工科数学分析

贺 丹(东南大学)

第三节 幂级数

本节主要内容：

- 幂级数及其收敛性
- 幂级数的运算性质及和函数
- 函数展开为幂级数

3.1 幂级数及其收敛性

定义

3.1 幂级数及其收敛性

定义

称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ 为$x-x_0$的幂级数，其中$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$为实常数，称为该幂级数的系数.

3.1 幂级数及其收敛性

定义

称$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ 为$x-x_0$的幂级数，其中$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$为实常数, 称为该幂级数的系数.

称$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$为$x$的幂级数.

3.1 幂级数及其收敛性

定义

称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ 为$x-x_0$的幂级数，其中$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$为实常数, 称为该幂级数的系数.

称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 为x的幂级数.

- 显然, 做变换$t = x - x_0$，则可将$x - x_0$的幂级数化为x的幂级数, 故主要讨论x的幂级数.

幂级数的收敛半径和收敛域

定理3.1 (阿贝尔(Abel)定理)

幂级数的收敛半径和收敛域

定理3.1 (阿贝尔(Abel)定理)

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x_0(x_0 \neq 0)$收敛, 则对于一切满足$|x| < |x_0|$ 的x, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

幂级数的收敛半径和收敛域

定理3.1 (阿贝尔(Abel)定理)

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x_0(x_0 \neq 0)$收敛, 则对于一切满足$|x| < |x_0|$的$x$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$\tilde{x}_0$发散, 则对于一切满足$|x| > |\tilde{x}_0|$ 的x, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

定理2.3

定理2.3

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有三种可能:

定理2.3

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有三种可能:

(1) 仅在点$x = 0$处收敛;

定理2.3

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有三种可能:

(1) 仅在点$x=0$处收敛;

(2) 在整个数轴上收敛, 即对任何$x \in \mathbf{R}$都收敛, 且绝对收敛;

定理2.3

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有三种可能:

(1) 仅在点$x = 0$处收敛;

(2) 在整个数轴上收敛, 即对任何$x \in \mathbf{R}$都收敛, 且绝对收敛;

(3) 存在$R > 0$, 使得当$|x| < R$时绝对收敛; 当$|x| > R$时,

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

定义3.1

定理3.2 中的R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径, 对应的开区间 $(-R, R)$ 称为它的收敛区间.

定义3.1

定理3.2 中的R 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛半径**, 对应的开区间 $(-R, R)$ 称为它的**收敛区间**.

- 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$仅在$x = 0$处收敛, 规定$R = 0$.

定义3.1

定理3.2 中的R 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛半径**, 对应的开区间 $(-R, R)$ 称为它的**收敛区间**.

- 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$仅在$x=0$处收敛, 规定$R=0$.
- 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在整个数轴上都收敛, 规定$R=+\infty$, 收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

定义3.1

定理3.2 中的R 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径, 对应的开区间 $(-R, R)$ 称为它的收敛区间.

- 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$仅在$x = 0$处收敛, 规定$R = 0$.
- 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在整个数轴上都收敛, 规定$R = +\infty$, 收敛区间为$(-\infty, +\infty)$.
- 当$|x| = R$时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛也可能发散.

★ 对于$x-x_0$的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$:

★ 对于$x-x_0$的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$:

- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在以$x_0$为中心的一个区间上

  $|x-x_0|<R$收敛，称之为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$的收敛区间,

  R称之为收敛半径;

★ 对于$x-x_0$的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$:

- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在以$x_0$为中心的一个区间上 $|x-x_0|<R$收敛, 称之为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$的**收敛区间**, R称之为**收敛半径**;
- 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$的收敛域时, 应先求其收敛区间$(x_0-R, x_0+R)$, 再判断端点$x=x_0\pm R$处是否收敛, 从而确定其收敛域.

例1 (1) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=3$处条件收敛, 问能够确定该级数的收敛半径吗？该级数在点$x=-3$处的敛散性如何？

例1 (1) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 问能够确定该级数的收敛半径吗？该级数在点 $x=-3$ 处的敛散性如何？

(2) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 求该级数的收敛半径与收敛区间.

例1 (1) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 问能够确定该级数的收敛半径吗？该级数在点 $x=-3$ 处的敛散性如何？

(2) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 求该级数的收敛半径与收敛区间.

答: (1) $R=3$; $x=-3$ 处收敛性不定.

