工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

6.2 第一型曲面积分

本章主要内容:

- 曲面的面积
- 第一型曲面积分的概念
- 第一型曲面积分的积分方法

曲面的面积

曲面的面积

设光滑曲面Σ的方程为$z = f(x, y)$, Σ在Oxy 面上的投影区域为D, 函数$f(x, y)$在D上有一阶连续的偏导数, 求曲面Σ的面积S.

曲面的面积

设光滑曲面Σ的方程为$z = f(x, y)$, Σ在Oxy 面上的投影区域为D, 函数$f(x, y)$在D上有一阶连续的偏导数, 求曲面Σ的面积S.

在D上任取一个直径很小的子域$\mathrm{d}\sigma$, ($\mathrm{d}\sigma$ 也代表该子域的面积), 在$\mathrm{d}\sigma$上任取一点$P(x, y)$, 对应地有曲面上的一点$M(x, y, f(x, y))$.

曲面的面积

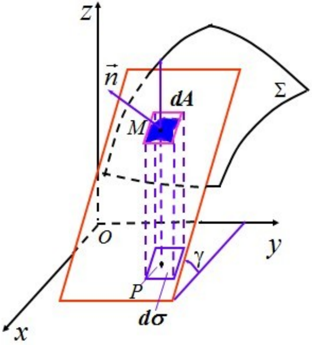
设光滑曲面Σ的方程为$z = f(x, y)$, Σ在Oxy 面上的投影区域为D, 函数$f(x, y)$在D上有一阶连续的偏导数, 求曲面Σ的面积S.

在D上任取一个直径很小的子域$\mathrm{d}\sigma$, ($\mathrm{d}\sigma$ 也代表该子域的面积), 在$\mathrm{d}\sigma$上任取一点$P(x, y)$, 对应地有曲面上的一点$M(x, y, f(x, y))$.过点M作切平面T, 它被以$\mathrm{d}\sigma$的边界曲线为准线, 母线平行于z 轴的柱面割下的部分为$\mathrm{d}S$, 则相应于$\mathrm{d}\sigma$ 的小曲面部分, 其面积可用$\mathrm{d}S$来近似.

曲面的面积

设光滑曲面Σ的方程为$z = f(x, y)$, Σ在Oxy 面上的投影区域为D, 函数$f(x, y)$在D上有一阶连续的偏导数, 求曲面Σ的面积S.

在D上任取一个直径很小的子域$\mathrm{d}\sigma$, ($\mathrm{d}\sigma$ 也代表该子域的面积), 在$\mathrm{d}\sigma$上任取一点$P(x, y)$, 对应地有曲面上的一点$M(x, y, f(x, y))$.过点M作切平面T, 它被以$\mathrm{d}\sigma$的边界曲线为准线, 母线平行于z 轴的柱面割下的部分为$\mathrm{d}S$, 则相应于$\mathrm{d}\sigma$ 的小曲面部分, 其面积可用$\mathrm{d}S$来近似.



设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma,$$

设曲面$z = f(x, y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma| \mathrm{d}S = \mathrm{d}\sigma, \quad \text{即} \quad \mathrm{d}S = \frac{1}{|\cos\gamma|} \mathrm{d}\sigma$$

设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma,\quad \text{即}\quad \mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

曲面$z=f(x,y)$在点M的法向量为$\boldsymbol{n}=\{f_x(x,y),f_y(x,y),-1\}$,

设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma,\quad \text{即}\quad \mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

曲面$z=f(x,y)$在点M的法向量为$\boldsymbol{n}=\{f_x(x,y),f_y(x,y),-1\}$,

故 $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$, 即

设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma,\quad \text{即}\quad \mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

曲面$z=f(x,y)$在点M的法向量为$\boldsymbol{n}=\{f_x(x,y),f_y(x,y),-1\}$,

故 $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$, 即

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma,$$

设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma, \quad \text{即} \quad \mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

曲面$z=f(x,y)$在点M的法向量为$\boldsymbol{n}=\{f_x(x,y),f_y(x,y),-1\}$,

故 $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$, 即

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma,$$

称为曲面$z=f(x,y)$ 的面积元素.

设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma,\quad \text{即}\quad \mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

曲面$z=f(x,y)$在点M的法向量为$\boldsymbol{n}=\{f_x(x,y),f_y(x,y),-1\}$,

故 $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$, 即

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma,$$

称为曲面$z=f(x,y)$ 的面积元素.

