工科数学分析

贺丹（东南大学）

第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用

第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用

本节主要内容：

第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用

本节主要内容：

- 空间曲线的切线与法平面

第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用

本节主要内容：

- 空间曲线的切线与法平面
- 空间曲面的切平面与法线

第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用

本节主要内容：

- 空间曲线的切线与法平面
- 空间曲面的切平面与法线
- 曲线的弧长

6.1 空间曲线的切线与法平面

6.1 空间曲线的切线与法平面

定义

设M_0是空间曲线Γ上的一点,

M是Γ上的另一点.

当点M沿曲线Γ趋近于点M_0时,

割线M_0M的极限位置M_0T, 称

为曲线Γ在点M_0处的**切线**.

过点M_0且与切线M_0T垂直的平面

称为Γ点M_0处的**法平面**.

6.1 空间曲线的切线与法平面

定义

设M_0是空间曲线Γ上的一点,

M是Γ上的另一点.

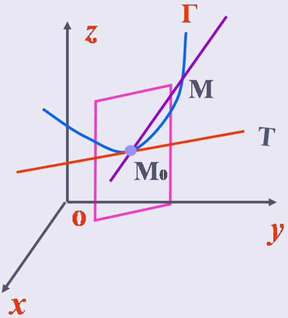
当点M沿曲线Γ趋近于点M_0时,

割线M_0M的极限位置M_0T, 称

为曲线Γ在点M_0处的**切线**.

过点M_0且与切线M_0T垂直的平面

称为Γ点M_0处的**法平面**.



设曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，其中$x(t), y(t), z(t)$ 可微.

设曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，其中$x(t), y(t), z(t)$ 可微.

设曲线Γ上对应于$t = t_0$及$t = t_0 + \Delta t$的两点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$及$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 则割线$M_0M$的方程为

设曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，其中$x(t), y(t), z(t)$ 可微.

设曲线Γ上对应于$t = t_0$及$t = t_0 + \Delta t$的两点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$及$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 则割线$M_0M$的方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z},$$

设曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，其中$x(t), y(t), z(t)$ 可微.

设曲线Γ上对应于$t = t_0$及$t = t_0 + \Delta t$的两点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$及$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 则割线$M_0M$的方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z},$$

上式分母除以Δt得: $\dfrac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \dfrac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \dfrac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$

设曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，其中$x(t), y(t), z(t)$ 可微.

设曲线Γ上对应于$t = t_0$及$t = t_0 + \Delta t$的两点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$及$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 则割线$M_0M$的方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z},$$

上式分母除以Δt得: $\dfrac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \dfrac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \dfrac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$

当点M沿曲线Γ趋向于点M_0时, 有$\Delta t \to 0$, 于是

设曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，其中$x(t), y(t), z(t)$ 可微.

设曲线Γ上对应于$t = t_0$及$t = t_0 + \Delta t$的两点为$M_0(x_0, y_0, z_0)$及$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 则割线$M_0M$的方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z},$$

上式分母除以Δt得: $\dfrac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \dfrac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \dfrac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$

当点M沿曲线Γ趋向于点M_0时, 有$\Delta t \to 0$, 于是

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

综上, 空间曲线$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在点$M_0(t=t_0)$处的**切线方程**为:

综上, 空间曲线Γ : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 在点$M_0(t = t_0)$处的切线方程为:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

综上, 空间曲线Γ : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 在点$M_0(t = t_0)$处的**切线方程**为:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

切线的方向向量: $\vec{a} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$.

综上, 空间曲线Γ : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 在点$M_0(t = t_0)$处的切线方程为:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

切线的方向向量: $\vec{a} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$

曲线Γ在点M_0的法平面方程为:

综上, 空间曲线Γ : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 在点$M_0(t = t_0)$处的切线方程为:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

切线的方向向量: $\vec{a} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$.

曲线Γ在点M_0的法平面方程为:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

例1． 求螺旋线 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 的点 M 处的切线与法平面方程.

例1. 求螺旋线 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 的点 M 处的切线与法平面方程.

解: 当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时, 点 M 对应为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi)$.

例1. 求螺旋线 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 上对应于$t = \dfrac{\pi}{4}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 当$t = \dfrac{\pi}{4}$时, 点M对应为$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi)$.

所求切线的方向向量为:

例1． 求螺旋线 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 上对应于$t = \dfrac{\pi}{4}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 当$t = \dfrac{\pi}{4}$时, 点M对应为$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi)$.

所求切线的方向向量为:

$$\vec{a} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\},$$

例1. 求螺旋线 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 的点 M 处的切线与法平面方程.

解: 当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时, 点 M 对应为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi)$.

所求切线的方向向量为:

$$\vec{a} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\},$$

故所求切线方程为: $\dfrac{x-\sqrt{2}}{-1} = \dfrac{y-\sqrt{2}}{1} = \dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}{1}$,

例1． 求螺旋线 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 的点 M 处的切线与法平面方程.

解: 当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时, 点 M 对应为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi)$.

所求切线的方向向量为:

$$\vec{a} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\},$$

故所求切线方程为: $\dfrac{x-\sqrt{2}}{-1} = \dfrac{y-\sqrt{2}}{1} = \dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}{1}$,

所求法平面方程为: $4x - 4y - 4z + \sqrt{2}\pi = 0$.

例2. 求曲线Γ : $\begin{cases} y = 16x^2 \\ z = 12x^2 \end{cases}$ 在对应于$x = \dfrac{1}{2}$的点M处的切线与法平面方程.

