工科数学分析

贺丹（东南大学）

第三节 平面与直线

本节主要内容:

- 平面的方程
- 直线的方程
- 与平面直线相关的问题

三、有关平面和直线的几个基本问题

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

- 空间两直线的夹角

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

▶ 空间两直线的夹角

两直线方向向量的夹角(通常指锐角)称为**两直线的夹角**.

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

- 空间两直线的夹角

两直线方向向量的夹角(通常指锐角)称为两直线的夹角.

设两直线L_1和L_2的方向向量分别为

$$\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\},\quad \vec{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\},$$

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

▶ 空间两直线的夹角

两直线方向向量的夹角(通常指锐角)称为两直线的夹角.

设两直线L_1和L_2的方向向量分别为

$$\vec{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}, \quad \vec{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\},$$

则它们的夹角θ 应是$(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ 或$(-\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \pi - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ 两者中的锐角,

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

▶ 空间两直线的夹角

两直线方向向量的夹角(通常指锐角)称为两直线的夹角.

设两直线L_1和L_2的方向向量分别为

$$\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\},\quad \vec{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\},$$

则它们的夹角θ 应是$(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ 或$(-\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\pi-(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ 两者中的锐角, 故 $\cos\theta=|\cos(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|$,

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

▶ 空间两直线的夹角

两直线方向向量的夹角(通常指锐角)称为两直线的夹角.

设两直线L_1和L_2的方向向量分别为

$$\vec{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}, \quad \vec{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\},$$

则它们的夹角θ 应是$(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ 或$(-\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \pi - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ 两者中的锐角, 故 $\cos\theta = |\cos(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|$, 即

$$\cos\theta$$

三、有关平面和直线的几个基本问题

1. 夹角

▶ 空间两直线的夹角

两直线方向向量的夹角(通常指锐角)称为两直线的夹角.

设两直线L_1和L_2的方向向量分别为

$$\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\},\quad \vec{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\},$$

则它们的夹角θ 应是$(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ 或$(-\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\pi-(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ 两者中的锐角, 故 $\cos\theta=|\cos(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|$, 即

$$\cos\theta=\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

- 两平面的夹角

▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为**两平面的夹角**.

设两平面为

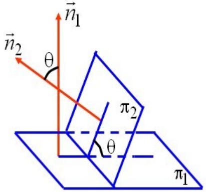
$$\begin{aligned}\pi_1: \quad & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ \pi_2: \quad & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\end{aligned}$$

▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为**两平面的夹角**.

设两平面为$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$

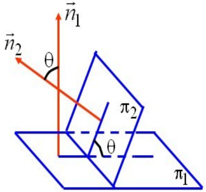


▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设两平面为$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$



法向量分别为 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$

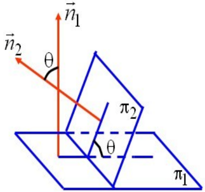
$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$

▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为**两平面的夹角**.

设两平面为$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$



法向量分别为 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$

$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$

它们的夹角θ 应是$(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ 或

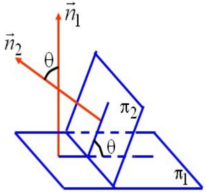
$\pi - (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ 两者中的锐角,

▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设两平面为$\pi_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$

$\pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$



法向量分别为 $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},$

$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},$

它们的夹角θ 应是$(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ 或

$\pi-(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ 两者中的锐角,

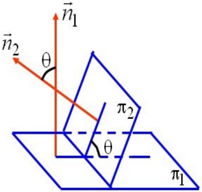
故 $\cos\theta=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|$

▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设两平面为 $\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$



法向量分别为 $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$

$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$

它们的夹角θ 应是$(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ 或

$\pi - (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ 两者中的锐角,

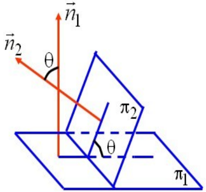
故 $\cos\theta = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

▶ 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(通常指锐角)称为**两平面的夹角**.

设两平面为$\pi_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$

$\pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$



法向量分别为 $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},$

$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},$

它们的夹角θ 应是$(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ 或

$\pi-(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ 两者中的锐角,

故 $$\cos\theta=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

$$=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

- 两平面夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

- 两平面夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

由两向量平行和垂直的充要条件, 可得

- 两平面夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

由两向量平行和垂直的充要条件, 可得

- 平面$\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

- 两平面夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

由两向量平行和垂直的充要条件, 可得

- 平面$\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$
- 平面$\pi_1 // \pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

- 直线与平面的夹角

▶ 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$，称为直线与平面的夹角.

▶ 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0 \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2})$，称为**直线与平面的夹角**.

- 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

▶ 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$，称为直线与平面的夹角.

- 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

设直线$L: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$,

平面$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0.$

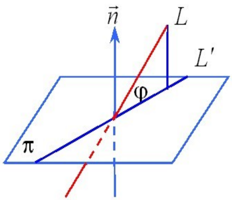
▶ 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2})$，称为**直线与平面的夹角**.

- 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

设直线L : $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$,

平面π : $Ax + By + Cz + D = 0$.



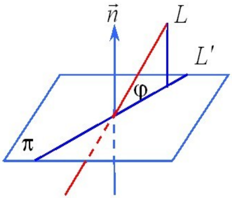
▶ 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0 \le \varphi < \frac{\pi}{2})$，称为直线与平面的夹角.

- 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

设直线$L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$,

平面$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0.$



直线的方向向量为$\vec{a} = \{l, m, n\}$,

平面的法向量为$\vec{n} = \{A, B, C\}$,

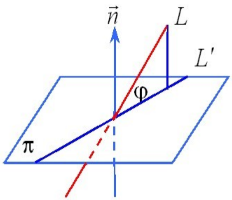
▶ 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0 \le \varphi < \frac{\pi}{2})$，称为直线与平面的夹角.

- 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

设直线$L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$,

平面$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0.$



直线的方向向量为$\vec{a} = \{l, m, n\}$,

平面的法向量为$\vec{n} = \{A, B, C\}$,

设直线与平面的夹角φ,

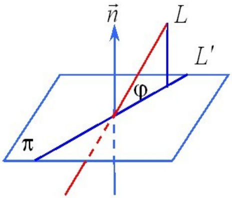
▶ 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$，称为**直线与平面的夹角**.