于是所求曲面的面积为

设曲面$z=f(x,y)$在点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角为γ, 则

$$|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma,\quad \text{即}\quad \mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

曲面$z=f(x,y)$在点M的法向量为$\boldsymbol{n}=\{f_x(x,y),f_y(x,y),-1\}$,

故 $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$, 即

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma,$$

称为曲面$z=f(x,y)$ 的面积元素.

于是所求曲面的面积为

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

说明

说明

- 若曲面Σ 的方程为$x = g(y, z)$ 或$y = h(x, z)$,

说明

- 若曲面Σ 的方程为$x = g(y, z)$ 或$y = h(x, z)$,

  则将Σ 投影到Oyz 面或Oxz 面, 得到曲面的面积为

说明

- 若曲面Σ 的方程为$x = g(y,z)$ 或$y = h(x,z)$,

  则将Σ 投影到Oyz 面或Oxz 面, 得到曲面的面积为

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + g_y^2(y,z) + g_z^2(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

说明

- 若曲面Σ 的方程为$x = g(y,z)$ 或$y = h(x,z)$,

  则将Σ 投影到Oyz 面或Oxz 面, 得到曲面的面积为

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + g_y^2(y,z) + g_z^2(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或

$$S = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + h_x^2(x,z) + h_z^2(x,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

说明

- 若曲面Σ 的方程为$x = g(y,z)$ 或$y = h(x,z)$,

  则将Σ 投影到Oyz 面或Oxz 面, 得到曲面的面积为

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + g_y^2(y,z) + g_z^2(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或
$$S = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + h_x^2(x,z) + h_z^2(x,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

- 若曲面Σ 的方程为隐式方程$F(x,y,z) = 0$, 且$F_z \neq 0$,

说明

- 若曲面Σ 的方程为$x=g(y,z)$ 或$y=h(x,z)$,

  则将Σ 投影到Oyz 面或Oxz 面, 得到曲面的面积为

$$S=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+g_y^2(y,z)+g_z^2(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或

$$S=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+h_x^2(x,z)+h_z^2(x,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

- 若曲面Σ 的方程为隐式方程$F(x,y,z)=0$, 且$F_z\neq 0$,

  则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$, 于是曲面的面积为

说明

- 若曲面Σ 的方程为$x=g(y,z)$ 或$y=h(x,z)$,

  则将Σ 投影到Oyz 面或Oxz 面, 得到曲面的面积为

$$S=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+g_y^2(y,z)+g_z^2(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或

$$S=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1+h_x^2(x,z)+h_z^2(x,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

- 若曲面Σ 的方程为隐式方程$F(x,y,z)=0$, 且$F_z\neq 0$,

  则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$, 于是曲面的面积为

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 求半径为R的球面面积S.

例1. 求半径为R的球面面积S.

答: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 其第一卦限的部分面积为S_1, 则 $S_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

例1. 求半径为R的球面面积S.

答: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 其第一卦限的部分面积为S_1, 则 $S_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

例1. 求半径为R的球面面积S.

答: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 其第一卦限的部分面积为S_1, 则 $S_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

其中$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,

例1. 求半径为R的球面面积S.

答: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 其第一卦限的部分面积为S_1, 则 $S_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

其中$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,

故 $$S=8S_1=8\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 求半径为R的球面面积S.

答: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 其第一卦限的部分面积为S_1, 则 $S_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

其中$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,

故
$$S=8S_1=8\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 求半径为R的球面面积S.

答: 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$, 其第一卦限的部分面积为S_1, 则 $S_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

其中$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,

故 $$S=8S_1=8\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=4\pi R^2.$$

例2. 求旋转抛物面$z = x^2 + y^2$上在平面$z = 1$下面的一部分曲面的面积.

例2. 求旋转抛物面$z = x^2 + y^2$上在平面$z = 1$下面的一部分曲面的面积.

解: $\Sigma : z = x^2 + y^2$, $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,

例2. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2$上在平面$z=1$下面的一部分曲面的面积.

解: $\Sigma: z=x^2+y^2$, $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2$上在平面$z=1$下面的一部分曲面的面积.

解: $\Sigma: z=x^2+y^2$, $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2$上在平面$z=1$下面的一部分曲面的面积.

解: $\Sigma: z=x^2+y^2$, $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

例2. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2$上在平面$z=1$下面的一部分曲面的面积.

解: $\Sigma: z=x^2+y^2$, $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}[(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^1$$

例2. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2$上在平面$z=1$下面的一部分曲面的面积.

解: $\Sigma: z=x^2+y^2$, $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}[(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

例3. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分的侧面积.

例3. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分的侧面积.

答案： 2.

