工科数学分析

贺丹（东南大学）

3.3-4 方向导数与梯度、高阶偏导数

3.3-4 方向导数与梯度、高阶偏导数

本节主要内容：

3.3-4 方向导数与梯度、高阶偏导数

本节主要内容：

- 方向导数

3.3-4 方向导数与梯度、高阶偏导数

本节主要内容：

- 方向导数
- 梯度

3.3-4 方向导数与梯度、高阶偏导数

本节主要内容：

- 方向导数
- 梯度
- 高阶偏导数

方向导数定义

方向导数定义

- 函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的两个偏导数刻画的是函数 f 在点(x_0,y_0) 处沿与x 轴和y 轴平行的方向的变化率.

方向导数定义

- 函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的两个偏导数刻画的是函数 f 在点(x_0,y_0) 处沿与x 轴和y 轴平行的方向的变化率.

问: 函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的变化率怎么求?

方向导数定义

- 函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的两个偏导数刻画的是函数f 在点(x_0,y_0) 处沿与x 轴和y 轴平行的方向的变化率.

问: 函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的变化率怎么求?

设点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$,

方向导数定义

- 函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的两个偏导数刻画的是函数 f 在点(x_0,y_0) 处沿与x 轴和y 轴平行的方向的变化率.

问: 函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的变化率怎么求?

设点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$, $f:U(\boldsymbol{x}_0)\to\mathbf{R}$ 是一个二元函数.

方向导数定义

- 函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的两个偏导数刻画的是函数 f 在点(x_0,y_0) 处沿与x 轴和y 轴平行的方向的变化率.

问: 函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的变化率怎么求?

设点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$, $f:U(\boldsymbol{x}_0)\to\mathbf{R}$ 是一个二元函数.

过$\boldsymbol{x}_0$ 做与$\boldsymbol{l}$ 平行的直线L, 则L 的方程为:

方向导数定义

- 函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的两个偏导数刻画的是函数 f 在点(x_0,y_0) 处沿与x 轴和y 轴平行的方向的变化率.

问: 函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的变化率怎么求?

设点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$,

$f:U(\boldsymbol{x}_0)\to\mathbf{R}$ 是一个二元函数.

过$\boldsymbol{x}_0$ 做与$\boldsymbol{l}$ 平行的直线L, 则L 的方程为:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l\quad(t\in\mathbf{R}).$$

方向导数定义

- 函数$z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处的两个偏导数刻画的是函数 f 在点(x_0,y_0) 处沿与x 轴和y 轴平行的方向的变化率.

问: 函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的变化率怎么求?

设点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$, $f:U(\boldsymbol{x}_0)\to\mathbf{R}$ 是一个二元函数.

过$\boldsymbol{x}_0$ 做与$\boldsymbol{l}$ 平行的直线L, 则L 的方程为:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l \quad (t\in\mathbf{R}).$$

于是, 二元函数f 在$\boldsymbol{x}_0$ 处沿$\boldsymbol{l}$ 方向的变化率, 就是当点$\boldsymbol{x}$ 在直线L 上变动时f 在点$\boldsymbol{x}_0$ 处的变化率.

注意: 在点$\boldsymbol{x}_0$ 与$\boldsymbol{l}$ 的方向$\boldsymbol{e}_l$ 固定的情况下, 当点$\boldsymbol{x}$ 在直线L 上变动时, 函数$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l)$ 实际上就是t 的一元函数.

注意: 在点$\boldsymbol{x}_0$ 与$\boldsymbol{l}$ 的方向$\boldsymbol{e}_l$ 固定的情况下, 当点$\boldsymbol{x}$ 在直线L 上变动时, 函数$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l)$ 实际上就是t 的一元函数.

记上述一元函数为$F(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l)$, 于是所求变化率即为一元函数$F(t)$ 在$t = 0$ 处的导数, 即:

注意: 在点$\boldsymbol{x}_0$ 与$\boldsymbol{l}$ 的方向$\boldsymbol{e}_l$ 固定的情况下, 当点$\boldsymbol{x}$ 在直线L 上变动时, 函数$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l)$ 实际上就是t 的一元函数.