例2. 求曲线$\Gamma:\begin{cases} y=16x^2 \\ z=12x^2 \end{cases}$ 在对应于$x=\dfrac{1}{2}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 以x为参数来求解.

例2. 求曲线$\Gamma:\begin{cases} y=16x^2 \\ z=12x^2 \end{cases}$ 在对应于$x=\dfrac{1}{2}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 以x为参数来求解.

当$x=\dfrac{1}{2}$时, 点M对应为$(\dfrac{1}{2},4,3)$.

例2. 求曲线Γ : $\begin{cases} y = 16x^2 \\ z = 12x^2 \end{cases}$ 在对应于$x = \dfrac{1}{2}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 以x为参数来求解.

当$x = \dfrac{1}{2}$时, 点M对应为$(\dfrac{1}{2}, 4, 3)$.

所求切线的方向向量为:

例2. 求曲线Γ : $\begin{cases} y = 16x^2 \\ z = 12x^2 \end{cases}$ 在对应于$x = \dfrac{1}{2}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 以x为参数来求解.

当$x = \dfrac{1}{2}$时, 点M对应为$(\dfrac{1}{2}, 4, 3)$.

所求切线的方向向量为:

$$\vec{a} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \{1, 16, 12\},$$

例2. 求曲线$\Gamma:\begin{cases} y=16x^2 \\ z=12x^2 \end{cases}$ 在对应于$x=\dfrac{1}{2}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 以x为参数来求解.

当$x=\dfrac{1}{2}$时, 点M对应为$(\dfrac{1}{2},4,3)$.

所求切线的方向向量为:

$$\vec{a}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}|_{t=\frac{\pi}{4}}=\{1,16,12\},$$

故所求切线方程为: $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-4}{16}=\dfrac{z-3}{12}$,

例2. 求曲线$\Gamma:\begin{cases} y=16x^2 \\ z=12x^2 \end{cases}$ 在对应于$x=\dfrac{1}{2}$的点M处的切线与法平面方程.

解: 以x为参数来求解.

当$x=\dfrac{1}{2}$时, 点M对应为$(\dfrac{1}{2},4,3)$.

所求切线的方向向量为:

$$\vec{a}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}|_{t=\frac{\pi}{4}}=\{1,16,12\},$$

故所求切线方程为: $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-4}{16}=\dfrac{z-3}{12}$,

所求法平面方程为: $2x+32y+24z-201=0$.

例3. 求抛物柱面$z = x^2$及圆柱面$x^2 + y^2 = 1$相交所成的空间曲线在$M_0(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25})$处的切线和法平面方程.

例3. 求抛物柱面$z=x^2$及圆柱面$x^2+y^2=1$相交所成的空间曲线在$M_0(\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{9}{25})$处的切线和法平面方程.

解: 曲线的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\cos^2 t \end{cases}$, 则所求切线的方向向量为:

例3. 求抛物柱面$z=x^2$及圆柱面$x^2+y^2=1$相交所成的空间曲线在$M_0(\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{9}{25})$处的切线和法平面方程.

解: 曲线的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\cos^2 t \end{cases}$, 则所求切线的方向向量为:

$$\vec{a}=\{-\sin t,\cos t,-2\sin t\cos t\}|_{M_0}=\{-\frac{4}{5},\frac{3}{5},-\frac{24}{25}\},$$

例3. 求抛物柱面$z=x^2$及圆柱面$x^2+y^2=1$相交所成的空间曲线在$M_0(\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{9}{25})$处的切线和法平面方程.

解: 曲线的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\cos^2 t \end{cases}$, 则所求切线的方向向量为:

$$\vec{a}=\{-\sin t,\cos t,-2\sin t\cos t\}|_{M_0}=\{-\frac{4}{5},\frac{3}{5},-\frac{24}{25}\},$$

故所求切线方程为: $\dfrac{x-\frac{3}{5}}{-20}=\dfrac{y-\frac{4}{5}}{15}=\dfrac{z-\frac{9}{25}}{-24}$,

例3. 求抛物柱面$z = x^2$及圆柱面$x^2 + y^2 = 1$相交所成的空间曲线在$M_0(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25})$处的切线和法平面方程.

解: 曲线的参数方程为$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos^2 t \end{cases}$, 则所求切线的方向向量为:

$$\vec{a} = \{-\sin t, \cos t, -2\sin t \cos t\}|_{M_0} = \{-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{24}{25}\},$$

故所求切线方程为: $\dfrac{x - \frac{3}{5}}{-20} = \dfrac{y - \frac{4}{5}}{15} = \dfrac{z - \frac{9}{25}}{-24}$,

所求法平面方程为: $20x - 15y + 24z - \dfrac{216}{25} = 0.$

说明:

说明:

- 与$\vec{a} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$成比例的向量都可作为切线的方向向量.

说明:

- 与$\vec{a}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$成比例的向量都可作为切线的方向向量.
- 若曲线的方程为$\Gamma:\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x) \end{cases}$，则可视$x$作为参数，曲线在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切向量$\vec{a}=\{1,y'(x_0),z'(x_0)\}$，在该点处的切线方程为

说明:

- 与$\vec{a}=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$成比例的向量都可作为切线的方向向量.

