工科数学分析

贺丹（东南大学）

第二节 多元函数的极限与连续

第二节 多元函数的极限与连续

本节主要内容：

第二节 多元函数的极限与连续

本节主要内容：

- 多元函数的概念

第二节 多元函数的极限与连续

本节主要内容：

- 多元函数的概念
- 多元函数的极限与连续

第二节 多元函数的极限与连续

本节主要内容：

- 多元函数的概念
- 多元函数的极限与连续
- 有界闭区域上多元连续函数的性质

n元实函数

定义2.1

n元实函数

定义2.1

设$A\subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集，称映射$f:A\to\mathbf{R}$ 是定义在A 上的一个n 元数量值函数，简称n 元函数，记为

$$w=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为自变量，$D(f)=A$ 称为f 的定义域，w 称为因变量，与给定的$\boldsymbol{x}\in D(f)$ 所对应的w 为函数f 在点$\boldsymbol{x}$ 处的值，$R(f)=\{w|w=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D(f)\}$ 称为f 的值域.

n元实函数

定义2.1

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集, 称映射$f: A \to \mathbf{R}$ 是定义在A 上的一个n 元数量值函数, 简称n 元函数, 记为

$$w = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为自变量, $D(f) = A$ 称为f 的定义域, w 称为因变量, 与给定的$\boldsymbol{x} \in D(f)$ 所对应的w 为函数f 在点$\boldsymbol{x}$ 处的值, $R(f) = \{w | w = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D(f)\}$ 称为f 的值域.

当$n = 2$时, 二元函数常记为$z = f(x, y)$;

n元实函数

定义2.1

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集, 称映射$f: A \to \mathbf{R}$ 是定义在A 上的一个n 元数量值函数, 简称n 元函数, 记为

$$w = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为自变量, $D(f) = A$ 称为f 的定义域, w 称为因变量, 与给定的$\boldsymbol{x} \in D(f)$ 所对应的w 为函数f 在点$\boldsymbol{x}$ 处的值, $R(f) = \{w | w = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D(f)\}$ 称为f 的值域.

当$n = 2$时, 二元函数常记为$z = f(x, y)$;

当$n = 3$时, 三元函数常记为$u = f(x, y, z)$.

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

(1) $z = \ln(x - y + 1) - \sqrt{x + y}$

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

$$(1)\ z=\ln(x-y+1)-\sqrt{x+y}$$

解: $\begin{cases} x-y+1>0 \\ x+y\geqslant 0 \end{cases}$

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

(1) $z = \ln(x - y + 1) - \sqrt{x + y}$

解: $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < x + 1 \\ y \geqslant -x \end{cases}$$

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

$$(1)\ z = \ln(x - y + 1) - \sqrt{x + y}$$

解: $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < x + 1 \\ y \geqslant -x \end{cases}$$

$\therefore$ 函数$z = \ln(x - y + 1) - \sqrt{x + y}$ 的定义域为

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

$$(1)\ z=\ln(x-y+1)-\sqrt{x+y}$$

解: $\begin{cases} x-y+1>0 \\ x+y\geqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<x+1 \\ y\geqslant -x \end{cases}$$

$\therefore$ 函数$z=\ln(x-y+1)-\sqrt{x+y}$ 的定义域为

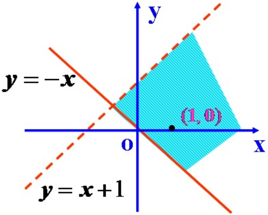
$$D=\{(x,y)|y<x+1, y\geqslant -x\},$$

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

$$(1)\ z=\ln(x-y+1)-\sqrt{x+y}$$

解: $\begin{cases} x-y+1>0 \\ x+y\geqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<x+1 \\ y\geqslant -x \end{cases}$$



$\therefore$ 函数$z=\ln(x-y+1)-\sqrt{x+y}$ 的定义域为

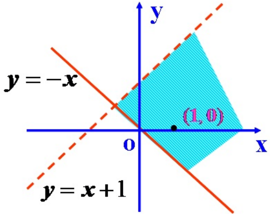
$$D=\{(x,y)|y<x+1,y\geqslant -x\},$$

例1. 确定并画出下列函数的定义域D.