例1 (1) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 问能够确定该级数的收敛半径吗？该级数在点 $x=-3$ 处的敛散性如何？

(2) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 求该级数的收敛半径与收敛区间.

答： (1) $R=3$; $x=-3$ 处收敛性不定.

(2) $R=5$; 收敛区间为 $(-7,3)$.

定理3.4

定理3.4

设有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若$a_n \neq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$(包含$+\infty$),

或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$(包含$+\infty$), 则幂级数的收敛半径为

定理3.4

设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若$a_n \neq 0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$(包含$+\infty$),

或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$(包含$+\infty$), 则幂级数的收敛半径为

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

例2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

例2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$

例2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}\qquad(2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n\qquad(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$$

解: (1) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}=1,$

例2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2+1}$ (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$ (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$

解: (1) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}=1,$

所以收敛半径为$R=\dfrac{1}{\rho}=1$, 收敛区间为$(-1,1)$.

例2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}\qquad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$$

解: (1) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}=1,$

所以收敛半径为$R=\dfrac{1}{\rho}=1$, 收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$时, 幂级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$, 收敛;

例2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2+1}$ (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$ (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$

解: (1) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}=1$,

所以收敛半径为$R=\dfrac{1}{\rho}=1$, 收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$时, 幂级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$, 收敛;

易见当$x=-1$时级数也收敛, 故收敛域为$[-1,1]$.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$

解：(2) 因为 $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n)} = 1$,

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$

解：(2) 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n)}=1,$

所以收敛半径为$R=1$, 收敛区间为$|x-1|<1$, 即$(0,2)$.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$

解：(2) 因为 $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n)} = 1$,

所以收敛半径为$R = 1$, 收敛区间为$|x-1| < 1$, 即$(0, 2)$.

当$x = 0$时, 幂级数为$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$, 发散;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$

解: (2) 因为 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n)} = 1$,

所以收敛半径为$R = 1$, 收敛区间为$|x-1| < 1$, 即$(0, 2)$.

当$x = 0$时, 幂级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$, 发散;

当$x = 2$时, 幂级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$, 收敛, 故收敛域为$(0, 2]$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

解：(3) 因为 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} x^2 = \frac{x^2}{2}$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

解：(3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} x^2 = \frac{x^2}{2}$,

所以当 $\frac{x^2}{2} < 1$, 即 $|x| < \sqrt{2}$, 级数收敛; 当 $|x| > \sqrt{2}$, 级数发散,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

解：(3) 因为 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} x^2 = \frac{x^2}{2}$,

所以当$\frac{x^2}{2} < 1$, 即$|x| < \sqrt{2}$, 级数收敛; 当$|x| > \sqrt{2}$, 级数发散,

于是收敛半径为$R = \sqrt{2}$, 收敛区间为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} x^{2n}$

解: (3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} x^2 = \dfrac{x^2}{2}$,

所以当$\dfrac{x^2}{2} < 1$, 即$|x| < \sqrt{2}$, 级数收敛; 当$|x| > \sqrt{2}$, 级数发散,

于是收敛半径为$R = \sqrt{2}$, 收敛区间为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

当$x = \pm\sqrt{2}$时, 幂级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$, 发散,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

解：(3) 因为 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} x^2 = \frac{x^2}{2}$,

所以当$\frac{x^2}{2} < 1$, 即$|x| < \sqrt{2}$, 级数收敛; 当$|x| > \sqrt{2}$, 级数发散,

于是收敛半径为$R = \sqrt{2}$, 收敛区间为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

当$x = \pm\sqrt{2}$时, 幂级数为$\sum_{n=0}^{\infty} n$, 发散,

故收敛域为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

幂级数的代数运算性质

定理3.5

幂级数的代数运算性质

定理3.5

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$ 与R_2, 和函数分别为$S(x)$与$T(x)$. 令$R=\min(R_1, R_2)$, 则在它们公共的收敛区间$|x|<R$内有：

幂级数的代数运算性质

定理3.5

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$ 与R_2, 和函数分别为$S(x)$与$T(x)$. 令$R = \min(R_1, R_2)$, 则在它们公共的收敛区间$|x| < R$内有:

(1) 幂级数$\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$收敛, 且

幂级数的代数运算性质

定理3.5

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$ 与R_2, 和函数分别为$S(x)$与$T(x)$. 令$R = \min(R_1, R_2)$, 则在它们公共的收敛区间$|x| < R$内有:

(1) 幂级数$\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$收敛, 且

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) x^n = \alpha S(x) \pm \beta T(x);$$

幂级数的代数运算性质

定理3.5

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$ 与R_2, 和函数分别为$S(x)$与$T(x)$. 令$R=\min(R_1,R_2)$, 则在它们公共的收敛区间$|x|<R$内有:

(1) 幂级数$\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$收敛, 且

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) x^n = \alpha S(x) \pm \beta T(x);$$

(2) 它们的乘积级数收敛, 且

幂级数的代数运算性质

定理3.5

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为R_1 与R_2, 和函数分别为$S(x)$与$T(x)$. 令$R = \min(R_1, R_2)$, 则在它们公共的收敛区间$|x| < R$内有:

(1) 幂级数$\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$收敛, 且

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) x^n = \alpha S(x) \pm \beta T(x);$$

(2) 它们的乘积级数收敛, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n$$

幂级数的代数运算性质

定理3.5

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$ 与R_2, 和函数分别为$S(x)$与$T(x)$. 令$R=\min(R_1,R_2)$, 则在它们公共的收敛区间$|x|<R$内有:

(1) 幂级数$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$收敛, 且

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) x^n = \alpha S(x) \pm \beta T(x);$$

(2) 它们的乘积级数收敛, 且

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n \\ &= S(x) \cdot T(x)\end{aligned}$$

幂级数的分析性质

为了研究幂级数的分析性质(连续性、可积性与可导性), 先证明幂级数的一致收敛定理.

幂级数的分析性质

为了研究幂级数的分析性质(连续性、可积性与可导性), 先证明幂级数的一致收敛定理.

定理3.6 (内闭一致收敛性)

幂级数的分析性质

为了研究幂级数的分析性质(连续性、可积性与可导性), 先证明幂级数的一致收敛定理.

定理3.6 (内闭一致收敛性)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R $(0 < R \leqslant +\infty)$, 则它在收敛区间$(-R, R)$的任何闭子区间$[a, b]$上都是一致收敛的.

定理3.7

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R > 0$, 和函数为$S(x)$, 则

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(1) $S(x)$在区间$(-R,R)$内连续, 即$S(x)\in C(-R,R)$;

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(1) $S(x)$在区间$(-R,R)$内连续, 即$S(x)\in C(-R,R)$;

- 若幂级数在$x=R$（或$x=-R$）处也收敛, 则$S(x)$在$(-R,R]$

($或[-R,R)$)上连续;

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(1) $S(x)$在区间$(-R,R)$内连续, 即$S(x)\in C(-R,R)$;

- 若幂级数在$x=R$（或$x=-R$）处也收敛, 则$S(x)$在$(-R,R]$

(或$[-R,R)$)上连续;

(2) $S(x)$在区间$(-R,R)$内有连续的导数, 且可以逐项求导,

即对$\forall x\in(-R,R)$, 有

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(1) $S(x)$在区间$(-R,R)$内连续, 即$S(x)\in C(-R,R)$;

- 若幂级数在$x=R$（或$x=-R$）处也收敛, 则$S(x)$在$(-R,R]$

(或$[-R,R)$)上连续;

(2) $S(x)$在区间$(-R,R)$内有连续的导数, 且可以逐项求导,

即对$\forall x\in(-R,R)$, 有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(1) $S(x)$在区间$(-R,R)$内连续, 即$S(x)\in C(-R,R)$;

- 若幂级数在$x=R$（或$x=-R$）处也收敛, 则$S(x)$在$(-R,R]$

(或$[-R,R)$)上连续;

(2) $S(x)$在区间$(-R,R)$内有连续的导数, 且可以逐项求导,

即对$\forall x\in(-R,R)$, 有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

逐项求导后的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$的收敛半径仍为$R$;

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R > 0$, 和函数为$S(x)$, 则

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(3) $S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积, 且可以逐项积分, 即

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(3) $S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积, 且可以逐项积分, 即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad (\forall x\in(-R,R)),$$

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(3) $S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积, 且可以逐项积分, 即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad (\forall x \in (-R,R)),$$

逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$的收敛半径仍为$R$.

定理3.7

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R>0$, 和函数为$S(x)$, 则

(3) $S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积, 且可以逐项积分, 即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\qquad(\forall x\in(-R,R)),$$

逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径仍为$R$.

