工科数学分析

贺丹（东南大学）

第三节 平面与直线

本节主要内容:

第三节 平面与直线

本节主要内容:

- 平面的方程

第三节 平面与直线

本节主要内容:

- 平面的方程
- 直线的方程

第三节 平面与直线

本节主要内容：

- 平面的方程
- 直线的方程
- 与平面直线相关的问题

空间的曲面和曲线可以看作是满足一定条件的点的轨迹.

空间的曲面和曲线可以看作是满足一定条件的点的轨迹.

若曲面S与三元方程$F(x,y,z)$有下述关系:

空间的曲面和曲线可以看作是满足一定条件的点的轨迹.

若曲面S与三元方程$F(x,y,z)$有下述关系:

- 曲面S上的点的坐标都满足方程

$$F(x,y,z)=0;$$

空间的曲面和曲线可以看作是满足一定条件的点的轨迹.

若曲面S与三元方程$F(x,y,z)$有下述关系:

- 曲面S上的点的坐标都满足方程

$$F(x,y,z)=0;$$

- 坐标满足方程$F(x,y,z)=0$ 的点都在曲面S上.

空间的曲面和曲线可以看作是满足一定条件的点的轨迹.

若曲面S与三元方程$F(x,y,z)$有下述关系:

- 曲面S上的点的坐标都满足方程

$$F(x,y,z)=0;$$

- 坐标满足方程$F(x,y,z)=0$ 的点都在曲面S上.

则方程$F(x,y,z)=0$ 称为曲面S 的**方程**,

空间的曲面和曲线可以看作是满足一定条件的点的轨迹.

若曲面S与三元方程$F(x,y,z)$有下述关系:

- 曲面S上的点的坐标都满足方程

$$F(x,y,z)=0;$$

- 坐标满足方程$F(x,y,z)=0$ 的点都在曲面S上.

则方程$F(x,y,z)=0$ 称为曲面S 的方程,

曲面S称为方程$F(x,y,z)=0$ 的图形.

一、平面的方程

一、平面的方程

1、平面的点法式方程

一、平面的方程

1、平面的点法式方程

法向量 与平面垂直的非零向量.

一、平面的方程

1、平面的点法式方程

法向量 与平面垂直的非零向量.

设平面π过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$是平面π的法向量, 求平面π的方程.

一、平面的方程

1、平面的点法式方程

法向量 与平面垂直的非零向量.

设平面π过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$是平面π的法向量, 求平面π的方程.

解: 设$M(x, y, z)$为平面π上的

任一点, 作向量$\overrightarrow{M_0M}$,

一、平面的方程

1、平面的点法式方程

法向量 与平面垂直的非零向量.

设平面π过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$是平面π的法向量, 求平面π的方程.

解：设$M(x, y, z)$为平面π上的

任一点, 作向量$\overrightarrow{M_0M}$,

则$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, 即$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$.

一、平面的方程

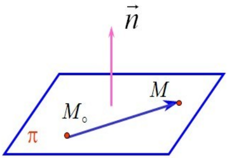
1、平面的点法式方程

法向量 与平面垂直的非零向量.

设平面π过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$是平面π的法向量, 求平面π的方程.

解: 设$M(x, y, z)$为平面π上的任一点, 作向量$\overrightarrow{M_0M}$,

则$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, 即$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$.



一、平面的方程

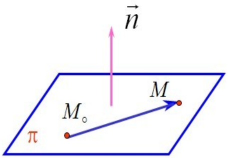
1、平面的点法式方程

法向量 与平面垂直的非零向量.

设平面π过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$是平面π的法向量, 求平面π的方程.

解: 设$M(x, y, z)$为平面π上的任一点, 作向量$\overrightarrow{M_0M}$,

则$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, 即$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$.



因为 $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$,

一、平面的方程

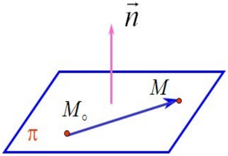
1、平面的点法式方程

法向量 与平面垂直的非零向量.

设平面π过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$是平面π的法向量, 求平面π的方程.

解: 设$M(x, y, z)$为平面π上的任一点, 作向量$\overrightarrow{M_0M}$,

则$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, 即$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$.



因为 $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\vec{n} = \{A, B, C\}$,

所以 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 为所求方程.

- 方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$称为平面$\pi$的**点法式方程**.

- 方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$称为平面$\pi$的**点法式方程**.