(1) $z = \ln(x-y+1) - \sqrt{x+y}$

解: $\begin{cases} x-y+1>0 \\ x+y \geqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y < x+1 \\ y \geqslant -x \end{cases}$



$\therefore$ 函数$z = \ln(x-y+1) - \sqrt{x+y}$ 的定义域为

$$D = \{(x,y) | y < x+1, y \geqslant -x\},$$

是无界集合.

(2) $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$

$$(2)\ z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

解: $\begin{cases} 4x-y^2\geqslant 0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ \ln(1-x^2-y^2)\neq 0 \end{cases}$

(2) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

解: $\begin{cases} 4x-y^2\geqslant 0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ \ln(1-x^2-y^2)\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$

$$(2)\ z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

解: $\begin{cases} 4x-y^2\geqslant 0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ \ln(1-x^2-y^2)\neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ 0<x^2+y^2<1 \end{cases}$$

$$(2)\ z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

解: $\begin{cases} 4x-y^2\geqslant 0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ \ln(1-x^2-y^2)\neq 0 \end{cases}$

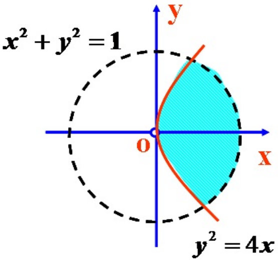
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ 0<x^2+y^2<1 \end{cases}$$

$\therefore$ 定义域为$D=\{(x,y)|y^2\leqslant 4x, 0<x^2+y^2<1\}$.

$$(2)\ z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

解: $\begin{cases} 4x-y^2\geqslant 0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ \ln(1-x^2-y^2)\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ 0<x^2+y^2< \end{cases}$



$\therefore$ 定义域为$D=\{(x,y)|y^2\leqslant 4x, 0<x^2+y^2<1\}$.

二元函数的几何意义

二元函数的几何意义

设函数$z = f(x,y)$的定义域为D,

$\forall P(x,y) \in D$, 对应的函数值为

$z = f(x,y)$, 于是有序实数组

(x,y,z) 确定了空间的一点$M(x,y,z)$.

二元函数的几何意义

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D,

$\forall P(x,y)\in D$, 对应的函数值为

$z=f(x,y)$, 于是有序实数组

(x,y,z) 确定了空间的一点$M(x,y,z)$.

当(x,y) 遍取D 上的一切点时, 得到

一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

二元函数的几何意义

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D,

$\forall P(x,y)\in D$, 对应的函数值为

$z=f(x,y)$, 于是有序实数组

(x,y,z) 确定了空间的一点$M(x,y,z)$.

当(x,y) 遍取D 上的一切点时, 得到

一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为函数$z=f(x,y)$ 的图形.

二元函数的几何意义

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D,

$\forall P(x,y)\in D$, 对应的函数值为

$z=f(x,y)$, 于是有序实数组

(x,y,z) 确定了空间的一点$M(x,y,z)$.

当(x,y) 遍取D 上的一切点时, 得到

一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为函数$z=f(x,y)$ 的图形.

通常二元函数的图形是一张空间曲面.

二元函数的几何意义

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D,

$\forall P(x,y)\in D$, 对应的函数值为

$z=f(x,y)$, 于是有序实数组

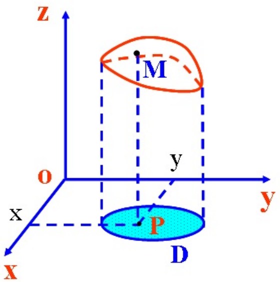
(x,y,z) 确定了空间的一点$M(x,y,z)$.

当(x,y) 遍取D 上的一切点时, 得到

一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为函数$z=f(x,y)$ 的图形.



通常二元函数的图形是一张空间曲面.

