第七章　离散时间信号与系统的复频域分析

连续系统的时域分析

微分方程　$h(t)$

离散系统的时域分析

差分方程　$h(n)$

连续系统的频域分析

微分方程 → 代数方程

连续时间傅立叶变换　$H(\Omega)$

离散系统的频域分析

差分方程 → 代数方程

离散(时间)傅立叶变换　$H(e^{jw})$

连续系统的复频域分析

微分方程 → 代数方程

拉普拉斯变换　$H(s)$

离散系统的复频域域分析

差分方程 → 代数方程

z 变换　$H(z)$

教学要求:

1. 理解z变换的定义及其收敛域概念
2. 理解并掌握z变换与拉普拉斯变换、离散时间傅立叶变换、离散傅立叶变换之间的关系
3. 掌握正、反 z 变换
4. 掌握z变换的性质
5. 掌握离散LTI系统的 z 域分析方法
6. 掌握利用单边z变换分析增量线性系统的方法

第一节　z 变换定义及其收敛域

一、 z变换的定义

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \qquad y(n) = x(n) * h(n)$$

$z = re^{j\omega}$ 　　 z^n 　 $(-\infty < n < \infty)$ 　　 $y(n) = ?$

$$y(n) = z^n * h(n) = h(n) * z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{n-k}$$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} = z^n H(z)$$

其中： $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}$ 　　 $h(n) \leftrightarrow H(z)$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}} \qquad x(n) \leftrightarrow X(z)$$

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

双边z变换

$$= \cdots + x(-2)z^{2} + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots x(n)z^{-n} + \cdots$$

$X(z)$是关于z^{-1}的幂级数的和，z^{-n}项的系数$= x(n)$

$$Z[x(n)u(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

单边z变换

级数求和：收敛性问题 $\Longrightarrow$ **z变换的收敛域**

二、z变换的收敛域

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

使X(z)存在且有限的z值取值范围, 称为X(z)的收敛域.

级数的和存在且有限, X(z)就收敛

级数收敛条件 ⟹ z变换的收敛域

1. 有限长序列 $x(n) \quad (n_1 \le n \le n_2)$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n} \qquad \begin{cases} n_1<0 & |z|<\infty \\ n_2>0 & |z|>0 \end{cases}$$

(1) $n_2>n_1\ge 0$或$n_2\ge n_1>0$ $\qquad 0<|z|\le\infty$

(2) $n_2>0, n_1<0$ $\qquad 0<|z|<\infty$

(3) $0\ge n_2>n_1$或$0>n_2\ge n_1$ $\qquad 0\le|z|<\infty$

2. 右边序列 (因果序列)

$$z = re^{j\omega} \qquad |z| = r$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad R_r < |z| \le \infty$$

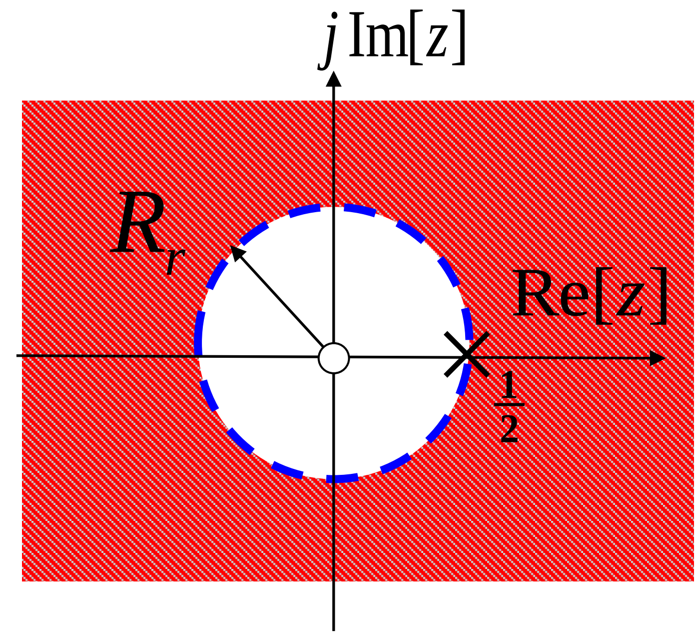
例：$x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2} z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$(\frac{1}{2})^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

