工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第七章 多元函数的积分学及其应用

本章主要内容：

- 多元数量值函数积分的概念与性质
- 二重积分的计算
- 三重积分的计算
- 含参变量的积分与反常重积分
- 重积分的应用
- 第一型线积分与面积分
- 第二型线积分与面积分
- 各种积分的联系及其在场论中的应用

第一节　多元数量函数积分的概念与性质

第一节　多元数量函数积分的概念与性质

- 物体质量的计算
- 多元数量值函数积分的概念
- 积分存在的条件与性质

质量分布不均匀的物体质量的计算

质量分布不均匀的物体质量的计算

设有一平面薄片在Oxy 平面上占有区域(D), 其面密度为(D) 上的连续函数$\mu(x,y)$，求该平面薄片的质量m.

质量分布不均匀的物体质量的计算

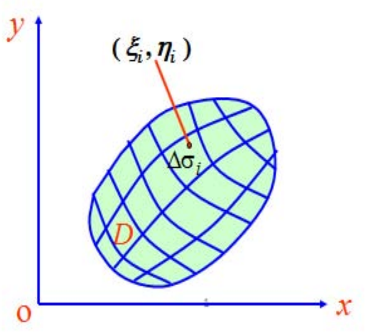
设有一平面薄片在Oxy 平面上占有区域(D), 其面密度为(D) 上的连续函数$\mu(x,y)$，求该平面薄片的质量m.

均匀薄片的质量=面密度× 薄片面积

质量分布不均匀的物体质量的计算

设有一平面薄片在Oxy 平面上占有区域(D), 其面密度为(D) 上的连续函数$\mu(x, y)$，求该平面薄片的质量m.

均匀薄片的质量$=$面密度$\times$ 薄片面积



1. 分割:

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$,
并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \cdots, (\Delta\sigma_n)$,并以$\Delta\sigma_i (i = 1, 2 \cdots, n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$,并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的.

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的. $\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 第$i$块薄片的质量的近似值为:

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的. $\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 第$i$块薄片的质量的近似值为: $\Delta m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$,并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的. $\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 第$i$块薄片的质量的近似值为: $\Delta m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

3. 求和:

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$,并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的. $\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 第$i$块薄片的质量的近似值为: $\Delta m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

3. 求和:

将这n个看作质量分布均匀的小块的质量相加, 得到整个平面薄片质量的近似值，即

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$，并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的. $\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 第$i$块薄片的质量的近似值为: $\Delta m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

3. 求和:

将这n个看作质量分布均匀的小块的质量相加, 得到整个平面薄片质量的近似值，即 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的. $\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 第$i$块薄片的质量的近似值为: $\Delta m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

3. 求和:

将这n个看作质量分布均匀的小块的质量相加, 得到整个平面薄片质量的近似值，即 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

4. 取极限:

1. 分割:

将薄片(即区域(D))任意分成n个子域$(\Delta\sigma_1),(\Delta\sigma_2),\cdots,(\Delta\sigma_n)$, 并以$\Delta\sigma_i(i=1,2\cdots,n)$表示第$i$个子域的面积.

2. 近似:

由于$\mu(x,y)$在(D)上连续, 因此当$(\Delta\sigma_i)$的直径很小时, 其质量可以看作是均匀分布的. $\forall(\xi_i,\eta_i)\in(\Delta\sigma_i)(i=1,2\cdots,n)$, 第$i$块薄片的质量的近似值为: $\Delta m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

3. 求和:

将这n个看作质量分布均匀的小块的质量相加, 得到整个平面薄片质量的近似值, 即 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

4. 取极限:

设$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(\Delta\sigma_i)$的直径$\}$, 当$d\to 0$时, 上面和式的极限就是所求薄片的质量, 即$m=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域，可以是平面、空间的曲线段，或者是空间的一片曲面)，

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. 分割:

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu=f(M)$.

1. 分割: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. 分割: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. 近似:

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. 分割: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. 近似: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为:

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. **分割**: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. **近似**: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\Omega_i$.

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. **分割**: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. **近似**: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\Omega_i$.
3. **求和**:

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. 分割: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. 近似: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\Omega_i$.
3. 求和: 整个形体的质量的近似值为:

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. **分割**: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. **近似**: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\Omega_i$.
3. **求和**: 整个形体的质量的近似值为:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i.$$

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. **分割**: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. **近似**: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\Omega_i$.
3. **求和**: 整个形体的质量的近似值为:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i.$$

4. **取极限**:

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. 分割: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. 近似: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\Omega_i$.
3. 求和: 整个形体的质量的近似值为:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i.$$

4. 取极限: 设$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i$的直径$\}$, 则

推广

若所求质量的物体为某一几何形体(Ω)(几何形体可以是平面、空间区域, 可以是平面、空间的曲线段, 或者是空间的一片曲面),其密度函数为连续函数$\mu = f(M)$.

