工科数学分析

贺丹（东南大学）

第四节 多元函数的Taylor公式与极值问题

第四节 多元函数的Taylor公式与极值问题

本节主要内容：

第四节 多元函数的Taylor公式与极值问题

本节主要内容:

- 多元函数的Taylor公式

第四节 多元函数的Taylor公式与极值问题

本节主要内容：

- 多元函数的Taylor公式
- 多元函数的极值

第四节 多元函数的Taylor公式与极值问题

本节主要内容:

- 多元函数的Taylor公式
- 多元函数的极值
- 多元函数的最值

第四节 多元函数的Taylor公式与极值问题

本节主要内容：

- 多元函数的Taylor公式
- 多元函数的极值
- 多元函数的最值
- 条件极值

4.1 多元函数的Taylor公式

4.1 多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor 公式:

4.1 多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor 公式: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n$

4.1 多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor 公式: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n$

其中余项$R_n=o((x-x_0)^n)$ 或

4.1 多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor 公式: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n$

其中余项$R_n=o((x-x_0)^n)$ 或

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

4.1 多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor 公式: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n$

其中余项$R_n=o((x-x_0)^n)$ 或

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

- 当$n=1$时, 一阶带Lagrange余项的泰勒公式为:

4.1 多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor 公式: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n$

其中余项$R_n=o((x-x_0)^n)$ 或

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

- 当$n=1$时, 一阶带Lagrange余项的泰勒公式为:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2$$

4.1 多元函数的Taylor公式

一元函数的Taylor 公式: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n$

其中余项$R_n = o((x-x_0)^n)$ 或

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

- 当$n=1$时, 一阶带Lagrange余项的泰勒公式为:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2$$

或 $$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0+\theta\Delta x)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$(0<\theta<1).$$

对于二元函数$f(x,y)$, 也可以用$x-x_0, y-y_0$构成的多项式去逼近它, 也就是可以建立二元函数的泰勒公式.

对于二元函数$f(x,y)$, 也可以用$x-x_0, y-y_0$构成的多项式去逼近它, 也就是可以建立二元函数的泰勒公式.

定理4.1 (带Lagrange余项的一阶泰勒公式)

对于二元函数$f(x,y)$, 也可以用$x-x_0, y-y_0$构成的多项式去逼近它, 也就是可以建立二元函数的泰勒公式.

定理4.1 (带Lagrange余项的一阶泰勒公式)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点x_0,y_0 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 则存在$\theta\in(0,1)$ 使得

对于二元函数$f(x,y)$, 也可以用$x-x_0, y-y_0$构成的多项式去逼近它, 也就是可以建立二元函数的泰勒公式.

定理4.1 (带Lagrange余项的一阶泰勒公式)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点x_0, y_0 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 则存在$\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+R_1,$$

对于二元函数$f(x,y)$, 也可以用$x-x_0, y-y_0$构成的多项式去逼近它, 也就是可以建立二元函数的泰勒公式.

定理4.1 (带Lagrange余项的一阶泰勒公式)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点x_0,y_0 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 则存在$\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+R_1,$$

其中$R_1=\dfrac{1}{2!}(f_{xx}\Delta x^2+2f_{xy}\Delta x\Delta y+f_{yy}\Delta y^2)|_{(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}.$

- 带Lagrange余项的一阶泰勒公式也可以表示为:

- 带Lagrange余项的一阶泰勒公式也可以表示为:

$$f(x,y)=f(M_0)+f_x(M_0)(x-x_0)+f_y(M_0)(y-y_0)+R_1,$$

- 带Lagrange余项的一阶泰勒公式也可以表示为:

$$f(x,y) = f(M_0) + f_x(M_0)(x-x_0) + f_y(M_0)(y-y_0) + R_1,$$

其中 $R_1 = \frac{1}{2!}(f_{xx}(M')(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(M')(x-x_0)(y-y_0)$

$$+f_{yy}(M')(y-y_0)^2),$$

- 带Lagrange余项的一阶泰勒公式也可以表示为:

$$f(x,y) = f(M_0) + f_x(M_0)(x-x_0) + f_y(M_0)(y-y_0) + R_1,$$

其中 $R_1 = \dfrac{1}{2!}(f_{xx}(M')(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(M')(x-x_0)(y-y_0)$
$\qquad + f_{yy}(M')(y-y_0)^2),$

且$M_0(x_0,y_0)$, $M'(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))$, $0<\theta<1$.