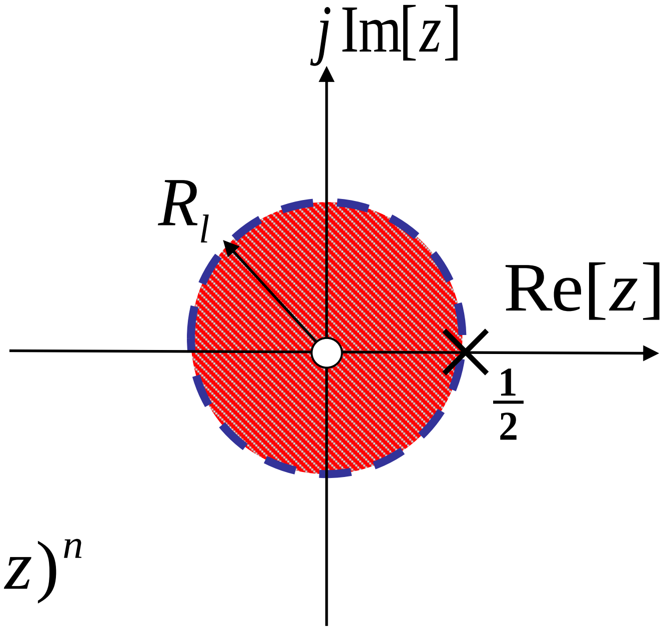


z变换的几何表示：零极点图

$$\left|\tfrac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \Longrightarrow |z| > \tfrac{1}{2}$$

3. 左边序列（反因果序列）

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n} \qquad |z|<R_l$$



例： $x(n)=-(\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2})^n z^{-n}$$

$$=1-\sum_{n=-\infty}^{0}(\frac{1}{2})^n z^{-n} =1-\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n$$

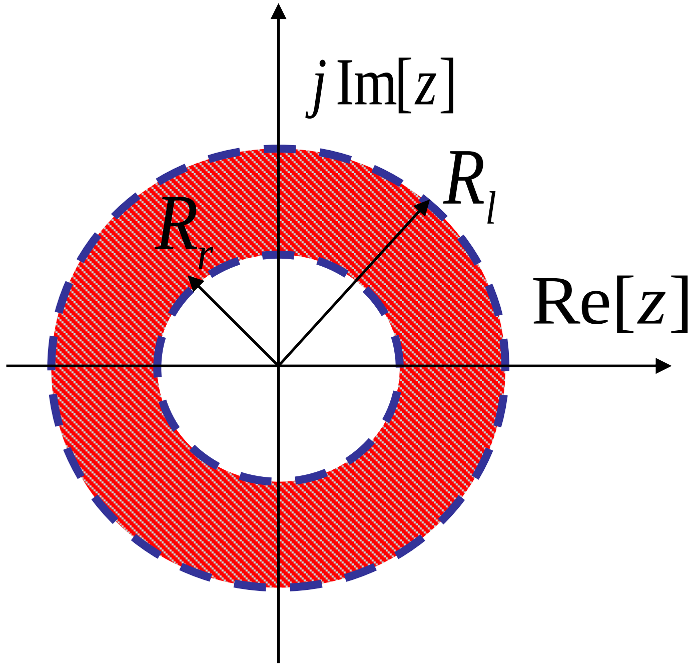
$$-(\frac{1}{2})^n u(-n-1)\leftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |2z|<1 \Rightarrow |z|<\frac{1}{2}$$

$$(\frac{1}{2})^n u(n)\leftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

4. 双边序列

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}x(k)z^{-k}+\sum_{0}^{\infty}x(k)z^{-k}$$



左边序列的收敛区：　$|z|<R_l$

右边序列的收敛区：　$|z|>R_r$

如果　$R_l>R_r$

双边序列的收敛区：　$R_r<|z|<R_l$

如果　$R_l<R_r$　　无公共区域，x(k)不存在z变换

z变换收敛域的特征：

如果序列x(n)的z变换X(z)存在，则其收敛域具有以下特征：

1. z平面内以圆点为中心的圆环，收敛域内不含极点

2. 有限长序列的收敛域为除$z=0$或$|z|=\infty$外的整个z平面

3. 右边序列（因果序列）的收敛域位于最外部极点的外部

4. 左边序列（反因果序列）的收敛域位于最内部极点的内部

5. 双边序列的收敛域为一环形区域

三、 z变换与拉普拉斯变换的关系

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \qquad x_p(t) = x(t)\cdot\delta_T(t) \leftrightarrow X_p(s) \qquad x(n) \leftrightarrow X(z)$$

$$\boxed{X(z) = X_p(s)\Big|_{z=e^{sT}}}$$

$$x_p(t) = x(t)\cdot\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_p(s) = \int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)]e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

$$X_p(s)\Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z)$$

s平面与z平面之间的映射关系： $\boxed{z = e^{sT}}$

$z = e^{sT}$的映射关系：

设 $s = \sigma + j\Omega$　　记 $z = re^{j\omega}$　　$\begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$