例如：

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面;

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面;

函数$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ 的图形

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面;

函数$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ 的图形是上半球面;

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面;

函数$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ 的图形是上半球面;

函数$z = x^2 + y^2$ 的图形

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面;

函数$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ 的图形是上半球面;

函数$z = x^2 + y^2$ 的图形是旋转抛物面.

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面;

函数$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ (a > 0)$ 的图形是上半球面;

函数$z = x^2 + y^2$ 的图形是旋转抛物面.

- 对于n维线性函数：$w = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n =< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} >$,

例如： 线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面;

函数$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ 的图形是上半球面;

函数$z = x^2 + y^2$ 的图形是旋转抛物面.

- 对于n维线性函数： $w = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n =< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} >$,

  其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ 是常向量, 其图像常称为$\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超平面.

二元函数的等值线

二元函数的等值线

- $f(x,y)=C$ (其中C 为常数) 表示Oxy 平面上使函数 $z=f(x,y)$ 取值相同函数值C 的点(x,y) 构成的集合，称$f(x,y)=C$ 为二元函数$z=f(x,y)$的等值线.

二元函数的等值线

- $f(x, y) = C$ (其中C 为常数) 表示Oxy 平面上使函数 $z = f(x, y)$ 取值相同函数值C 的点(x, y) 构成的集合，称$f(x, y) = C$ 为二元函数$z = f(x, y)$的等值线.

- 等值线$f(x, y) = C$ 就是曲面$z = f(x, y)$ 与平面$z = C$ 的交线在Oxy 面上的投影.

二元函数的等值线

- $f(x,y)=C$ (其中C 为常数) 表示Oxy 平面上使函数 $z=f(x,y)$ 取值相同函数值C 的点(x,y) 构成的集合，称$f(x,y)=C$ 为二元函数$z=f(x,y)$的等值线.
- 等值线$f(x,y)=C$ 就是曲面$z=f(x,y)$ 与平面$z=C$ 的交线在Oxy 面上的投影.
- 不同的C 得到不同的等值线，一个函数的所有等值线构成Oxy 平面上的一个曲线族.

二元函数的等值线

- $f(x,y)=C$ (其中C 为常数) 表示Oxy 平面上使函数 $z=f(x,y)$ 取值相同函数值C 的点(x,y) 构成的集合, 称$f(x,y)=C$ 为二元函数$z=f(x,y)$的等值线.
- 等值线$f(x,y)=C$ 就是曲面$z=f(x,y)$ 与平面$z=C$ 的交线在Oxy 面上的投影.
- 不同的C 得到不同的等值线, 一个函数的所有等值线构成Oxy 平面上的一个曲线族.
- 例如, 地图上绘制的等高线、气象中常用等温线都是等值线.

二元函数的等值线

- $f(x,y)=C$ (其中C 为常数) 表示Oxy 平面上使函数 $z=f(x,y)$ 取值相同函数值C 的点(x,y) 构成的集合, 称$f(x,y)=C$ 为二元函数$z=f(x,y)$的等值线.

- 等值线$f(x,y)=C$ 就是曲面$z=f(x,y)$ 与平面$z=C$ 的交线在Oxy 面上的投影.

- 不同的C 得到不同的等值线, 一个函数的所有等值线构成 Oxy 平面上的一个曲线族.

- 例如, 地图上绘制的等高线、气象中常用等温线都是等值线.

例1. 讨论函数$z=xy$ 的等值线.

二元函数的等值线

- $f(x,y)=C$ (其中C 为常数) 表示Oxy 平面上使函数 $z=f(x,y)$ 取值相同函数值C 的点(x,y) 构成的集合, 称$f(x,y)=C$ 为二元函数$z=f(x,y)$的等值线.

- 等值线$f(x,y)=C$ 就是曲面$z=f(x,y)$ 与平面$z=C$ 的交线在Oxy 面上的投影.
- 不同的C 得到不同的等值线, 一个函数的所有等值线构成Oxy 平面上的一个曲线族.
- 例如, 地图上绘制的等高线、气象中常用等温线都是等值线.

