工科数学分析

贺 丹 （东南大学）

第七节 第二型曲线积分与面积分

第七节 第二型曲线积分与面积分

本章主要内容:

- 场的概念
- 第二型曲线积分
- 第二型曲面积分

场的概念及分类

场的概念及分类

定义： 把分布着某种物理量的平面或者空间区域称为“**场**”.

场的概念及分类

定义： 把分布着某种物理量的平面或者空间区域称为“**场**”.

场的分类：

场的概念及分类

定义： 把分布着某种物理量的平面或者空间区域称为“**场**”.

场的分类：

- 数量场和向量场

场的概念及分类

定义： 把分布着某种物理量的平面或者空间区域称为“场”.

场的分类：

- 数量场和向量场

  按照某种物理量是数量值函数或是向量值函数, 将其场称为数量场或向量场.

场的概念及分类

定义： 把分布着某种物理量的平面或者空间区域称为“场”.

场的分类：

- 数量场和向量场

  按照某种物理量是数量值函数或是向量值函数, 将其场称为数量场或向量场.

- 稳定场和非稳定场

场的概念及分类

定义： 把分布着某种物理量的平面或者空间区域称为“场”.

场的分类：

- 数量场和向量场

  按照某种物理量是数量值函数或是向量值函数, 将其场称为数量场或向量场.

- 稳定场和非稳定场

  如果场中的物理量仅随位置变化, 而不随时间变化, 这种场称为稳定场(或定常场); 如果是随时间变化的, 则称为非稳定场(或非定常场)。

场的表示

从数学观点来看，在一个区域上给定一个函数，就相当于给定了一个场，此函数称场函数，区域称为场域.

场的表示

从数学观点来看，在一个区域上给定一个函数，就相当于给定了一个场，此函数称**场函数**，区域称为**场域**.

- 数量场：数量函数$f(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$;

场的表示

从数学观点来看, 在一个区域上给定一个函数, 就相当于给定了一个场, 此函数称**场函数**, 区域称为**场域**.

- 数量场: 数量函数$f(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$;
- 向量场: 向量函数$\boldsymbol{F}(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$.

场的表示

从数学观点来看, 在一个区域上给定一个函数, 就相当于给定了一个场, 此函数称**场函数**, 区域称为**场域**.

- 数量场: 数量函数$f(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$;
- 向量场: 向量函数$\boldsymbol{F}(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$.

例: 位于原点且电量为q的点电荷产生的静电场为

场的表示

从数学观点来看, 在一个区域上给定一个函数, 就相当于给定了一个场, 此函数称场函数, 区域称为场域.

- 数量场: 数量函数$f(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$;
- 向量场: 向量函数$\boldsymbol{F}(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$.

例: 位于原点且电量为q的点电荷产生的静电场为

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

场的表示

从数学观点来看, 在一个区域上给定一个函数, 就相当于给定了一个场, 此函数称场函数, 区域称为场域.

- 数量场: 数量函数$f(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$;
- 向量场: 向量函数$\boldsymbol{F}(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$.

例: 位于原点且电量为q的点电荷产生的静电场为

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{x, y, z\}$$

场的表示

从数学观点来看, 在一个区域上给定一个函数, 就相当于给定了一个场, 此函数称**场函数**, 区域称为**场域**.

- 数量场: 数量函数 $f(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$;
- 向量场: 向量函数 $\boldsymbol{F}(M)$ $(M \in \mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3)$.

例: 位于原点且电量为q的点电荷产生的静电场为

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{x, y, z\}$$

其中ε_0是真空中介电常数.

数量场的几何描述

数量场的几何描述

- 对于空间数量场$f(M)=f(x,y,z)$, 称使$f(x,y,z)$取同一个值的曲面$f(x,y,z)=C$为该数量场的等值面.

数量场的几何描述

- 对于空间数量场$f(M)=f(x,y,z)$, 称使$f(x,y,z)$取同一个值的曲面$f(x,y,z)=C$为该数量场的等值面.
- 对于平面数量场$f(M)=f(x,y)$, 称使$f(x,y)$取同一个值的曲线$f(x,y)=C$为该数量场的等值线.

