工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第八节 各种积分的关系及其在场论中的应用

本节主要内容:

- Green公式
- 平面线积分与积分路径无关的条件
- Gauss公式与散度
- Stokes公式与旋度
- 几种重要的特殊向量场

Gauss 公式

定理8.2(Gauss公式)

Gauss 公式

定理8.2(Gauss公式)

(1) Ω是一个空间闭区域，其边界$\partial\Omega$是光滑或分片光滑的闭曲面

Gauss 公式

定理8.2(Gauss公式)

(1) Ω是一个空间闭区域，其边界$\partial\Omega$是光滑或分片光滑的闭曲面

(2) $\partial\Omega$ 取外侧，记为$\partial\Omega^+$

Gauss 公式

定理8.2(Gauss公式)

(1) Ω是一个空间闭区域，其边界$\partial\Omega$是光滑或分片光滑的闭曲面

(2) $\partial\Omega$ 取外侧，记为$\partial\Omega^+$

(3) 函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Omega$上有一阶连续偏导数

Gauss 公式

定理8.2(Gauss公式)

(1) Ω是一个空间闭区域，其边界$\partial\Omega$是光滑或分片光滑的闭曲面

(2) $\partial\Omega$ 取外侧，记为$\partial\Omega^+$

(3) 函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Omega$上有一阶连续偏导数

则

Gauss 公式

定理8.2(Gauss公式)

(1) Ω是一个空间闭区域，其边界$\partial\Omega$是光滑或分片光滑的闭曲面

(2) $\partial\Omega$ 取外侧，记为$\partial\Omega^{+}$

(3) 函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Omega$上有一阶连续偏导数

则

$$\iint\limits_{\partial\Omega^{+}} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

Gauss 公式

定理8.2(Gauss公式)

(1) Ω是一个空间闭区域，其边界$\partial\Omega$是光滑或分片光滑的闭曲面

(2) $\partial\Omega$ 取外侧，记为$\partial\Omega^+$

(3) 函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上有一阶连续偏导数

则

$$\iint\limits_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V$$

例1. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是正方体$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$的表面, 取外侧.

例1. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是正方体$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$的表面, 取外侧.

解: $P=y(x-z), Q=x^2, R=y^2+xz, \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=y+x,$

例1. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是正方体$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$的表面，取外侧.

解：$P=y(x-z), Q=x^2, R=y^2+xz, \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=y+x,$

且Σ封闭，为正向，故由高斯公式得：

例1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是正方体$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$的表面, 取外侧.

解: $P=y(x-z), Q=x^2, R=y^2+xz, \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=y+x,$

且Σ封闭, 为正向, 故由高斯公式得:

$$\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

例1. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是正方体$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$的表面, 取外侧.

解: $P=y(x-z), Q=x^2, R=y^2+xz, \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=y+x$,

且Σ封闭, 为正向, 故由高斯公式得:

$$\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(y+x)\mathrm{d}V$$

例1. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是正方体$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$的表面，取外侧.

解：$P=y(x-z), Q=x^2, R=y^2+xz, \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=y+x$,

且Σ封闭，为正向，故由高斯公式得：

$$\iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(y+x)\mathrm{d}V=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(y+x)\mathrm{d}z=a^4.$$

例2. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

例2. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

解：注意此题Σ包围了原点$(0,0,0)$点, 不能直接用Gauss公式, 但是可以先将曲面方程代入消去分母为零的点, 则

例2. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

解: 注意此题Σ包围了原点$(0,0,0)$点, 不能直接用Gauss公式, 但是可以先将曲面方程代入消去分母为零的点, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{a^3},$$

例2. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

解: 注意此题Σ包围了原点$(0,0,0)$点, 不能直接用Gauss公式, 但是可以先将曲面方程代入消去分母为零的点, 则

$$\iint_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{a^3},$$

于是$P=x^3, Q=y^3, R=z^3$, 满足高斯公式的条件, 故

例2. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

解: 注意此题Σ包围了原点$(0,0,0)$点, 不能直接用Gauss公式, 但是可以先将曲面方程代入消去分母为零的点, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{a^3},$$

于是$P=x^3, Q=y^3, R=z^3$, 满足高斯公式的条件, 故

$$\text{原式}=-\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V$$

例2. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

解: 注意此题Σ包围了原点$(0,0,0)$点, 不能直接用Gauss公式, 但是可以先将曲面方程代入消去分母为零的点, 则

$$\iint_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{a^3},$$

于是$P=x^3, Q=y^3, R=z^3$, 满足高斯公式的条件, 故

$$原式=-\frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V$$

$$=-\frac{3}{a^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=-\frac{12}{5}\pi a^2.$$

例3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2(\frac{x}{2}-x^2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+4x(x-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是$z^2=x^2+y^2$介于$z=0$和$z=2$两平面间的部分, 取上侧.