- 逐项求导(积分)后收敛半径和收敛区间不变, 但收敛区间端点的敛散性可能会改变, 即收敛域在端点处会不同.

例1. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域及和函数.

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数.

解：收敛域为 $[-1, 1]$.

例1. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域及和函数.

解：收敛域为$[-1,1]$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $x\in[-1,1]$.

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域及和函数.

解：收敛域为$[-1,1]$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $x\in[-1,1]$.

由幂级数可逐项求导得：

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数.

解：收敛域为$[-1,1]$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\ x\in[-1,1]$.

由幂级数可逐项求导得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'$$

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域及和函数.

解：收敛域为$[-1,1]$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $x\in[-1,1]$.

由幂级数可逐项求导得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1),$$

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数.

解：收敛域为 $[-1,1]$. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\ x\in[-1,1]$.

由幂级数可逐项求导得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1),$$

故 $S(x)=S(0)+\displaystyle\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t$

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域及和函数.

解：收敛域为$[-1,1]$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $x\in[-1,1]$.

由幂级数可逐项求导得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1),$$

故 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t$

$$=S(0)+\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,\ x\in(-1,1).$$

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数.

解：收敛域为$[-1,1]$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\ x\in[-1,1]$.

由幂级数可逐项求导得：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1),$$

故 $S(x)=S(0)+\displaystyle\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t$

$$=S(0)+\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,\ x\in(-1,1).$$

因为$S(x)$在$[-1,1]$上连续, 所以$S(x)=\arctan x,\ x\in[-1,1]$.

例2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$ 的和函数.

例2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$ 的和函数.

解: 收敛域为 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$ 的和函数.

解: 收敛域为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$, $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

例2. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$的和函数.

解：收敛域为$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设和函数$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$，$x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

则 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(x^{2n+1})' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n+1}\right)'$

例2. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$的和函数.

解：收敛域为$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设和函数$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$, $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

则 $$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x^{2n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2}x)^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-2x^2}\right)',$$

例2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n}$ 的和函数.

解： 收敛域为 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(2n+1)x^{2n},\ x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x^{2n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2}x)^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-2x^2}\right)',$$

$$=\frac{1+2x^2}{(1-2x^2)^2},\quad x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

例3. 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

例3. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$.

例3. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$.　设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$,

例3. 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$. 设$S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, $x\in[-1,1)$,

例3. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1},\ x\in[-1,1),$

则 $xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1},$

例3. 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$. 设$S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, $x\in[-1,1)$,

则 $xS(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

而 $(xS(x))'=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$,

例3. 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$. 设$S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, $x\in[-1,1)$,

则 $xS(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

而 $(xS(x))'=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$,

故 $xS(x)=g(0)+\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln|1-x|$, $x\in(-1,1)$.

例3. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1},\ x\in[-1,1)$,

则 $xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,

而 $(xS(x))'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$,

故 $xS(x)=g(0)+\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln|1-x|,\ x\in(-1,1)$.

又因为$S(0)=0$,

例3. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的和函数.

解：收敛域为$[-1,1)$. 设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$, $x\in[-1,1)$,

则 $xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,

而 $(xS(x))'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$,

故 $xS(x)=g(0)+\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln|1-x|$, $x\in(-1,1)$.

又因为$S(0)=0$,

所以 $S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & -1\leqslant x<1, \text{且} x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

例4. 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^{n-1}}$ 的和.

例4. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$ 的和.

答：数项级数的和为12.

例4. 求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$的和.

答：数项级数的和为12.

提示：若设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$, 则该幂级数收敛域为$(-1,1)$，

和函数为$S(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, 于是原数项级数$=S(\frac{1}{2})$.

例5. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例5. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)}{n!} x^n$ 的和函数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

例5. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$ 的和函数, 并求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

解: 收敛域为

例5. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$ 的和函数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

解: 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

例5. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n$ 的和函数, 并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

解: 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)$, 则

例5. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

解： 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$S(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'$$

例5. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n$ 的和函数, 并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

解: 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)$, 则

$$S(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$=(x\mathrm{e}^x)'=(1+x)\mathrm{e}^x,$$

例5. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n$ 的和函数, 并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

解: 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)$, 则

$$S(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$=(x\mathrm{e}^x)'=(1+x)\mathrm{e}^x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例5. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数.

例6. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$ 的和函数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!2^n}$ 的和.