记上述一元函数为$F(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l)$, 于是所求变化率即为一元函数$F(t)$ 在$t = 0$ 处的导数, 即:

$$\left.\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

定义3.3 (方向导数)

定义3.3 (方向导数)

设点$x_0 \in \mathbf{R}^2$, l 是平面上的某一向量, 其单位向量记为e_l.

定义3.3 (方向导数)

设点$x_0 \in \mathbf{R}^2$, l 是平面上的某一向量，其单位向量记为e_l. 二元函数f 定义在x_0 的邻域$U(x_0) \subseteq \mathbf{R}^2$内,

定义3.3 (方向导数)

设点$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$. 二元函数f 定义在$\boldsymbol{x}_0$ 的邻域$U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^2$内, 在$U(\boldsymbol{x}_0)$ 内让自变量$\boldsymbol{x}$ 由$\boldsymbol{x}_0$ 沿与$\boldsymbol{e}_l$ 平行的直线变到$\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$, 从而函数值有对应的改变量 $f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)$, 若极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在,

定义3.3 (方向导数)

设点$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$. 二元函数f 定义在$\boldsymbol{x}_0$ 的邻域$U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^2$内, 在$U(\boldsymbol{x}_0)$ 内让自变量$\boldsymbol{x}$ 由$\boldsymbol{x}_0$ 沿与$\boldsymbol{e}_l$ 平行的直线变到$\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$, 从而函数值有对应的改变量$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)$, 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在, 则称此极限值为函数f 在点$\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向$\boldsymbol{l}$ 的方向导数,

定义3.3 (方向导数)

设点$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$. 二元函数f 定义在$\boldsymbol{x}_0$ 的邻域$U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^2$内, 在$U(\boldsymbol{x}_0)$ 内让自变量$\boldsymbol{x}$ 由$\boldsymbol{x}_0$ 沿与$\boldsymbol{e}_l$ 平行的直线变到$\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$, 从而函数值有对应的改变量$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)$, 若极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在, 则称此极限值为函数f 在点$\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向$\boldsymbol{l}$ 的方向导数, 记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$ 或 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}$, 即

定义3.3 (方向导数)

设点$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{l}$ 是平面上的某一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$. 二元函数f 定义在$\boldsymbol{x}_0$ 的邻域$U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^2$内, 在$U(\boldsymbol{x}_0)$ 内让自变量$\boldsymbol{x}$ 由$\boldsymbol{x}_0$ 沿与$\boldsymbol{e}_l$ 平行的直线变到$\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$, 从而函数值有对应的改变量$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)$, 若极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在, 则称此极限值为函数f 在点$\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向$\boldsymbol{l}$ 的方向导数, 记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$ 或 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}$, 即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

方向导数另一种形式的定义

方向导数另一种形式的定义

设函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(M_0)$ 内有定义，

平面上向量$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为$\cos\alpha$, $\cos\beta$, 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在，

方向导数另一种形式的定义

设函数$z=f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域$U(M_0)$ 内有定义，平面上向量$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为$\cos\alpha$, $\cos\beta$, 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 则称此极限为函数$z=f(x,y)$ 在点M_0 沿方向$\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**, 记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$, 即

方向导数另一种形式的定义

设函数$z = f(x, y)$ 在点$M_0(x_0, y_0)$ 的某邻域$U(M_0)$ 内有定义，平面上向量$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为$\cos\alpha$, $\cos\beta$, 若极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数$z = f(x, y)$ 在点M_0 沿方向$\boldsymbol{l}$ 的方向导数，记为$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$, 即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

- 关于方向导数的几点说明:

- 关于方向导数的几点说明:
    - 由定义可知, 方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$ 就是函数 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.

- 关于方向导数的几点说明:
  - 由定义可知, 方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$ 就是函数$z=f(x,y)$在 $M_0(x_0,y_0)$处沿方向 $\boldsymbol{l}$的变化率.
  - 定义中t 的绝对值就是两点$\boldsymbol{x}_0$ 与$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l$ 之间的距离d.

- 关于方向导数的几点说明:
  - 由定义可知, 方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$ 就是函数 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.
  - 定义中 t 的绝对值就是两点 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l$ 之间的距离 d.
  - 方向导数实际上是函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 关于距离的变化率.