数量场的几何描述

- 对于空间数量场$f(M)=f(x,y,z)$, 称使$f(x,y,z)$取同一个值的曲面$f(x,y,z)=C$为该数量场的等值面.
- 对于平面数量场$f(M)=f(x,y)$, 称使$f(x,y)$取同一个值的曲线$f(x,y)=C$为该数量场的等值线.

例如, 地图上绘制的等高线是高度场的等值线;

气象中常用等温线来表示温度场.

向量场的几何描述

向量场的几何描述

- 向量线的概念

向量场的几何描述

- 向量线的概念

  设空间向量场$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$, 若曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量与向量$\boldsymbol{F}(x, y, z)$共线, 则称曲线$C$为这个向量场的向量线.

向量场的几何描述

- 向量线的概念

  设空间向量场$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$, 若曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量与向量$\boldsymbol{F}(x, y, z)$共线, 则称曲线$C$为这个向量场的向量线.

- 向量线的方程

向量场的几何描述

- 向量线的概念

  设空间向量场$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$, 若曲线$C$上任一点$(x,y,z)$处的切向量与向量$\boldsymbol{F}(x,y,z)$共线, 则称曲线$C$为这个向量场的**向量线**.

- 向量线的方程

  设向量场为$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, 曲线$C$上任一点$(x,y,z)$处的切向量为

向量场的几何描述

- 向量线的概念

  设空间向量场$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$, 若曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量与向量$\boldsymbol{F}(x, y, z)$共线, 则称曲线$C$为这个向量场的向量线.

- 向量线的方程

  设向量场为$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, 曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量为$\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$,

向量场的几何描述

- 向量线的概念

  设空间向量场$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$, 若曲线$C$上任一点$(x,y,z)$处的切向量与向量$\boldsymbol{F}(x,y,z)$共线, 则称曲线$C$为这个向量场的向量线.

- 向量线的方程

  设向量场为$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, 曲线$C$上任一点$(x,y,z)$处的切向量为$\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$,它与向量$\{P,Q,R\}$共线, 故

向量场的几何描述

- 向量线的概念

设空间向量场$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$, 若曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量与向量$\boldsymbol{F}(x, y, z)$共线, 则称曲线$C$为这个向量场的向量线.

- 向量线的方程

设向量场为$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, 曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量为$\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$,它与向量$\{P, Q, R\}$共线, 故

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{R(x, y, z)}$$

向量场的几何描述

- 向量线的概念

  设空间向量场$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$, 若曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量与向量$\boldsymbol{F}(x, y, z)$共线, 则称曲线$C$为这个向量场的向量线.

- 向量线的方程

  设向量场为$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, 曲线$C$上任一点$(x, y, z)$处的切向量为$\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$,它与向量$\{P, Q, R\}$共线, 故

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{R(x, y, z)}$$

  解此微分方程组即可得到向量线.

例1. 求平面向量场$\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$的向量线.

例1. 求平面向量场$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$的向量线.

解: $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 故可得方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{-y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$,

例1. 求平面向量场$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$的向量线.

解： $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 故可得方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{-y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$,

解微分方程可得$x^2+y^2=C$即为所求.

例1. 求平面向量场$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$的向量线.

解: $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 故可得方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{-y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$,

解微分方程可得$x^2+y^2=C$即为所求.

例2. 求静电场$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}\{x,y,z\}$的向量线.

例1. 求平面向量场$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$的向量线.

解: $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 故可得方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{-y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$,

解微分方程可得$x^2+y^2=C$即为所求.

例2. 求静电场$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}\{x,y,z\}$的向量线.

解: 解方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$, 可得

例1. 求平面向量场$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$的向量线.

解: $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 故可得方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{-y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$,

解微分方程可得$x^2+y^2=C$即为所求.

例2. 求静电场$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}\{x,y,z\}$的向量线.

解: 解方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$, 可得 $\begin{cases} y=C_1x, \\ z=C_2x, \end{cases}$

例1. 求平面向量场$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$的向量线.