- 若曲线的方程为$\Gamma:\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x) \end{cases}$, 则可视$x$作为参数,

  曲线在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切向量$\vec{a}=\{1, y'(x_0), z'(x_0)\}$,

  在该点处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y(x_0)}{y'(x_0)}=\frac{z-z(x_0)}{z'(x_0)}.$$

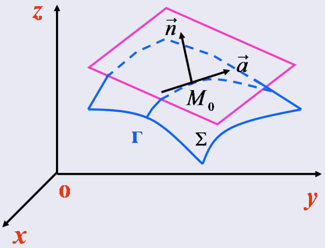
6.3 空间曲面的切平面与法线

6.3 空间曲面的切平面与法线

定义

若曲面Σ上过点M_0的任意一条光滑曲线在该点的切线都在同一平面上，则这个平面就称为曲面Σ在点M_0的**切平面**，

过点M_0与切平面垂直的直线称为曲面Σ在点M_0的**法线**.



设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$,

设曲面Σ的方程为$F(x, y, z) = 0$,其中$F(x, y, z)$可微，且偏导数F_x, F_y, F_z不全为0.

设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$,其中$F(x,y,z)$可微，且偏导数F_x, F_y, F_z不全为0.

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为Σ上一点.

设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$,其中$F(x,y,z)$可微，且偏导数F_x, F_y, F_z不全为0.

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为Σ上一点.考察曲面Σ上过点M_0 的任意一条光滑曲线Γ，设其方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t = t_0 \leftrightarrow M_0(x_0,y_0,z_0).$$

设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$,其中$F(x,y,z)$可微，且偏导数F_x,F_y,F_z不全为0.

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为Σ上一点.考察曲面Σ上过点M_0 的任意一条光滑曲线Γ，设其方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases} \quad t=t_0 \leftrightarrow M_0(x_0,y_0,z_0).$$

由于曲线Γ在Σ上, 因此$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$,

设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$,其中$F(x,y,z)$可微，且偏导数F_x,F_y,F_z不全为0.

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为Σ上一点.考察曲面Σ上过点M_0 的任意一条光滑曲线Γ，设其方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases} \qquad t=t_0 \leftrightarrow M_0(x_0,y_0,z_0).$$

由于曲线Γ在Σ上, 因此$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$,

对t在$t=t_0$求导可得

设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$,其中$F(x,y,z)$可微，且偏导数F_x,F_y,F_z不全为0.

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为Σ上一点.考察曲面Σ上过点M_0 的任意一条光滑曲线Γ，设其方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases} \qquad t=t_0 \leftrightarrow M_0(x_0,y_0,z_0).$$

由于曲线Γ在Σ上, 因此$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$,

对t在$t=t_0$求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[(x(t),y(t),z(t)]\Big|_{t=t_0}=0,$$

即有 $F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0.$

即有 $F_x(M_0)x'(t_0)+F_y(M_0)y'(t_0)+F_z(M_0)z'(t_0)=0.$

令$\vec{a}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$,

$\vec{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\}$, 则

即有 $F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0.$

令$\vec{a} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$,

$\vec{n} = \{F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)\}$, 则

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \text{ 即}\vec{n} \perp \vec{a}.$$

即有 $F_x(M_0)x'(t_0)+F_y(M_0)y'(t_0)+F_z(M_0)z'(t_0)=0.$

令$\vec{a}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$,

$\vec{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\}$, 则

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=0,\ \text{即}\vec{n}\perp\vec{a}.$$

由于$\vec{a}$为曲线Γ在点M_0处的切线的方向向量, 而Γ是曲面Σ上任一过M_0点的曲线, 上式说明, 曲面Σ上过点M_0的任意一条光滑曲线在M_0点的切线都与向量$\vec{n}$ 垂直, 因此向量$\vec{n}$就是曲面Σ在点M_0处切平面的法向量.

综上, 曲面Σ在点M_0切平面方程为

综上, 曲面Σ在点M_0切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

综上, 曲面Σ在点M_0切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

切平面的法向量为 $\vec{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\}$,

综上, 曲面Σ在点M_0切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

切平面的法向量为 $\vec{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\}$,

曲面Σ在点M_0的法线方程为

综上, 曲面Σ在点M_0切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

切平面的法向量为 $\vec{n}=\{F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)\},$

曲面Σ在点M_0的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)}.$$

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z = f(x,y)$给出，且f在(x_0, y_0)点可微，

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z = f(x, y)$给出，且f在(x_0, y_0)点可微，则$\vec{n} = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\}$，

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z=f(x,y)$给出，且f在(x_0,y_0)点可微，则$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$，

故曲面Σ在$M_0(x_0,y_0,z_0)$点(其中$z_0=f(x_0,y_0)$)的切平面方程为

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z=f(x,y)$给出，且f在(x_0,y_0)点可微，则$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$，

故曲面Σ在$M_0(x_0,y_0,z_0)$点(其中$z_0=f(x_0,y_0)$)的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z=f(x,y)$给出，且f在(x_0,y_0)点可微，则$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$，

故曲面Σ在$M_0(x_0,y_0,z_0)$点(其中$z_0=f(x_0,y_0)$)的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}.$

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z=f(x,y)$给出，且f在(x_0,y_0)点可微，则$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$，

故曲面Σ在$M_0(x_0,y_0,z_0)$点(其中$z_0=f(x_0,y_0)$)的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

注: 令$\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$，将切平面改写为

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z=f(x,y)$给出，且f在(x_0,y_0)点可微，则$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$,

故曲面Σ在$M_0(x_0,y_0,z_0)$点(其中$z_0=f(x_0,y_0)$)的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}.$

注: 令$\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$，将切平面改写为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z = f(x, y)$给出，且f在(x_0, y_0)点可微，则$\vec{n} = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\}$，

故曲面Σ在$M_0(x_0, y_0, z_0)$点(其中$z_0 = f(x_0, y_0)$)的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

法线方程为 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

注: 令$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$，将切平面改写为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

二元函数全微分的几何意义:

特别地，若曲面Σ的方程是由显函数$z=f(x,y)$给出，且f在(x_0,y_0)点可微，则$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$，

故曲面Σ在$M_0(x_0,y_0,z_0)$点(其中$z_0=f(x_0,y_0)$)的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

注: 令$\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$，将切平面改写为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

二元函数全微分的几何意义: 函数$z=f(x,y)$在点M_0的全微分在几何上表示该点切平面竖坐标的增量.

