第六章　三重积分习题课

贺 丹 （东南大学）

积分定限问题

1. (多选)下面累次积分_____与三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$ 相等, 其中Ω

由 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕z 轴旋转一周所生成的曲面与$z=2, z=8$ 所围成.

(1) $\displaystyle\int_2^8 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 \mathrm{d}\rho$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_2^4 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_2^4 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \mathrm{d}z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_2^8 \mathrm{d}z$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^4 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \mathrm{d}z - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \rho^3 \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 \mathrm{d}z$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\arctan\frac{1}{2}} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta \int_{2\sec\theta}^{8\sec\theta} r^4 \mathrm{d}r +$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta \int_{2\sec\theta}^{2\csc\theta\cot\theta} r^4 \mathrm{d}r$$

2. 将积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为球面坐标和柱面坐标系下的三次积分, 其中Ω由$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$和$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$围成.

3. 将积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$化为柱面和球面坐标系下的三次积分.

选择合适的积分方法来求解三重积分

1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$由三个坐标面和平面$x+y+z=1$所围.

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (2x+3y+4z)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$同上题.

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (2x+3y+4z)\mathrm{d}V$,

其中Ω为曲面$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$与$z=0$所围.

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$由曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周所得的曲线与平面$z=2, z=8$所围.

5. 计算$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z$.

6. 计算$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(作业题)

被积函数有绝对值的问题及特殊的换元变换

1. 计算$\iiint\limits_{\Omega}|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1|\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围成.

2. 设$\Omega=\{(x,y,z)|(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant R^2\}$, 计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V. \qquad \text{(课堂例题)}$$

3. 计算$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V$, 其中$\Omega: x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2\ (0\leqslant z\leqslant 1)$.

4. 求曲面$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^2=ax\ (a,b,c>0)$所围区域的体积.

1. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^5}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

2.设$I(R)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

且$f\in C[0,+\infty)$, 则当$R\to 0^+$时, $I(R)$ [ ]

(A) 是R的一阶无穷小 (B) 是R的二阶无穷小

(C) 是R的三阶无穷小 (D) 至少是R的三阶无穷小

3. 设 $\Omega_n=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant n^2, n\in\mathbf{N}_+\}$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint\limits_{\Omega_n}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\mathrm{d}V,$$

其中$[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]$表示不超过$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的最大整数.

4. 设函数$f(u)$满足: $f(0)=0, f'(0)=1$,

$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 2tz\}$, 计算极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{t^5}.$$

证明题

1. 设$f \in C_{[0,a]}$, **证明**:

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)\mathrm{d}z.$$

2. **(练习) 计算**$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z.$

练习

1. 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}V$，其中$\Omega$为坐标面 $x=0,$ $y=0, z=0$ 及平面 $x+y+z=1$ 所围成的区域.

2. 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}V$，其中$\Omega$ 是由坐标面$x=0,$ $y=0,\ z=0$ 与平面$x+y+z=1$ 所围成的区域.

3. 求 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(4x-y+z)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$为由曲线$\left\{\begin{array}{l} y^2=2z \\ x=0 \end{array}\right.$ 绕z轴旋转一周所得曲线与$z=4$所围区域.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面 $z=0, z=a\,(a>0), y=0$ 所围成的区域.

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{\mathrm{d}V}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中$\Omega$分别为:

(1) 由曲面$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}, z=1, y=0$围成的 $y\geqslant 0$部分.

(2) 由曲面$z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}, z=1, y=0$围成的 $y\geqslant 0$部分.