NP完全问题

东南大学计算机学院 方效林

本章内容

- NP问题
- NP完全问题
- NP完全问题证明方法

NP问题

- **P问题 (Polynomial)**
  - 多项式时间可解的问题
    - 多项式时间：O(n), O(logn), $O(n^c)$
    - 非多项式时间：$O(2^n)$, O(n!)
- **NP问题 (Non-Deterministic Polynomial)**
  - 多项式时间可验证一个解的问题

所有NP问题都是判定问题，回答yes或no

NP问题

- 3CNF-SAT问题
  - 给定n个布尔变元，子句是3个文字(变元或变元的非) 的析取操作
    - $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$
  - 给定m个子句的合取操作
    - $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_7 \vee x_9 \vee \bar{x}_{10}) \wedge \cdots \wedge (x_5 \vee \bar{x}_6 \vee x_4)$
  - 问该合取范式的值可否为真?
    - 给定n个变元的一个取值$x_1, x_2, \ldots, x_n$，x_i=1或0，判断能否使合取范式为真，时间复杂度O(n)，即多项式时间可判定

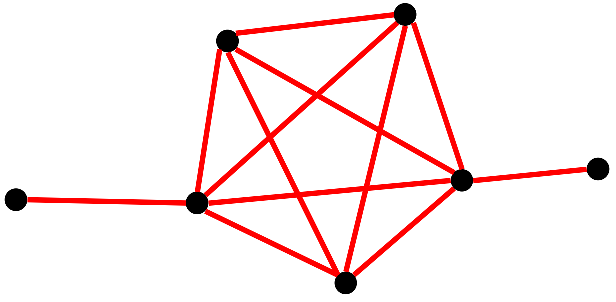
C1 C2 C3

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

$x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=0$，则$c_1 \wedge c_2 \wedge c_3=1$

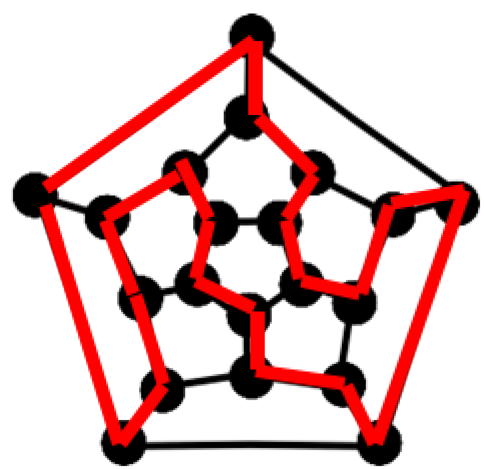
NP问题

- **K团问题**
  - **给定一个图G和常数k，G有没有k团？**
    - **一个图G的k团是G的 k 个顶点的集合，使得这个集合中每对顶点之间都有边**
    - **任取 k 个顶点，判断是否两两之间有边，时间复杂度为O(n^2)，即多项式时间可判定这k个点是否是一个团**



NP问题

- **Hamilton路径问题**
  - 给定无向图G，问是否存在一条路径经过G中所有顶点一次且只经过一次？
    - 给定n个顶点的一个排列 $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}$，依次判断$v_{ik}$和$v_{i(k+1)}$之间是否存在边，时间复杂度O(n)，即多项式时间可判定这个排列是否是一条路径



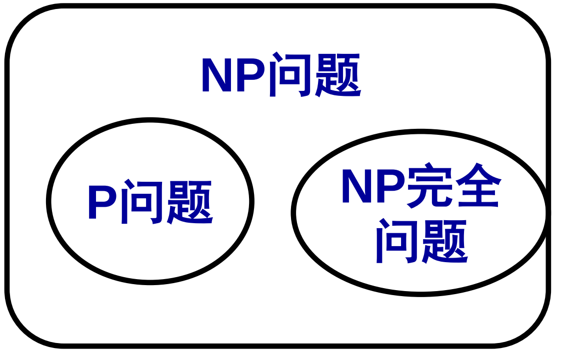
NP问题

- 最优化问题可与一个判定问题对应
  - 最优化问题：给定一个图G，寻找 最大团
  - 判定问题：给定一个图G和常数k，G有没有k团？
- 如何对应?
  - 若判定问题多项式时间可解，则可采用二分搜索策略找到最优的 k
  - 反之，若已求解最优化问题，就已求解判定问题