例1. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4,5)$处的切平面及法线方程.

例1. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4,5)$处的切平面及法线方程.

解: 设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

例1. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4,5)$处的切平面及法线方程.

解: 设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

例1. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4,5)$处的切平面及法线方程.

解: 设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

于是切平面的法向量为

例1. 求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(3,4,5)$ 处的切平面及法线方程.

解: 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

于是切平面的法向量为

$$\vec{n}=\{f_x(3,4),f_y(3,4),-1\}=\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\},$$

例1. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4,5)$处的切平面及法线方程.

解: 设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

于是切平面的法向量为

$$\vec{n}=\{f_x(3,4),f_y(3,4),-1\}=\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\},$$

所以圆锥面在点$(3,4,5)$处的切平面方程为

例1. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4,5)$处的切平面及法线方程.

解: 设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

于是切平面的法向量为

$$\vec{n}=\{f_x(3,4),f_y(3,4),-1\}=\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\},$$

所以圆锥面在点$(3,4,5)$处的切平面方程为

$$\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4)-(z-5)=0,\ \text{即} 3x+4y-5z=0;$$

例1. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4,5)$处的切平面及法线方程.

解: 设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

于是切平面的法向量为

$$\vec{n}=\{f_x(3,4),f_y(3,4),-1\}=\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\},$$

所以圆锥面在点$(3,4,5)$处的切平面方程为

$$\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4)-(z-5)=0,\ \text{即}3x+4y-5z=0;$$

法线方程为$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-5}{-5}$.

例2. 已知曲面 $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 上点 M 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z + 5 = 0$, 求 M 点的坐标.

例2.已知曲面$4x^2+2y^2+z^2=4$上点M处的切平面平行于

平面$2x+2y+z+5=0$, 求M点的坐标.

解: 令$F(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-4$, 则

例2.已知曲面$4x^2+2y^2+z^2=4$上点M处的切平面平行于平面$2x+2y+z+5=0$, 求M点的坐标.

解: 令$F(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-4$, 则

$$F_x=8x, F_y=4y, F_z=2z.$$

例2.已知曲面$4x^2+2y^2+z^2=4$上点M处的切平面平行于平面$2x+2y+z+5=0$, 求M点的坐标.

解: 令$F(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-4$, 则

$$F_x=8x, F_y=4y, F_z=2z.$$

由题意可得: $\{8x,4y,2z\}//\{2,2,1\}$,

例2. 已知曲面$4x^2+2y^2+z^2=4$上点M处的切平面平行于平面$2x+2y+z+5=0$, 求M点的坐标.

解: 令$F(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-4$, 则

$$F_x=8x, F_y=4y, F_z=2z.$$

由题意可得: $\{8x,4y,2z\}//\{2,2,1\}$, 即 $\dfrac{8x}{2}=\dfrac{4y}{2}=\dfrac{2z}{1}$,

例2.已知曲面$4x^2+2y^2+z^2=4$上点M处的切平面平行于平面$2x+2y+z+5=0$, 求M点的坐标.

解: 令$F(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-4$, 则

$$F_x=8x, F_y=4y, F_z=2z.$$

由题意可得: $\{8x,4y,2z\}//\{2,2,1\}$, 即 $\dfrac{8x}{2}=\dfrac{4y}{2}=\dfrac{2z}{1}$,

于是有$y=z=2x$, 代入曲面方程可得$x=\pm\dfrac{1}{2}$,

例2. 已知曲面$4x^2+2y^2+z^2=4$上点M处的切平面平行于平面$2x+2y+z+5=0$, 求M点的坐标.

解: 令$F(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-4$, 则

$$F_x=8x, F_y=4y, F_z=2z.$$

由题意可得: $\{8x,4y,2z\}//\{2,2,1\}$, 即 $\dfrac{8x}{2}=\dfrac{4y}{2}=\dfrac{2z}{1}$,

于是有$y=z=2x$, 代入曲面方程可得$x=\pm\dfrac{1}{2}$,

故所求M点为$(\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm1)$.

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法一: 曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1,)$处的法向量为

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法一: 曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1,)$处的法向量为

$$\overrightarrow{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}\big|_{(1,1,1)}=\{-1,2,2\};$$

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法一: 曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1,)$处的法向量为

$$\vec{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}\big|_{(1,1,1)}=\{-1,2,2\};$$

平面$2x-3y+5z-4=0$在的法向量为$\vec{n_2}=\{2,-3,5\}$;

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法一: 曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1,)$处的法向量为

$$\vec{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}\big|_{(1,1,1)}=\{-1,2,2\};$$

平面$2x-3y+5z-4=0$在的法向量为$\vec{n_2}=\{2,-3,5\}$;

则所求切线的方向向量为$\vec{a}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\{16,9,-1\}$,

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法一: 曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1,)$处的法向量为

$$\vec{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}\big|_{(1,1,1)}=\{-1,2,2\};$$

平面$2x-3y+5z-4=0$在的法向量为$\vec{n_2}=\{2,-3,5\}$;

则所求切线的方向向量为$\vec{a}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\{16,9,-1\}$,

故所求切线方程为$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$,

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法一: 曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1,)$处的法向量为

$$\vec{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}\big|_{(1,1,1)}=\{-1,2,2\};$$

平面$2x-3y+5z-4=0$在的法向量为$\vec{n_2}=\{2,-3,5\}$;

则所求切线的方向向量为$\vec{a}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\{16,9,-1\}$,

故所求切线方程为$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$,

法平面方程为$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$,

即$16x+9y-z-24=0$.