解： $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 故可得方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{-y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$,

解微分方程可得$x^2+y^2=C$即为所求.

例2. 求静电场$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}\{x,y,z\}$的向量线.

解： 解方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$, 可得 $\begin{cases} y=C_1x, \\ z=C_2x, \end{cases}$

它表示过原点, 方向向量为$\{1,C_1,C_2\}$的直线族, 称为电力线.

第二型曲线积分

- 第二型曲线积分的物理背景——变力做功问题

第二型曲线积分

- 第二型曲线积分的物理背景——变力做功问题

设有一质点, 在变力$\boldsymbol{F}(M)=\boldsymbol{F}(x,y,z)$作用下, 沿空间光滑曲线$L$从点$A$移动到点$B$, 求变力$\boldsymbol{F}$所做的功$W$, 其中$\boldsymbol{F}$连续.

第二型曲线积分

- 第二型曲线积分的物理背景——变力做功问题

设有一质点, 在变力$\boldsymbol{F}(M) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$作用下, 沿空间光滑曲线$L$从点$A$移动到点$B$, 求变力$\boldsymbol{F}$所做的功$W$, 其中$\boldsymbol{F}$连续.

- 如果某质点在常力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从A移动到B, 则常力$\boldsymbol{F}$所做的功为

第二型曲线积分

- 第二型曲线积分的物理背景——变力做功问题

设有一质点, 在变力$\boldsymbol{F}(M) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$作用下, 沿空间光滑曲线$L$从点$A$移动到点$B$, 求变力$\boldsymbol{F}$所做的功$W$, 其中$\boldsymbol{F}$连续.

- 如果某质点在常力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从A移动到B, 则常力$\boldsymbol{F}$所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

第二型曲线积分

- 第二型曲线积分的物理背景——变力做功问题

设有一质点, 在变力$\boldsymbol{F}(M) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$作用下, 沿空间光滑曲线$L$从点$A$移动到点$B$, 求变力$\boldsymbol{F}$所做的功$W$, 其中$\boldsymbol{F}$连续.

- 如果某质点在常力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从A移动到B, 则常力$\boldsymbol{F}$所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

- 注：应把曲线L看做有向曲线

第二型曲线积分

- 第二型曲线积分的物理背景——变力做功问题

设有一质点, 在变力$\boldsymbol{F}(M)=\boldsymbol{F}(x,y,z)$作用下, 沿空间光滑曲线$L$从点$A$移动到点$B$, 求变力$\boldsymbol{F}$所做的功$W$, 其中$\boldsymbol{F}$连续.

- 如果某质点在常力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从A移动到B, 则常力$\boldsymbol{F}$所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB},\boldsymbol{F})=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

- 注：应把曲线L看做有向曲线
- 处理方法：分割, 近似, 求和, 取极限

(1) 分割

(1) 分割

任取点列

$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$

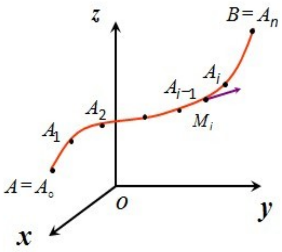
把曲线L任意分成n个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$, 第i段弧的长度记为Δs_i.

(1) 分割

任取点列

$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$

把曲线L任意分成n个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$, 第i段弧的长度记为Δs_i.

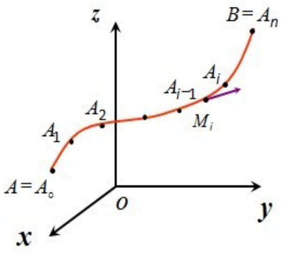


(1) 分割

任取点列

$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$

把曲线L任意分成n个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$, 第i段弧的长度记为Δs_i.



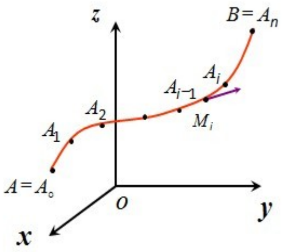
(2) 近似

(1) 分割

任取点列

$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$

把曲线L任意分成n个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$，第i段弧的长度记为Δs_i.