解: 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)$, 则

$$S(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$=(x\mathrm{e}^x)'=(1+x)\mathrm{e}^x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!2^n}=S(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

函数展开为幂级数

前面讨论了幂级数的收敛性及求和函数的问题, 现在考虑问题:

假设给定一个函数$f(x)$, 则

函数展开为幂级数

前面讨论了幂级数的收敛性及求和函数的问题, 现在考虑问题:

假设给定一个函数 $f(x)$, 则

- f 在什么条件下才能展开为一个幂级数, 即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\,?$$

函数展开为幂级数

前面讨论了幂级数的收敛性及求和函数的问题, 现在考虑问题:

假设给定一个函数$f(x)$, 则

- f 在什么条件下才能展开为一个幂级数, 即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\,?$$

- 如果f能展开为一个幂级数, 这个幂级数是否唯一?

函数展开为幂级数

前面讨论了幂级数的收敛性及求和函数的问题, 现在考虑问题:

假设给定一个函数$f(x)$, 则

- f 在什么条件下才能展开为一个幂级数, 即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\,?$$

- 如果f能展开为一个幂级数, 这个幂级数是否唯一?
- 将函数展开为幂级数的方法有哪些?

定义

定义

设$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数，则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

定义

设$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数, 则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为函数f在x_0处的泰勒(Taylor)级数,

定义

设$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数, 则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为函数f在x_0处的泰勒(Taylor)级数, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

定义

设$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数, 则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为函数f在x_0处的泰勒(Taylor)级数, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

- 若$x_0=0$, 则$f(x)$在泰勒级数称为f的Maclaurin级数,

定义

设$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数, 则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为函数f在x_0处的泰勒(Taylor)级数, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

- 若$x_0=0$, 则$f(x)$在泰勒级数称为f的Maclaurin级数,

  记为$f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

因为$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数，则$f(x)$在点x_0处带Lagrange余项的泰勒公式为：

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

因为$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数，则$f(x)$在点x_0处带Lagrange余项的泰勒公式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

因为$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数，则$f(x)$在点x_0处带Lagrange余项的泰勒公式为：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$\text{其中} R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \xi\ \text{介于} x \text{与} x_0 \text{之间}.$$

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

因为$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数，则$f(x)$在点x_0处带Lagrange余项的泰勒公式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 介于x与x_0之间.

设$f(x)$在x_0点的泰勒级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$的前$n+1$项

部分和为S_{n+1},

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

因为$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数，则$f(x)$在点x_0处带Lagrange余项的泰勒公式为：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ 介于x与x_0之间.

设$f(x)$在x_0点的泰勒级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$的前$n+1$项

部分和为S_{n+1}，于是$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$,

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

因为$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数, 则$f(x)$在点x_0处带Lagrange余项的泰勒公式为：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ 介于x与x_0之间.

设$f(x)$在x_0点的泰勒级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$的前$n+1$项

部分和为S_{n+1}, 于是$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$,

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x) = f(x) \Leftrightarrow$

★ 下面来考虑$f(x)$在什么条件下可以展开为其泰勒级数：

因为$f(x)$在x_0点的邻域内有任意阶导数，则$f(x)$在点x_0处带Lagrange余项的泰勒公式为：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ 介于x与x_0之间.

设$f(x)$在x_0点的泰勒级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$的前$n+1$项

部分和为S_{n+1}, 于是$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$,

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

定理3.8

定理3.8

设$f(x)\in C^{\infty}_{(x_0-R,x_0+R)}$，则$f(x)$在$(x_0-R,x_0+R)$内可以展开为$x-x_0$的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

的充分必要条件是：

定理3.8

设$f(x) \in C^{\infty}_{(x_0-R,x_0+R)}$，则$f(x)$在$(x_0-R, x_0+R)$内可以展开为$x-x_0$的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

的充分必要条件是：对任意的$x \in (x_0-R, x_0+R)$，$f(x)$在x_0处的泰勒公式的余项$R_n(x)$满足

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

- 唯一性

- 唯一性

如果在(x_0-R,x_0+R)内能展开成$x-x_0$的幂级数,

即对任意$x\in(x_0-R,x_0+R)$有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$,

则必有$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, 即此级数必为泰勒级数.

- **唯一性**

  如果在(x_0-R,x_0+R)内能展开成$x-x_0$的幂级数,

  即对任意$x\in(x_0-R,x_0+R)$有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$,

  则必有$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, 即此级数必为泰勒级数.