例1. 讨论函数$z=xy$ 的等值线.

解: 等值线为$xy=C$, 是Oxy 平面上的等轴双曲线.

三元函数的等值面

三元函数的等值面

- $f(x,y,z)=C$ (其中C 为常数) 表示三维空间$O-xyz$ 中使函数$u=f(x,y,z)$ 取值相同函数值C 的点(x,y,z) 构成的集合, 称$f(x,y,z)=C$ 为三元函数$u=f(x,y,z)$的等值面.

三元函数的等值面

- $f(x,y,z)=C$ (其中C 为常数) 表示三维空间$O-xyz$ 中使函数$u=f(x,y,z)$ 取值相同函数值C 的点(x,y,z) 构成的集合, 称$f(x,y,z)=C$ 为三元函数$u=f(x,y,z)$的等值面.

例如, 在置于原点O 处的点电荷q 所形成的电场中, 电位函数为$u=f(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

三元函数的等值面

- $f(x,y,z)=C$ (其中C 为常数) 表示三维空间$O-xyz$ 中使函数$u=f(x,y,z)$ 取值相同函数值C 的点(x,y,z) 构成的集合, 称$f(x,y,z)=C$ 为三元函数$u=f(x,y,z)$的**等值面**.

例如, 在置于原点O 处的点电荷q 所形成的电场中, 电位函数为$u=f(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则电位$u$ 的等值面方程为

三元函数的等值面

- $f(x, y, z) = C$ (其中C 为常数) 表示三维空间$O-xyz$ 中使函数$u = f(x, y, z)$ 取值相同函数值C 的点(x, y, z) 构成的集合, 称$f(x, y, z) = C$ 为三元函数$u = f(x, y, z)$的等值面.

例如, 在置于原点O 处的点电荷q 所形成的电场中, 电位函数为$u = f(x, y, z) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, 其中$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则电位$u$ 的等值面方程为 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r} = C$ 或$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon C}\right)^2$.

三元函数的等值面

- $f(x,y,z)=C$ (其中C 为常数) 表示三维空间$O-xyz$ 中使函数$u=f(x,y,z)$ 取值相同函数值C 的点(x,y,z) 构成的集合, 称$f(x,y,z)=C$ 为三元函数$u=f(x,y,z)$的**等值面**.

例如, 在置于原点O 处的点电荷q 所形成的电场中, 电位函数为$u=f(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则电位$u$ 的等值面方程为 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}=C$ 或$x^2+y^2+z^2=\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon C}\right)^2$.

它是以原点0 为球心的同心球面,

三元函数的等值面

- $f(x,y,z)=C$ (其中C 为常数) 表示三维空间$O-xyz$ 中使函数$u=f(x,y,z)$ 取值相同函数值C 的点(x,y,z) 构成的集合, 称$f(x,y,z)=C$ 为三元函数$u=f(x,y,z)$的等值面.

例如, 在置于原点O 处的点电荷q 所形成的电场中, 电位函数为$u=f(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则电位$u$ 的等值面方程为 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}=C$ 或$x^2+y^2+z^2=\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon C}\right)^2$.

它是以原点0 为球心的同心球面,它表明, 在由此点电荷q 形成的电场中, 在以此点为中心的任一球面上各点的电位相同, 且C 越小, 球面的半径越大, 其上各点的电位越低.

三元函数的等值面

- $f(x,y,z)=C$ (其中C 为常数) 表示三维空间$O-xyz$ 中使函数$u=f(x,y,z)$ 取值相同函数值C 的点(x,y,z) 构成的集合, 称$f(x,y,z)=C$ 为三元函数$u=f(x,y,z)$的等值面.