- 关于方向导数的几点说明:

  - 由定义可知, 方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$ 就是函数$z = f(x, y)$在 $M_0(x_0, y_0)$处沿方向 $\boldsymbol{l}$的变化率.

  - 定义中t 的绝对值就是两点$\boldsymbol{x}_0$ 与$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$ 之间的距离d.

  - 方向导数实际上是函数f在x_0处沿方向$\boldsymbol{l}$关于距离的变化率.

  - 若方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0} > 0\ (< 0)$, 则$f$在$\boldsymbol{x}_0$处沿$\boldsymbol{l}$的方向增加 (或减少),

▶ 关于方向导数的几点说明:

- 由定义可知, 方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$ 就是函数$z=f(x,y)$在 $M_0(x_0,y_0)$处沿方向 $\boldsymbol{l}$的变化率.
- 定义中t 的绝对值就是两点$\boldsymbol{x}_0$ 与$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l$ 之间的距离d.
- 方向导数实际上是函数f在$\boldsymbol{x}_0$处沿方向$\boldsymbol{l}$关于距离的变化率.
- 若方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}>0\ (<0)$, 则$f$在$\boldsymbol{x}_0$处沿$\boldsymbol{l}$的方向增加(或减少), 且方向导数的绝对值越大, 则表明f在$\boldsymbol{x}_0$处沿$\boldsymbol{l}$方向增加(或减少)得愈快.

- 根据方向导数的定义，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{l})}\right|_{\boldsymbol{x}_0} = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$.

- 根据方向导数的定义，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{l})}\right|_{\boldsymbol{x}_0} = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$.
- 当$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} = \{1, 0\}$时，即沿$x$轴的正向有

- 根据方向导数的定义，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{l})}\right|_{\boldsymbol{x}_0} = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$.
- 当$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} = \{1, 0\}$时，即沿$x$轴的正向有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}.$$

- 根据方向导数的定义，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{l})}\right|_{\boldsymbol{x}_0} = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}.$
- 当$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}=\{1,0\}$时，即沿$x$轴的正向有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}.$$

- 当$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{j}=\{0,1\}$时，即沿$y$轴的正向有

- 根据方向导数的定义，有 $\left.\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{l})}\right|_{\boldsymbol{x}_0} = -\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$.
- 当$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} = \{1, 0\}$时，即沿$x$轴的正向有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}.$$

- 当$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{j} = \{0, 1\}$时，即沿$y$轴的正向有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}.$$

方向导数的几何意义

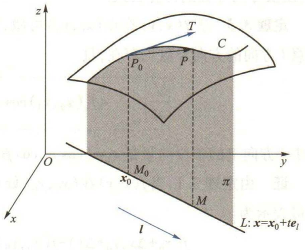
过直线$L: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$做

平行于z轴的平面π, 它与曲面

$z = f(x, y)$的交线记为C.

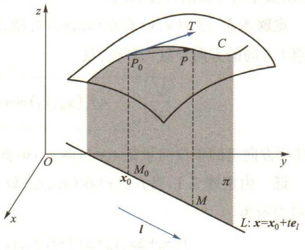
方向导数的几何意义

过直线$L:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l$做平行于$z$轴的平面$\pi$，它与曲面$z=f(x,y)$的交线记为$C$.



方向导数的几何意义

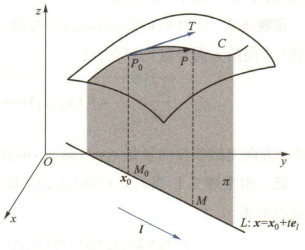
过直线$L: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$做平行于$z$轴的平面$\pi$, 它与曲面$z = f(x, y)$的交线记为$C$.



方向导数的几何意义：若点$\boldsymbol{x}_0$ 沿方向l 从$\boldsymbol{x}_0$ 的两侧分别趋向于$\boldsymbol{x}_0$ 时, 极限存在且相等,

方向导数的几何意义

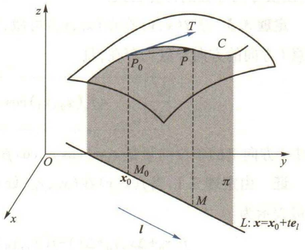
过直线$L: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l$做平行于$z$轴的平面$\pi$, 它与曲面$z = f(x, y)$的交线记为$C$.