NP完全问题

- 问题A是一个NP完全问题，则有
  1. A∈NP问题 (多项式时间可验证解是否正确)
  2. 且∀ B∈NP,B $\leq_p$ A
     - 任意NP问题B都可多项式时间归约到A
     - 构造一个多项式时间对应关系

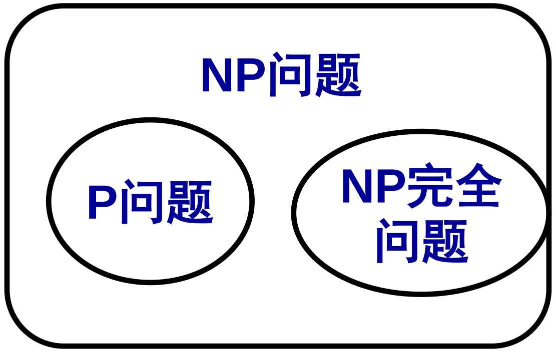
P≠NP否还不知道，
现在普遍认为P≠NP



NP完全问题

- 引入NP完全性的意义
  - 若某个NP完全问题多项式时间可解，则所有NP问题均可多项式时间求解，从而有P=NP
  - 若能证明某个NP问题不存在多项式时间求解算法(即P≠NP), 则所有NP完全问题都不存在多项式时间求解算法，即有NP完全∩P=Φ。
  - ∴NP完全问题是NP问题中””最难的”

P≠NP否还不知道，
现在普遍认为P≠NP



NP完全问题证明

- 证明问题A是NP完全问题分两步：
  1. A是一个NP问题 (多项式时间可验证解是否正确)
  2. 从一个已知的NP完全问题A’，多项式时间规约到A的一个实例A’’，证明A’有解当且仅当A’’有解

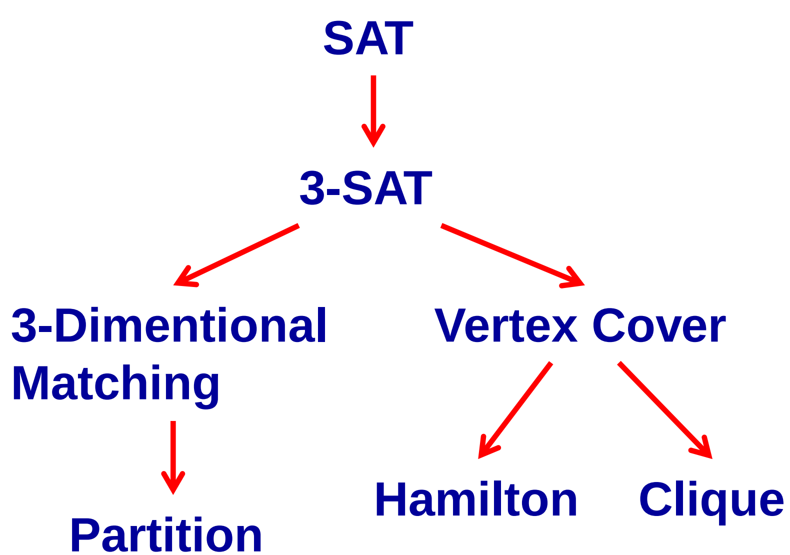
第一个NP完全问题

- **CNF-SAT问题(可满足问题)**
  - 给定n个布尔变量$x_1, x_2, \dots, x_n$，和m个子句，子句是1个或多个个文字(变量或变量的非)的析取操作
    - 如：$(\overline{x}_1 \vee x_2)$，$(\overline{x}_3 \vee x_1 \vee x_5)$
  - 给定这m个子句的合取范式
    - $(\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_7 \vee x_9 \vee \overline{x}_{10}) \wedge \cdots \wedge x_5$
  - 问该合取范式的值可否为真?