- 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

设直线$L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$,

平面$\pi: \ Ax+By+Cz+D=0.$



直线的方向向量为$\vec{a} = \{l, m, n\}$,

平面的法向量为$\vec{n} = \{A, B, C\}$,

设直线与平面的夹角φ,

则 $\varphi = \left|\frac{\pi}{2} - (\vec{a}, \vec{n})\right|$.

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a}, \vec{n})|$,

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a},\vec{n})|$，即

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a},\vec{n})|$， 即

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- 直线L与平面π的位置关系如下：

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a},\vec{n})|$，即

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- 直线L与平面π的位置关系如下：

1. $L \perp \pi \iff$

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a},\vec{n})|$，即

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- **直线L与平面π的位置关系如下：**

1. $L \perp \pi \iff \vec{a}//\vec{n} \iff \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}.$

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a},\vec{n})|$，即

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- 直线L与平面π的位置关系如下：

1. $L\perp\pi \iff \vec{a}//\vec{n} \iff \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}.$

2. $L//\pi$(L不在π上) $\iff$

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a},\vec{n})|$，即

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- 直线L与平面π的位置关系如下：

1. $L\perp\pi \iff \vec{a}//\vec{n} \iff \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}.$

2. $L//\pi$(L不在π上) $\iff \begin{cases} Al+Bm+Cn=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0. \end{cases}$

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a}, \vec{n})|$，即

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- 直线L与平面π的位置关系如下：

❶ $L \perp \pi \iff \vec{a} // \vec{n} \iff \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$

❷ $L // \pi$(L不在π上) $\iff \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$

❸ L在π上 $\iff$

故 $\sin\varphi = |\cos(\vec{a},\vec{n})|$，即

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- **直线L与平面π的位置关系如下：**

1. $L \perp \pi \iff \vec{a}//\vec{n} \iff \dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}.$

2. $L//\pi$(L不在π上) $\iff \begin{cases} Al+Bm+Cn = 0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0. \end{cases}$

3. L在π上 $\iff \begin{cases} Al+Bm+Cn = 0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0. \end{cases}$

例1. 求直线$L_1 : \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{-4}$ 和

$L_2 : \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{0}$ 的夹角.

例1. 求直线$L_1 : \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{-4}$ 和

$L_2 : \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{0}$ 的夹角.

解：因为$\vec{a}_1 = \{4, 0, -4\}, \quad \vec{a}_2 = \{-3, -3, 0\},$

例1. 求直线$L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-4}$ 和

$L_2:\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{0}$ 的夹角.

解: 因为$\vec{a}_1=\{4,0,-4\}$, $\quad\vec{a}_2=\{-3,-3,0\}$, 所以

$$\cos\theta$$

例1. 求直线$L_1 : \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{-4}$ 和

$L_2 : \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{0}$ 的夹角.

解: 因为$\vec{a}_1 = \{4, 0, -4\}, \quad \vec{a}_2 = \{-3, -3, 0\}$, 所以

$$\cos\theta = \frac{|-12+0+0|}{\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}}$$

例1. 求直线$L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-4}$ 和

$L_2:\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{0}$ 的夹角.

解: 因为$\vec{a}_1=\{4,0,-4\}$, $\vec{a}_2=\{-3,-3,0\}$, 所以

$$\cos\theta=\frac{|-12+0+0|}{\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

例1. 求直线$L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-4}$ 和

$L_2:\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{0}$ 的夹角.

解: 因为$\vec{a}_1=\{4,0,-4\}$, $\quad \vec{a}_2=\{-3,-3,0\}$, 所以

$$\cos\theta=\frac{|-12+0+0|}{\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

故两直线的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例2. 求两平面$x-y+2z+3=0$ 与$2x+y+z-5=0$ 的夹角.

例2. 求两平面$x-y+2z+3=0$ 与$2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解: $\vec{n}_1=\{1,-1,2\}$, $\vec{n}_2=\{2,1,1\}$,

例2. **求两平面** $x - y + 2z + 3 = 0$ **与** $2x + y + z - 5 = 0$ **的夹角.**

解: $\vec{n}_1 = \{1, -1, 2\}$, $\vec{n}_2 = \{2, 1, 1\}$,

$$\cos\theta = \frac{|2 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}}$$

例2. 求两平面 $x-y+2z+3=0$ 与 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解: $\vec{n}_1=\{1,-1,2\}$, $\vec{n}_2=\{2,1,1\}$,

$$\cos\theta=\frac{|2-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{2},$$

例2. 求两平面$x-y+2z+3=0$ 与$2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解: $\vec{n}_1=\{1,-1,2\}$, $\vec{n}_2=\{2,1,1\}$,

$$\cos\theta=\frac{|2-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}.$$

例3. 确定下列各组方程所表示的直线与平面的位置关系.

(1) $L_1 : \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$, $\pi_1 : 4x - 2y - 2z - 3 = 0.$

例3. 确定下列各组方程所表示的直线与平面的位置关系.

(1) $L_1 : \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$, $\pi_1 : 4x - 2y - 2z - 3 = 0.$

解: 直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1 = \{-2, -7, 3\}$,

例3. 确定下列各组方程所表示的直线与平面的位置关系.

(1) $L_1 : \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$, $\pi_1 : 4x - 2y - 2z - 3 = 0.$

解: 直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1 = \{-2, -7, 3\}$,

平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{4, -2, -2\}$.

例3. 确定下列各组方程所表示的直线与平面的位置关系.

(1) $L_1 : \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$, $\pi_1 : 4x - 2y - 2z - 3 = 0.$

解: 直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1 = \{-2, -7, 3\}$,

平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{4, -2, -2\}$.

$\because\ \vec{a}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0,$

例3. 确定下列各组方程所表示的直线与平面的位置关系.