方向导数的几何意义：若点$\boldsymbol{x}_0$ 沿方向$\boldsymbol{l}$ 从$\boldsymbol{x}_0$ 的两侧分别趋向于$\boldsymbol{x}_0$ 时, 极限存在且相等, 则说明曲线C 在点P_0($\boldsymbol{x}_0$ 对应的点M_0在平面π 的投影点)仅有唯一的切线T,

方向导数的几何意义

过直线$L:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l$做平行于$z$轴的平面$\pi$，它与曲面$z=f(x,y)$的交线记为$C$.



方向导数的几何意义：若点$\boldsymbol{x}_0$ 沿方向$\boldsymbol{l}$ 从$\boldsymbol{x}_0$ 的两侧分别趋向于$\boldsymbol{x}_0$ 时，极限存在且相等，则说明曲线C 在点P_0($\boldsymbol{x}_0$ 对应的点M_0在平面π 的投影点)仅有唯一的切线T，它关于$\boldsymbol{l}$ 方向的斜率就是方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$.

方向导数的计算公式

定理3.3

方向导数的计算公式

定理3.3

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微, 则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿任一方向 l的方向导数都存在, 且有

方向导数的计算公式

定理3.3

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微, 则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿任一方向$\boldsymbol{l}$的方向导数都存在, 且有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中$\cos\alpha$, $\cos\beta$为方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦, 即$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$.

方向导数的计算公式

定理3.3

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微, 则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$的方向导数都存在, 且有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 为方向 $\boldsymbol{l}$的方向余弦, 即$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$.

证明: 因为$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处可微,

方向导数的计算公式

定理3.3

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微, 则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿任一方向$\boldsymbol{l}$的方向导数都存在, 且有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中$\cos\alpha$, $\cos\beta$为方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦, 即$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$.

证明: 因为$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处可微,

所以 $f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)$

方向导数的计算公式

定理3.3

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微, 则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$的方向导数都存在, 且有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 为方向 $\boldsymbol{l}$的方向余弦, 即$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$.

证明: 因为$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处可微,

所以 $f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)$

$=f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(\sqrt{(t\cos\alpha)^2+(t\cos\beta)^2})$

其中$o(\sqrt{(t\cos\alpha)^2+(t\cos\beta)^2})=o(|t|)$,

于是 $$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

于是 $$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta+\frac{o(|t|)}{t}]$$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

于是 $$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta+\frac{o(|t|)}{t}]$$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

即 $$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\cos\beta.$$

于是 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0}[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta+\frac{o(|t|)}{t}]$$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

即 $$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\cos\beta.$$

该定理可推广到n 元函数.

例1. 求函数$z = x\mathrm{e}^{2y}$在点$P(1,0)$沿方向$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$的方向导数.

例1. 求函数$z = x\mathrm{e}^{2y}$在点$P(1,0)$沿方向$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$的方向导数.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{2y}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x\mathrm{e}^{2y},$

例1. 求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$沿方向$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$的方向导数.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}$,

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=2,$$

例1. 求函数$z = xe^{2y}$在点$P(1,0)$沿方向$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$的方向导数.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{2y}, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xe^{2y},$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 1, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 2,$$

又因为$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ \cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},$

例1. 求函数$z=x\mathrm{e}^{2y}$在点$P(1,0)$沿方向$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$的方向导数.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2y}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x\mathrm{e}^{2y}$,

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=2,$$

又因为$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,0)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例2. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

求 f 在点 $(0,0)$ 沿某方向 l 的方向导数.

梯度

梯度

定义3.4 (梯度)

设二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, 称向量$\{f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\}$为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的**梯度**, 记作

$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$ 或$\nabla f(x_0,y_0)$, 即

梯度

定义3.4 (梯度)

设二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, 称向量$\{f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\}$为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的**梯度**, 记作 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$ 或$\nabla f(x_0,y_0)$, 即

$$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=\{f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\},$$

梯度

定义3.4 (梯度)

设二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, 称向量$\{f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\}$为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的**梯度**, 记作$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$ 或$\nabla f(x_0,y_0)$, 即

$$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=\{f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\},$$

其中grad是英文gradient的简写, ∇是Nabla算符, 也称为**微分算子**: $\nabla=\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\}$.