例如, 在置于原点O 处的点电荷q 所形成的电场中, 电位函数为$u=f(x,y,z)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则电位$u$ 的等值面方程为 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}=C$ 或$x^2+y^2+z^2=\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon C}\right)^2$.
它是以原点0 为球心的同心球面,它表明, 在由此点电荷q 形成的电场中, 在以此点为中心的任一球面上各点的电位相同, 且C 越小, 球面的半径越大, 其上各点的电位越低. 在无限远离点电荷q 的地方, 电位将趋向于0.

n元向量值函数

定义2.2

n元向量值函数

定义2.2

设$A\subset\mathbf{R}^n$ 是一个点集，称映射$\boldsymbol{f}: A\to\mathbf{R}^m$ $(m\geqslant 2)$为定义在A 上的一个n 元(m 维)向量值函数，也可记为$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 是自变量，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$ 是因变量，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$.

n元向量值函数

定义2.2

设$A \subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集，称映射$\boldsymbol{f}: A \to \mathbf{R}^m$ $(m \geqslant 2)$为定义在A 上的一个n 元(m 维)向量值函数，也可记为$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ 是自变量，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ 是因变量，$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$.

- n 元(m)维向量值函数$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对应于m 个n 元函数:

n元向量值函数

定义2.2

设$A\subset \mathbf{R}^n$ 是一个点集，称映射$\boldsymbol{f}: A\to \mathbf{R}^m$ $(m\geqslant 2)$为定义在A 上的一个n 元(m 维)向量值函数，也可记为$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 是自变量，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in \mathbf{R}^m$ 是因变量，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$.

- n 元(m)维向量值函数$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对应于m 个n 元函数:

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \qquad\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n). \end{cases}$$

- 可以把n 元(m)维向量值函数写成矩阵的形式:

- 可以把n 元(m)维向量值函数写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix},$$

- 可以把n 元(m)维向量值函数写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$,

$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$.

- 可以把n 元(m)维向量值函数写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$,

$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$.

- 例如, 位于原点且电量为q的点电荷产生的电场强度为

- 可以把n 元(m)维向量值函数写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$,

$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$.

- 例如, 位于原点且电量为q的点电荷产生的电场强度为

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\parallel\boldsymbol{r}\parallel^3}\boldsymbol{r}$$

- 可以把n 元(m)维向量值函数写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$,

$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$.

- 例如, 位于原点且电量为q的点电荷产生的电场强度为

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \parallel \boldsymbol{r} \parallel^3}\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{x, y, z\}$$

- 可以把n 元(m)维向量值函数写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$,

$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$.

- 例如, 位于原点且电量为q的点电荷产生的电场强度为

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\parallel\boldsymbol{r}\parallel^3}\boldsymbol{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{x,y,z\}$$

其中ε_0是真空中介电常数, $\boldsymbol{f}$ 就是一个三元(三维)向量值函数.

多元函数的极限

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当$(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A$ 时, 恒有

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{使得当}(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A\ \text{时},\ \text{恒有}$$

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon\ \text{成立},$$

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f: A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当$(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A$ 时, 恒有

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon \text{ 成立},$$

则称当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时$f(x, y)$ 有极限,

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f: A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \text{ 使得当} (x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A \text{ 时, 恒有}$$

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon \text{ 成立},$$

则称当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时$f(x, y)$ 有极限,

称a 为当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的$f(x, y)$极限, 记作

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当$(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A$ 时, 恒有

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon \text{ 成立},$$

则称当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时$f(x, y)$ 有极限,

称a 为当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的$f(x, y)$极限, 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a, \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = a,$$

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{使得当}(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A \text{ 时, 恒有}$$

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon \text{ 成立},$$

则称当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时$f(x, y)$ 有极限,

称a 为当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的$f(x, y)$极限, 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a, \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = a,$$

此极限通常称为二重极限.

多元函数的极限

定义2.3 (二重极限)

设有点集$A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$是一个二元数量值函数, (x_0, y_0)是A的一个聚点. 若存在常数$a \in \mathbf{R}$ 使得

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{使得当}(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A\ \text{时, 恒有}$$

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon\ \text{成立},$$

则称当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时$f(x, y)$ 有极限,

称a 为当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的$f(x, y)$极限, 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a,\ \text{或}\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = a,$$

此极限通常称为二重极限.