(1) $L_1: \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$, $\pi_1: 4x - 2y - 2z - 3 = 0.$

解: 直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1 = \{-2, -7, 3\}$,

平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{4, -2, -2\}$.

$\because\ \vec{a}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0,\ \therefore\ \vec{a}_1 \perp \vec{n}_1.$

例3. 确定下列各组方程所表示的直线与平面的位置关系.

(1) $L_1 : \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$ ， $\pi_1 : 4x - 2y - 2z - 3 = 0.$

解：直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1 = \{-2, -7, 3\}$,

平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{4, -2, -2\}$.

$\because\ \vec{a}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0,\ \therefore\ \vec{a}_1 \perp \vec{n}_1.$

又因为直线L_1 上的点$M(-3, -4, 0)$ 不在平面π_1上,

例3. 确定下列各组方程所表示的直线与平面的位置关系.

(1) $L_1 : \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-7} = \dfrac{z}{3}$, $\pi_1 : 4x - 2y - 2z - 3 = 0.$

解：直线L_1的方向向量为$\vec{a}_1 = \{-2, -7, 3\}$,

平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{4, -2, -2\}$.

$\because\ \vec{a}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0, \ \therefore\ \vec{a}_1 \perp \vec{n}_1.$

又因为直线L_1 上的点$M(-3, -4, 0)$ 不在平面π_1上,

所以直线$L_1 // $平面$\pi_1$.

(2) $L_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2 : x + 3y - 9z - 28 = 0.$

(2) $L_2: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2: x + 3y - 9z - 28 = 0.$

解: 直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2 = \{3, 2, 1\}$,

(2) $L_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2 : x + 3y - 9z - 28 = 0.$

解: 直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2 = \{3, 2, 1\}$,

平面π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 3, -9\}$.

(2) $L_2: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2: x + 3y - 9z - 28 = 0.$

解：直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2 = \{3, 2, 1\}$,

平面π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 3, -9\}$.

$\because\ \vec{a}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0,$

(2) $L_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2 : x + 3y - 9z - 28 = 0.$

解: 直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2 = \{3, 2, 1\}$,

平面π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 3, -9\}$.

$\because\ \vec{a}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0,\ \therefore\ \vec{a}_2 \perp \vec{n}_2.$

(2) $L_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2: x+3y-9z-28=0.$

解：直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2=\{3,2,1\}$，

平面π_2的法向量为$\vec{n}_2=\{1,3,-9\}$.

$\because\ \vec{a}_2\cdot\vec{n}_2=0,\ \therefore\ \vec{a}_2\perp\vec{n}_2.$

又因为直线L_2上的点$M(-2,1,-3)$满足平面π_2的方程，

(2) $L_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2 : x + 3y - 9z - 28 = 0.$

解：直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2 = \{3, 2, 1\}$，

平面π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 3, -9\}$.

$\because \ \vec{a}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0, \ \therefore \ \vec{a}_2 \perp \vec{n}_2.$

又因为直线L_2上的点$M(-2, 1, -3)$满足平面π_2的方程，

所以点M在平面π_2上，

(2) $L_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$, $\pi_2 : x + 3y - 9z - 28 = 0.$

解：直线L_2的方向向量为$\vec{a}_2 = \{3, 2, 1\}$，

平面π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 3, -9\}$.

$\because \ \vec{a}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0, \ \therefore \ \vec{a}_2 \perp \vec{n}_2.$

又因为直线L_2上的点$M(-2, 1, -3)$满足平面π_2的方程，

所以点M在平面π_2上，即直线L_2在平面π_2上.

$$(3)\ L_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3},\ \pi_3: 8x+4y-6z-11=0.$$

(3) $L_3 : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$, $\pi_3 : 8x + 4y - 6z - 11 = 0.$

解：直线L_3的方向向量为$\vec{a}_3 = \{4, 2, -3\}$，

(3) $L_3 : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$, $\pi_3 : 8x + 4y - 6z - 11 = 0.$

解：直线L_3的方向向量为$\vec{a}_3 = \{4, 2, -3\}$,

平面π_3的法向量为$\vec{n}_3 = \{8, 4, -6\}$.

(3) $L_3 : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$, $\pi_3 : 8x + 4y - 6z - 11 = 0.$

解：直线L_3的方向向量为$\vec{a}_3 = \{4, 2, -3\}$,

平面π_3的法向量为$\vec{n}_3 = \{8, 4, -6\}$.

$\because\ \vec{a}_3 // \vec{n}_3,$

(3) $L_3: \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$, $\pi_3: 8x+4y-6z-11=0.$

解: 直线L_3的方向向量为$\vec{a}_3 = \{4, 2, -3\}$,

平面π_3的法向量为$\vec{n}_3 = \{8, 4, -6\}$.

$\because\ \vec{a}_3 // \vec{n}_3$,

$\therefore$ 直线$L_3 \perp$平面π_3.

2. 空间两直线的位置关系

2. 空间两直线的位置关系

设有直线 $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$,

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

则有: 点$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$, 点$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$.

2. 空间两直线的位置关系

设有直线 $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$,

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

则有: 点$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$, 点$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$.

$\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$为$L_1$的方向向量,

$\vec{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$为$L_2$的方向向量.

2. 空间两直线的位置关系

设有直线 $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$,

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

则有: 点$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$, 点$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$.

$\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$为$L_1$的方向向量,

$\vec{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$为$L_2$的方向向量.