例3. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法二: 隐函数存在定理可得, 题中两方程在$(1,1,1)$点附近确定了隐函数$y=y(x), z=z(x)$.

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法二: 隐函数存在定理可得, 题中两方程在$(1,1,1)$点附近确定了隐函数$y=y(x), z=z(x)$. 分别对x求导, 得

例3. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法二: 隐函数存在定理可得, 题中两方程在$(1,1,1)$点附近确定了隐函数$y=y(x), z=z(x)$. 分别对x求导, 得

$\begin{cases} 2x+2yy'(x)+2z'(x)-3=0, \\ 2-3y'(x)+5z'(x)=0 \end{cases}$, 代入点$(1,1,1)$可得

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法二: 隐函数存在定理可得, 题中两方程在$(1,1,1)$点附近确定了隐函数$y=y(x), z=z(x)$. 分别对x求导, 得

$$\begin{cases} 2x+2yy'(x)+2z'(x)-3=0, \\ 2-3y'(x)+5z'(x)=0 \end{cases}$$, 代入点$(1,1,1)$可得

$$\begin{cases} 2y'(1)+2z'(1)-1=0, \\ -3y'(1)+5z'(1)+2=0 \end{cases}$$, 解得$y'(1)=\dfrac{9}{16}, z'(1)=-\dfrac{1}{16}$,

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法二: 隐函数存在定理可得, 题中两方程在$(1,1,1)$点附近确定了隐函数$y=y(x), z=z(x)$. 分别对x求导, 得

$$\begin{cases} 2x+2yy'(x)+2z'(x)-3=0, \\ 2-3y'(x)+5z'(x)=0 \end{cases}$$

, 代入点$(1,1,1)$可得

$$\begin{cases} 2y'(1)+2z'(1)-1=0, \\ -3y'(1)+5z'(1)+2=0 \end{cases}$$

, 解得$y'(1)=\dfrac{9}{16}, z'(1)=-\dfrac{1}{16}$,

于是切线的方向向量为$\vec{a}=\{1,\dfrac{9}{16},-\dfrac{1}{16}\}//\{16,9,-1\}$;

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法二: 隐函数存在定理可得, 题中两方程在$(1,1,1)$点附近确定了隐函数$y=y(x), z=z(x)$. 分别对x求导, 得

$$\begin{cases} 2x+2yy'(x)+2z'(x)-3=0, \\ 2-3y'(x)+5z'(x)=0 \end{cases}$$, 代入点$(1,1,1)$可得

$$\begin{cases} 2y'(1)+2z'(1)-1=0, \\ -3y'(1)+5z'(1)+2=0 \end{cases}$$, 解得$y'(1)=\frac{9}{16}, z'(1)=-\frac{1}{16}$,

于是切线的方向向量为$\vec{a}=\{1,\frac{9}{16},-\frac{1}{16}\}//\{16,9,-1\}$;

故所求切线方程为$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$,

例3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

解法二: 隐函数存在定理可得, 题中两方程在$(1,1,1)$点附近确定了隐函数$y=y(x), z=z(x)$. 分别对x求导, 得

$$\begin{cases} 2x+2yy'(x)+2z'(x)-3=0, \\ 2-3y'(x)+5z'(x)=0 \end{cases}$$

, 代入点$(1,1,1)$可得

$$\begin{cases} 2y'(1)+2z'(1)-1=0, \\ -3y'(1)+5z'(1)+2=0 \end{cases}$$

, 解得$y'(1)=\dfrac{9}{16}, z'(1)=-\dfrac{1}{16}$,

于是切线的方向向量为$\vec{a}=\{1,\dfrac{9}{16},-\dfrac{1}{16}\}//\{16,9,-1\}$;

故所求切线方程为$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$,

法平面方程为$16x+9y-z-24=0$.

例4. 设$F(u,v)$可微, 试证曲面$F(cx-az, cy-bz)=0$上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}=\{a,b,c\}$.

例4. 设$F(u,v)$可微, 试证曲面$F(cx-az, cy-bz)=0$上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}=\{a,b,c\}$.

证明: 设$\varphi(x,y,z)=F(cx-az, cy-bz)$,

例4. 设$F(u,v)$可微，试证曲面$F(cx-az,cy-bz)=0$上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}=\{a,b,c\}$.

证明: 设$\varphi(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$,

则曲面在任一点处的法向量为

例4. 设$F(u,v)$可微, 试证曲面$F(cx-az,cy-bz)=0$上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}=\{a,b,c\}$.

证明: 设$\varphi(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$,

则曲面在任一点处的法向量为

$$\vec{n}=\{\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z\}=\{cF_1,cF_2,-aF_1-bF_2\}.$$

例4. 设$F(u,v)$可微, 试证曲面$F(cx-az,cy-bz)=0$上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}=\{a,b,c\}$.