1. **分割**: 将(Ω)任意划分成n个小部分, 将其度量记为$\Delta\Omega_i$.
2. **近似**: 在$(\Delta\Omega_i)$上质量的近似值为: $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\Omega_i$.
3. **求和**: 整个形体的质量的近似值为:
$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i.$$
4. **取极限**: 设$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$, 则
$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i.$$

多元数量值函数积分的定义

定义1.1 (多元数量值函数积分)

多元数量值函数积分的定义

定义1.1 (多元数量值函数积分)

设(Ω) 是一个有界的可以度量的几何形体, 函数f 是定义在(Ω) 上的有界数量值函数. 将(Ω) 任意分割成n 个小部分$(\Delta\Omega_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 其度量记为$\Delta\Omega_i$. 记$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$,

多元数量值函数积分的定义

定义1.1 (多元数量值函数积分)

设(Ω) 是一个有界的可以度量的几何形体, 函数f 是定义在(Ω) 上的有界数量值函数. 将(Ω) 任意分割成n 个小部分$(\Delta\Omega_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 其度量记为$\Delta\Omega_i$. 记$d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$,

任取点$M_i \in (\Delta\Omega_i)$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i$,

多元数量值函数积分的定义

定义1.1 (多元数量值函数积分)

设(Ω) 是一个有界的可以度量的几何形体，函数f 是定义在(Ω) 上的有界数量值函数．将(Ω) 任意分割成n 个小部分$(\Delta\Omega_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其度量记为$\Delta\Omega_i$．记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$，任取点$M_i\in(\Delta\Omega_i)$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$，如果无论将$\Omega$ 如何分割，点$M_i\in\Delta\Omega_i$ 如何选取，当$d\to 0$ 时，上述和式有确定的极限，

多元数量值函数积分的定义

定义1.1 (多元数量值函数积分)

设(Ω) 是一个有界的可以度量的几何形体，函数f 是定义在(Ω) 上的有界数量值函数．将(Ω) 任意分割成n 个小部分$(\Delta\Omega_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其度量记为$\Delta\Omega_i$．记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$，任取点$M_i\in(\Delta\Omega_i)$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$，如果无论将$\Omega$ 如何分割，点$M_i\in\Delta\Omega_i$ 如何选取，当$d\to 0$ 时，上述和式有确定的极限，则称函数f 在(Ω) 上可积，极限值为f 在(Ω) 上的积分，

多元数量值函数积分的定义

定义1.1 (多元数量值函数积分)

设(Ω) 是一个有界的可以度量的几何形体, 函数f 是定义在(Ω) 上的有界数量值函数. 将(Ω) 任意分割成n 个小部分$(\Delta\Omega_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 其度量记为$\Delta\Omega_i$. 记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$,

任取点$M_i\in(\Delta\Omega_i)$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$,

如果无论将Ω 如何分割, 点$M_i\in\Delta\Omega_i$ 如何选取, 当$d\to 0$ 时, 上述和式有确定的极限, 则称函数f 在(Ω) 上可积, 极限值为f 在(Ω) 上的积分, 记为$\displaystyle\int_{(\Omega)}f(M)\mathrm{d}\Omega=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$,

多元数量值函数积分的定义

定义1.1 (多元数量值函数积分)

设(Ω) 是一个有界的可以度量的几何形体, 函数f 是定义在(Ω) 上的有界数量值函数. 将(Ω) 任意分割成n 个小部分$(\Delta\Omega_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 其度量记为$\Delta\Omega_i$. 记$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i$的直径$\}$,

任取点$M_i\in(\Delta\Omega_i)$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$,

如果无论将Ω 如何分割, 点$M_i\in\Delta\Omega_i$ 如何选取, 当$d\to 0$ 时, 上述和式有确定的极限, 则称函数f 在(Ω) 上**可积**, 极限值为f 在(Ω) 上的**积分**, 记为$\int_{(\Omega)}f(M)\mathrm{d}\Omega=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$,

其中(Ω) 称为**积分域**, f 称为**被积函数**, $f(M)\mathrm{d}\Omega$ 称为**被积式或积分微元**.