- 直线L_1和L_2的位置关系如下:

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2$

两直线的位置关系

- $L_1//L_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1//\vec{a}_2$

两直线的位置关系

- $L_1//L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1//\vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2};$

两直线的位置关系

- $L_1//L_2 \ \Leftrightarrow\ \vec{a}_1//\vec{a}_2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1 \perp L_2$

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;

两直线的位置关系

- $L_1//L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1//\vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1\perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1\perp\vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$;
- L_1与L_2共面

两直线的位置关系

- $L_1//L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1//\vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2};$
- $L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$
- L_1与L_2共面 $\Leftrightarrow$ 向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$共面

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;
- L_1与L_2共面 $\Leftrightarrow$ 向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}$共面

$$\Leftrightarrow \; [\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0;$$

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;
- L_1与L_2共面 $\Leftrightarrow$ 向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$共面

$$\Leftrightarrow [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0;$$

- L_1与L_2异面

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2};$
- $L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$
- L_1与L_2共面 $\Leftrightarrow$ 向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$共面

$$\Leftrightarrow\; [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0;$$

- L_1与L_2异面 $\Leftrightarrow [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq 0;$

两直线的位置关系

- $L_1//L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1//\vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2};$
- $L_1\perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1\perp\vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$
- L_1与L_2共面 $\Leftrightarrow$ 向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$共面

$$\Leftrightarrow\; [\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a}_1,\vec{a}_2]=0;$$

- L_1与L_2异面 $\Leftrightarrow [\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a}_1,\vec{a}_2]\neq 0;$
- L_1与L_2相交

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;
- L_1与L_2共面 $\Leftrightarrow$ 向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}$共面

$$\Leftrightarrow\; [\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0;$$

- L_1与L_2异面 $\Leftrightarrow [\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq 0$;
- L_1与L_2相交 $\Leftrightarrow$ L_1与L_2共面且L_1不平行于L_2

两直线的位置关系

- $L_1 // L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;
- $L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \;\Leftrightarrow\; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;
- L_1与L_2共面 $\Leftrightarrow$ 向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$共面

$$\Leftrightarrow \; [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0;$$

- L_1与L_2异面 $\Leftrightarrow [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq 0$;
- L_1与L_2相交 $\Leftrightarrow$ L_1与L_2共面且L_1不平行于L_2

$$\Leftrightarrow \; [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0 \text{ 且 } \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}.$$

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$和

$$L_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$ 都相交，求直线L的方程.

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 和 $L_2:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交，求直线L的方程.

解：设直线L的方程为$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$,

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 和

$L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交，求直线L的方程.

解：设直线L的方程为$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$,

L与L_1共面$\Rightarrow$

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 和 $L_2:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交, 求直线L的方程.

解: 设直线L的方程为$\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n}$,

$$L\text{与}L_1\text{共面}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = l-2m+n=0,$$

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 和 $L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交，求直线L的方程.

解：设直线L的方程为$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$,

$$L\text{与}L_1\text{共面}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = l-2m+n=0,$$

L与L_2共面$\Rightarrow$

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 和 $L_2:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交，求直线L的方程.

解：设直线L的方程为$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$,

$$L\text{与}L_1\text{共面}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = l-2m+n=0,$$

$$L\text{与}L_2\text{共面}\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 2l+4m-2n=0,$$

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$和$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$都相交，求直线$L$的方程.

解：设直线L的方程为$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$,

$$L与L_1共面\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\l&m&n\end{vmatrix}=l-2m+n=0,$$

$$L与L_2共面\Rightarrow\begin{vmatrix}0&1&2\\2&1&4\\l&m&n\end{vmatrix}=2l+4m-2n=0,$$

解得$l=0,n=2m$.

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 和

$L_2:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交，求直线L的方程.

解：设直线L的方程为$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$,

$$L\text{与}L_1\text{共面}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\l&m&n\end{vmatrix}=l-2m+n=0,$$

$$L\text{与}L_2\text{共面}\Rightarrow\begin{vmatrix}0&1&2\\2&1&4\\l&m&n\end{vmatrix}=2l+4m-2n=0,$$

解得$l=0, n=2m$. 故L的方程为$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{2m}$,

例4. 直线L过点$A(1,1,1)$且与直线$L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 和 $L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交，求直线L的方程.

解：设直线L的方程为$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{n}$,

$$L\text{与}L_1\text{共面}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = l-2m+n=0,$$

$$L\text{与}L_2\text{共面}\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 2l+4m-2n=0,$$

解得$l=0, n=2m$. 故L的方程为$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{m}=\dfrac{z-1}{2m}$,

即 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

3. 距离

3. 距离

- **点到平面的距离**

3. 距离

▶ 点到平面的距离

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外的一点，求P_0到这个平面的距离d.

3. 距离

▶ 点到平面的距离

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外的一点，求P_0到这个平面的距离d.

解：在平面上任取一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$,

3. 距离

▶ 点到平面的距离

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外的一点，求P_0到这个平面的距离d.

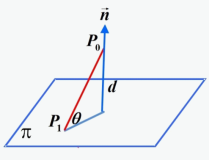
解：在平面上任取一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$,

设平面的法向量$\vec{n}$与向量$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角为θ,

3. 距离

▶ 点到平面的距离

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外的一点，求P_0到这个平面的距离d.



解：在平面上任取一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$,

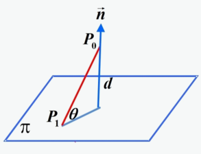
设平面的法向量$\vec{n}$与向量$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角为θ,

则从点P_0到平面的距离等于$\overrightarrow{P_1P_0}$在法向量$\vec{n}$上的投影的绝对值,

3. 距离

▶ 点到平面的距离

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外的一点，求P_0到这个平面的距离d.



解：在平面上任取一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$,

设平面的法向量$\vec{n}$与向量$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角为θ,

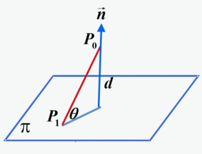
则从点P_0到平面的距离等于$\overrightarrow{P_1P_0}$在法向量$\vec{n}$上的投影的绝对值,

即 $d=|\overrightarrow{P_1P_0}|\cdot|\cos\theta|$,

3. 距离

▶ 点到平面的距离

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外的一点，求P_0到这个平面的距离d.



解：在平面上任取一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$,

设平面的法向量$\vec{n}$与向量$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角为θ,

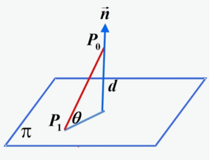
则从点P_0到平面的距离等于$\overrightarrow{P_1P_0}$在法向量$\vec{n}$上的投影的绝对值,

即 $d = |\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\cos\theta|$, 因为 $|\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\cos\theta| \cdot |\vec{n}| = |\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|$,

3. 距离

▶ 点到平面的距离

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外的一点，求P_0到这个平面的距离d.