说明

- 若曲面Σ的方程为参数方程:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

其中$(u, v) \in (\sigma) \subseteq \mathbf{R}^2$.

从几何上看, 曲面Σ 是uOv 参数平面上的区域(σ) 在映射$\boldsymbol{r}$ 下的像.

此时曲面Σ 的面积为 $S = \iint\limits_{(\sigma)} \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

说明

- 若曲面Σ的方程为参数方程:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

其中$(u,v)\in(\sigma)\subseteq\mathbf{R}^2$.

从几何上看, 曲面Σ 是uOv 参数平面上的区域(σ) 在映射$\boldsymbol{r}$ 下的像.

此时曲面Σ 的面积为 $S=\iint\limits_{(\sigma)}\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

例. 求半径为R的球面面积S.

第一型曲面积分的定义

定义

函数 f 为空间有界曲面 Σ 上有界. 将 Σ 任意分割成 n 个小部分 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$, 其第 i 小块曲面的面积为 ΔS_i .

第一型曲面积分的定义

定义

函数 f 为空间有界曲面 Σ 上有界. 将 Σ 任意分割成 n 个小部分$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$, 其第 i 小块曲面的面积为 ΔS_i .

记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i$的直径$\}$, 任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$,

第一型曲面积分的定义

定义

函数 f 为空间有界曲面 Σ 上有界. 将 Σ 任意分割成 n 个小部分 $\Delta S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 其第 i 小块曲面的面积为 ΔS_i . 记 $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta S_i \text{的直径}\}$, 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta S_i$, 作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$, 如果无论将 Σ 如何分割, 点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 如何选取, 当 $d \to 0$ 时, 上述和式有确定的极限, 则称函数 f 在 Σ 上**可积**, 极限值为 f 在 Σ 上的**第一型曲面积分**, 即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

第一型曲面积分的定义

定义

函数 f 为空间有界曲面 Σ 上有界. 将 Σ 任意分割成 n 个小部分$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$, 其第 i 小块曲面的面积为 ΔS_i .

记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i$的直径$\}$, 任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$, 如果无论将$\Sigma$如何分割, 点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$如何选取, 当$d\to 0$ 时, 上述和式有确定的极限, 则称函数 f 在Σ上**可积**, 极限值为 f 在Σ上的**第一型曲面积分**, 即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中$f(x,y,z)$称为被积函数, Σ称为积分曲面.

说明

说明

- 当$f(x,y,z)$在分片光滑曲线Σ上连续时，f的第一型曲面积分必存在.

说明

- 当$f(x,y,z)$在分片光滑曲线Σ上连续时，f的第一型曲面积分必存在.
- 面密度为连续函数$\mu(x,y,z)$的光滑曲面Σ的质量为：

说明

- 当$f(x,y,z)$在分片光滑曲线Σ上连续时，f的第一型曲面积分必存在.
- 面密度为连续函数$\mu(x,y,z)$的光滑曲面Σ的质量为：

$$m=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

说明

- 当$f(x,y,z)$在分片光滑曲线Σ上连续时，f的第一型曲面积分必存在.
- 面密度为连续函数$\mu(x,y,z)$的光滑曲面Σ的质量为：

$$m = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

- 当$f(x,y,z) \equiv 1$时，第一型曲面积分即为曲面的面积，即：

说明

- 当$f(x,y,z)$在分片光滑曲线Σ上连续时，f的第一型曲面积分必存在.
- 面密度为连续函数$\mu(x,y,z)$的光滑曲面Σ的质量为：

$$m=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

- 当$f(x,y,z)\equiv 1$时，第一型曲面积分即为曲面的面积，即：

$$\text{曲面}\Sigma\text{的面积}=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

第一型曲面积分的计算方法

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

设Σ为分片光滑曲面, 函数f在Σ上连续,

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

设Σ为分片光滑曲面, 函数f在Σ上连续,

- 若曲面Σ的方程为$z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

设Σ为分片光滑曲面, 函数f在Σ上连续,

- 若曲面Σ的方程为$z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

设Σ为分片光滑曲面, 函数f在Σ上连续,

- 若曲面Σ的方程为$z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 若曲面Σ的方程为$x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$, 则

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

设Σ为分片光滑曲面, 函数f在Σ上连续,

- 若曲面Σ的方程为$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 若曲面Σ的方程为$x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

设Σ为分片光滑曲面, 函数f在Σ上连续,

- 若曲面Σ的方程为$z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 若曲面Σ的方程为$x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- 若曲面Σ的方程为$y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$,

第一型曲面积分的计算方法

利用曲面的面积元素, 将第一型曲面积分化为二重积分来计算.