对n元函数$u = f(M) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 若在点$M$处可微,

则在点M的全微分可表示为:

对n元函数$u=f(M)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 若在点$M$处可微, 则在点$M$的全微分可表示为:

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

对n元函数$u = f(M) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 若在点$M$处可微, 则在点$M$的全微分可表示为:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\
&= \mathbf{grad}u \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M},
\end{aligned}
$$

对n元函数$u=f(M)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 若在点$M$处可微, 则在点$M$的全微分可表示为:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\ &= \mathbf{grad}u\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{grad}u=\{\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\},$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M}=\{\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n\}.$$

借助于梯度概念, 方向导数可以表示为:

借助于梯度概念，方向导数可以表示为:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\beta$$

借助于梯度概念, 方向导数可以表示为:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\beta$$

$$= \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{e}_l = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{e}_l$$

借助于梯度概念, 方向导数可以表示为:

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} \cos\beta$$

$$= \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{e}_l = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{e}_l$$

(即方向导数可以表示成梯度与e_l 的内积.)

借助于梯度概念, 方向导数可以表示为:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\beta$$

$$= \mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)\cdot \boldsymbol{e}_l = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \boldsymbol{e}_l$$

(即方向导数可以表示成梯度与$\boldsymbol{e}_l$ 的内积.)

$$= \|\ \mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)\ \| \cdot \|\ \boldsymbol{e}_l\ \| \cos\theta = \|\ \mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)\ \| \cos\theta.$$

借助于梯度概念, 方向导数可以表示为:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cos\beta$$

$$= \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{e}_l = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{e}_l$$

(即方向导数可以表示成梯度与e_l 的内积.)

$$= \| \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \| \cdot \| \boldsymbol{e}_l \| \cos\theta = \| \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \| \cos\theta.$$

- $\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 是函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处的梯度$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$

  在方向 $\boldsymbol{l}$ 上的投影.

结论:

结论:

- 当$\theta = 0$ 时, 即l 的方向与$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ 的方向一致时, 方向导数取得最大值, 且最大值为$\| \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \|$. 梯度方向是函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 增长最快的方向.

结论:

- 当$\theta = 0$ 时, 即$\boldsymbol{l}$ 的方向与$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$ 的方向一致时, 方向导数取得最大值, 且最大值为$\|\ \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)\ \|$. 梯度方向是函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 增长最快的方向.
- 当$\theta = \pi$ 时, 即$\boldsymbol{l}$ 的方向与$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$ 的方向相反时, 方向导数取得最小值, 且最小值为$-\ \|\ \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)\ \|$.

结论:

- 当$\theta = 0$ 时, 即l 的方向与$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ 的方向一致时, 方向导数取得最大值, 且最大值为$\| \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \|$. 梯度方向是函数$z = f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 增长最快的方向.
- 当$\theta = \pi$ 时, 即l 的方向与$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ 的方向相反时, 方向导数取得最小值, 且最小值为$-\| \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \|$.
- 当$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时, 即l 的方向与$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ 的方向垂直时, 方向导数为零.

例3. 函数$u = xy^2z$ 在点$P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求出最大值.

例3. 函数$u = xy^2z$ 在点$P(1, -1, 2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求出最大值.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 z,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xyz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy^2,$

例3. 函数$u = xy^2z$ 在点$P(1, -1, 2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求出最大值.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2z, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xyz, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy^2,$

方向导数达到最大的方向为$\mathbf{grad}\, u|_{(1,-1,2)} = \{2, -4, 1\},$

例3. 函数$u = xy^2z$ 在点$P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求出最大值.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2z,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xyz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy^2,$

方向导数达到最大的方向为$\mathbf{grad}\, u|_{(1,-1,2)} = \{2,-4,1\},$

方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}$ 的最大值为

例3. 函数$u = xy^2z$ 在点$P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求出最大值.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2z, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xyz, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy^2,$

方向导数达到最大的方向为$\mathbf{grad}u|_{(1,-1,2)} = \{2,-4,1\},$

方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}$ 的最大值为

$$|\mathbf{grad}u|_{(1,-1,2)}| = \sqrt{2^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{21}.$$