则 $z = e^{sT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$

s平面		z平面	
(1) 虚轴	$(\sigma = 0)$	单位圆	$(r = 1)$
(2) 右半平面	$(\sigma > 0)$	单位圆外	$(r > 1)$
(3) 左半平面	$(\sigma < 0)$	单位圆内	$(r < 1)$

(4) 极点映射不是单值映射 (ω以2π为周期)

s平面中σ相同Ω相差$\dfrac{2\pi}{T}$的两个极点映射到z平面同一点

四、 z变换与离散时间傅立叶变换的关系

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$z = re^{j\omega}$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) r^{-n}] e^{-j\omega n}$$

z变换的收敛性比离散时间傅立叶变换的收敛性强

$\boxed{z = e^{j\omega}}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)] e^{-j\omega n}$$

离散时间傅立叶变换是单位圆上的z变换

五、 z变换与离散傅立叶变换（DFT）的关系

$x(n)$为长度N为的有限长序列

$$\boxed{X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$\boxed{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \qquad X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(k)$$

有限长序列的离散傅立叶变换是其z变换在单位圆上的均匀抽样，或对其离散时间傅立叶变换在 $0 \sim 2\pi$ 区间内的均匀抽样。

六、常用序列的z变换

1. 单位脉冲信号: $\boxed{\delta(n)\leftrightarrow 1}$ $(0\le|z|\le\infty)$

$$Z[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

2. 单位阶跃序列: $\boxed{u(n)\leftrightarrow \frac{z}{z-1}}$ $(|z|>1)$

$$Z[u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

3. 单边指数序列: $\boxed{a^n u(n)\leftrightarrow \frac{z}{z-a}}$ $(|z|>|a|)$

$$Z[a^n u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \qquad |az^{-1}|<1 \qquad |z|>|a|$$

4. 单边余弦序列:

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad (|z|>|a|)$$

设: $a = e^{j\beta}$ $\qquad e^{j\beta n}u(n) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-e^{j\beta}} \qquad (|z|>1)$

$$\cos(\beta n)u(n) = \frac{1}{2}(e^{j\beta n} + e^{-j\beta n})u(n)$$

$$\cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\beta}} + \frac{z}{z-e^{-j\beta}}\right)$$

$$= \frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1} \qquad (|z|>1)$$

第二节　双边 z 变换的性质

1. 时移特性

若　$x(n) \leftrightarrow X(z), \quad R$

则　$x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

收敛域R在原点或无穷远处可能发生变化

例: $u(n) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1} \qquad (|z|>1)$

$$u(n-1) \leftrightarrow z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} \qquad (|z|>1)$$

$$u(n+1) \leftrightarrow z \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{z-1} \qquad (1<|z|<\infty)$$

2. 线性特性

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z), \quad R_1 \qquad x_2(n) \leftrightarrow X_2(z), \quad R_2$

则 $a_1x_1(n)+a_2x_2(n) \leftrightarrow a_1X_1(z)+a_2X(z), \quad R_1 \cap R_2$

例: $u(n) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1} \qquad (|z|>1)$

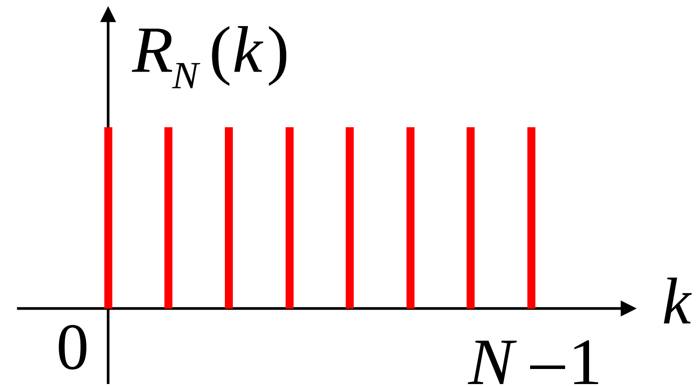
$$u(n-1) \leftrightarrow z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} \qquad (|z|>1)$$

$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \leftrightarrow 1$ **收敛域为整个z平面**

结论：当经过线性组合后出现极点相互抵消，
或零、极点相互抵消，收敛域可能扩大。

例2: 求矩形序列 $R_N(k)$ 的z变换

$$R_N(k)=\begin{cases}1 & k=0,1,2,\cdots,N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



解: 方法1: $R_N(k)=u(k)-u(k-N)$

$$Z[R_N(k)]=Z[u(k)]-Z[u(k-N)]$$

$$=\frac{z}{z-1}-z^{-N}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z}{z-1}(1-z^{-N})\quad(|z|>0)$$