第一个NP完全问题

- **Cook定理**
  - **可满足问题是NP完全问题 (CNF-SAT∈NP-C)**

其证明过程用到非确定图灵机理论



3CNF-SAT问题是NP完全问题

- **3CNF-SAT问题**
  - **给定n个布尔变元和m个子句，子句是3个文字(变元或变元的非)的析取操作**
    - $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$
  - **问这m个子句的合取范式的值可否为真？**
    - $\underbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C1} \wedge \underbrace{(x_7 \vee x_9 \vee \bar{x}_{10})}_{C2} \wedge \cdots \wedge \underbrace{(x_5 \vee \bar{x}_6 \vee x_4)}_{Cm}$

3CNF-SAT问题是NP完全问题

- 证明
  - 显然3CNF-SAT是NP问题(多项式时间可判定)
  - 将CNF-SAT归约(多项式时间转换)到3CNF-SAT
    - CNF-SAT中各子句中文字个数可能为1，2，3或≥3个
    - $|C_i| = 1$时，设$C_i = x_{i1}$。增加两个布尔变量$U_i = \{y_{i1}, y_{i2}\}$，子句变换为$C_i' = (x_{i1} \vee y_{i1} \vee y_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee y_{i1} \vee \overline{y}_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee \overline{y}_{i1} \vee y_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee \overline{y}_{i1} \vee \overline{y}_{i2})$
    - $|C_i| = 2$时，设$C_i = x_{i1} \vee x_{i2}$。增加一个布尔变量$U_i = \{y_{i1}\}$，子句变换为$C_i' = (x_{i1} \vee x_{i2} \vee y_{i1}) \wedge (x_{i1} \vee x_{i2} \vee \overline{y}_{i1})$
    - $|C_i| = 3$时, 设$C_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3}$。$C_i' = C_i$
    - $|C_i| > 3$时,设$C_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{i|C_i|}$。增加$|C_i| - 3$个布尔变量$U_i = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i(|C_i|-3)}\}$，子句变换为$C_i' = (x_{i1} \vee x_{i2} \vee y_{i1}) \wedge (\overline{y}_{i1} \vee x_{i3} \vee y_{i2}) \wedge \cdots \wedge (\overline{y}_{ik} \vee x_{i(k+2)} \vee y_{i(k+1)}) \wedge \cdots \wedge (\overline{y}_{i(|C_i|-3)} \vee x_{i(|C_i|-1)} \vee x_{i|C_i|})$

3CNF-SAT问题是NP完全问题

- 证明
  - 显然3CNF-SAT是NP问题(多项式时间可判定)
  - 将CNF-SAT归约(多项式时间转换)到某3CNF-SAT实例
  - 证明CNF-SAT可满足当且仅当构造的3CNF-SAT可满足
    - 必要性： CNF-SAT可满足(每个子句都可满足)， 则3CNF-SAT可满足 。
      - $|C_i| = 1$时可满足, 即$C_i = x_{i1} = 1$，得$C_i' = (x_{i1} \vee y_{i1} \vee y_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee y_{i1} \vee \overline{y}_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee \overline{y}_{i1} \vee y_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee \overline{y}_{i1} \vee \overline{y}_{i2}) = 1$
      - $|C_i| = 2$时可满足, 即$C_i = x_{i1} \vee x_{i2} = 1$，得$C_i' = (x_{i1} \vee x_{i2} \vee y_{i1}) \wedge (x_{i1} \vee x_{i2} \vee \overline{y}_{i1}) = 1$
      - $|C_i| = 3$时可满足, 即$C_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3} = 1$，得$C_i' = C_i = 1$
      - $|C_i| > 3$时可满足, 即$C_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{i|C_i|} = 1$，得$C_i' = (x_{i1} \vee x_{i2} \vee y_{i1}) \wedge (\overline{y}_{i1} \vee x_{i3} \vee y_{i2}) \wedge \cdots \wedge (\overline{y}_{ik} \vee x_{i(k+2)} \vee y_{i(k+1)}) \wedge \cdots \wedge \left(\overline{y}_{i(|C_i|-3)} \vee x_{i(|C_i|-1)} \vee x_{i|C_i|}\right) = 1$