解：在平面上任取一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$,

设平面的法向量$\vec{n}$与向量$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角为θ,

则从点P_0到平面的距离等于$\overrightarrow{P_1P_0}$在法向量$\vec{n}$上的投影的绝对值,

即 $d = |\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\cos\theta|$, 因为 $|\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\cos\theta| \cdot |\vec{n}| = |\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|$,

所以 $d = |\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\cos\theta| = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|}$

即 $d = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|}$

即 $d = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_0}|}{|\vec{n}|}$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

即 $d = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_0}|}{|\vec{n}|}$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

由$P_1(x_1, y_1, z_1)$在平面上知$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$,

即 $d=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|}$

$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

由$P_1(x_1,y_1,z_1)$在平面上知$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$,

于是点到平面的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

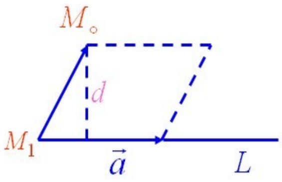
- 点到直线的距离

▶ 点到直线的距离

设$M_0(x_0, y_0, z_0)$为直线L外一点，L的方向向量为$\vec{a}$，求M_0到L的距离d.

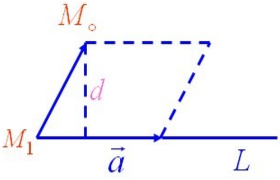
▶ 点到直线的距离

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为直线L外一点，L的方向向量为$\vec{a}$，求M_0到L的距离d.



▶ 点到直线的距离

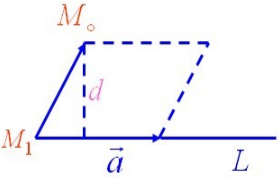
设$M_0(x_0, y_0, z_0)$为直线L外一点，L的方向向量为$\vec{a}$，求M_0到L的距离d.



解：在L上任取一点$M_1(x_1, y_1, z_1)$,

▶ 点到直线的距离

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为直线L外一点，L的方向向量为$\vec{a}$，求M_0到L的距离d.

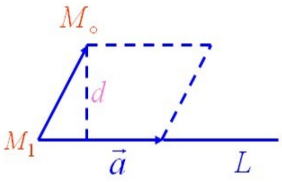


解：在L上任取一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，

以$\overrightarrow{M_1M_0}$和$\vec{a}$为边的平行四边形的面积为$|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{a}|$，

▶ 点到直线的距离

设$M_0(x_0, y_0, z_0)$为直线L外一点，L的方向向量为$\vec{a}$，求M_0到L的距离d.



解：在L上任取一点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，

以$\overrightarrow{M_1M_0}$和$\vec{a}$为边的平行四边形的面积为$|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{a}|$，

则点到直线的距离为 $d = \dfrac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$.

- 两异面直线的距离

- **两异面直线的距离**

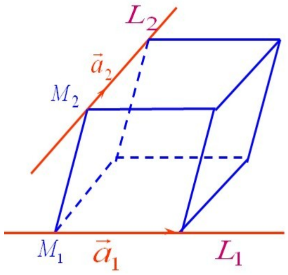
设L_1, L_2为两异面直线, 方向向量分别为$\vec{a}_1, \vec{a}_2$,

M_1, M_2 分别为L_1, L_2 上的两点,

▶ 两异面直线的距离

设L_1, L_2为两异面直线, 方向向量分别为$\vec{a}_1, \vec{a}_2$,

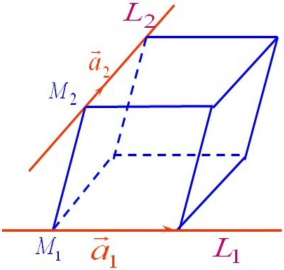
M_1, M_2 分别为L_1, L_2 上的两点,



▶ 两异面直线的距离

设L_1, L_2为两异面直线, 方向向量分别为$\vec{a}_1, \vec{a}_2$,

M_1, M_2 分别为L_1, L_2 上的两点,

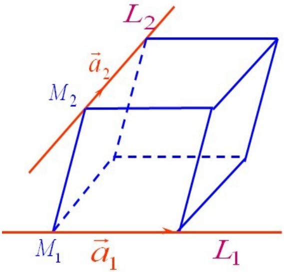


则 $d = \dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$

▶ 两异面直线的距离

设L_1, L_2为两异面直线, 方向向量分别为$\vec{a}_1, \vec{a}_2$,

M_1, M_2 分别为L_1, L_2 上的两点,



则 $$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}$$

$$=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}.$$

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解: L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1 = \{4, 1, -1\}, \vec{a}_2 = \{2, 0, -1\}$,

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解：L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\}, \vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=$

例5. 求两异面直线$L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解：L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\}, \vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

例5. 求两异面直线$L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解: L_1,L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\},\vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

因为$M_1(3,3,-1)\in L_1, M_2(0,0,-2)\in L_2$, 所以

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解: L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\}, \vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

因为$M_1(3,3,-1)\in L_1, M_2(0,0,-2)\in L_2$, 所以

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,-3,-1\}$,

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解: L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\}, \vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

因为$M_1(3,3,-1)\in L_1, M_2(0,0,-2)\in L_2$, 所以

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,-3,-1\}$, 于是两异面直线的距离为:

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解: L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\}, \vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

因为$M_1(3,3,-1)\in L_1, M_2(0,0,-2)\in L_2$, 所以

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,-3,-1\}$, 于是两异面直线的距离为:

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}$$

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解: L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\}, \vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

因为$M_1(3,3,-1)\in L_1, M_2(0,0,-2)\in L_2$, 所以

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,-3,-1\}$, 于是两异面直线的距离为:

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}=\frac{|(-3)\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+(-1)\cdot(-2)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}$$

例5. 求两异面直线$L_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

$L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-1}$之间的距离$d$及公垂线$L$的方程.