- 当$x_0=0$时, $f(x)$在$(-R,R)$内可以展开为x的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

的充分必要条件是:

- 唯一性

如果在(x_0-R, x_0+R)内能展开成$x-x_0$的幂级数，

即对任意$x\in(x_0-R, x_0+R)$有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，

则必有$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，即此级数必为泰勒级数.

- 当$x_0=0$时，$f(x)$在$(-R,R)$内可以展开为x的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

的充分必要条件是：对任意的$x\in(-R,R)$，$f(x)$在0处的麦克劳林公式的余项$R_n(x)$满足$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，且展式唯一.

直接展开法

将函数$f(x)$展开成$x-x_0$的幂级数, 步骤如下:

直接展开法

将函数$f(x)$展开成$x-x_0$的幂级数，步骤如下：

- 求出$f^{(n)}(x_0)$, $n=0,1,2,\cdots$;

直接展开法

将函数$f(x)$展开成$x-x_0$的幂级数，步骤如下：

- 求出$f^{(n)}(x_0)$, $n=0,1,2,\cdots$;
- 写出$f(x)$在x_0处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

  并求出其收敛半径R和收敛域B;

直接展开法

将函数$f(x)$展开成$x-x_0$的幂级数，步骤如下:

- 求出$f^{(n)}(x_0)$, $n=0,1,2,\cdots$;
- 写出$f(x)$在x_0处的泰勒级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

  并求出其收敛半径R和收敛域B;
- 求出泰勒公式的余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}),\ x\in B;$$

直接展开法

将函数$f(x)$展开成$x-x_0$的幂级数，步骤如下：

- 求出$f^{(n)}(x_0)$, $n=0,1,2,\cdots$;
- 写出$f(x)$在x_0处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

  并求出其收敛半径R和收敛域B;
- 求出泰勒公式的余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}),\ x\in B;$$

- 若$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 则当$x\in B$时，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

例1. 将函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

例1. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: (1) $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$,

例1. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: (1) $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$,

则 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$

例1. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解：(1) $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$,

则 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$

(2) e^x 的Maclaurin级数为：

例1. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解：(1) $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$,

则 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$

(2) e^x 的Maclaurin级数为：

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例1. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: (1) $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$,

则 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$.

(2) e^x 的Maclaurin级数为:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) $R_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$ (ξ在0与x之间).

例1. 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解：(1) $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$,

则 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$.

(2) e^x 的Maclaurin级数为：

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) $R_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$ (ξ在0与x之间).

下面证明对任意$x\in(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}=0$.

因为ξ在0与x之间, 故

$$0 \leqslant |R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

因为ξ在0与x之间, 故

$$0 \leqslant |R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛,

因为ξ在0与x之间, 故

$$0 \leqslant |R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛, 可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而

因为ξ在0与x之间, 故

$$0 \leqslant |R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛, 可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而

$\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

因为ξ在0与x之间, 故

$$0 \leqslant |R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛, 可得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而

$\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ x \in \mathbf{R}$

因为ξ在0与x之间, 故

$$0 \leqslant |R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛, 可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而

$\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\quad x \in \mathbf{R}$

- 同理可得

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots,\quad x \in \mathbf{R}$$

推论3.1

推论3.1

设$f(x) \in C^{\infty}_{(x_0-R,x_0+R)}$, 则$f(x)$在$(x_0-R,x_0+R)$, 如果$\{f^{(n)}\}$在$(x_0-R,x_0+R)$内是一致有界的, 即

推论3.1

设$f(x)\in C^{\infty}_{(x_0-R,x_0+R)}$, 则$f(x)$在$(x_0-R,x_0+R)$, 如果$\{f^{(n)}\}$在$(x_0-R,x_0+R)$内是一致有界的, 即

$$\exists K>0,\ 使得\forall n\in\mathbf{N}_+与x\in(x_0-R,x_0+R),\ 都有|f^{(n)}(x)|\leqslant K,$$

推论3.1

设$f(x) \in C^{\infty}_{(x_0-R,x_0+R)}$, 则$f(x)$在$(x_0-R,x_0+R)$, 如果$\{f^{(n)}\}$在$(x_0-R,x_0+R)$内是一致有界的, 即

$$\exists K>0, \text{使得} \forall n \in \mathbf{N}_+ \text{与} x \in (x_0-R,x_0+R), \text{都有} |f^{(n)}(x)| \leqslant K,$$

那么函数f在(x_0-R,x_0+R)内必可以展开为它在x_0处的Taylor级数, 也即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (x \in (x_0-R,x_0+R)).$$

间接展开法

利用已知函数的幂级数展开式，经过适当的计算（如四则运算、变量代换、逐项求导、逐项求积等），求出所给函数的幂级数展开式的方法称为间接展开法.