(2) 近似

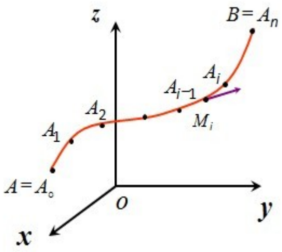
任取点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$，则质点沿曲线$C$从点$A_{i-1}$移动到$A_i$时，力场$\boldsymbol{F}$所作的功为

(1) 分割

任取点列

$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$

把曲线L任意分成n个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$, 第i段弧的长度记为Δs_i.



(2) 近似

任取点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$, 则质点沿曲线$C$从点$A_{i-1}$移动到$A_i$时, 力场$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$\Delta W_i \approx \boldsymbol{F}(M_i) \cdot [\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$$

其中$\boldsymbol{T}(M_i)$是质点在点M_i处与L同方向的单位切向量.

(3) 求和

(3) 求和

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot[\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$$

(3) 求和

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot[\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$$

(4) 取极限

(3) 求和

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot[\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$$

(4) 取极限

令$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 则力场 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

(3) 求和

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot[\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$$

(4) 取极限

令$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 则力场 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i$$

第二型曲线积分的定义

第二型曲线积分的定义

定义7.1 (第二型曲线积分)

第二型曲线积分的定义

定义7.1 (第二型曲线积分)

设L是空间中一条有向光滑曲线弧，向量函数$\boldsymbol{F}$在L上有定义. 任取分点$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$把曲线$L$任意分成$n$个有向小弧段$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$，记第$i$段弧的长度为$\Delta s_i$. 令$d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta s_i\}$，

第二型曲线积分的定义

定义7.1 (第二型曲线积分)

设L是空间中一条有向光滑曲线弧, 向量函数$\boldsymbol{F}$在L上有定义. 任取分点$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$把曲线$L$任意分成$n$个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$, 记第$i$段弧的长度为$\Delta s_i$. 令$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 任取点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i)\cdot[\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$,

第二型曲线积分的定义

定义7.1 (第二型曲线积分)

设L是空间中一条有向光滑曲线弧，向量函数$\boldsymbol{F}$在L上有定义. 任取分点$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$把曲线$L$任意分成$n$个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$，记第$i$段弧的长度为$\Delta s_i$. 令$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$，任取点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i) \cdot [\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$，其中$\boldsymbol{T}(M_i)$是质点在点$M_i$处与$L$方向相同的单位切向量.

第二型曲线积分的定义

定义7.1 (第二型曲线积分)

设L是空间中一条有向光滑曲线弧，向量函数$\boldsymbol{F}$在L上有定义. 任取分点$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$把曲线$L$任意分成$n$个有向小弧段$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$，记第$i$段弧的长度为$\Delta s_i$. 令$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$，任取点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i)\cdot[\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$，其中$\boldsymbol{T}(M_i)$是质点在点$M_i$处与$L$方向相同的单位切向量.如果无论将$L$如何分割，点$M_i \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$如何选取，当$d \to 0$时，上述和式有确定的极限，则称向量函数$\boldsymbol{F}$在$L$上可积，并称该极限值为向量函数$\boldsymbol{F}$沿有向曲线$L$的第二型曲线积分，简称为第二型曲线积分，记为$\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s$，即

第二型曲线积分的定义

定义7.1 (第二型曲线积分)

设L是空间中一条有向光滑曲线弧，向量函数$\boldsymbol{F}$在L上有定义. 任取分点$A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$把曲线$L$任意分成$n$个有向小弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$, 记第$i$段弧的长度为$\Delta s_i$. 令$d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 任取点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$, 作和式$\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i) \cdot [\boldsymbol{T}(M_i)\Delta s_i]$, 其中$\boldsymbol{T}(M_i)$是质点在点$M_i$处与$L$方向相同的单位切向量.如果无论将$L$如何分割，点$M_i \in \widehat{A_{i-1}A_i}$如何选取，当$d \to 0$时，上述和式有确定的极限，则称向量函数$\boldsymbol{F}$在$L$上可积，并称该极限值为向量函数$\boldsymbol{F}$沿有向曲线$L$的第二型曲线积分，简称为第二型曲线积分，记为$\int_L \boldsymbol{F}(M) \cdot \boldsymbol{T}(M) \mathrm{d}s$, 即

$$\int_L \boldsymbol{F}(M) \cdot \boldsymbol{T}(M) \mathrm{d}s = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i) \cdot \boldsymbol{T}(M_i) \Delta s_i$$