3CNF-SAT问题是NP完全问题

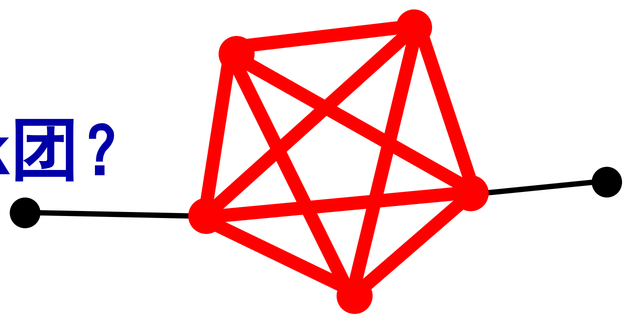
- 证明
  - 显然3CNF-SAT是NP问题(多项式时间可判定)
  - 将CNF-SAT归约(多项式时间转换)到某3CNF-SAT实例
  - 证明CNF-SAT可满足当且仅当构造的3CNF-SAT可满足
    - 充分性： 3CNF-SAT可满足， 则CNF-SAT可满足 。
      1. $C_i' = (x_{i1} \vee y_{i1} \vee y_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee y_{i1} \vee \overline{y}_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee \overline{y}_{i1} \vee y_{i2}) \wedge (x_{i1} \vee \overline{y}_{i1} \vee \overline{y}_{i2}) = 1$，得$C_i = x_{i1} = 1$
      2. $C_i' = (x_{i1} \vee x_{i2} \vee y_{i1}) \wedge (x_{i1} \vee x_{i2} \vee \overline{y}_{i1}) = 1$，得$C_i = x_{i1} \vee x_{i2} = 1$
      3. $C_i' = C_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3} = 1$
      4. $C_i' = (x_{i1} \vee x_{i2} \vee y_{i1}) \wedge (\overline{y}_{i1} \vee x_{i3} \vee y_{i2}) \wedge \cdots \wedge (\overline{y}_{ik} \vee x_{i(k+2)} \vee y_{i(k+1)}) \wedge \cdots \wedge \left(\overline{y}_{i(|C_i|-3)} \vee x_{i(|C_i|-1)} \vee x_{i|C_i|}\right) = 1$，得$C_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{i|C_i|} = 1$

NP完全问题证明

- 假设已知3CNF-SAT问题是NP完全问题
- 现在要证
  - k团问题
  - 顶点覆盖问题
  - 子集和问题

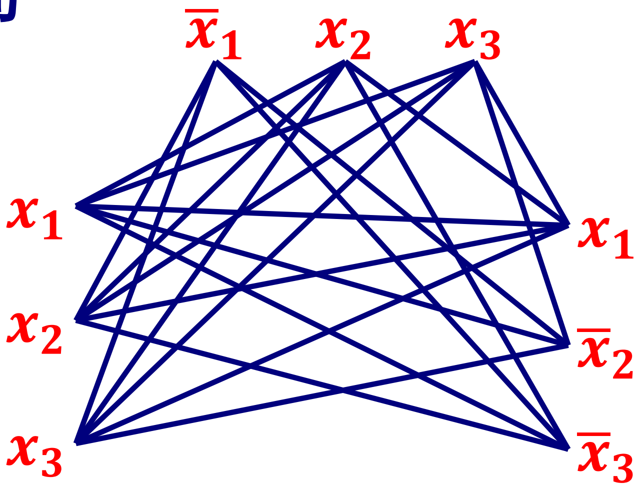
k团问题是NP完全问题

- k团问题
  - 给定一个图G和常数k，G有没有k团?
- 3CNF-SAT问题
  - 给定n个布尔变元和m个子句，子句是3个文字(变元或变元的非)的析取操作
    - $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$
  - 问这m个子句的合取范式的值可否为真?
    - $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_7 \vee x_9 \vee \overline{x}_{10}) \wedge \cdots \wedge (x_5 \vee \overline{x}_6 \vee x_4)$



k团问题是NP完全问题

- **证明**
  - **首先，k团问题是NP问题(多项式时间可验证)**
  - **规约方法：3CNF-SAT表达式中每一文字对应k团问题一个顶点，若两顶点同时满足下列两条则存在边：**
    - **两个顶点中的文字不属于同一子句**
    - **两个顶点中的文字不是互补的**
    - **令k=m**