解: L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{a}_1=\{4,1,-1\}, \vec{a}_2=\{2,0,-1\}$,

于是$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

因为$M_1(3,3,-1)\in L_1, M_2(0,0,-2)\in L_2$, 所以

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,-3,-1\}$, 于是两异面直线的距离为:

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}=\frac{|(-3)\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+(-1)\cdot(-2)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a} =$

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \{-1, 2, -2\}$,

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \{-1, 2, -2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$,

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \{-1, 2, -2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

$$\vec{n}_1 = \vec{a} \times \vec{a}_1 = \{-1, 2, -2\} \times \{4, 1, -1\}$$

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

$$\vec{n}_1=\vec{a}\times\vec{a}_1=\{-1,2,-2\}\times\{4,1,-1\}=\{0,-9,-9\}//\{0,1,1\},$$

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

$\vec{n}_1=\vec{a}\times\vec{a}_1=\{-1,2,-2\}\times\{4,1,-1\}=\{0,-9,-9\}//\{0,1,1\}$,

$\vec{n}_2=\vec{a}\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}\times\{2,0,-1\}$

由题意知，公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$，

设L与L_1所确定的平面为π_1，法向量为$\vec{n}_1$，

L与L_2所确定的平面为π_2，法向量为$\vec{n}_2$，于是有

$$\vec{n}_1=\vec{a}\times\vec{a}_1=\{-1,2,-2\}\times\{4,1,-1\}=\{0,-9,-9\}//\{0,1,1\},$$

$$\vec{n}_2=\vec{a}\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}\times\{2,0,-1\}=\{-2,-5,-4\},$$

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

$\vec{n}_1=\vec{a}\times\vec{a}_1=\{-1,2,-2\}\times\{4,1,-1\}=\{0,-9,-9\}//\{0,1,1\}$,

$\vec{n}_2=\vec{a}\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}\times\{2,0,-1\}=\{-2,-5,-4\}$,

又因为$M_1(3,3,-1)\in\pi_1$, $M_2(0,0,-2)\in\pi_2$,

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

$\vec{n}_1=\vec{a}\times\vec{a}_1=\{-1,2,-2\}\times\{4,1,-1\}=\{0,-9,-9\}//\{0,1,1\}$,

$\vec{n}_2=\vec{a}\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}\times\{2,0,-1\}=\{-2,-5,-4\}$,

又因为$M_1(3,3,-1)\in\pi_1$, $M_2(0,0,-2)\in\pi_2$,

所以两个平面的方程分别为:

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

$\vec{n}_1=\vec{a}\times\vec{a}_1=\{-1,2,-2\}\times\{4,1,-1\}=\{0,-9,-9\}//\{0,1,1\}$,

$\vec{n}_2=\vec{a}\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}\times\{2,0,-1\}=\{-2,-5,-4\}$,

又因为$M_1(3,3,-1)\in\pi_1$, $M_2(0,0,-2)\in\pi_2$,

所以两个平面的方程分别为:

$\pi_1:\ 0\cdot(x-3)+1\cdot(y-3)+1\cdot(z+1)=0$, 即$y+z-2=0$,

由题意知, 公垂线L的方向向量$\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}$,

设L与L_1所确定的平面为π_1, 法向量为$\vec{n}_1$,

L与L_2所确定的平面为π_2, 法向量为$\vec{n}_2$, 于是有

$\vec{n}_1=\vec{a}\times\vec{a}_1=\{-1,2,-2\}\times\{4,1,-1\}=\{0,-9,-9\}//\{0,1,1\}$,

$\vec{n}_2=\vec{a}\times\vec{a}_2=\{-1,2,-2\}\times\{2,0,-1\}=\{-2,-5,-4\}$,

又因为$M_1(3,3,-1)\in\pi_1$, $M_2(0,0,-2)\in\pi_2$,

所以两个平面的方程分别为:

$\pi_1:\ 0\cdot(x-3)+1\cdot(y-3)+1\cdot(z+1)=0$, 即$y+z-2=0$,

$\pi_2:\ -2\cdot(x-0)-5\cdot(y-0)-4\cdot(z+2)=0$,

即$2x+5y+4z+8=0$,

因为公垂线L满足$L = \pi_1 \cap \pi_2$,

因为公垂线L满足$L=\pi_1\cap\pi_2$,

所以所求的公垂线方程为 $\begin{cases} y+z-2=0, \\ 2x+5y+4z+8=0. \end{cases}$

因为公垂线L满足$L=\pi_1\cap\pi_2$,

所以所求的公垂线方程为 $\begin{cases} y+z-2=0, \\ 2x+5y+4z+8=0. \end{cases}$

法二 将L_2化为参数方程 $\begin{cases} x=2t, \\ y=0, \\ z=-2-t \end{cases}$, 代入平面$\pi_1$的方程,

因为公垂线L满足$L=\pi_1\cap\pi_2$,

所以所求的公垂线方程为 $\begin{cases} y+z-2=0, \\ 2x+5y+4z+8=0. \end{cases}$

法二 将L_2化为参数方程 $\begin{cases} x=2t, \\ y=0, \\ z=-2-t \end{cases}$, 代入平面$\pi_1$的方程,

可得 $0+(-2-t)-2=0$, 求解得$t=-4$,

因为公垂线L满足$L=\pi_1\cap\pi_2$,

所以所求的公垂线方程为 $\begin{cases} y+z-2=0, \\ 2x+5y+4z+8=0. \end{cases}$

法二 将L_2化为参数方程 $\begin{cases} x=2t, \\ y=0, \\ z=-2-t \end{cases}$, 代入平面π_1的方程,

可得 $0+(-2-t)-2=0$, 求解得$t=-4$, 将$t=4$代入L_2的方程

因为公垂线L满足$L=\pi_1\cap\pi_2$,

所以所求的公垂线方程为 $\begin{cases} y+z-2=0, \\ 2x+5y+4z+8=0. \end{cases}$

法二 将L_2化为参数方程 $\begin{cases} x=2t, \\ y=0, \\ z=-2-t \end{cases}$, 代入平面$\pi_1$的方程,

