4.2 已知周期为 8 的离散时间信号具有如下傅立叶级数系数，试确定信号 $x(n)$ 。

(a) $A_k = \cos(\pi k/4) + \sin(3\pi k/4)$ (b) A_k 如图 P4.2(a)所示。

解：

$$A_k = 2\delta(k) + \frac{3}{2}\delta(k-1) + \frac{3}{2}\delta(k+1) + \delta(k-2) + \delta(k+2) + \frac{1}{2}\delta(k-3) + \frac{1}{2}\delta(k+3)$$

$$x(n) = \sum_{k=<8>} A_k e^{j\frac{2\pi}{8}kn} = 2 + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \cdots$$

$$= 2 + 3cos\frac{\pi}{4}n + 2cos\frac{\pi}{2}n + cos\frac{\pi}{4}n$$

$$x(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+8r)$$

4.6 求下列信号的离散时间傅立叶变换:

(a) $(\frac{1}{4})^n u(n-2)$ (b) $2^n u(-n)$ (c) $(a^n \cos\omega_0 n)u(n), |a| < 1$

解： (a) $x(\Omega) = \sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{4})^n e^{-j\Omega n} = \dfrac{(\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}{1-\frac{1}{4}e^{j\Omega}} = \dfrac{\frac{1}{16}e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$

(b) $x(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{0}(2)^n e^{-j\Omega n} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$

4.7 已知离散时间信号的傅里叶变换为$X(e^{j\omega})$，求信号$x(n)$。

(a) $X(e^{j\omega}) = 1 - 3e^{-j\omega} + 2e^{j2\omega} + 4e^{-j4\omega}$

(h) $X(e^{j\omega})$ 如图 P4.7(b)所示

解：

(a) 书本 P162 表 4.2 和 P163 表 4.3，利用DTFT的时移性质， 可得

$$x(n) = \delta(n) - 3\delta(n-1) + 2\delta(n+2) + 4\delta(n-4)$$

(h) 本题一定要注意 IDTFT 的求和区间是2π，不要被图像显示的最小正周期迷惑。实际上，矩形波构成的信号意味着在2π内的各区间段均为常数，是适合用定义式计算的。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{1}{8}\pi}2e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{8}\pi}^{\frac{3}{8}\pi}e^{j\omega n}d\omega+\cdots\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{15}{8}\pi}^{2\pi}2e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi nj}[(2e^{j\frac{\pi}{8}n}-2e^{0})+(e^{j\frac{3\pi}{8}n}-e^{j\frac{\pi}{8}n})+\cdots+(2e^{j2\pi n}-2e^{j\frac{15\pi}{8}n})]$$

$$=\frac{1}{\pi n}(sin\frac{\pi}{8}+sin\frac{3\pi}{8}-sin\frac{5\pi}{8}-sin\frac{7\pi}{8})$$

4.9 如果$X(e^{j\omega})$是图 P4. 9 所示信号$x(n)$的傅里叶变换，不求出$X(e^{j\omega})$而完成下列计算。

(a) 求$X(e^{j0})$

(d) 计算$\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})d\omega$

解：

(a) $X\left(e^{j0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{j0n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)=6$

(d) 考虑 IDTFT 的定义式，当$n=0$时，

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega 0}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})\,d\omega=2$$

故$\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})\,d\omega=2\pi x(0)=4\pi$

4.19.

(a) 如果一个离散时间 LTI 系统对输入信号

$$x[n]=(\frac{1}{2})^{n}u(n)-\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$

所产生得输出响应为： $y[n]=(\frac{1}{3})^{n}u(n)$

求该系统得频率响应，单位脉冲响应以及描述该系统得差分方程。

(b) 如果某离散时间 LTI 系统对输入$(n+2)(1/2)^{n}u(n)$所产生得响应为$(1/4)^{n}u(n)$，为使该系统产生得输出为$\delta(n)-(-1/2)^{n}u(n)$，应该给系统输入什么信号？

解：(a)

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}-\frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\quad\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}};$$

$$Y(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

(i)

$$H(\Omega)=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore h[n]=[3(\frac{1}{4})^n-2(\frac{1}{3})^n]u[n]$$

(ii) 由 $H(\Omega)$ 可得出差分方程：

$$y[n]-\frac{7}{12}y[n-1]+\frac{1}{12}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

(b)

$$\because x_1[n]=(n+2)(\frac{1}{2})^n u[n]=(n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]+(\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$\therefore X_1(\Omega)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{2-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$Y_1(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}};\therefore H(\Omega)=\frac{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{2(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

$$\text{而}\quad Y(\Omega)=1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore X(\Omega)=Y(\Omega)\big/H(\Omega)$$

$$=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$=e^{-j\Omega}[\frac{9/16}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{5/16}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{1/8}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}]$$

$$x[n]=[\frac{9}{16}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{5}{16}(\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{8}n(\frac{1}{2})^{n-1}]u(n-1)$$