第二型曲线积分的坐标形式

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\frac{1}{\mathrm{d}s}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\frac{1}{\mathrm{d}s}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

则

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\frac{1}{\mathrm{d}s}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

则 $\boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\boldsymbol{F}(M)\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\frac{1}{\mathrm{d}s}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

则 $\boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\boldsymbol{F}(M)\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\frac{1}{\mathrm{d}s}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

则 $\boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\boldsymbol{F}(M)\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

于是第二型曲线积分也可以记为

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\frac{1}{\mathrm{d}s}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

则 $\boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\boldsymbol{F}(M)\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

于是第二型曲线积分也可以记为

$$\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

第二型曲线积分的坐标形式

设向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

且切向量为$\boldsymbol{T}$为

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\frac{1}{\mathrm{d}s}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$$

则 $\boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\boldsymbol{F}(M)\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

于是第二型曲线积分也可以记为

$$\int_L\boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

上式称为第二型曲线积分的数量形式或坐标形式. 因此第二型曲线积分也称为对坐标的曲线积分.

第二型曲线积分的向量形式

若记$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{T}\mathrm{d}s = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$, 则第二型曲线积分又可记为

第二型曲线积分的向量形式

若记$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$, 则第二型曲线积分又可记为

$$\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

第二型曲线积分的向量形式

若记$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$, 则第二型曲线积分又可记为

$$\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

其中$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$称为弧向量微元. 上式称为第二型曲线积分的向量形式.

第二型曲线积分的向量形式

若记$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$, 则第二型曲线积分又可记为

$$\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\boldsymbol{T}(M)\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

其中$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$称为弧向量微元. 上式称为第二型曲线积分的向量形式.

若L为平面有向光滑曲线弧, 向量函数为

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

则有

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

第二型曲线积分的性质

第二型曲线积分的性质

- 线性性

第二型曲线积分的性质

- 线性性

$$\int_L [k_1 \boldsymbol{F}_1 + k_2 \boldsymbol{F}_2] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = k_1 \int_L \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + k_2 \int_L \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

第二型曲线积分的性质

- 线性性

$$\int_L [k_1\boldsymbol{F}_1 + k_2\boldsymbol{F}_2]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = k_1\int_L \boldsymbol{F}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + k_2\int_L \boldsymbol{F}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 方向性

第二型曲线积分的性质

- 线性性

$$\int_L [k_1 \boldsymbol{F}_1 + k_2 \boldsymbol{F}_2] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = k_1 \int_L \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + k_2 \int_L \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 方向性　用L^-表示与曲线L方向相反的有向曲线弧, 则

第二型曲线积分的性质

- 线性性

$$\int_L [k_1 \boldsymbol{F}_1 + k_2 \boldsymbol{F}_2] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = k_1 \int_L \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + k_2 \int_L \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 方向性 用L^-表示与曲线L方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{L^-} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

第二型曲线积分的性质

- 线性性

$$\int_L [k_1\boldsymbol{F}_1 + k_2\boldsymbol{F}_2]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = k_1\int_L \boldsymbol{F}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + k_2\int_L \boldsymbol{F}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 方向性　用L^-表示与曲线L方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{L^-} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 对积分路径的可加性

第二型曲线积分的性质

- 线性性

$$\int_L [k_1 \boldsymbol{F}_1 + k_2 \boldsymbol{F}_2] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = k_1 \int_L \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + k_2 \int_L \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 方向性　用L^-表示与曲线L方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{L^-} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 对积分路径的可加性　设A, B, C为曲线弧L上的任意三点,