C1 **C2** **C3**

$$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$$

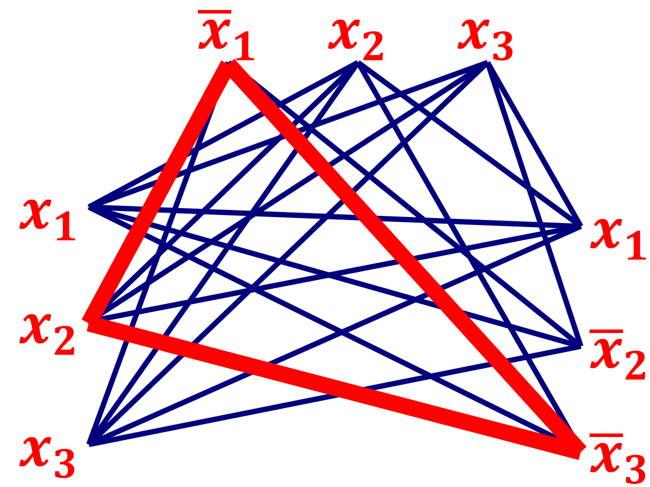
k团问题是NP完全问题

- 往证有k个子句的3CNF-SAT表达式A是可满足的当且仅当构造出来的无向图G中有一个k团
- 必要性证明：设表达式A是可满足的，必有A=1，由于合取，必有$c_1=c_2=\ldots=c_k=1$，每个子句c_i中的文字至少有一个取值为1，c_i中取一个值为1的文字所对应的顶点，可得一个由k个顶点所构成的子集 V。V中任取两点，对应的文字来自不同的子句，两个文字必定不是互补的。
- ∴两个顶点之间必定有边。
- ∴V是k团

$c_1 \wedge c_2 \wedge c_3=1$，取$x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=0$

C1 C2 C3

$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$



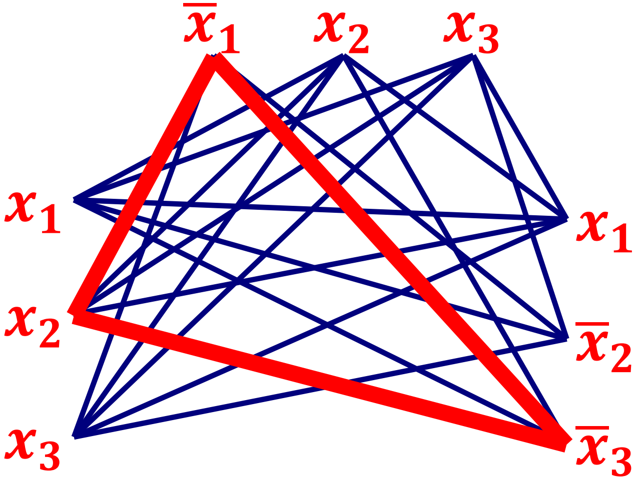
k团问题是NP完全问题

- 充分性证明：设V是构造出来的无向图中的k团， 则V中任意两点间有边。由于同一子句中的顶点无边相连，故 k个点恰好来自k个不同的子句。现对这k个顶点文字进行赋值：
  - 若顶点文字为 x_i，则 x_i赋值1，其所在子句的值为1；
  - 若顶点文字为 $\overline{x}_i$ ，则x_i赋值0， 其所在子句的值为1
- 由于x_i与 $\overline{x}_i$无边相连，这k个顶点文字不会同时出现x_i与 $\overline{x}_i$，∴上述的赋值方法可使表达式为1

$x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=0$，则$c_1 \wedge c_2 \wedge c_3=1$

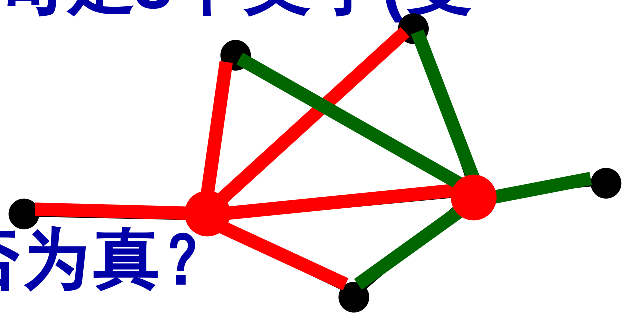
C1 C2 C3

$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$



顶点覆盖问题是NP完全问题

- 顶点覆盖问题
  - 无向图G中是否存在顶点数为k的顶点覆盖？
    - G 中大小为 k 的顶点集合，使得 G 中任一条边的两个顶点至少有一个在此集合中
- 3CNF-SAT问题
  - 给定n个布尔变元和m个子句，子句是3个文字(变元或变元的非)的析取操作
    - $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$
  - 问这m个子句的合取范式的值可否为真？
    - $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_7 \vee x_9 \vee \overline{x}_{10}) \wedge \cdots \wedge (x_5 \vee \overline{x}_6 \vee x_4)$