例3. 函数$u=xy^2z$ 在点$P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求出最大值.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=xy^2,$

方向导数达到最大的方向为$\mathbf{grad}u|_{(1,-1,2)}=\{2,-4,1\}$,

方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}$ 的最大值为

$$\left|\mathbf{grad}u|_{(1,-1,2)}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}.$$

问: 函数$u=xy^2z$ 在点$P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最小？最小值为何值？

例4. 一条鲨鱼在发现血腥味时，总是沿着血腥味最浓的方向追寻. 在海面上进行实验表明，如果把坐标原点取在血源处，在海平面上建立直角坐标系，那么点(x, y)处血液的浓度C(每百万份水中所含血的份数)的近似值为$C(x, y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+2y^2}{10^4}}$，求鲨鱼从点$(x_0, y_0)$出发向血源前进的路线. (书P42例3.15)

梯度的一些简单运算法则

梯度的一些简单运算法则

设C_1, C_2为任意常数, 函数u, v及f均可微, 则

梯度的一些简单运算法则

设C_1, C_2为任意常数, 函数u, v及f均可微, 则

(1) $\mathbf{grad}(C_1 u + C_2 v) = C_1\mathbf{grad}u + C_2\mathbf{grad}v$;

梯度的一些简单运算法则

设C_1, C_2为任意常数, 函数u, v及f均可微, 则

(1) $\mathbf{grad}(C_1u + C_2v) = C_1\mathbf{grad}u + C_2\mathbf{grad}v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv) = u\mathbf{grad}v + v\mathbf{grad}u$;

梯度的一些简单运算法则

设C_1, C_2为任意常数, 函数u, v及f均可微, 则

(1) $\mathbf{grad}(C_1u + C_2v) = C_1\mathbf{grad}u + C_2\mathbf{grad}v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv) = u\mathbf{grad}v + v\mathbf{grad}u$;

(3) $\mathbf{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(v\mathbf{grad}u - u\mathbf{grad}v) \qquad (v \neq 0)$;

梯度的一些简单运算法则

设C_1, C_2为任意常数, 函数u, v及f均可微, 则

(1) $\mathbf{grad}(C_1 u + C_2 v) = C_1 \mathbf{grad} u + C_2 \mathbf{grad} v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv) = u\mathbf{grad} v + v\mathbf{grad} u$;

(3) $\mathbf{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(v\mathbf{grad} u - u\mathbf{grad} v) \qquad (v \neq 0)$;

(4) $\mathbf{grad} f(u) = f'(u)\mathbf{grad} u$.

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$,

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, 一般地, 它们仍是x, y 的函数,

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z = f(x, y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, 一般地, 它们仍是x, y 的函数, 若这两个偏导数对x, y 的偏导数也存在, 则称它们为$z = f(x, y)$ 的二阶偏导数.

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z = f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x, y 的函数, 若这两个偏导数对x, y 的偏导数也存在, 则称它们为$z = f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y);$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

3.4 高阶偏导数和高阶全微分

设函数$z=f(x,y)$ 在区域D 内具有偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, 一般地, 它们仍是x,y 的函数, 若这两个偏导数对x,y 的偏导数也存在, 则称它们为$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_y=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中$f_{xy}(x,y)$ 和$f_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数.

- 同样地, 如果二阶偏导数的偏导数存在, 就称它们为函数 $z = f(x, y)$ 的三阶偏导数.

- 同样地, 如果二阶偏导数的偏导数存在, 就称它们为函数 $z = f(x, y)$ 的三阶偏导数.

例如 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx}(x, y).$$

- 同样地, 如果二阶偏导数的偏导数存在, 就称它们为函数 $z = f(x, y)$ 的三阶偏导数.

$$\text{例如}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx}(x, y).$$

- 依次类推, 函数$z = f(x, y)$ 的$n - 1$ 阶偏导数的偏导数称为函数$z = f(x, y)$ 的n 阶偏导数.

- 同样地, 如果二阶偏导数的偏导数存在, 就称它们为函数 $z=f(x,y)$ 的三阶偏导数.