设Σ为分片光滑曲面, 函数f在Σ上连续,

- 若曲面Σ的方程为$z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 若曲面Σ的方程为$x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- 若曲面Σ的方程为$y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

例1. 计算$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h$ $(0<h<a)$截出的平面上方的部分.

例1. 计算$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h$ $(0<h<a)$截出的平面上方的部分.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2+y^2}$, $\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$,

例1. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h$ $(0<h<a)$截出的平面上方的部分.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2+y^2}$, $\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$,

$$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h$ $(0<h<a)$截出的平面上方的部分.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2+y^2}$, $\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$,

$$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$

例1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h$ $(0<h<a)$截出的平面上方的部分.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2+y^2}, \quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\},$

$$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 计算$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h$ $(0<h<a)$截出的平面上方的部分.

解： $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2+y^2},\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$,

$$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故
$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho}{a^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

例1. 计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h$ $(0<h<a)$截出的平面上方的部分.

解： $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2+y^2},\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$,

$$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho}{a^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi a\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\Big|_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\right)=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

例2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由$z=0,\quad z=1$ 与$z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

例2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由$z=0,\quad z=1$ 与$z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

解: $\Sigma_1 : z=0,\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

例2. 计算曲面积分$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由$z=0,\quad z=1$

与$z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

解: $\Sigma_1: z=0,\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\},\ \ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(z+y)\mathrm{d}S$$

例2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由$z=0$, $z=1$ 与$z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

解: $\Sigma_1: z=0,\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(z+y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

例2. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由$z=0,\quad z=1$

与$z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

解: $\Sigma_1: z=0,\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint_{\Sigma_1}(z+y)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$\Sigma_2: z=1,\ D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

例2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由$z=0,\quad z=1$ 与$z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

解: $\Sigma_1: z=0,\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(z+y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$\Sigma_2: z=1,\ D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(z+y)\mathrm{d}S$$

例2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+y)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由$z=0,\quad z=1$

与$z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

解: $\Sigma_1: z=0,\quad D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(z+y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$\Sigma_2: z=1,\ D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2\},\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(z+y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(1+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi,$$

$$\Sigma_3 : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},\ D_{xy} = \{(x, y) | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\},$$

$$\Sigma_3 : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},\ D_{xy} = \{(x, y)|1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\},$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 则

$$\Sigma_3 : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},\ D_{xy} = \{(x, y)|1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\},$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \text{则}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} (z+y)\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_3 : z = \sqrt{x^2+y^2-1},\ D_{xy} = \{(x,y)|1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\},$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{2x^2+2y^2-1}{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \text{则}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}(z+y)\mathrm{d}S = \iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}(\sqrt{x^2+y^2-1}+y)\cdot\sqrt{\frac{2x^2+2y^2-1}{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Sigma_3 : z = \sqrt{x^2+y^2-1},\ D_{xy} = \{(x,y)|1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\},$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{2x^2+2y^2-1}{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\text{ 则}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}(z+y)\mathrm{d}S = \iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}(\sqrt{x^2+y^2-1}+y)\cdot\sqrt{\frac{2x^2+2y^2-1}{x^2+y^2-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{2x^2+2y^2-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\sqrt{3}-\frac{1}{3})\pi,$$

$\Sigma_3 : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, $D_{xy} = \{(x, y) | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$,

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ 则}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} (z+y)\mathrm{d}S = \iint\limits_{1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2} (\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + y) \cdot \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2} \sqrt{2x^2 + 2y^2 - 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\sqrt{3} - \frac{1}{3})\pi,$$

故 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (z + y)\mathrm{d}S = 2\pi + (\sqrt{3} - \frac{1}{3})\pi = (\sqrt{3} + \frac{5}{3})\pi.$

例3. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,

其中$\Sigma : x^2+y^2=a^2, 0 \leqslant z \leqslant h\ (a>0, h>0)$.

例3. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,

其中$\Sigma: x^2+y^2=a^2, 0\leqslant z\leqslant h\ (a>0, h>0)$.

解: 由对称性知 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}A}{x^2+y^2+z^2} = 4\iint_{\Sigma_1} \frac{\mathrm{d}A}{a^2+z^2}$, 其中$\Sigma_1$ 为Σ 在第一卦限的部分.

例3. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,

其中$\Sigma : x^2+y^2=a^2, 0 \leqslant z \leqslant h \ (a>0, h>0)$.

解: 由对称性知 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}A}{x^2+y^2+z^2} = 4\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\mathrm{d}A}{a^2+z^2}$, 其中$\Sigma_1$ 为Σ在第一卦限的部分.