例3. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} 2(\frac{x}{2}-x^2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+4x(x-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是$z^2=x^2+y^2$介于$z=0$和$z=2$两平面间的部分, 取上侧.

解： 注意Σ不是封闭曲线, 不能直接用高斯公式.

例3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2(\frac{x}{2} - x^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + 4x(x-z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$,

Σ是$z^2 = x^2 + y^2$介于$z = 0$和$z = 2$两平面间的部分, 取上侧.

解: 注意Σ不是封闭曲线, 不能直接用高斯公式.

补面$\Sigma_1 : z = 2(x^2 + y^2 \leqslant 4)$, 取下侧, 则$\Sigma + \Sigma_1$形成一个封闭曲面, 且为内侧, 故由高斯公式可得:

例3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2(\frac{x}{2}-x^2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+4x(x-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是$z^2=x^2+y^2$介于$z=0$和$z=2$两平面间的部分, 取上侧.

解: 注意Σ不是封闭曲线, 不能直接用高斯公式.

补面$\Sigma_1: z=2(x^2+y^2\leqslant 4)$, 取下侧, 则$\Sigma+\Sigma_1$形成一个封闭曲面, 且为内侧, 故由高斯公式可得:

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} = -\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = -\frac{8}{3}\pi,$$

例3. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} 2(\frac{x}{2}-x^2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+4x(x-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是$z^2=x^2+y^2$介于$z=0$和$z=2$两平面间的部分, 取上侧.

解: 注意Σ不是封闭曲线, 不能直接用高斯公式.

补面$\Sigma_1: z=2(x^2+y^2\leqslant 4)$, 取下侧, 则$\Sigma+\Sigma_1$形成一个封闭曲面, 且为内侧, 故由高斯公式可得:

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} = -\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=-\frac{8}{3}\pi,$$

而 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1} = -\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} 4x(x-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} 4x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-16\pi,$

例3. 计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} 2(\frac{x}{2}-x^2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+4x(x-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是$z^2=x^2+y^2$介于$z=0$和$z=2$两平面间的部分, 取上侧.

解: 注意Σ不是封闭曲线, 不能直接用高斯公式.

补面$\Sigma_1: z=2(x^2+y^2\leqslant 4)$, 取下侧, 则$\Sigma+\Sigma_1$形成一个封闭曲面, 且为内侧, 故由高斯公式可得:

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} = -\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=-\frac{8}{3}\pi,$$

而 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1} = -\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} 4x(x-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} 4x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-16\pi$,

故原式 $=-\dfrac{8}{3}\pi-(-16\pi)=\dfrac{40}{3}\pi$.

例4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解: 可计算$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$, 但是不能直接用高斯公式,

例4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解: 可计算$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$, 但是不能直接用高斯公式,

在椭球面内补球面$\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$, 取内侧, 设$\Omega$为椭球面与球面所围成的区域, 于是有

例4. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解: 可计算$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$, 但是不能直接用高斯公式,

在椭球面内补球面$\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$, 取内侧, 设$\Omega$为椭球面与球面所围成的区域, 于是有

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

例4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

Σ是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解: 可计算$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$, 但是不能直接用高斯公式,

在椭球面内补球面$\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$, 取内侧, 设$\Omega$为椭球面与球面所围成的区域, 于是有

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} 1\cdot\mathrm{d}V=\frac{4}{3}\pi abc-\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3,$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

又 $$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} y\ln \varepsilon\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln \varepsilon\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

又 $\displaystyle\iint_{\Sigma_\varepsilon} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$= \iint_{\Sigma_\varepsilon} y\ln \varepsilon\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln \varepsilon\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

因为 $P = y\ln\varepsilon$, $Q = x\ln\varepsilon$, $R = z$满足高斯条件, 且Σ_1围成的区域为$\Omega' : x^2+y^2+z^2 \leqslant \varepsilon^2$, 方向为内侧,

又 $$\iint_{\Sigma_\varepsilon} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma_\varepsilon} y\ln \varepsilon\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln \varepsilon\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

因为 $P = y\ln\varepsilon$, $Q = x\ln\varepsilon$, $R = z$满足高斯条件, 且Σ_1围成的区域为$\Omega' : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \varepsilon^2$, 方向为内侧,