第二型曲线积分的性质

- 线性性

$$\int_L [k_1\boldsymbol{F}_1 + k_2\boldsymbol{F}_2]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = k_1\int_L \boldsymbol{F}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + k_2\int_L \boldsymbol{F}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 方向性 用L^-表示与曲线L方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{L^-} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

- 对积分路径的可加性 设A, B, C为曲线弧L上的任意三点,

则
$$\int_{L(AB)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{L(AC)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{L(CB)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

第二型曲线积分的计算方法

第二型曲线积分的计算方法

第二型曲线积分的计算方法

第二型曲线积分的计算方法

设有向光滑曲线弧L的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，当参数$t$单调地由$\alpha$变到$\beta$时，点$M(x, y, z)$由$L$的起点$A$沿$L$运动到终点$B$；且向量值函数$\boldsymbol{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$ 在L上连续，则

第二型曲线积分的计算方法

第二型曲线积分的计算方法

设有向光滑曲线弧L的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，当参数$t$单调地由$\alpha$变到$\beta$时, 点$M(x,y,z)$由$L$的起点$A$沿$L$运动到终点$B$; 且向量值函数$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在L上连续, 则

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

第二型曲线积分的计算方法

第二型曲线积分的计算方法

设有向光滑曲线弧L的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，当参数$t$单调地由$\alpha$变到$\beta$时，点$M(x,y,z)$由$L$的起点$A$沿$L$运动到终点$B$；且向量值函数$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在L上连续，则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t.$$

第二型曲线积分的计算方法

第二型曲线积分的计算方法

- 当L是平面曲线, 其参数方程为$x = x(t), y = y(t)$, 则有

第二型曲线积分的计算方法

- 当L是平面曲线, 其参数方程为$x=x(t), y=y(t)$, 则有

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

第二型曲线积分的计算方法

- 当L是平面曲线, 其参数方程为$x = x(t), y = y(t)$, 则有

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

第二型曲线积分的计算方法

- 当L是平面曲线, 其参数方程为$x=x(t), y=y(t)$, 则有

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- 若平面曲线L的方程为$y=y(x), a\le x\le b$, 起点对应于a, 终点对应于b, 则可把x作为参数, 于是有

第二型曲线积分的计算方法

- 当L是平面曲线, 其参数方程为$x=x(t), y=y(t)$, 则有

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

- 若平面曲线L的方程为$y=y(x), a\le x\le b$, 起点对应于a, 终点对应于b, 则可把x作为参数, 于是有

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

第二型曲线积分的计算方法

- 当L是平面曲线, 其参数方程为$x = x(t), y = y(t)$, 则有

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

- 若平面曲线L的方程为$y = y(x), a \le x \le b$, 起点对应于a, 终点对应于b, 则可把x作为参数, 于是有

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]\mathrm{d}x$$

例1. 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$, 其中L为抛物线$y^2=x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧.

例1. 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$, 其中L为抛物线$y^2 = x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧.

解: 曲线$L: x = y^2$, y从-1到1, 于是

例1. 计算$\displaystyle\int_L xy\mathrm{d}x$, 其中$L$为抛物线$y^2=x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧.

解: 曲线$L: x=y^2$, y从-1到1, 于是

$$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot (y^2)'\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1} y^4\mathrm{d}y=\frac{4}{5}.$$

例1. 计算$\int_L xy\mathrm{d}x$, 其中L为抛物线$y^2=x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧.

解： 曲线$L: x=y^2$, y从-1到1, 于是

$$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot (y^2)'\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1} y^4\mathrm{d}y=\frac{4}{5}.$$

例2. 计算$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$, 其中有向曲线$L$的起点为$A(1,0)$, 终点为$B(0,1)$, L分别为

(1) 圆弧$x^2+y^2=1$在第一象限的部分; (2)折线AOB.

例1. 计算$\int_L xy\mathrm{d}x$, 其中L为抛物线$y^2=x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧.