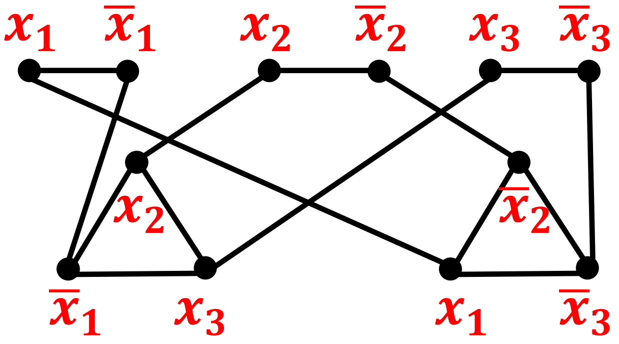
顶点覆盖问题是NP完全问题

- 证明
  - 首先, 顶点覆盖问题是NP问题(多项式时间可验证)
  - 规约方法：
    - n 个变元对应2n个顶点 (x_i和 $\overline{x}_i$, 共2n个), x_i和 $\overline{x}_i$间有边
    - m个子句对应3m个顶点 (3m文字), 子句内文字两两有边
    - 子句内的文字与变元对应的顶点间有边
    - 令k=n+2m

C1 C2

$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$

k=n+2m=3+2*2=7



顶点覆盖问题是NP完全问题

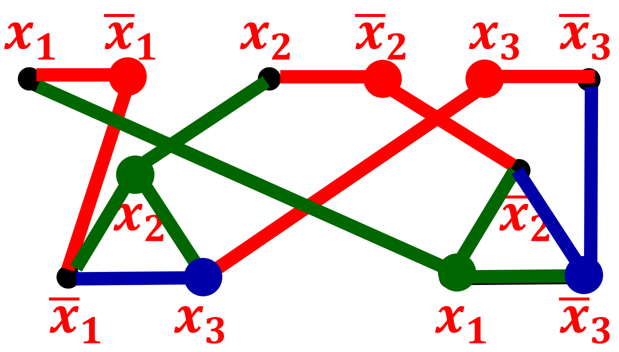
- 往证3CNF-SAT表达式是可满足的当且仅当构造出来的无向图G中有一个大小为k覆盖集合，其中k=n+2m
- **必要性证明：** 若表达式可满足，则有一种变元的赋值方式，使得表达式为真。
- 变元对应的2n个顶点选择方式：若变元x_i=1，则将x_i加入集合；若变元x_i=0，则将 $\overline{x}_i$加入集合。共选择了n个
- 子句对应的3m个顶点选择方式：表达式可满足，每个子句至少有一个文字值为1，该文字对应的顶点与变元对应顶点之间的边已被覆盖。选择剩下的两个顶点即可，共2m个
- ∴G中有大小为k=n+2m的覆盖集合

x_1=0，x_2=0，x_3=1，则$c_1 \wedge c_2$=1

C1 C2

$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$

k=n+2m=3+2*2=7



顶点覆盖问题是NP完全问题

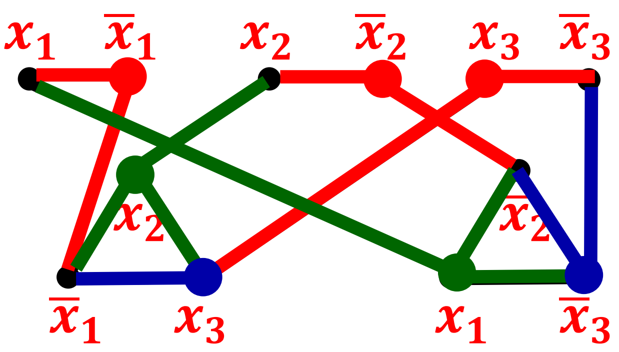
- 充分性证明：若G中有大小为k=n+2m的覆盖集合。
- 变元对应的2n个顶点有n条边,要覆盖这n条边,每条边至少得选1个顶点，至少共n个顶点。
- 子句对应的3m个顶点是m个大小为3的团，要覆盖每个大小为3的团至少得选2个顶点，至少共2m个顶点。
- 必然在变元对应的2n个顶点选n个(每条边选一个)；
- 子句对应的3m个顶点选2m个(每个子句选2个)
  - 剩哪一个不选？剩和变元对应的顶点相连的不选
- 如何对变元赋值使表达式为真？
  - 若选择的变元对应的顶点为 x_i，则 x_i 赋1；
  - 若顶点为 $\overline{x}_i$，则x_i赋0