所以 $$\iint_{\Sigma_\varepsilon} y\ln \varepsilon\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln \varepsilon\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= -\iiint_{\Omega'} \mathrm{d}V = -\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3,$$

又 $$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} y\ln r\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln r\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} y\ln \varepsilon\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln \varepsilon\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

因为 $P = y\ln\varepsilon$, $Q = x\ln\varepsilon$, $R = z$满足高斯条件, 且Σ_1围成的区域为$\Omega' : x^2+y^2+z^2 \leqslant \varepsilon^2$, 方向为内侧,

所以 $$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} y\ln \varepsilon\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - x\ln \varepsilon\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega'} \mathrm{d}V = -\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3,$$

故原式$= \dfrac{4}{3}\pi abc.$

散度的定义

定义8.1 (散度)

散度的定义

定义8.1 (散度)

设有连续向量场$\vec{F}(M)(M \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3)$, 点$M \in \Omega$, 任何包围点$M$的闭曲面$\Delta\Sigma \subseteq \mathbf{R}^3$, 设$\Delta\Sigma$所围的区域为$\Delta\Omega$, 体积为$\Delta V$, 直径为$d$, 且$\Delta\Sigma$取外侧.

散度的定义

定义8.1 (散度)

设有连续向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^3)$, 点$M\in\Omega$, 任何包围点$M$的闭曲面$\Delta\Sigma\subseteq\mathbf{R}^3$, 设$\Delta\Sigma$所围的区域为$\Delta\Omega$, 体积为$\Delta V$, 直径为$d$, 且$\Delta\Sigma$取外侧. 如果当$d\to 0$时, 比式$\dfrac{1}{\Delta V}\displaystyle\iint\limits_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$

的极限存在,

散度的定义

定义8.1 (散度)

设有连续向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^3)$, 点$M\in\Omega$, 任何包围点$M$的闭曲面$\Delta\Sigma\subseteq\mathbf{R}^3$, 设$\Delta\Sigma$所围的区域为$\Delta\Omega$, 体积为$\Delta V$, 直径为$d$, 且$\Delta\Sigma$取外侧. 如果当$d\to 0$时, 比式$\dfrac{1}{\Delta V}\displaystyle\iint_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$的极限存在, 则称此极限为向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$在点$M$处的散度或者通量密度, 记为$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{F}}(M)$, 即

散度的定义

定义8.1 (散度)

设有连续向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)(M\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^3)$, 点$M\in\Omega$, 任何包围点$M$的闭曲面$\Delta\Sigma\subseteq\mathbf{R}^3$, 设$\Delta\Sigma$所围的区域为$\Delta\Omega$, 体积为$\Delta V$, 直径为$d$, 且$\Delta\Sigma$取外侧. 如果当$d\to 0$时, 比式$\dfrac{1}{\Delta V}\displaystyle\iint_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$的极限存在, 则称此极限为向量场$\vec{\boldsymbol{F}}(M)$在点$M$处的**散度**或者**通量密度**, 记为$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{F}}(M)$, 即

$$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

散度的计算公式

若$\vec{\boldsymbol{F}} = \{P, Q, R\}$, 且$P, Q, R$为$C^{(1)}$类函数, 则由高斯公式, 散度为

散度的计算公式

若$\vec{\boldsymbol{F}}=\{P,Q,R\}$, 且$P,Q,R$为$C^{(1)}$类函数, 则由高斯公式, 散度为

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

散度的计算公式

若$\vec{\boldsymbol{F}}=\{P,Q,R\}$, 且$P,Q,R$为$C^{(1)}$类函数, 则由高斯公式, 散度为

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

散度的计算公式

若$\vec{\boldsymbol{F}}=\{P,Q,R\}$, 且$P,Q,R$为$C^{(1)}$类函数, 则由高斯公式, 散度为

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

再由积分中值定理可以得到散度的计算公式:

散度的计算公式

若$\vec{\boldsymbol{F}}=\{P,Q,R\}$, 且$P,Q,R$为$C^{(1)}$类函数, 则由高斯公式, 散度为

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$=\lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V$$

再由积分中值定理可以得到散度的计算公式:

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

散度的计算公式

若$\vec{\boldsymbol{F}} = \{P, Q, R\}$, 且$P, Q, R$为$C^{(1)}$类函数, 则由高斯公式, 散度为

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M) = \lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta\Sigma}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$= \lim_{d\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V$$

再由积分中值定理可以得到散度的计算公式:

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- Gauss公式可表示为 $\iint\limits_{\partial\Omega^+}\vec{\boldsymbol{F}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \iiint\limits_{\Delta\Omega}\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}V$

散度的物理意义

下面以流量问题为背景，来说明散度的物理意义：

散度的物理意义

下面以流量问题为背景，来说明散度的物理意义：

设一稳定的不可压缩的流体，其速度场为$\vec{v}(x,y,z)$，单位时间内通过Σ流向Σ外部的流量为$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$，其中$\vec{n}$为$\Sigma$的外侧单位法向量，$\Sigma$所围成的区域为$\Omega$.