否则, 称$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时$f(x, y)$ 没有极限.

例1. **求证** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

例1. 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = 0.$

证: 因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - 0\right|$

例1. **求证** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

证: 因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$$=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|$$

例1. 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

证: 因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$$=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2$$

例1. 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

证: 因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$$=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2$$

所以$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,

例1. 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = 0.$

证: 因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - 0\right|$

$$= |x^2+y^2| \cdot \left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant x^2+y^2$$

所以 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 当 $0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ 时,

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon,$$

例1. 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

证: 因为 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$$=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2$$

所以$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x,$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x,$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x,$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \overset{u=xy}{=\!=}$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x,$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \overset{u=xy}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1,$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则，

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x,$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \overset{u=xy}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1,\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x,$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \overset{u=xy}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = \lim\limits_{x\to 0} x$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x,$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\overset{u=xy}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1,\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x=\lim\limits_{x\to0}x=0,$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x,$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \overset{u=xy}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0,$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x = 1 \cdot 0$

注: 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则,

如四则运算, 复合运算, 夹逼定理等同样成立.

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\overset{u=xy}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x=\lim\limits_{x\to0}x=0$,

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x=1\cdot0=0.$

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \cdot \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \cdot \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \xlongequal{u=x^2y} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$,

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \cdot \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \xlongequal{u=x^2y} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$,

$$0 < \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x|$$

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}\overset{u=x^2y}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$,

$$0<\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|\xrightarrow{x\to0}0,$$

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \cdot \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \overset{u=x^2y}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$,

$$0 < \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| \leqslant \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0.$

注意： 所谓二重极限存在，是指点$M(x,y)$ **以任何方式**趋向于$M_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于某个确定的常数.

注意： 所谓二重极限存在，是指点$M(x,y)$ 以任何方式趋向于$M_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于某个确定的常数.

- 因此$M(x,y)$以某一特殊方式，如沿一条定直线或沿一条定曲线趋向于$M_0(x_0,y_0)$时，即使函数无限趋向于某一确定值，也不能断定函数的极限存在.

注意： 所谓二重极限存在, 是指点$M(x,y)$ 以任何方式趋向于$M_0(x_0,y_0)$ 时, 函数都无限接近于某个确定的常数.

- 因此$M(x,y)$以某一特殊方式, 如沿一条定直线或沿一条定曲线趋向于$M_0(x_0,y_0)$时, 即使函数无限趋向于某一确定值, 也不能断定函数的极限存在.
- 如果点$M(x,y)$ 沿不同路径趋向于$M_0(x_0,y_0)$ 时, 函数趋向于不同的值, 那么就可断定函数的极限不存在.

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y = kx$, 则

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y = kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2}$

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y = kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化,

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{kx^2}{x^2+kx^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

例5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

例5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明: 取$y=kx^3$, 则

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

例5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明: 取$y=kx^3$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}$

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

例5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明: 取$y=kx^3$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

例5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明: 取$y=kx^3$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化,

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在?

解: 取$y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{kx^2}{x^2+kx^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

例5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明: 取$y=kx^3$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6} = \dfrac{k}{1+k^2}$,

其值随k 的不同而变化, 故极限不存在.

多元函数的连续性

多元函数的连续性

定义2.4 (二元连续函数)

设二元数量值函数$f(x,y)$ 定义在(x_0,y_0) 的某一邻域$U(x_0,y_0)$ 内, 若

多元函数的连续性

定义2.4 (二元连续函数)

设二元数量值函数$f(x,y)$ 定义在(x_0,y_0) 的某一邻域$U(x_0,y_0)$ 内, 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

多元函数的连续性

定义2.4 (二元连续函数)

设二元数量值函数$f(x,y)$ 定义在(x_0,y_0) 的某一邻域$U(x_0,y_0)$ 内, 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称函数f 在点(x_0,y_0) 处连续, (x_0,y_0) 称为连续点,

多元函数的连续性

定义2.4 (二元连续函数)

设二元数量值函数$f(x,y)$ 定义在(x_0,y_0) 的某一邻域$U(x_0,y_0)$ 内, 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数f 在点(x_0,y_0) 处连续, (x_0,y_0) 称为连续点,

否则, 称f 在(x_0,y_0) 处间断, (x_0,y_0) 称为间断点.