间接展开法

利用已知函数的幂级数展开式, 经过适当的计算（如四则运算、变量代换、逐项求导、逐项求积等）, 求出所给函数的幂级数展开式的方法称为间接展开法.

例2. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

间接展开法

利用已知函数的幂级数展开式, 经过适当的计算（如四则运算、变量代换、逐项求导、逐项求积等）, 求出所给函数的幂级数展开式的方法称为间接展开法.

例2. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解：因为 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots,$

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

间接展开法

利用已知函数的幂级数展开式, 经过适当的计算（如四则运算、变量代换、逐项求导、逐项求积等）, 求出所给函数的幂级数展开式的方法称为间接展开法.

例2. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解：因为 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots,$

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

所以逐项求导可得：

间接展开法

利用已知函数的幂级数展开式, 经过适当的计算（如四则运算、变量代换、逐项求导、逐项求积等）, 求出所给函数的幂级数展开式的方法称为间接展开法.

例2. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解: 因为 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots,$

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

所以逐项求导可得:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例3. 将函数$f(x) = \ln(1+x)$展开成x的幂级数.

例3. 将函数$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解： $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$

例3. 将函数$f(x) = \ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解: $$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1,$$

例3. 将函数$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解: $$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1,$$

上式从0到x逐项积分, 有

例3. 将函数$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解：$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,\quad -1<x<1,$$

上式从0到x逐项积分, 有

$$\ln(1+x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x(-1)^nt^n\mathrm{d}t\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ 1<x<1.$$

例3. 将函数$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解: $$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1,$$

上式从0到x逐项积分, 有

$$\ln(1+x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x(-1)^n t^n\mathrm{d}t\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ 1<x<1.$$

级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$在$x=1$收敛, 函数$f(x)$在$x=1$处连续,

例3. 将函数$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解: $$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1,$$

上式从0到x逐项积分, 有

$$\ln(1+x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x(-1)^n t^n\mathrm{d}t\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ 1<x<1.$$

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$在$x=1$收敛, 函数$f(x)$在$x=1$处连续,

故 $$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-1,1]$$

几个常用函数在$x_0 = 0$处的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

几个常用函数在$x_0=0$处的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

几个常用函数在$x_0=0$处的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

几个常用函数在$x_0=0$处的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

几个常用函数在$x_0 = 0$处的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

几个常用函数在$x_0 = 0$处的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots \\ &+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1,1).\end{aligned}$$

例4. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

例4. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x - x^2}$; (2) $f(x) = \ln(1 - 2x - 3x^2)$;

例4. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x-x^2}$;　　(2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

解：(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{x^2}{3}\left(\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$, 而

例4. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x-x^2}$;　　(2) $f(x) = \ln(1-2x-3x^2)$;

解：(1) $f(x) = \dfrac{x^2}{(2+x)(1-x)} = \dfrac{x^2}{3}\left(\dfrac{1}{2+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$，而

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n, \quad -2<x<2,$$

例4. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x-x^2}$;　　(2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

解：(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{x^2}{3}\left(\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$，而

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n,\quad -2<x<2,$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad -1<x<1,$$

例4. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x-x^2}$; (2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

解： (1) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{x^2}{3}\left(\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$, 而

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n,\quad -2<x<2,$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad -1<x<1,$$

所以 $f(x)=\dfrac{x^2}{3}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)$

例4. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x-x^2}$;　　(2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

解：(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{x^2}{3}\left(\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$, 而

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n,\quad -2<x<2,$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad -1<x<1,$$

所以 $f(x)=\dfrac{x^2}{3}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n+1}}+\frac{1}{3}\right)x^{n+2},\quad x\in(-1,1).$$

(2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

(2) $f(x) = \ln(1-2x-3x^2)$;

解：因为 $f(x) = \ln(1-2x-3x^2) = \ln(1-3x) + \ln(1+x)$, 且

(2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

解：因为 $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)=\ln(1-3x)+\ln(1+x)$, 且

$$\ln(1-3x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-3x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n,$$

(2) $f(x) = \ln(1-2x-3x^2)$;