例如 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=f_{xyx}(x,y).$$

- 依次类推, 函数$z=f(x,y)$ 的$n-1$ 阶偏导数的偏导数称为函数$z=f(x,y)$ 的n 阶偏导数.
- 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例1. 求$z=x^3y^3-3x^2y+xy^2+3$ 的二阶偏导数和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$.

例1. 求$z = x^3y^3 - 3x^2y + xy^2 + 3$ 的二阶偏导数和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 6xy + y^2,$

例1. 求 $z = x^3y^3 - 3x^2y + xy^2 + 3$ 的二阶偏导数和 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 6xy + y^2, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 - 3x^2 + 2xy,$

例1. 求 $z = x^3y^3 - 3x^2y + xy^2 + 3$ 的二阶偏导数和 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 6xy + y^2, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 - 3x^2 + 2xy,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 - 6y,$$

例1. 求 $z = x^3y^3 - 3x^2y + xy^2 + 3$ 的二阶偏导数和 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 6xy + y^2,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 - 3x^2 + 2xy,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 - 6y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2y^2 - 6x + 2y,$$

例1. 求$z = x^3y^3 - 3x^2y + xy^2 + 3$ 的二阶偏导数和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 6xy + y^2, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 - 3x^2 + 2xy,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 - 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 9x^2y^2 - 6x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 9x^2y^2 - 6x + 2y,$$

例1． 求 $z = x^3y^3 - 3x^2y + xy^2 + 3$ 的二阶偏导数和 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 6xy + y^2$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 - 3x^2 + 2xy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 - 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2y^2 - 6x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2y^2 - 6x + 2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^3y + 2x,$$

例1. 求$z = x^3y^3 - 3x^2y + xy^2 + 3$ 的二阶偏导数和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 6xy + y^2,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 - 3x^2 + 2xy,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 - 6y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 9x^2y^2 - 6x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 9x^2y^2 - 6x + 2y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^3y + 2x,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x} = 18xy^2 - 6.$$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$，$f_{yx}(0,0)$.

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

解: 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

解: 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x^5-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求$f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

解: 当$x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x^5-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求$f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

解: 当$x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x^5-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

解: 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x^5-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y+0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$，$f_{yx}(0,0)$.

解: 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x^5-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y+0)-f(0,0)}{\Delta x}=0;$$

例2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

解: 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x^5-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+0,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y+0)-f(0,0)}{\Delta x}=0;$$

$$\therefore f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y}$$

$$\therefore f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$\therefore f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$\therefore f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}$$

$$\therefore f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$\therefore f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

$$\therefore f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

$$\therefore f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x,0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$(f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0))$

$$\therefore f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

$$\therefore f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x,0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$(f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0))$

注意: 在例1中, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,

$$\therefore f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

$$\therefore f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x,0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$(f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0))$

注意: 在例1中, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 在例2中, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,

$$\therefore f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$\therefore f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

$(f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0))$

注意: 在例1中, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 在例2中, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$,

问: 混合偏导数相等需要什么条件?

定理

定理

如果$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点(x,y) 连续, 则有

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

定理

如果$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点(x,y) 连续, 则有

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

证明: 设$F=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)$

$$-f(x+\Delta x,y)+f(x,y),$$

$$\Phi(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

定理

如果$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点(x,y) 连续, 则有

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

证明: 设$F=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)$

$$-f(x+\Delta x,y)+f(x,y),$$

$$\Phi(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

则$F=\Phi(x,y+\Delta y)-\Phi(x,y)$

定理

如果$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点(x,y) 连续, 则有

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

证明: 设$F=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)$

$$-f(x+\Delta x,y)+f(x,y),$$

$$\Phi(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

则$F=\Phi(x,y+\Delta y)-\Phi(x,y)=\Phi_y(x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta_1<1)$

定理

如果$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点(x,y) 连续, 则有

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

证明: 设$F=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)$

$$-f(x+\Delta x,y)+f(x,y),$$

$$\Phi(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

则$F=\Phi(x,y+\Delta y)-\Phi(x,y)=\Phi_y(x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta_1<1)$

$$=[f_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)-f_y(x,y+\theta_1\Delta y)]\Delta y$$