证明: 设$\varphi(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$,

则曲面在任一点处的法向量为

$$\vec{n}=\{\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z\}=\{cF_1,cF_2,-aF_1-bF_2\}.$$

于是有 $\vec{n}\cdot\vec{A}=\{cF_1,cF_2,-aF_1-bF_2\}\cdot\{a,b,c\}=0$

例4. 设$F(u,v)$可微, 试证曲面$F(cx-az,cy-bz)=0$上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}=\{a,b,c\}$.

证明: 设$\varphi(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$,

则曲面在任一点处的法向量为

$$\vec{n}=\{\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z\}=\{cF_1,cF_2,-aF_1-bF_2\}.$$

于是有 $\vec{n}\cdot\vec{A}=\{cF_1,cF_2,-aF_1-bF_2\}\cdot\{a,b,c\}=0$

则 $\vec{n}\perp\vec{A}$

例4. 设$F(u,v)$可微，试证曲面$F(cx-az,cy-bz)=0$上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}=\{a,b,c\}$.

证明: 设$\varphi(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$,

则曲面在任一点处的法向量为

$$\vec{n}=\{\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z\}=\{cF_1,cF_2,-aF_1-bF_2\}.$$

于是有 $\vec{n}\cdot\vec{A}=\{cF_1,cF_2,-aF_1-bF_2\}\cdot\{a,b,c\}=0$

则 $\vec{n}\perp\vec{A}$

故曲面上各点的法向量总垂直于常向量$\vec{A}$.

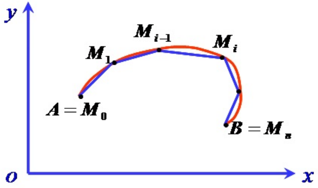
平面曲线的弧长

平面曲线的弧长

设A, B是曲线弧上的两个端点,

在弧$\widehat{AB}$上任取分点:

$$A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

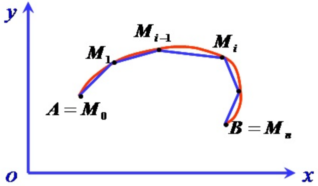


平面曲线的弧长

设A, B是曲线弧上的两个端点,

在弧$\widehat{AB}$上任取分点:

$$A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$



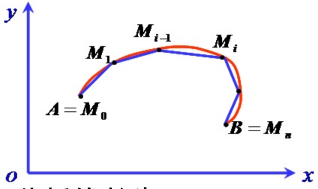
并依次连接相邻的分点得到一内接折线, 此折线长为:

平面曲线的弧长

设A, B是曲线弧上的两个端点,

在弧$\widehat{AB}$上任取分点:

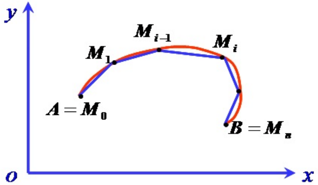
$A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$,



并依次连接相邻的分点得到一内接折线, 此折线长为:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i},$$

平面曲线的弧长



设A, B是曲线弧上的两个端点,

在弧$\widehat{AB}$上任取分点:

$A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$,

并依次连接相邻的分点得到一内接折线, 此折线长为:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i},$$

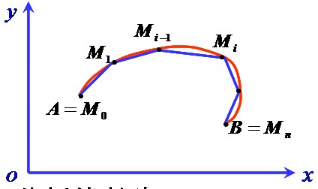
若当最大线段长趋于零时, 折线s_n有极限s, 则称s为曲线弧$\widehat{AB}$的弧长, 即

平面曲线的弧长

设A, B是曲线弧上的两个端点，

在弧$\widehat{AB}$上任取分点:

$A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$,

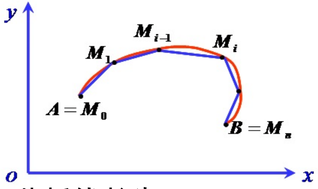


并依次连接相邻的分点得到一内接折线，此折线长为:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i},$$

若当最大线段长趋于零时，折线s_n有极限s，则称s为曲线弧$\widehat{AB}$的弧长，即 $s = \lim\limits_{\lambda\to 0} s_n = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i-1}M_i}$

平面曲线的弧长



设A, B是曲线弧上的两个端点,

在弧$\widehat{AB}$上任取分点:

$A=M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$,

并依次连接相邻的分点得到一内接折线, 此折线长为:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i},$$

若当最大线段长趋于零时, 折线s_n有极限s, 则称s为曲线弧$\widehat{AB}$的弧长, 即 $s=\lim\limits_{\lambda\to0}s_n=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}$

其中λ表示最大线段长, 这时也称曲线弧$\widehat{AB}$是可求长的.

直角坐标情形

直角坐标情形

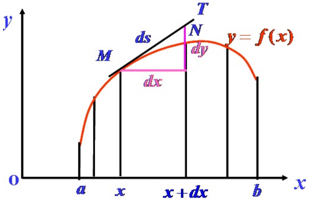
设平面曲线弧的直角坐标方程为$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$,

且f在$[a, b]$具有连续导数(称曲线是光滑的).

直角坐标情形

设平面曲线弧的直角坐标方程为$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$,

且f在$[a, b]$具有连续导数(称曲线是光滑的).

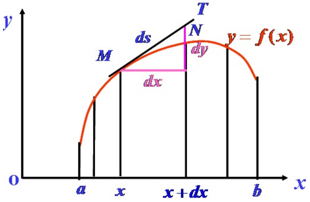


直角坐标情形

设平面曲线弧的直角坐标方程为$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$,

且f在$[a, b]$具有连续导数(称曲线是光滑的).