$x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=1$

C1 C2

$$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$$

k=n+2m=3+2*2=7



子集和问题是NP完全问题

- 子集和问题

  A ={2, 5, 3, 6, 8, 9, 11}, B=13

  A'={2, 3, 8} ⊆ A, 2+3+8=13

  - 有一个数集 A ={a_1,a_2,…,a_n}及一个目标数B，问A中是否能找出子集$A' \subseteq A$，使得 $\sum_{a_i \in A'} a_i = B$?
- 3CNF-SAT问题
  - 给定n个布尔变元和m个子句，子句是3个文字(变元或变元的非)的析取操作
    - $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$
  - 问这m个子句的合取范式的值可否为真?
    - $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_7 \vee x_9 \vee \overline{x}_{10}) \wedge \cdots \wedge (x_5 \vee \overline{x}_6 \vee x_4)$

子集和问题是NP完全问题

- 证明
  - 首先, 子集和问题是NP问题(多项式时间可验证)
  - 规约方法：
    - 3CNF-SAT有n个变元，m个子句，
    - 构造2(n+m)+1个十进制数(每个数n+m位)：
      - 前2n个数： x_i与 $\overline{x}_i$第 i 位为1，出现在第 j 个子句，$n+j$ 位为1，其他位为0
      - 中间2m个数： g_j与 h_j 第 $n+j$ 位为1
      - 最后一个数：1……13……3(n个1,m个3)

x_i与 $\overline{x}_i$在子集和问题中表示十进制数

x_1	1	0	0	0	1
$\overline{x}_1$	1	0	0	1	0
x_2	0	1	0	1	0
$\overline{x}_2$	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	1	0
$\overline{x}_3$	0	0	1	0	1
g_1	0	0	0	1	0
h_1	0	0	0	1	0
g_2	0	0	0	0	1
h_2	0	0	0	0	1
B	1	1	1	3	3

$$\underbrace{(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)}^{C1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)}^{C2}$$

子集和问题是NP完全问题

- 往证3CNF-SAT表达式是可满足的当且仅当构造出的前2(n+m)个十进制数中的若干个数之和等于B
- **必要性证明：**若3CNF-SAT表达式可满足，则有一种变元的赋值方式,使得表达式为真。
- 若变元x_i赋值为**真**，就把十进制数x_i放入子集
- 若变元x_i赋值为**假**，就把十进制数$\overline{x}_i$放入子集
  - 此时，选择的数的和前n位中每位均为1，
  - 后m位：第 n+j 位可能为1，可能为2，可能为3。

  为1则g_j和 h_j均选择加入子集；为2则g_j和 h_j任选一个加入子集；为3则均不选择
  - 此时选择数的和的后m位每位均为3

x_1	1	0	0	0	1
$\overline{x}_1$	1	0	0	1	0
x_2	0	1	0	1	0
$\overline{x}_2$	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	1	0
$\overline{x}_3$	0	0	1	0	1
g_1	0	0	0	1	0
h_1	0	0	0	1	0
g_2	0	0	0	0	1
h_2	0	0	0	0	1
B	1	1	1	3	3

$$\underset{C1}{(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)} \wedge \underset{C2}{(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)}$$

$x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=1$

子集和问题是NP完全问题

- 充分性证明：设2(n+m)个数中有若干个加起来恰好为1……13……3
  - 即使是所有数加和每位最多为5，不会产生进位
- 和中前n位中每位均为1，说明x_i与$\bar{x}_i$恰好只取了一个。
  - 若十进制数x_i在子集中，则令变元x_i为1(真)
  - 若十进制数$\bar{x}_i$在子集中，则令变元$\bar{x}_i$为0(假)
- 和中后m位中每位均为3
  - 即使所有g_j和h_j(中间2m个数)均在子集中，后m位中每位的和也不过为2，必然还要加上前面某个已在子集中的x_i或$\bar{x}_i$，和才为3

x_1	1	0	0	0	1
$\bar{x}_1$	1	0	0	1	0
x_2	0	1	0	1	0
$\bar{x}_2$	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	1	0
$\bar{x}_3$	0	0	1	0	1
g_1	0	0	0	1	0
h_1	0	0	0	1	0
g_2	0	0	0	0	1
h_2	0	0	0	0	1
B	1	1	1	3	3

$$\overbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)}^{\text{C1}} \wedge \overbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}^{\text{C2}}$$

$x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=1$