解：因为 $f(x) = \ln(1-2x-3x^2) = \ln(1-3x) + \ln(1+x)$, 且

$$\ln(1-3x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-3x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n,$$

$$-3x \in (-1,1], \text{ 即 } x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

(2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

解：因为 $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)=\ln(1-3x)+\ln(1+x)$，且

$$\ln(1-3x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-3x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n,$$

$$-3x\in(-1,1],\ \text{即}\ x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,1],$$

(2) $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)$;

解：因为 $f(x)=\ln(1-2x-3x^2)=\ln(1-3x)+\ln(1+x)$, 且

$$\ln(1-3x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-3x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n,$$

$$-3x\in(-1,1],\ \text{即}\ x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,1],$$

故 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-3^n}{n}x^n,\quad x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$

(3) $f(x) = \sin^2 x.$

(3) $f(x) = \sin^2 x$.

解: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

(3) $f(x) = \sin^2 x$.

解: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$

(3) $f(x) = \sin^2 x$.

解： $$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(3) $f(x)=\sin^2 x$.

解： $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

(3) $f(x) = \sin^2 x$.

解: $$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例5. 将函数 $f(x) = \ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $$\ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)$$

(3) $f(x) = \sin^2 x$.

解: $$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例5. 将函数 $f(x) = \ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $$\ln x = \ln(2+x-2) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

(3) $f(x)=\sin^2 x$.

解: $$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $$\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n,$$

(3) $f(x)=\sin^2 x$.

解: $$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $$\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n,\quad x\in(0,4].$$

例6. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

例6. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解：因为 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}$, 且

例6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解: 因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}$, 且

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,$$

例6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解: 因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}$, 且

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,$$

$$-\frac{x-3}{3}\in(-1,1),\ \text{即}\, x\in(0,6),$$

例6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解：因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}$，且

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,$$

$$-\frac{x-3}{3}\in(-1,1),\ \text{即}\, x\in(0,6),$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-3)^n,$$

例6. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解：因为 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}$，且

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,$$

$$-\frac{x-3}{3} \in (-1,1),\ \text{即} x \in (0,6),$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-3)^n,$$

$$-\frac{x-3}{4} \in (-1,1),\ \text{即} x \in (-1,7),$$

例6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解: 因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}$, 且

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,$$

$$-\frac{x-3}{3}\in(-1,1),\ \text{即} x\in(0,6),$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-3)^n,$$

$$-\frac{x-3}{4}\in(-1,1),\ \text{即} x\in(-1,7),$$

故 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right](x-3)^n,\quad x\in(0,6).$$

例7. 将函数 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

例7. 将函数 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

解: 因为 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1,1)$,

例7. 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

解: 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1),$

所以 $f(x)=\arctan x=\displaystyle\int_0^t f'(t)\mathrm{d}t+f(0)$

例7. 将函数 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

解: 因为 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1,1)$,

所以 $f(x) = \arctan x = \displaystyle\int_0^t f'(t)\mathrm{d}t + f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t$

例7. 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

解: 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$,

所以 $f(x)=\arctan x=\displaystyle\int_0^t f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1),$$

例7. 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

解: 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$,

所以 $f(x)=\arctan x=\int_0^t f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^t(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1),$$

又当$x=\pm1$时, 函数$f(x)$连续, 且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$收敛, 故

例7. 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

解: 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$,

所以 $f(x)=\arctan x=\displaystyle\int_0^t f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1),$$

又当$x=\pm1$时, 函数$f(x)$连续, 且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$收敛, 故

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1].$$

例7. 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并求 $f^{(n)}(0)$.

解：因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$,

所以 $f(x)=\arctan x=\displaystyle\int_0^t f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1),$$

又当$x=\pm1$时，函数$f(x)$连续，且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$收敛，故

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1].$$

由Taylor级数的唯一性，可得

$$f^{(2k)}=0,\ \ f^{(2k+1)}=(-1)^k(2k)!\ (k=0,1,2,\dots).$$

例8. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

例8. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $f(x) = -\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}}\right)'$

例8. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $f(x)=-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}}\right)'$

$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)'$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)'$$

例8. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解:
$$f(x)=-\left(\frac{1}{x}\right)'=-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}\right)'$$
$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)'$$
$$=-\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)'$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1},$$

例8. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $f(x)=-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}}\right)'$

$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)'$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1},\quad x\in(0,4).$$