函数项级数习题课

贺 丹 （东南大学）

1. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处

【　】

(A) 条件收敛;　(B) 绝对收敛;

(C) 发散;　(D) 收敛性不一定.

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛, 则该级数的收敛半径 $R=$ ______.

3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为3, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$ 的收敛区间为________.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 处收敛, 则实数 a 的取值范围是 【 】

(A) $1<a\leqslant 3$; (B) $1\leqslant a<3$;

(C) $1<a<3$; (D) $1\leqslant a\leqslant 3$.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域为________, 和函数 $S(x)=$ ________, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)4^n}$ 的和为________.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 2-x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ 它的以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为________.

7. 设$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1, \end{cases}$

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$,

则$S(-\frac{5}{2})=$ ______.

8. 设$f(x)$如上题, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x \quad (-\infty<x<+\infty)$, 其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$, 则$S(-\frac{7}{2})=$ ______.

9. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x-1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

若$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n=0,1,\cdots)$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\underline{\qquad\qquad}.$$

二、求下列函数项级数的收敛域

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) x^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{\ln(n+2)} (x-2)^{2n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (2x+1)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + (-3)^n} \frac{x^n}{n}$

三、求幂级数的和函数问题

1. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-4)^n$

2. 求下列数项级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n)!!}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$.

四、幂级数的展开问题

1. 将函数$f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+2x}$展成$x+1$的幂级数.

2. 将函数$f(x)=\ln\dfrac{1}{1+x}$展成$x-1$的幂级数.

3. 将幂级数$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$展成麦克劳林级数.

4. 将幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^nx^n}{n!}$展成$x-1$的幂级数.

5. 设$f(x)=\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$, 求$f^{(98)}(0)$.

五、将函数展为Fourier级数

1. 将函数 $f(x) = \text{sgn}(\cos x)$ 展成 Fourier 级数.

2. 将$f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$展开成正弦级数,

   并求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$. (第一问为作业题)

3. 将$f(x) = 2 + |x|$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$展开成以2为周期的Fourier

   级数, 并求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4. 将函数 $f(x) = 10 - x$ 在区间 $[5, 15]$ 上展开成以 10 为周期

   的 Fourier 级数 (作业题).

证明题

1. 证明：(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^n x}{2^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛;

(2) 存在 $\xi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cos\xi \sin^{n-1}\xi}{2^n} = \dfrac{2}{\pi}$.

2. 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{n! x^n}{x^2+n^2}$ 在 $[-2, 2]$ 上一致收敛.

3. 证明：函数 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续,

在 $(0, +\infty)$ 上可导.

4. 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, 求证：当$0<x<1$时, 有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C\ (C\text{为常数}),$$

并求C.　　(注：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$)

5. 证明：当$0<x<\pi$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.