可得 $0+(-2-t)-2=0$, 求解得$t=-4$, 将$t=4$代入L_2的方程

可以得到L_2和平面π_1的交点$A(-8,0,2)$,

因为公垂线L满足$L=\pi_1\cap\pi_2$,

所以所求的公垂线方程为 $\begin{cases} y+z-2=0, \\ 2x+5y+4z+8=0. \end{cases}$

法二 将L_2化为参数方程 $\begin{cases} x=2t, \\ y=0, \\ z=-2-t \end{cases}$, 代入平面$\pi_1$的方程,

可得 $0+(-2-t)-2=0$, 求解得$t=-4$, 将$t=4$代入L_2的方程

可以得到L_2和平面π_1的交点$A(-8,0,2)$,

因为点A也在公垂线L上, 所以可以求得L的方程为:

因为公垂线L满足$L=\pi_1\cap\pi_2$,

所以所求的公垂线方程为 $\begin{cases} y+z-2=0, \\ 2x+5y+4z+8=0. \end{cases}$

法二 将L_2化为参数方程 $\begin{cases} x=2t, \\ y=0, \\ z=-2-t \end{cases}$, 代入平面$\pi_1$的方程,

可得 $0+(-2-t)-2=0$, 求解得$t=-4$, 将$t=4$代入L_2的方程

可以得到L_2和平面π_1的交点$A(-8,0,2)$,

因为点A也在公垂线L上, 所以可以求得L的方程为:

$$\frac{x+8}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-2}.$$

4. 直线与平面的交点

4. 直线与平面的交点

设直线L的参数方程是

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

4. 直线与平面的交点

设直线L的参数方程是

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

平面π的方程是

4. 直线与平面的交点

设直线L的参数方程是

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

平面π的方程是

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

4. 直线与平面的交点

设直线L的参数方程是

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

平面π的方程是

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

则直线与平面的交点的坐标必须同时满足这两个方程,

4. 直线与平面的交点

设直线L的参数方程是

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

平面π的方程是

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

则直线与平面的交点的坐标必须同时满足这两个方程，即

$$(Al + Bm + Cn)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0,$$

4. 直线与平面的交点

设直线L的参数方程是

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

平面π的方程是

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

则直线与平面的交点的坐标必须同时满足这两个方程, 即

$$(Al + Bm + Cn)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0,$$

于是有以下结论:

- 若$Al+Bm+Cn\neq 0$ (即直线与平面不平行),

- 若$Al+Bm+Cn\neq 0$ (即直线与平面不平行),

  则可解得 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$,

- 若$Al+Bm+Cn\neq 0$ (即直线与平面不平行),

则可解得 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$,

将t值代入直线方程, 即得直线与平面的交点坐标.

- 若$Al+Bm+Cn\neq 0$ (即直线与平面不平行),

  则可解得 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$,

  将t值代入直线方程, 即得直线与平面的交点坐标.

- 若$Al+Bm+Cn=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$,

- 若$Al+Bm+Cn\neq 0$ (即直线与平面不平行),

  则可解得 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$,

  将t值代入直线方程, 即得直线与平面的交点坐标.

- 若$Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$,

  则直线与平面平行, 且点(x_0,y_0,z_0)不在平面上, 故没有交点.

- 若$Al+Bm+Cn\neq 0$ (即直线与平面不平行),

  则可解得 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$,

  将t值代入直线方程, 即得直线与平面的交点坐标.

- 若$Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$,

  则直线与平面平行, 且点(x_0,y_0,z_0)不在平面上, 故没有交点.

- 若$Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$,

- 若$Al+Bm+Cn\neq 0$ (即直线与平面不平行),

  则可解得 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$,

  将t值代入直线方程, 即得直线与平面的交点坐标.

- 若$Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$,

  则直线与平面平行, 且点(x_0,y_0,z_0)不在平面上, 故没有交点.

- 若$Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$,

  则直线在平面上, 此时直线上的所有点都是交点.

例6. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的交点.

例6. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的交点.

解：将所给直线方程化为参数方程

例6. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的交点.

解：将所给直线方程化为参数方程

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t,$$

例6. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的交点.

解: 将所给直线方程化为参数方程

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t,$$

将它代入已知平面方程中, 得

例6. 求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x-y+z-6=0$ 的交点.

解：将所给直线方程化为参数方程

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t,$$

将它代入已知平面方程中，得

$$2(2+t)-(3+t)+(4+2t)-6=0,$$

例6. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$ 的交点.

解: 将所给直线方程化为参数方程

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t,$$

将它代入已知平面方程中, 得

$$2(2+t)-(3+t)+(4+2t)-6=0,$$

解得$t=\dfrac{1}{3}$, 从而得到

例6. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的交点.

解：将所给直线方程化为参数方程

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t,$$

将它代入已知平面方程中, 得

$$2(2+t)-(3+t)+(4+2t)-6=0,$$

解得$t=\dfrac{1}{3}$，从而得到

$$x=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\quad y=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3},\quad z=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3},$$

例6. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$

的交点.

解：将所给直线方程化为参数方程

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t,$$

将它代入已知平面方程中，得

$$2(2+t)-(3+t)+(4+2t)-6=0,$$

解得$t=\dfrac{1}{3}$，从而得到

$$x=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\quad y=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3},\quad z=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3},$$

即交点的坐标为$\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3},\dfrac{14}{3}\right)$.

5. 过直线的平面束

5. 过直线的平面束

平面束 通过定直线的所有平面的集合.

5. 过直线的平面束

平面束 通过定直线的所有平面的集合.

设直线L的方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

5. 过直线的平面束

平面束　通过定直线的所有平面的集合.

设直线L的方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

则过L的平面束为

5. 过直线的平面束

平面束 通过定直线的所有平面的集合.

设直线L的方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

则过L的平面束为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

5. 过直线的平面束

平面束 通过定直线的所有平面的集合.

设直线L的方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

则过L的平面束为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中$\lambda^2+\mu^2\neq 0$.

5. 过直线的平面束

平面束 通过定直线的所有平面的集合.

设直线L的方程为$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

则过L的平面束为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中$\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

- 若$\lambda = 1, \mu = 0$, 即为平面$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$;

5. 过直线的平面束

平面束 通过定直线的所有平面的集合.