定理

如果$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点(x,y) 连续, 则有

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

证明: 设$F=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)$

$$-f(x+\Delta x,y)+f(x,y),$$

$$\Phi(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

则$F=\Phi(x,y+\Delta y)-\Phi(x,y)=\Phi_y(x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta_1<1)$

$$=[f_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)-f_y(x,y+\theta_1\Delta y)]\Delta y$$

$$=f_{yx}(x+\theta_2\Delta x,y+\theta_1\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad 0<\theta_2<1$$

同理可得:

同理可得:

$$F = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad (\ 0<\theta_3,\theta_4<1)$$

同理可得:

$$F = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad (\ 0<\theta_3,\theta_4<1)$$

$$\therefore f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta_y) = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)$$

同理可得:

$$F = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad (\ 0<\theta_3,\theta_4<1)$$

$$\therefore f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta_y) = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)$$

由于f_{xy}, f_{yx} 连续,

同理可得:

$$F = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad (\ 0<\theta_3,\theta_4<1)$$

$$\therefore f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta_y) = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)$$

由于f_{xy}, f_{yx} 连续, 令$\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, 得:

同理可得:

$$F = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad (\ 0<\theta_3,\theta_4<1)$$

$$\therefore f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta_y) = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)$$

由于f_{xy}, f_{yx} 连续, 令$\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, 得:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

同理可得:

$$F = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad (\ 0 < \theta_3, \theta_4 < 1)$$

$$\therefore\ f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta_y) = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)$$

由于f_{xy}, f_{yx} 连续, 令$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, 得:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

注: 此结论可推广到n 元函数高阶导数的情况.

同理可得:

$$F = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)\Delta x\Delta y \qquad (\ 0<\theta_3,\theta_4<1)$$

$$\therefore f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta_y) = f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta_y)$$

由于f_{xy}, f_{yx} 连续, 令$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, 得:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

注: 此结论可推广到n 元函数高阶导数的情况.

即: 高阶混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关.

偏导数在实践中的应用:

偏导数在实践中的应用:

建立偏微分方程, 描述自然现象, 反映自然规律.

偏导数在实践中的应用:

建立偏微分方程, 描述自然现象, 反映自然规律.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ (a \text{ 是常数})$$

偏导数在实践中的应用:

建立偏微分方程, 描述自然现象, 反映自然规律.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ (a \text{ 是常数}) \text{ 波动方程}$$

偏导数在实践中的应用:

建立偏微分方程, 描述自然现象, 反映自然规律.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ (a \text{ 是常数}) \text{ 波动方程} \qquad z = \sin(x - ay)$$

偏导数在实践中的应用:

建立偏微分方程, 描述自然现象, 反映自然规律.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ (a \text{ 是常数}) \text{ 波动方程} \qquad z = \sin(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

偏导数在实践中的应用:

建立偏微分方程, 描述自然现象, 反映自然规律.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ (a \text{ 是常数})$$ 波动方程 $\qquad z = \sin(x - ay)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$ 拉普拉斯方程

偏导数在实践中的应用:

建立偏微分方程, 描述自然现象, 反映自然规律.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ (a \text{ 是常数}) \text{ 波动方程} \qquad z = \sin(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ 拉普拉斯方程} \qquad z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$$

例3. 证明函数$u=\dfrac{1}{r}$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (拉普拉斯方程), 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例3. 证明函数$u=\dfrac{1}{r}$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (拉普拉斯方程), 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{x}{r^3}$,

例3. 证明函数$u = \dfrac{1}{r}$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (拉普拉斯方程), 其中$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

证: $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

例3. 证明函数$u=\dfrac{1}{r}$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (拉普拉斯方程), 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证: $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

同理可得 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

例3. 证明函数$u=\dfrac{1}{r}$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (拉普拉斯方程), 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证: $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

同理可得 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

例3. 证明函数$u=\dfrac{1}{r}$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (拉普拉斯方程), 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证: $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

同理可得 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}$$

例3. 证明函数$u=\dfrac{1}{r}$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (拉普拉斯方程), 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{x}{r^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

同理可得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3y^2}{r^5}$, $\quad\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3z^2}{r^5}$,

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0.$$