散度的物理意义

下面以流量问题为背景，来说明散度的物理意义：

设一稳定的不可压缩的流体，其速度场为$\vec{v}(x,y,z)$，单位时间内通过Σ流向Σ外部的流量为$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$，其中$\vec{n}$为$\Sigma$的外侧单位法向量，$\Sigma$所围成的区域为$\Omega$.

总流量Φ=流出的流量−流入的流量

散度的物理意义

下面以流量问题为背景，来说明散度的物理意义：

设一稳定的不可压缩的流体，其速度场为$\vec{v}(x,y,z)$，单位时间内通过Σ流向Σ外部的流量为$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$，其中$\vec{n}$为$\Sigma$的外侧单位法向量，$\Sigma$所围成的区域为$\Omega$.

总流量Φ=流出的流量−流入的流量

- $\Phi>0$，流出大于流入，表明Ω内有“源”.

散度的物理意义

下面以流量问题为背景，来说明散度的物理意义：

设一稳定的不可压缩的流体，其速度场为$\vec{v}(x,y,z)$，单位时间内通过Σ流向Σ外部的流量为$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$，其中$\vec{n}$为$\Sigma$的外侧单位法向量，$\Sigma$所围成的区域为$\Omega$.

总流量Φ=流出的流量−流入的流量

- $\Phi>0$，流出大于流入，表明Ω内有“源”.
- $\Phi<0$，流出小于流入，表明Ω内有“洞”.

散度的物理意义

下面以流量问题为背景，来说明散度的物理意义：

设一稳定的不可压缩的流体，其速度场为$\vec{v}(x,y,z)$，单位时间内通过Σ流向Σ外部的流量为$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$，其中$\vec{n}$为$\Sigma$的外侧单位法向量，$\Sigma$所围成的区域为$\Omega$.

总流量Φ=流出的流量−流入的流量

- $\Phi>0$，流出大于流入，表明Ω内有"源".
- $\Phi<0$，流出小于流入，表明Ω内有"洞".
- $\Phi=0$，流出等于流入.

- 流量与Ω的体积之比 $\dfrac{1}{V}\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 表示流速场中单位时间从单位体积内流出Σ的平均流量,

- 流量与Ω的体积之比 $\dfrac{1}{V}\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 表示流速场中单位时间从单位体积内流出Σ的平均流量，即Ω内有"源"与有"洞"的平均状态, 称为流速场$\vec{v}$在Ω内的平均强源.

- 流量与Ω的体积之比 $\frac{1}{V}\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 表示流速场中单位时间从单位体积内流出Σ的平均流量，即Ω内有“源”与有“洞”的平均状态，称为流速场$\vec{v}$在Ω内的平均强源.
- $\mathrm{div}\vec{v}(M)$则表示在点M处有“源”与有“洞”的状态:

- 流量与Ω的体积之比 $\frac{1}{V}\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 表示流速场中单位时间从单位体积内流出Σ的平均流量，即Ω内有“源”与有“洞”的平均状态，称为流速场$\vec{v}$在Ω内的平均强源.
- $\mathrm{div}\vec{v}(M)$则表示在点M处有“源”与有“洞”的状态:
  - $\mathrm{div}\vec{v}(M) > 0$, 则表示该点处有“正源”;

- 流量与Ω的体积之比 $\dfrac{1}{V}\displaystyle\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 表示流速场中单位时间从单位体积内流出Σ的平均流量，即Ω内有"源"与有"洞"的平均状态，称为流速场$\vec{v}$在Ω内的平均强源.