二重积分:

二重积分: 形体为平面区域(σ)

二重积分: 形体为平面区域(σ)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分: 形体为平面区域(σ)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

三重积分:

二重积分: 形体为平面区域(σ)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

三重积分: 形体为三维空间区域(V)

二重积分: 形体为平面区域(σ)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

三重积分: 形体为三维空间区域(V)

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

第一型曲线积分(对弧长的曲线积分):

第一型曲线积分(对弧长的曲线积分): 形体为空间或平面曲线弧段(C) (称为积分路径)

第一型曲线积分(对弧长的曲线积分): 形体为空间或平面曲线弧段(C) (称为积分路径)

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

第一型曲线积分(对弧长的曲线积分): 形体为空间或平面曲线弧段(C) (称为积分路径)

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

第一型曲线积分(对弧长的曲线积分): 形体为空间或平面曲线弧段(C) (称为积分路径)

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

第一型曲面积分(对面积的曲面积分):

第一型曲线积分(对弧长的曲线积分): 形体为空间或平面曲线弧段(C) (称为积分路径)

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

第一型曲面积分(对面积的曲面积分): 形体为空间曲面(S)

第一型曲线积分(对弧长的曲线积分): 形体为空间或平面曲线弧段(C) (称为积分路径)

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

第一型曲面积分(对面积的曲面积分): 形体为空间曲面(S)

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

数量函数积分的几何和物理意义

数量函数积分的几何和物理意义

- 几何上, 当被积函数$f = 1$时, 则积分为形体的度量, 即

数量函数积分的几何和物理意义

- 几何上, 当被积函数 $f=1$时, 则积分为形体的度量, 即

$$\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = \text{平面区域}(\sigma)\text{的面积}$$

数量函数积分的几何和物理意义

- 几何上，当被积函数$f=1$时，则积分为形体的度量，即

$$\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = \text{平面区域}(\sigma)\text{的面积}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V = \text{空间区域}(V)\text{的体积}$$

数量函数积分的几何和物理意义

- 几何上, 当被积函数$f=1$时, 则积分为形体的度量, 即

$$\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = \text{平面区域}(\sigma)\text{的面积}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V = \text{空间区域}(V)\text{的体积}$$

$$\int_{(C)} \mathrm{d}s = \text{曲线}(C)\text{的长度}$$

数量函数积分的几何和物理意义

- 几何上，当被积函数$f=1$时，则积分为形体的度量，即

$$\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = \text{平面区域}(\sigma)\text{的面积}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V = \text{空间区域}(V)\text{的体积}$$

$$\int_{(C)} \mathrm{d}s = \text{曲线}(C)\text{的长度}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{d}S = \text{空间曲面}(S)\text{的面积}$$

数量函数积分的几何和物理意义

- 几何上，当被积函数$f=1$时，则积分为形体的度量，即

$$\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = \text{平面区域}(\sigma)\text{的面积}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V = \text{空间区域}(V)\text{的体积}$$

$$\int_{(C)} \mathrm{d}s = \text{曲线}(C)\text{的长度}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{d}S = \text{空间曲面}(S)\text{的面积}$$

- 当被积函数为形体的密度函数时

数量函数积分的几何和物理意义

- 几何上，当被积函数$f = 1$时，则积分为形体的度量，即

$$\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma = \text{平面区域}(\sigma)\text{的面积}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V = \text{空间区域}(V)\text{的体积}$$

$$\int_{(C)} \mathrm{d}s = \text{曲线}(C)\text{的长度}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{d}S = \text{空间曲面}(S)\text{的面积}$$

- 当被积函数为形体的密度函数时

$$\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega = \text{形体}(\Omega)\text{的质量}$$

积分存在的条件和性质

积分存在的条件和性质

- 类似定积分，若(Ω) 是有界闭集且可度量，$f \in C((\Omega))$，则f 在(Ω) 上一定可积.

积分存在的条件和性质

- 类似定积分, 若(Ω) 是有界闭集且可度量, $f \in C((\Omega))$, 则f 在(Ω) 上一定可积.
- 积分的性质:

积分存在的条件和性质

- 类似定积分, 若(Ω) 是有界闭集且可度量, $f \in C((\Omega))$, 则f 在(Ω) 上一定可积.
- 积分的性质:

1、线性性

积分存在的条件和性质

- 类似定积分，若(Ω) 是有界闭集且可度量，$f \in C((\Omega))$，则f 在(Ω) 上一定可积.

- 积分的性质:

1、线性性

$$\int_{(\Omega)} (\alpha f(M) + \beta g(M)) \mathrm{d}\Omega = \alpha \int_{(\Omega)} f(M) \mathrm{d}\Omega + \beta \int_{(\Omega)} g(M) \mathrm{d}\Omega$$

其中α, β 为常数.

积分存在的条件和性质

- 类似定积分，若(Ω) 是有界闭集且可度量，$f \in C((\Omega))$，则f 在(Ω) 上一定可积.
- 积分的性质:

1、线性性

$$\int_{(\Omega)} (\alpha f(M) + \beta g(M)) \mathrm{d}\Omega = \alpha \int_{(\Omega)} f(M) \mathrm{d}\Omega + \beta \int_{(\Omega)} g(M) \mathrm{d}\Omega$$

其中α, β 为常数.

