最短距离.

7. 求证：当$n\geqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$时成立不等式

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

练习题

1. 求函数$f(x,y)=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$在点$P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$处沿曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在该点处的内法线方向的方向导数$(a,b>0)$.

2. 在椭球面$4x^2+y^2+z^2=4$的位于第一卦限部分上求一点, 使得在此点的切平面与三个坐标面所围成的三棱锥的体积最小.

3. 求曲线$y=\mathrm{e}^x$在点$(0,1)$处的曲率圆方程.

4. 求曲线$\boldsymbol{r}=(3t-t^3,3t^2,3t+t^3)$ 在$t=t_0$ 对应点处的曲率.