多元函数的连续性

定义2.4 (二元连续函数)

设二元数量值函数$f(x,y)$ 定义在(x_0,y_0) 的某一邻域$U(x_0,y_0)$ 内, 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数f 在点(x_0,y_0) 处连续, (x_0,y_0) 称为连续点,

否则, 称f 在(x_0,y_0) 处间断, (x_0,y_0) 称为间断点.

如果$f(x,y)$ 在区域D 中每一点处都连续, 则称f 在区域D 内连续, f 是D 内的连续函数, 记为$f\in C_D$.

- 由连续的定义和极限的运算法则可知:

- 由连续的定义和极限的运算法则可知:

多元连续函数的和, 差, 积, 商(在分母不为零处) 均为连续函数;

多元连续函数的复合函数也是连续函数.

- 由连续的定义和极限的运算法则可知:

多元连续函数的和, 差, 积, 商(在分母不为零处) 均为连续函数;

多元连续函数的复合函数也是连续函数.

- 由基本初等函数, 经过有限次四则运算和复合步骤所构成的, 并能用一个解析式子所表示的多元函数称为多元初等函数.

- 由连续的定义和极限的运算法则可知:

多元连续函数的和, 差, 积, 商(在分母不为零处) 均为连续函数;

多元连续函数的复合函数也是连续函数.

- 由基本初等函数, 经过有限次四则运算和复合步骤所构成的, 并能用一个解析式子所表示的多元函数称为多元初等函数.

结论: 一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的.

- 由连续的定义和极限的运算法则可知:

多元连续函数的和, 差, 积, 商(在分母不为零处) 均为连续函数;

多元连续函数的复合函数也是连续函数.

- 由基本初等函数, 经过有限次四则运算和复合步骤所构成的, 并能用一个解析式子所表示的多元函数称为多元初等函数.

结论: 一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的.

求多元初等函数在定义域内某点的极限值, 就是求该点处的函数值.

例如：函数 $z = \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

例如：函数 $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在平面$\mathbf{R}^2$ 上除了圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点之外连续.

例如：函数 $z = \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 在平面$\mathbf{R}^2$ 上除了圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点之外连续.

函数 $u = \ln \dfrac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$

例如：函数 $z = \sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在平面$\mathbf{R}^2$ 上除了圆周

$x^2+y^2=1$ 上的点之外连续.

函数 $u = \ln\dfrac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ 在其定义域

$D=\{(x,y,z)|(x,y,z)\neq(a,b,c)\}$ 上连续.

例如：函数 $z = \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 在平面$\mathbf{R}^2$ 上除了圆周

$x^2 + y^2 = 1$ 上的点之外连续.

函数 $u = \ln \dfrac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ 在其定义域

$D = \{(x, y, z) | (x, y, z) \neq (a, b, c)\}$ 上连续.

- 二元函数的极限和连续性概念可以推广到$n(n > 2)$ 元数量值函数与向量值函数，略.

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在$(0,0)$ 处的连续性.

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$ 处的连续性.

解: 设$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$, 则

例1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性.

解: 设 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|<2\rho,$$

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$ 处的连续性.

解: 设$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$, 则

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|<2\rho,$$

且$\lim\limits_{\rho\to0}\rho=0$, 故由夹逼定理知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.

例1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性.

解: 设 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$, 则

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|<2\rho,$$

且 $\lim\limits_{\rho\to0}\rho=0$, 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.

或解: 因为 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$ 处的连续性.

解: 设$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|<2\rho,$$

且$\lim\limits_{\rho\to0}\rho=0$, 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.

或解: 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$$|f(x,y)-f(0,0)|<2\rho<\varepsilon,$$

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$ 处的连续性.