设直线L的方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

则过L的平面束为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中$\lambda^2+\mu^2\neq 0$.

- 若$\lambda=1, \mu=0$, 即为平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$;
- 若$\lambda=0, \mu=1$, 即为平面$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$在平面

$\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$在平面

$\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解：设过直线L的平面束方程为

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解: 设过直线L的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0,$$

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解: 设过直线L的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0,$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z+(-\lambda+\mu)=0,$

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解：设过直线L的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0,$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z+(-\lambda+\mu)=0,$

设在平面束中与平面π垂直的平面为π_1, 则平面π与平面π_1的交线即为投影直线L_1,

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$ 在平面

$\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解: 设过直线L的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0,$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z+(-\lambda+\mu)=0,$

设在平面束中与平面π垂直的平面为π_1, 则平面π与平面π_1的交线即为投影直线L_1,

由$\pi\perp\pi_1$ 得 $(\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 2+(\mu-\lambda)\cdot(-1)=0,$

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$在平面

$\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解：设过直线L的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0,$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z+(-\lambda+\mu)=0,$

设在平面束中与平面π垂直的平面为π_1, 则平面π与平面π_1的交线即为投影直线L_1,

由$\pi \perp \pi_1$ 得 $(\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 2+(\mu-\lambda)\cdot(-1)=0,$

从而$\mu=2\lambda,$

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$ 在平面

$\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解: 设过直线L的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0,$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z+(-\lambda+\mu)=0,$

设在平面束中与平面π垂直的平面为π_1, 则平面π与平面π_1的交线即为投影直线L_1,

由$\pi\perp\pi_1$ 得 $(\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 2+(\mu-\lambda)\cdot(-1)=0,$

从而$\mu=2\lambda$, 故平面π_1的方程为$3x-y+z+1=0.$

例7. 求直线$L:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$ 在平面

$\pi: x+2y-z+5=0$上的投影直线L_1的方程.

解：设过直线L的平面束方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0,$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z+(-\lambda+\mu)=0,$

设在平面束中与平面π垂直的平面为π_1, 则平面π与平面π_1的交线即为投影直线L_1,

由$\pi\perp\pi_1$ 得 $(\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 2+(\mu-\lambda)\cdot(-1)=0,$

从而$\mu=2\lambda$, 故平面π_1的方程为$3x-y+z+1=0.$

$\therefore$ 投影直线L_1的方程为$\begin{cases} 3x-y+z+1=0, \\ x+2y-z+5=0. \end{cases}$

例8. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$，且与已知平面 $x-4y-8z+12=0$ 成45°角的平面方程.

例8. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$，且与已知平面 $x-4y-8z+12=0$ 成$45°$角的平面方程.

解: 设所求平面的方程为$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$,

例8. 求过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$ ，且与已知平面

$x-4y-8z+12=0$ 成 $45°$ 角的平面方程.

解: 设所求平面的方程为 $(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$,

其法向量为 $\vec{n}_1=\{1+\lambda, 5, 1-\lambda\}$,

例8. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$，且与已知平面

$x-4y-8z+12=0$ 成45°角的平面方程.

解: 设所求平面的方程为$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{1+\lambda, 5, 1-\lambda\}$,

已知平面的法向量为$\vec{n}_2=\{1,-4,-8\}$,

例8. 求过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$ ，且与已知平面

$x-4y-8z+12=0$ 成$45°$角的平面方程.

解: 设所求平面的方程为$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$,

已知平面的法向量为$\vec{n}_2=\{1,-4,-8\}$,

依题意有

例8. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$，且与已知平面

$x-4y-8z+12=0$ 成45°角的平面方程.

解: 设所求平面的方程为$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$,

已知平面的法向量为$\vec{n}_2=\{1,-4,-8\}$,

依题意有

$$\cos 45^\circ$$

例8. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$，且与已知平面

$x-4y-8z+12=0$ 成45°角的平面方程.

解: 设所求平面的方程为$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$,

已知平面的法向量为$\vec{n}_2=\{1,-4,-8\}$,

依题意有

$$\cos 45^\circ = \pm\frac{1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

例8. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$，且与已知平面

$x-4y-8z+12=0$ 成45°角的平面方程.

解: 设所求平面的方程为$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$,

已知平面的法向量为$\vec{n}_2=\{1,-4,-8\}$,

依题意有

$$\cos 45^\circ=\pm\frac{1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

(分子大于零时，取“$+$”，分子小于零时，取“$-$”),

依题意有

$$\cos 45^\circ = \pm \frac{1 \times (1+\lambda) - 4 \times 5 - 8 \times (1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + 5^2 + (1-\lambda)^2} \cdot \sqrt{1 + (-4)^2 + (-8)^2}}$$

(分子大于零时，取“$+$”，分子小于零时，取“$-$”)，

依题意有

$$\cos 45^\circ = \pm\frac{1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

(分子大于零时，取“$+$”，分子小于零时，取“$-$”),

即 $$\pm\frac{\lambda-3}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

依题意有

$$\cos 45^\circ = \pm\frac{1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

(分子大于零时，取“$+$”，分子小于零时，取“$-$”)，

即 $\pm\dfrac{\lambda-3}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 由此解得$\lambda=-\dfrac{3}{4}$,

依题意有

$$\cos 45^\circ = \pm\frac{1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

(分子大于零时，取“+”，分子小于零时，取“−”)，

即 $\pm\dfrac{\lambda-3}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，由此解得$\lambda=-\dfrac{3}{4}$，

故所求平面方程为 $(x+5y+z)-\dfrac{3}{4}(x-z+4)=0$，

依题意有

$$\cos 45^\circ = \pm\frac{1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

(分子大于零时，取“+”，分子小于零时，取“−”)，

即 $\pm\dfrac{\lambda-3}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，由此解得$\lambda=-\dfrac{3}{4}$，

故所求平面方程为 $(x+5y+z)-\dfrac{3}{4}(x-z+4)=0$，

即 $x+20y+7z-12=0.$