- 带Lagrange余项的一阶泰勒公式也可以表示为:

$$f(x,y)=f(M_0)+f_x(M_0)(x-x_0)+f_y(M_0)(y-y_0)+R_1,$$

其中 $R_1=\dfrac{1}{2!}(f_{xx}(M')(x-x_0)^2+2f_{xy}(M')(x-x_0)(y-y_0)$

$$+f_{yy}(M')(y-y_0)^2),$$

且$M_0(x_0,y_0)$, $M'(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))$, $0<\theta<1.$

- 二元函数的Taylor公式的矩阵形式:

- 带Lagrange余项的一阶泰勒公式也可以表示为:

$$f(x,y)=f(M_0)+f_x(M_0)(x-x_0)+f_y(M_0)(y-y_0)+R_1,$$

其中 $R_1=\dfrac{1}{2!}(f_{xx}(M')(x-x_0)^2+2f_{xy}(M')(x-x_0)(y-y_0)$

$$+f_{yy}(M')(y-y_0)^2),$$

且$M_0(x_0,y_0)$, $M'(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))$, $0<\theta<1$.

- 二元函数的Taylor公式的矩阵形式:

令$\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)^T,\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)^T$,

- 带Lagrange余项的一阶泰勒公式也可以表示为:

$$f(x,y)=f(M_0)+f_x(M_0)(x-x_0)+f_y(M_0)(y-y_0)+R_1,$$

其中 $R_1=\frac{1}{2!}(f_{xx}(M')(x-x_0)^2+2f_{xy}(M')(x-x_0)(y-y_0)$
$+f_{yy}(M')(y-y_0)^2),$

且$M_0(x_0,y_0)$, $M'(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))$, $0<\theta<1.$

- 二元函数的Taylor公式的矩阵形式:

令$\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)^T,\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)^T,$

则$(f_x\Delta x+f_y\Delta y)|_{(x_0,y_0)}=\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)\cdot\Delta\boldsymbol{x},$

余项R_1是关于$\Delta x, \Delta y$ 的一个二次型, 其系数矩阵为:

余项R_1是关于$\Delta x, \Delta y$ 的一个二次型, 其系数矩阵为:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}) = \left.\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\right|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})},$$

余项R_1是关于$\Delta x, \Delta y$ 的一个二次型, 其系数矩阵为:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})},$$

称为函数f 在$\boldsymbol{x}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{x}$ 处的Hesse矩阵,

余项R_1是关于$\Delta x, \Delta y$ 的一个二次型, 其系数矩阵为:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}) = \left[\begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{array}\right]\Bigg|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})},$$

称为函数f 在$\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}$ 处的Hesse矩阵, 故余项为:

余项R_1是关于$\Delta x, \Delta y$ 的一个二次型, 其系数矩阵为:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}) = \left.\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\right|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})},$$

称为函数f 在$\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}$ 处的Hesse矩阵, 故余项为:

$$R_1 = \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

余项R_1是关于$\Delta x, \Delta y$ 的一个二次型, 其系数矩阵为:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})},$$

称为函数f 在$\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}$ 处的Hesse矩阵, 故余项为:

$$R_1 = \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

于是一阶带Lagrange余项的泰勒公式可以表示为:

余项R_1是关于$\Delta x, \Delta y$ 的一个二次型, 其系数矩阵为:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}) = \left.\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\right|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})},$$

称为函数f 在$\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}$ 处的Hesse矩阵, 故余项为:

$$R_1 = \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

于是一阶带Lagrange余项的泰勒公式可以表示为:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + <\nabla f(\boldsymbol{x}_0),\ \Delta\boldsymbol{x}> + \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

定理4.1' (带Peano余项的二阶泰勒公式)

设二元函数$z = f(x, y)$ 在点x_0, y_0 的某邻域$U(x_0, y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(x_0, y_0)$, 则

定理4.1' (带Peano余项的二阶泰勒公式)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点x_0,y_0 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 则

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + &< \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta\boldsymbol{x} > \\ &+\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x} + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2). \end{aligned}$$

定理4.1’ (带Peano余项的二阶泰勒公式)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点x_0,y_0 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 则

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)+ <\nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta\boldsymbol{x}> \\ +\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2).$$

- 或者写为:

定理4.1’ (带Peano余项的二阶泰勒公式)

设二元函数$z=f(x,y)$ 在点x_0,y_0 的某邻域$U(x_0,y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$, 则

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ <\nabla f(\boldsymbol{x}_0),\Delta\boldsymbol{x}> \\ &+\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2). \end{aligned}$$

- 或者写为:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+ \\ &\frac{1}{2!}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2)+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2). \end{aligned}$$

例1. 求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$在$(0,0)$点处的二阶带Peano余项的Taylor公式.

例1. 求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$在$(0,0)$点处的二阶带Peano余项的Taylor公式.

解: 函数f在$\mathbf{R}^2$有二阶连续偏导数, 且

例1. 求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$在$(0,0)$点处的二阶带Peano余项的Taylor公式.