- $\mathrm{div}\vec{v}(M)$则表示在点M处有"源"与有"洞"的状态:
  - $\mathrm{div}\vec{v}(M)>0$，则表示该点处有"正源";
  - $\mathrm{div}\vec{v}(M)<0$，则表示该点处有"负源(洞)";

- 流量与Ω的体积之比 $\dfrac{1}{V}\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 表示流速场中单位时间从单位体积内流出Σ的平均流量，即Ω内有“源”与有“洞”的平均状态，称为流速场$\vec{v}$在Ω内的平均强源.
- $\mathrm{div}\vec{v}(M)$则表示在点M处有“源”与有“洞”的状态:
  - $\mathrm{div}\vec{v}(M)>0$, 则表示该点处有“正源”;
  - $\mathrm{div}\vec{v}(M)<0$, 则表示该点处有“负源(洞)”;
  - $|\mathrm{div}\vec{v}(M)|$表示该点处“源”与“洞”的强度;

- 流量与Ω的体积之比 $\frac{1}{V}\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 表示流速场中单位时间从单位体积内流出Σ的平均流量，即Ω内有“源”与有“洞”的平均状态，称为流速场$\vec{v}$在Ω内的平均强源.
- $\mathrm{div}\vec{v}(M)$则表示在点M处有“源”与有“洞”的状态:
  - $\mathrm{div}\vec{v}(M)>0$, 则表示该点处有“正源”;
  - $\mathrm{div}\vec{v}(M)<0$, 则表示该点处有“负源(洞)”;
  - $|\mathrm{div}\vec{v}(M)|$表示该点处“源”与“洞”的强度;
  - 如果$\mathrm{div}\vec{v}(M)$在场内处处等于零, 则称向量场$\vec{v}$为无源场.

例. 求向量场$\vec{v}(x,y,z)=\{xy^2, ye^z, x\ln(1+z^2)\}$在点$P(1,1,0)$处的散度$\mathrm{div}\,\vec{v}$.

例. 求向量场$\vec{\boldsymbol{v}}(x,y,z)=\{xy^2,y\mathrm{e}^z,x\ln(1+z^2)\}$在点$P(1,1,0)$处的散度$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}$.

解：$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\left(y^2+\mathrm{e}^z+\dfrac{2xz}{1+z^2}\right)\Big|_{(1,1,0)}=2.$

例. 求向量场$\vec{\boldsymbol{v}}(x,y,z)=\{xy^2, y\mathrm{e}^z, x\ln(1+z^2)\}$在点$P(1,1,0)$处的散度$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}$.

解: $\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\left(y^2+\mathrm{e}^z+\dfrac{2xz}{1+z^2}\right)\Big|_{(1,1,0)}=2.$

- 散度的运算法则和公式:

例. 求向量场$\vec{\boldsymbol{v}}(x,y,z)=\{xy^2, y\mathrm{e}^z, x\ln(1+z^2)\}$在点$P(1,1,0)$处的散度$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}$.

解: $$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\left(y^2+\mathrm{e}^z+\frac{2xz}{1+z^2}\right)\Big|_{(1,1,0)}=2.$$

- 散度的运算法则和公式:
  - $\mathrm{div}(C\vec{\boldsymbol{v}})=C\,\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}$, 其中$C$ 为常数;

例. 求向量场$\vec{\boldsymbol{v}}(x,y,z)=\{xy^2, y\mathrm{e}^z, x\ln(1+z^2)\}$在点$P(1,1,0)$处的散度$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}$.

解: $$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\left(y^2+\mathrm{e}^z+\frac{2xz}{1+z^2}\right)\bigg|_{(1,1,0)}=2.$$

- 散度的运算法则和公式:
  - $\mathrm{div}(C\vec{\boldsymbol{v}})=C\,\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}$, 其中$C$ 为常数;
  - $\mathrm{div}(\vec{\boldsymbol{A}}\pm\vec{\boldsymbol{B}})=\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}\pm\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{B}}$;

例. 求向量场$\vec{v}(x,y,z)=\{xy^2, ye^z, x\ln(1+z^2)\}$在点$P(1,1,0)$处的散度$\mathrm{div}\,\vec{v}$.

解: $\mathrm{div}\,\vec{v}=\left(y^2+e^z+\dfrac{2xz}{1+z^2}\right)\Big|_{(1,1,0)}=2.$

- 散度的运算法则和公式:
  - $\mathrm{div}(C\vec{v})=C\mathrm{div}\,\vec{v}$, 其中$C$ 为常数;
  - $\mathrm{div}(\vec{A}\pm\vec{B})=\mathrm{div}\,\vec{A}\pm\mathrm{div}\,\vec{B}$;
  - $\mathrm{div}(u\vec{A})=u\mathrm{div}\,\vec{A}+\mathbf{grad}\,u\cdot\vec{A}$, u为一数量值函数.