(1) 取积分变量为x, 积分区间为$[a, b]$;



直角坐标情形

设平面曲线弧的直角坐标方程为$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$,

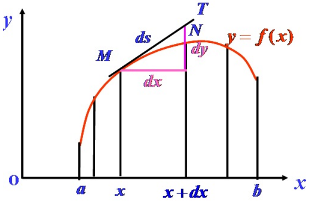
且f在$[a, b]$具有连续导数(称曲线是光滑的).

(1) 取积分变量为x, 积分区间为$[a, b]$;

(2) 在区间$[a, b]$上取一小区间$[x, x + \mathrm{d}x]$,

与它相应的弧长用过点M的切线长

$|MT|$来近似, 从而得到弧长微元:



直角坐标情形

设平面曲线弧的直角坐标方程为$y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$,

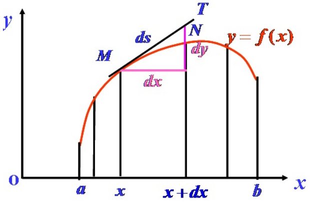
且f在$[a, b]$具有连续导数(称曲线是光滑的).

(1) 取积分变量为x, 积分区间为$[a, b]$;

(2) 在区间$[a, b]$上取一小区间$[x, x + \mathrm{d}x]$,

与它相应的弧长用过点M的切线长

$|MT|$来近似, 从而得到弧长微元:



$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

直角坐标情形

设平面曲线弧的直角坐标方程为$y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$,

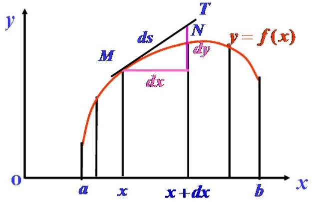
且f在$[a,b]$具有连续导数(称曲线是光滑的).

(1) 取积分变量为x, 积分区间为$[a,b]$;

(2) 在区间$[a,b]$上取一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,

与它相应的弧长用过点M的切线长

$|MT|$来近似, 从而得到弧长微元:



$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

——弧微分公式

直角坐标情形

设平面曲线弧的直角坐标方程为$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$,

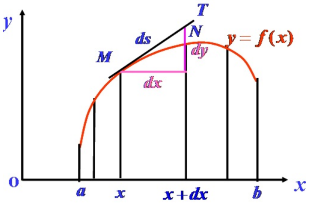
且f在$[a, b]$具有连续导数(称曲线是光滑的).

(1) 取积分变量为x, 积分区间为$[a, b]$;

(2) 在区间$[a, b]$上取一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$,

与它相应的弧长用过点M的切线长

$|MT|$来近似, 从而得到弧长微元:



$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

——弧微分公式

(3) $s = \int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$

例1. 求圆$x^2+y^2=R^2$的弧长.

例1. 求圆$x^2+y^2=R^2$的弧长.

解: 显然, 所求弧长为第一象限弧长的4倍.

例1. 求圆$x^2+y^2=R^2$的弧长.

解: 显然, 所求弧长为第一象限弧长的4倍.

在第一象限中, $y=\sqrt{R^2-x^2}\quad(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,

例1. 求圆$x^2+y^2=R^2$的弧长.

解: 显然, 所求弧长为第一象限弧长的4倍.

在第一象限中, $y=\sqrt{R^2-x^2} \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$,

$$\therefore y' = \frac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

例1. 求圆$x^2+y^2=R^2$的弧长.

解: 显然, 所求弧长为第一象限弧长的4倍.

在第一象限中, $y=\sqrt{R^2-x^2} \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$,

$$\therefore\ y' = \frac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$\therefore\ \mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x,$$

例1. 求圆$x^2+y^2=R^2$的弧长.

解: 显然, 所求弧长为第一象限弧长的4倍.

在第一象限中, $y=\sqrt{R^2-x^2} \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$,

$$\therefore y' = \frac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$\therefore \mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\therefore s = 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x = 4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 2\pi R.$$

参数方程情形

参数方程情形

若曲线是由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 表示,则弧长的微元为:

参数方程情形

若曲线是由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=f(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 表示,则弧长的微元为:

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)\mathrm{d}t]^2+[f'(t)\mathrm{d}t]^2}$$

参数方程情形

若曲线是由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 表示,则弧长的微元为:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{[\varphi'(t)\mathrm{d}t]^2 + [f'(t)\mathrm{d}t]^2} \\ &= \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [f'(t)]^2}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

参数方程情形

若曲线是由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = f(t), \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 表示,则弧长的微元为:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{[\varphi'(t)\mathrm{d}t]^2 + [f'(t)\mathrm{d}t]^2}$$

$$= \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [f'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

$$\therefore s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [f'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

例2. 计算摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的长度.

例2. 计算摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的长度.

解: $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$,

例2. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的长度.

解: $x'(t) = a(1 - \cos t),\ y'(t) = a \sin t,$

$$\therefore \mathrm{d}s = \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + [a \sin t]^2}\mathrm{d}t$$

例2. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的长度.

解: $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$,

$$\therefore \mathrm{d}s = \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + [a\sin t]^2}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)}\mathrm{d}t = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t,$$

例2. 计算摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的长度.

解: $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$,

$$\therefore \mathrm{d}s = \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + [a \sin t]^2} \mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)} \mathrm{d}t = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| \mathrm{d}t,$$

$$\therefore s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$

例2. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的长度.