解: 函数f在$\mathbf{R}^2$有二阶连续偏导数, 且

$$f_x=f_y=f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=\mathrm{e}^{x+y},$$

例1. 求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$在$(0,0)$点处的二阶带Peano余项的Taylor公式.

解: 函数f在$\mathbf{R}^2$有二阶连续偏导数, 且

$$f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = \mathrm{e}^{x+y},$$

则 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = f_{xx}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 1,$

例1. 求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$在$(0,0)$点处的二阶带Peano余项的Taylor公式.

解: 函数f在$\mathbf{R}^2$有二阶连续偏导数, 且

$$f_x=f_y=f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=\mathrm{e}^{x+y},$$

则 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f_{xx}(0,0)=f_{xy}(0,0)=f_{yy}(0,0)=1,$

且 $f(0,0)=1,$ 于是有:

例1. 求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$在$(0,0)$点处的二阶带Peano余项的Taylor公式.

解: 函数f在$\mathbf{R}^2$有二阶连续偏导数, 且

$$f_x=f_y=f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=\mathrm{e}^{x+y},$$

则 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f_{xx}(0,0)=f_{xy}(0,0)=f_{yy}(0,0)=1,$

且 $f(0,0)=1,$ 于是有:

$$\mathrm{e}^{x+y}=1+x+y+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+o(x^2+y^2).$$

例1. 求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$在$(0,0)$点处的二阶带Peano余项的Taylor公式.

解: 函数f在$\mathbf{R}^2$有二阶连续偏导数, 且

$$f_x=f_y=f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=\mathrm{e}^{x+y},$$

则 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f_{xx}(0,0)=f_{xy}(0,0)=f_{yy}(0,0)=1,$

且 $f(0,0)=1,$ 于是有:

$$\mathrm{e}^{x+y}=1+x+y+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+o(x^2+y^2).$$

说明: 二元函数在点$(0,0)$处的泰勒公式也称为麦克劳林公式.

关于二元函数泰勒公式的一些结果, 可以平行的推广到n元函数.

关于二元函数泰勒公式的一些结果, 可以平行的推广到n元函数.

定义4.1

设$f(\boldsymbol{x})$ 是定义在区域$\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ 内的n 元函数, 若f 在Ω 内连续, 则称f 是Ω 上的$C^{(0)}$类函数, 记为$f \in C^{(0)}(\Omega)$ 或$C(\Omega)$; 若f 在Ω 内具有连续的$m \in \mathbf{N}_+ \ (m \geqslant 1)$ 阶偏导数, 则称f 是Ω 上的$C^{(m)}$类函数, 记为$f \in C^{(m)}(\Omega)$.

定理4.2

设n 元函数$f \in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, $\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, 其中

$\boldsymbol{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n})^T \in \mathbf{R}^n$, $\Delta \boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)$,

则存在$\theta \in (0, 1)$使得

定理4.2

设n 元函数$f \in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, $\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, 其中

$\boldsymbol{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n})^T \in \mathbf{R}^n$, $\Delta \boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)$,

则存在$\theta \in (0,1)$使得

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + R_1,$$

定理4.2

设n 元函数$f \in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, $\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, 其中

$\boldsymbol{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n})^T \in \mathbf{R}^n$, $\Delta\boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)$,

则存在$\theta \in (0,1)$使得

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i + R_1,$$

其中 $R_1 = \dfrac{1}{2!}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j$,

定理4.2

设n 元函数$f \in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, $\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, 其中

$\boldsymbol{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n})^T \in \mathbf{R}^n$, $\Delta \boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)$,

则存在$\theta \in (0,1)$使得

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + R_1,$$

其中 $R_1 = \dfrac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \Delta \boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j,$

上式称为n元函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一阶带Lagrange余项的泰勒公式.

- n元函数f 的一阶带Lagrange余项的泰勒公式的向量形式:

- n元函数f 的一阶带Lagrange余项的泰勒公式的向量形式:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + < \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta\boldsymbol{x} > + \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

- n元函数f 的一阶带Lagrange余项的泰勒公式的向量形式:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + < \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta \boldsymbol{x} > + \frac{1}{2!}(\Delta \boldsymbol{x})^T \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta \boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}.$$

其中实对称矩阵

- n元函数f 的一阶带Lagrange余项的泰勒公式的向量形式:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + < \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta\boldsymbol{x} > + \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

其中实对称矩阵

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}) = \left.\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}\right|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})}$$

- n元函数f 的一阶带Lagrange余项的泰勒公式的向量形式:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + < \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta\boldsymbol{x} > + \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

其中实对称矩阵

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}) = \left.\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}\right|_{(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})}$$

是函数f 在$\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}$ 处的Hesse矩阵.