2、对积分域的可加性

积分存在的条件和性质

- 类似定积分，若(Ω) 是有界闭集且可度量，$f \in C((\Omega))$，则f 在(Ω) 上一定可积.

- 积分的性质:

1、线性性

$$\int_{(\Omega)} (\alpha f(M) + \beta g(M))\mathrm{d}\Omega = \alpha \int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega + \beta \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega$$

其中α, β 为常数.

2、对积分域的可加性

设$(\Omega) = (\Omega_1) \cup (\Omega_2)$，且$(\Omega_1)$ 与(Ω_2) 除边界点外无公共部分，则

积分存在的条件和性质

- 类似定积分，若(Ω) 是有界闭集且可度量，$f\in C((\Omega))$，则f 在(Ω) 上一定可积.

- 积分的性质:

1、线性性

$$\int_{(\Omega)}(\alpha f(M)+\beta g(M))\mathrm{d}\Omega=\alpha\int_{(\Omega)}f(M)\mathrm{d}\Omega+\beta\int_{(\Omega)}g(M)\mathrm{d}\Omega$$

其中α,β 为常数.

2、对积分域的可加性

设$(\Omega)=(\Omega_1)\cup(\Omega_2)$，且$(\Omega_1)$ 与(Ω_2) 除边界点外无公共部分，则

$$\int_{(\Omega)}f(M)\mathrm{d}\Omega=\int_{(\Omega_1)}f(M)\mathrm{d}\Omega+\int_{(\Omega_2)}f(M)\mathrm{d}\Omega.$$

3、单调性

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\displaystyle\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

特别地, 有

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$，有$f(M) \leqslant g(M)$，则 $\displaystyle\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

特别地，有 $\displaystyle\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_{(\Omega)} |f(M)|\mathrm{d}\Omega.$

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\displaystyle\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

特别地, 有 $\displaystyle\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_{(\Omega)} |f(M)|\mathrm{d}\Omega.$

4、估值定理

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\displaystyle\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

特别地, 有 $\displaystyle\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_{(\Omega)} |f(M)|\mathrm{d}\Omega.$

4、估值定理

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$M_2 \leqslant f(M) \leqslant M_1$, 则

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\displaystyle\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

特别地, 有 $\displaystyle\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_{(\Omega)} |f(M)|\mathrm{d}\Omega.$

4、估值定理

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$M_2 \leqslant f(M) \leqslant M_1$, 则

$$M_2 \cdot (\Omega)\text{的度量} \leqslant \int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant M_1 \cdot (\Omega)\text{的度量}.$$

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\displaystyle\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega$.

特别地, 有 $\displaystyle\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_{(\Omega)} |f(M)|\mathrm{d}\Omega$.

4、估值定理

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$M_2 \leqslant f(M) \leqslant M_1$, 则

$$M_2 \cdot (\Omega)\text{的度量} \leqslant \int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant M_1 \cdot (\Omega)\text{的度量}.$$

5、中值定理

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

特别地，有 $\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_{(\Omega)} |f(M)|\mathrm{d}\Omega.$

4、估值定理

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$M_2 \leqslant f(M) \leqslant M_1$, 则

$$M_2 \cdot (\Omega)\text{的度量} \leqslant \int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant M_1 \cdot (\Omega)\text{的度量}.$$

5、中值定理

设$f(M) \in C_\Omega$, 则至少存在一点$M^* \in (\Omega)$, 使

3、单调性

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$f(M) \leqslant g(M)$, 则 $\displaystyle\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega.$

特别地, 有 $\displaystyle\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_{(\Omega)} |f(M)|\mathrm{d}\Omega.$

4、估值定理

若$\forall M \in (\Omega)$, 有$M_2 \leqslant f(M) \leqslant M_1$, 则

$$M_2 \cdot (\Omega)\text{的度量} \leqslant \int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant M_1 \cdot (\Omega)\text{的度量}.$$

5、中值定理

设$f(M) \in C_\Omega$, 则至少存在一点$M^* \in (\Omega)$, 使

$$\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega = f(M^*) \cdot (\Omega)\text{的度量}.$$

例 利用估值定理, 估计积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 的值,

其中 $(\sigma)=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$.

例 利用估值定理, 估计积分 $\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{e}^{x^2+y^2} \mathrm{d}\sigma$ 的值,

其中 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

答案: $\pi \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{e}^{x^2+y^2} \mathrm{d}\sigma \leqslant \pi \mathrm{e}$.