解: 曲线$L: x=y^2$, y从-1到1, 于是

$$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot (y^2)'\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1} y^4\mathrm{d}y=\frac{4}{5}.$$

例2. 计算$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$, 其中有向曲线$L$的起点为$A(1,0)$, 终点为$B(0,1)$, L分别为

(1) 圆弧$x^2+y^2=1$在第一象限的部分; (2)折线AOB.

答案: -1.

例3. 计算$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$, 其中有向曲线$L$的起点为$A(a,0)$, 终点为$B(0,-b)$, L分别为:

(1) 椭圆弧$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上在第一、二、三象限的部分;

(2)直线$y=\dfrac{b}{a}x-b$.

例3. 计算 $\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$, 其中有向曲线$L$的起点为$A(a,0)$, 终点为$B(0,-b)$, L分别为：

(1) 椭圆弧$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上在第一、二、三象限的部分;

(2)直线$y=\dfrac{b}{a}x-b$.

解： (1) 曲线$L: x=a\cos t, y=b\sin t$，t从0到$\dfrac{3\pi}{2}$, 于是

例3. 计算$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$, 其中有向曲线$L$的起点为$A(a,0)$, 终点为$B(0,-b)$, L分别为:

(1) 椭圆弧$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上在第一、二、三象限的部分;

(2)直线$y=\dfrac{b}{a}x-b$.

解: (1) 曲线$L: x=a\cos t, y=b\sin t$, t从0到$\dfrac{3\pi}{2}$, 于是

$$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [a\cos t b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi ab.$$

例3. 计算$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$, 其中有向曲线$L$的起点为$A(a,0)$, 终点为$B(0,-b)$, L分别为:

(1) 椭圆弧$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上在第一、二、三象限的部分;

(2)直线$y=\dfrac{b}{a}x-b$.

解: (1) 曲线$L: x=a\cos t, y=b\sin t$, t从0到$\dfrac{3\pi}{2}$, 于是

$$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [a\cos t b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi ab.$$

(2) 曲线$L: y=\dfrac{b}{a}x-b$, x从a到0, 于是

例3. 计算$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$, 其中有向曲线$L$的起点为$A(a,0)$, 终点为$B(0,-b)$, L分别为:

(1) 椭圆弧$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上在第一、二、三象限的部分;

(2)直线$y=\dfrac{b}{a}x-b$.

解: (1) 曲线$L: x=a\cos t, y=b\sin t$, t从0到$\dfrac{3\pi}{2}$, 于是

$$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [a\cos t b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi ab.$$

(2) 曲线$L: y=\dfrac{b}{a}x-b$, x从a到0, 于是

$$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_a^0 [x\cdot\frac{b}{a} - (\frac{b}{a}x-b)]\mathrm{d}x = -ab.$$

例4. 计算 $\int_L x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + (3z - y - 1)\mathrm{d}z$, 其中$L$为是从点 $A(2,3,4)$到点$B(1,1,1)$的直线段.

例4. 计算 $\int_L x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + (3z - y - 1)\mathrm{d}z$, 其中$L$为是从点 $A(2,3,4)$到点$B(1,1,1)$的直线段.

解： 直线L的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t, \end{cases}$ 参数t从1到0, 故

例4. 计算$\int_L x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + (3z - y - 1)\mathrm{d}z$, 其中$L$为是从点$A(2,3,4)$到点$B(1,1,1)$的直线段.

解: 直线L的参数方程为$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t, \end{cases}$ 参数t从1到0, 故

$$原式 = \int_1^0 [(1+t) + 2(1+2t)^2 + 3(3+9t-1-2t-1)]\mathrm{d}t$$

$$= -23\frac{2}{3}.$$

例5. 一变力$\boldsymbol{F}$的大小与作用点到z轴的距离成反比, 方向总是垂直地指向z轴, 试求当质点沿着$y=1$平面内的一个单位圆周(圆心为$(0,1,0)$)上从点$M(1,1,0)$经第一卦限移动到点$N(0,1,1)$时, 力$\boldsymbol{F}$所作的功.