解: $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$,

$$\therefore \mathrm{d}s = \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + [a \sin t]^2} \mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)} \mathrm{d}t = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| \mathrm{d}t,$$

$$\therefore s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t = 2a[-2\cos \frac{t}{2}]\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

极坐标方程情况

极坐标方程情况

若曲线是由极坐标方程$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$表示,

极坐标方程情况

若曲线是由极坐标方程$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$表示,

则曲线弧的参数方程为$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho(\theta)\sin\theta, \end{cases}$

极坐标方程情况

若曲线是由极坐标方程$\rho = \rho(\theta)\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$表示,

则曲线弧的参数方程为$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho(\theta)\sin\theta, \end{cases}$

$\because\ \mathrm{d}x = (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\ \ \mathrm{d}y = (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\mathrm{d}\theta,$

极坐标方程情况

若曲线是由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$表示,

则曲线弧的参数方程为$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho(\theta)\sin\theta, \end{cases}$

$\because \mathrm{d}x=(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}y=(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\mathrm{d}\theta,$

$\therefore \mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

极坐标方程情况

若曲线是由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$表示,

则曲线弧的参数方程为$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho(\theta)\sin\theta, \end{cases}$

$\because\ \mathrm{d}x=(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\ \ \mathrm{d}y=(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\mathrm{d}\theta,$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{d}s&=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}\\&=\sqrt{(\rho'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

极坐标方程情况

若曲线是由极坐标方程$\rho = \rho(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$表示,

则曲线弧的参数方程为$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho(\theta)\sin\theta, \end{cases}$

$\because \mathrm{d}x = (\rho' \cos\theta - \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}y = (\rho' \sin\theta + \rho\cos\theta)\mathrm{d}\theta,$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{d}s &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \\ &= \sqrt{(\rho' \cos\theta - r\sin\theta)^2 + (\rho' \sin\theta + \rho\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

极坐标方程情况

若曲线是由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$表示,

则曲线弧的参数方程为$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho(\theta)\sin\theta, \end{cases}$

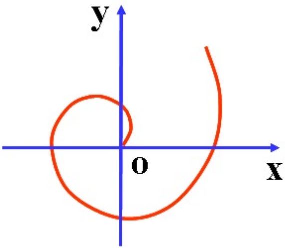
$\because\ \mathrm{d}x=(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}y=(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\mathrm{d}\theta,$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{d}s&=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}\\&=\sqrt{(\rho'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\\&=\sqrt{\rho^2(\theta)+(\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

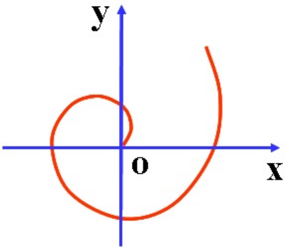
$$\therefore\ s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+(\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta.$$

例3. 求阿基米德螺线$\rho = a\theta\ (a > 0)$的第一圈$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$的弧长.

例3. 求阿基米德螺线$\rho = a\theta \ (a > 0)$的第一圈$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$的弧长.

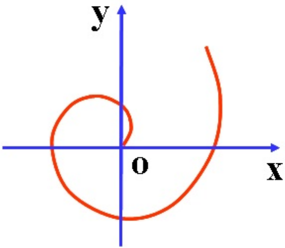


例3. 求阿基米德螺线$\rho = a\theta\ (a > 0)$的第一圈$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$的弧长.



解: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$

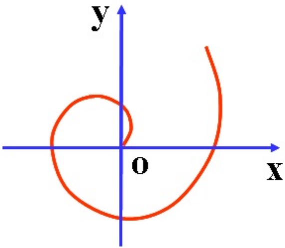
例3. 求阿基米德螺线$\rho = a\theta\ (a > 0)$的第一圈$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$的弧长.



解: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + a^2}\mathrm{d}\theta$

例3. 求阿基米德螺线$\rho = a\theta\ (a > 0)$的第一圈$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$的弧长.

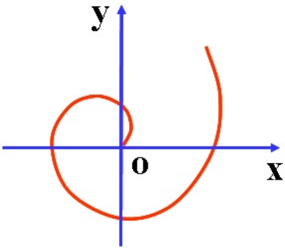


解: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + a^2}\mathrm{d}\theta$

$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\mathrm{d}\theta$

例3. 求阿基米德螺线$\rho = a\theta \ (a > 0)$的第一圈$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$的弧长.



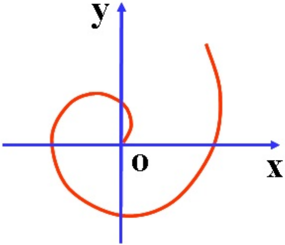
解: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} \mathrm{d}\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta)^2 + a^2} \mathrm{d}\theta$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} \mathrm{d}\theta$$

$$= a \left[\frac{\theta}{2} \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{\theta^2 + 1} + \theta) \right] \Bigg|_0^{2\pi}$$

例3. 求阿基米德螺线$\rho = a\theta\ (a>0)$的第一圈$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$的弧长.



解: $$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(\theta)+(\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{(a\theta)^2+a^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\mathrm{d}\theta$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{\theta^2+1}+\theta)\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi)].$$

小结

小结

- 若曲线为直角坐标方程$y = f(x)\,(a \leqslant x \leqslant b)$, 则其弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

小结

- 若曲线为直角坐标方程$y = f(x)\,(a \leqslant x \leqslant b)$, 则其弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

- 若曲线有极坐标方程$\rho = \rho(\theta)\,(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$, 则其弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$$

小结

小结

- 若平面曲线为参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=f(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 则其弧长为:

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[f'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

小结

- 若平面曲线为参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 则其弧长为:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [f'(t)]^2} \mathrm{d}t$$

- 若空间曲线为参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 则其弧长为:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \mathrm{d}t$$