解: 设$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|<2\rho,$$

且$\lim\limits_{\rho\to0}\rho=0$, 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.

或解: 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$$|f(x,y)-f(0,0)|<2\rho<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$,

例1. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$ 处的连续性.

解: 设$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|<2\rho,$$

且$\lim\limits_{\rho\to0}\rho=0$, 故由夹逼定理知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.

或解: 因为$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$$|f(x,y)-f(0,0)|<2\rho<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, 故$f$在$(0,0)$处连续.

例2. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$的连续性.

例2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 的连续性.

解: 当 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

例2. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$的连续性.

解: 当(x,y) 沿直线$y=x$ 趋向于$(0,0)$ 时,

$$\lim_{y=x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

例2. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$的连续性.

解: 当(x,y) 沿直线$y=x$ 趋向于$(0,0)$ 时,

$$\lim_{y=x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

当(x,y)沿曲线$y=\sqrt{x}$趋向于$(0,0)$时,

例2. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$

的连续性.

解: 当(x,y) 沿直线$y=x$ 趋向于$(0,0)$ 时,

$$\lim_{y=x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

当(x,y)沿曲线$y=\sqrt{x}$趋向于$(0,0)$时,

$$\lim_{y=\sqrt{x}\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

例2. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$的连续性.

解: 当(x,y) 沿直线$y=x$ 趋向于$(0,0)$ 时,

$$\lim_{y=x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

当(x,y)沿曲线$y=\sqrt{x}$趋向于$(0,0)$时,

$$\lim_{y=\sqrt{x}\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在,

例2. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$的连续性.

解: 当(x,y) 沿直线$y=x$ 趋向于$(0,0)$ 时,

$$\lim_{y=x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

当(x,y)沿曲线$y=\sqrt{x}$趋向于$(0,0)$时,

$$\lim_{y=\sqrt{x}\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

$\therefore\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在, 故$f$在$(0,0)$处不连续.

有界闭区域上多元函数的性质

有界闭区域上多元函数的性质

定理2.1

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是有界闭区域，$f : A \to \mathbf{R}$ 是A 上的连续函数，

有界闭区域上多元函数的性质

定理2.1

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是有界闭区域, $f : A \to \mathbf{R}$ 是A 上的连续函数,

(1) 有界性定理: f 在A 上有界;

有界闭区域上多元函数的性质

定理2.1

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是有界闭区域，$f : A \to \mathbf{R}$ 是A 上的连续函数，

(1) 有界性定理：f 在A 上有界；

(2) 最大值最小值定理：f 在A 上能取到它的最大值和最小值.

有界闭区域上多元函数的性质

定理2.1

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是有界闭区域, $f : A \to \mathbf{R}$ 是A 上的连续函数,

(1) 有界性定理: f 在A 上有界;

(2) 最大值最小值定理: f 在A 上能取到它的最大值和最小值.

定理2.2 (介值定理)

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一有界闭域, $f : A \to \mathbf{R}$ 在A 上连续, m 与M 分别是f 在A 上的最小值与最大值. 如果常数μ 是介于m 与M 之间的任一数, 即$m \leqslant \mu \leqslant M$, 则必存在$\boldsymbol{x}_0 \in A$, 使得$f(\boldsymbol{x}_0) = \mu$.

定理2.3 (一致连续性)

定理2.3 (一致连续性)

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一有界闭域, $f : A \to \mathbf{R}$ 是A 上的连续函数,

则f 在A 上一致连续, 即

定理2.3 (一致连续性)

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一有界闭域, $f: A \to \mathbf{R}$ 是A 上的连续函数,

则f 在A 上一致连续, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{使得} \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in A \text{ 时, 恒有}$$

定理2.3 (一致连续性)

设$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一有界闭域, $f : A \to \mathbf{R}$ 是A 上的连续函数,

则f 在A 上一致连续, 即

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ 使得$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in A$ 时, 恒有

当$\| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \| < \delta$ 时, 恒有$|f(x, y) - a| < \varepsilon$ 成立.