例5. 一变力$\boldsymbol{F}$的大小与作用点到z轴的距离成反比, 方向总是垂直地指向z轴, 试求当质点沿着$y=1$平面内的一个单位圆周(圆心为$(0,1,0)$)上从点$M(1,1,0)$经第一卦限移动到点$N(0,1,1)$时, 力$\boldsymbol{F}$所作的功.

解: $|\boldsymbol{F}| = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}},$

例5. 一变力$\boldsymbol{F}$的大小与作用点到z轴的距离成反比, 方向总是垂直地指向z轴, 试求当质点沿着$y=1$平面内的一个单位圆周(圆心为$(0,1,0)$)上从点$M(1,1,0)$经第一卦限移动到点$N(0,1,1)$时, 力$\boldsymbol{F}$所作的功.

解: $|\boldsymbol{F}|=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 方向$\{-x,-y,0\}$, 故 $\boldsymbol{F}=\dfrac{k\{-x,-y,0\}}{x^2+y^2}$

例5. 一变力$\boldsymbol{F}$的大小与作用点到z轴的距离成反比, 方向总是垂直地指向z轴, 试求当质点沿着$y=1$平面内的一个单位圆周(圆心为$(0,1,0)$)上从点$M(1,1,0)$经第一卦限移动到点$N(0,1,1)$时, 力$\boldsymbol{F}$所作的功.

解: $|\boldsymbol{F}|=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 方向$\{-x,-y,0\}$, 故 $\boldsymbol{F}=\dfrac{k\{-x,-y,0\}}{x^2+y^2}$

于是, $W=\displaystyle\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L\frac{-k(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$,

例5. 一变力$\boldsymbol{F}$的大小与作用点到z轴的距离成反比，方向总是垂直地指向z轴，试求当质点沿着$y=1$平面内的一个单位圆周(圆心为$(0,1,0)$)上从点$M(1,1,0)$经第一卦限移动到点$N(0,1,1)$时，力$\boldsymbol{F}$所作的功.

解： $|\boldsymbol{F}|=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$，方向$\{-x,-y,0\}$，故 $\boldsymbol{F}=\dfrac{k\{-x,-y,0\}}{x^2+y^2}$

于是，$W=\displaystyle\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L \frac{-k(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$,

其中$L: x=\cos t, y=1, z=\sin t$，起点$M$对应于$t=0$，

终点N对应于$t=\dfrac{\pi}{2}$，

例5. 一变力$\boldsymbol{F}$的大小与作用点到z轴的距离成反比, 方向总是垂直地指向z轴, 试求当质点沿着$y=1$平面内的一个单位圆周(圆心为$(0,1,0)$)上从点$M(1,1,0)$经第一卦限移动到点$N(0,1,1)$时, 力$\boldsymbol{F}$所作的功.

解: $|\boldsymbol{F}|=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 方向$\{-x,-y,0\}$, 故 $\boldsymbol{F}=\dfrac{k\{-x,-y,0\}}{x^2+y^2}$

于是, $W=\displaystyle\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L \frac{-k(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$,

其中$L: x=\cos t, y=1, z=\sin t$, 起点$M$对应于$t=0$,

终点N对应于$t=\dfrac{\pi}{2}$,

故 $W=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\cos t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{k}{2}\ln|\cos^2 t+1|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{k}{2}\ln 2.$

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s$$

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \mathrm{d}s = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} =$$

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是曲线$L$上点$(x,y,z)$处和所给曲线方向一致的单位切向量的方向余弦.

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是曲线$L$上点$(x,y,z)$处和所给曲线方向一致的单位切向量的方向余弦.

例. 把第二型曲线积分$\displaystyle\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型曲线积分, 其中L为沿抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到点$(1,1)$的弧线段.

两类曲线积分的关系

第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是曲线$L$上点$(x,y,z)$处和所给曲线方向一致的单位切向量的方向余弦.

例. 把第二型曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型曲线积分, 其中L为沿抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到点$(1,1)$的弧线段.

答案: $\displaystyle\int_L \frac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s.$