$\Sigma_1 : x=\sqrt{a^2-y^2}$, $D_{yz}=\{(x,y)|0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant h\}$,

例3. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,

其中$\Sigma: x^2+y^2=a^2, 0 \leqslant z \leqslant h\ (a>0, h>0)$.

解: 由对称性知 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}A}{x^2+y^2+z^2} = 4\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\mathrm{d}A}{a^2+z^2}$, 其中$\Sigma_1$ 为Σ在第一卦限的部分.

$\Sigma_1: x=\sqrt{a^2-y^2},\ D_{yz}=\{(x,y)|0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant h\}$,

$$\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

例3. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,

其中$\Sigma: x^2+y^2=a^2, 0\leqslant z\leqslant h\ (a>0, h>0)$.

解: 由对称性知 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}A}{x^2+y^2+z^2}=4\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}A}{a^2+z^2}$, 其中$\Sigma_1$ 为Σ在第一卦限的部分.

$\Sigma_1: x=\sqrt{a^2-y^2},\ D_{yz}=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant h\}$,

$$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$故原式=4\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{a^2+z^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例3. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,

其中 $\Sigma: x^2+y^2=a^2, 0 \leqslant z \leqslant h\ (a>0, h>0)$.

解: 由对称性知 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}A}{x^2+y^2+z^2} = 4\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\mathrm{d}A}{a^2+z^2}$, 其中 Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分.

$\Sigma_1: x=\sqrt{a^2-y^2}$, $D_{yz}=\{(x,y)|0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant h\}$,

$$\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

故原式 $\displaystyle= 4\iint\limits_{D_{yz}} \frac{1}{a^2+z^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi \arctan\frac{h}{a}$.

说明

说明

- 对第一型曲面积分, 被积函数$f(x,y,z)$是定义在Σ上的, 应满足曲线Σ的方程, 故可以利用Σ的方程来化简被积函数.

说明

- 对第一型曲面积分，被积函数$f(x,y,z)$是定义在Σ上的，应满足曲线Σ的方程，故可以利用Σ的方程来化简被积函数.
- 将第一型曲线积分化为二重积分的过程为:

说明

- 对第一型曲面积分, 被积函数$f(x,y,z)$是定义在Σ上的, 应满足曲线Σ的方程, 故可以利用Σ的方程来化简被积函数.

- 将第一型曲线积分化为二重积分的过程为:

  (1) 分析被积曲面Σ, 写成显式方程, 找其投影区域, 并求面积元素;

说明

- 对第一型曲面积分, 被积函数$f(x,y,z)$是定义在Σ上的, 应满足曲线Σ的方程, 故可以利用Σ的方程来化简被积函数.
- 将第一型曲线积分化为二重积分的过程为:

  (1) 分析被积曲面Σ, 写成显式方程, 找其投影区域, 并求面积元素;

  (2) 将曲面方程代入被积函数, 将积分区域换成投影区域, 将积分微元换成面积元素, 转化为二重积分.

说明

- 对第一型曲面积分, 被积函数$f(x,y,z)$是定义在Σ上的, 应满足曲线Σ的方程, 故可以利用Σ的方程来化简被积函数.
- 将第一型曲线积分化为二重积分的过程为:
  (1) 分析被积曲面Σ, 写成显式方程, 找其投影区域, 并求面积元素;
  (2) 将曲面方程代入被积函数, 将积分区域换成投影区域, 将积分微元换成面积元素, 转化为二重积分.
- 第一型曲面积分具有和三重积分类似的奇偶对称性和轮换对称性.

例4. 设$\Sigma : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{\qquad\qquad}.$$

例4. 设$\Sigma : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{\qquad\qquad}.(\frac{8}{3}\pi)$$

例4. 设$\Sigma: z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\underline{\qquad\qquad}.(\frac{8}{3}\pi)$$

例5. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$.

例4. 设$\Sigma : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{\qquad\qquad}.\left(\frac{8}{3}\pi\right)$$

例5. 计算$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x + |y|)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma : |x| + |y| + |z| = 1$. $\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

例6. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截得的部分.

例6. 计算$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截得的部分.

解: 由对称性知$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}S=0,$

例6. 计算$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截得的部分.

解: 由对称性知$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}S=0$,

而$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}S$

例6. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截得的部分.

解: 由对称性知$\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}S=0$,

而$\iint\limits_{\Sigma} zx\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}\sqrt{x^2+y^2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例6. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截得的部分.

解: 由对称性知 $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}S=0$,

而 $\iint\limits_{\Sigma} zx\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}\sqrt{x^2+y^2}\,x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.