方法2: $R_N(k)=\sum_{i=0}^{N-1}\delta(k-i)$

$$Z[R_N(k)]=\sum_{i=0}^{N-1}z^{-i}=\frac{z}{z-1}(1-z^{-N})\qquad(|z|>0)$$

3. 共轭对称性

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), \quad R$

则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*)$ 收敛域R不变

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}\right]^* = X^*(z^*)$$

若 $x(n)$ 为实信号:

$$x(n)=x^*(n) \qquad X(z)=X^*(z^*)$$

这表明：如果z_0是$X(z)$的零点或极点,则z_0^*也是$X(z)$的零点或极点，即实信号z变换的零点或极点如果是复数，则必共轭成对出现。

4. 频移特性

$$\boxed{u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}} \qquad (|z|>1)$$

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), \quad R$

则 $e^{j\omega_0 n}x(n) \leftrightarrow X(ze^{-j\omega_0})$ 收敛域R不变

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(ze^{-j\omega_0})^{-n} = X(ze^{-j\omega_0})$$

结论： **时域乘以复指数信号 $e^{j\omega_0 n}$ 相当于z域旋转一个角度 ω_0**

例： $\cos(\omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})u(n)$

$$\cos(\omega_0 n)u(n) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(ze^{-j\omega_0})^{-1}} + \frac{1}{(1-ze^{j\omega_0})^{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)$$

5. z域尺度变换特性

若 $x(n) \leftrightarrow X(z),\quad R$ 则 $z_0^n x(n) \leftrightarrow X(\frac{z}{z_0}),\quad |z_0|R$

$$\boxed{z_0 = r_0 e^{j\omega_0}}\begin{cases} 若 r_0 = 1: & e^{j\omega_0 n}x(n) \leftrightarrow X(ze^{-j\omega_0}),\quad R \\ 若 \omega_0 = 2k\pi: & r_0{}^n x(n) \leftrightarrow X(\frac{z}{r_0}),\quad |r_0|R \end{cases}$$

例： $a^n\cos(\omega_0 n)u(n) \quad (0 < a < 1)$

$$a^n\cos(\omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2}a^n(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})u(n)$$

$$a^n\cos(\omega_0 n)u(n) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-(\frac{z}{ae^{j\omega_0}})^{-1}} + \frac{1}{1-(\frac{z}{ae^{-j\omega_0}})^{-1}}\right]$$

$$= \frac{z^2 - az\cos\omega_0}{z^2 - 2az\cos\omega_0 + a^2} \qquad |z| > a$$

6. 时域反转特性

若 $x(n) \leftrightarrow X(z), \quad R \qquad a < |z| < b$

则 $x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1}), \quad \frac{1}{R} \qquad \frac{1}{b} < |z| < \frac{1}{a}$

例： $u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (|z| > 1)$

$$u(-n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1)$$

$$u(-n) = u(-n-1) + \delta(n)$$

$$\left.\begin{array}{l} -u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (|z| < 1) \\ \delta(n) \leftrightarrow 1 \end{array}\right\} \quad u(-n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1)$$

7. 时域内插特性

$$x_{(k)}(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{k}), & n\text{是}k\text{的整倍数} \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

则： $x_{(k)}(n) \leftrightarrow X(z^k)$， $R^{\frac{1}{k}}$

$$X_k(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}(n)z^{-k}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\frac{n}{k})z^{-k}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)z^{-kr}=X(z^k)$$

例：已知$a^n u(n) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$　　$(|z| > |a|)$

求：　$a^{-n}u(-n-1)$的z变换

解：　$a^{-n}u(-n) \leftrightarrow \dfrac{z^{-1}}{z^{-1}-a}$　　$(|z| < \dfrac{1}{|a|})$

$$a^{-n-1}u(-n-1) \leftrightarrow z \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} = \frac{z}{1-az}$$

$\therefore$　$a^{-n}u(-n-1) \leftrightarrow \dfrac{az}{1-az}$　　$(|z| < \dfrac{1}{|a|})$

$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$　　$(|z| < |a|)$

8. 卷积定理

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \quad x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$

则 $x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$

收敛区: 一般为$X_1(z)$和$X_2(z)$的公共部分

例: 已知 $u(n) * u(n) = (n+1)u(n)$

求 $Z[nu(n)]$

解: $nu(n) = u(n) * u(n) - u(n)$

$$Z[u(n)] = \frac{z}{z-1} \qquad (|z| > 1)$$

$$Z[nu(n)] = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad (|z| > 1)$$

作业：

9.1 (a)(d)(e)

9.2

9.5