例1. 求过点$(2,1,1)$且垂直于向量$\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$的平面方程.

- 方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$称为平面$\pi$的**点法式方程**.

例1. 求过点$(2,1,1)$且垂直于向量$\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$的平面方程.

解：取$\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=\{1,2,3\}$为所求平面的法向量,

- 方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$称为平面$\pi$的**点法式方程**.

例1. 求过点$(2,1,1)$且垂直于向量$\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$的平面方程.

解: 取$\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=\{1,2,3\}$为所求平面的法向量,

则由平面的点法式方程, 得所求平面的方程为

- 方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$称为平面$\pi$的点法式方程.

例1. 求过点$(2,1,1)$且垂直于向量$\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$的平面方程.

解: 取$\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=\{1,2,3\}$为所求平面的法向量,

则由平面的点法式方程, 得所求平面的方程为

$$(x-2)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

- 方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$称为平面$\pi$的点法式方程.

例1. 求过点$(2,1,1)$且垂直于向量$\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$的平面方程.

解: 取$\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=\{1,2,3\}$为所求平面的法向量,

则由平面的点法式方程, 得所求平面的方程为

$$(x-2)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z-7=0.$$

2. 平面的一般方程

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$，则有

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$, 则有$Ax+By+Cz+D=0$.

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$, 则有$Ax+By+Cz+D=0.$

这是x,y,z的一次方程, 所以平面可用x,y,z的一次方程来表示;

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$, 则有$Ax+By+Cz+D=0.$

这是x,y,z的一次方程, 所以平面可用x,y,z的一次方程来表示;

另一方面, 当A,B,C不全为零时, 取上述方程的一组解

(x_0,y_0,z_0),

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$，则有$Ax+By+Cz+D=0.$

这是x,y,z的一次方程, 所以平面可用x,y,z的一次方程来表示;

另一方面, 当A,B,C不全为零时, 取上述方程的一组解

(x_0,y_0,z_0), 则有$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$， 则有$Ax+By+Cz+D=0.$

这是x,y,z的一次方程, 所以平面可用x,y,z的一次方程来表示;

另一方面, 当A,B,C不全为零时, 取上述方程的一组解

(x_0,y_0,z_0), 则有$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$

两式相减可得: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$, 则有$Ax+By+Cz+D=0.$

这是x,y,z的一次方程, 所以平面可用x,y,z的一次方程来表示;

另一方面, 当A,B,C不全为零时, 取上述方程的一组解

(x_0,y_0,z_0), 则有$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$

两式相减可得: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$

它表示过点(x_0,y_0,z_0), 且以$\vec{n}=\{A,B,C\}$为法向量的平面.

2. 平面的一般方程

将方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$展开得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令$(-Ax_0-By_0-Cz_0)=D$, 则有$Ax+By+Cz+D=0.$

这是x,y,z的一次方程, 所以平面可用x,y,z的一次方程来表示;

另一方面, 当A,B,C不全为零时, 取上述方程的一组解

(x_0,y_0,z_0), 则有$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$

两式相减可得: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$

它表示过点(x_0,y_0,z_0), 且以$\vec{n}=\{A,B,C\}$为法向量的平面.

- 方程$Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的**一般方程**.

注意： 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

注意： 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

注意： 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

- 下面讨论方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的特殊情况:

注意：在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

- 下面讨论方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的特殊情况:

  - 通过原点的平面

注意: 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线;

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

▶ 下面讨论方程$Ax+By+Cz+D=0$ 的特殊情况:

- **通过原点的平面**

  当$D=0$时, 方程$Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面.

注意： 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

- 下面讨论方程$Ax+By+Cz+D=0$ 的特殊情况:

  - **通过原点的平面**

    当$D=0$时, 方程$Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面.

  - **平行于坐标轴的平面**

注意： 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

▶ 下面讨论方程$Ax+By+Cz+D=0$ 的特殊情况:

- **通过原点的平面**

  当$D=0$时, 方程$Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面.

- **平行于坐标轴的平面**

  当$A=0$时, 方程$By+Cz+D=0$ 表示平行于Ox轴的平面;

注意：在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

- 下面讨论方程$Ax+By+Cz+D=0$ 的特殊情况:

  - 通过原点的平面

    当$D=0$时, 方程$Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面.

  - 平行于坐标轴的平面

    当$A=0$时, 方程$By+Cz+D=0$ 表示平行于Ox轴的平面;

    当$B=0$时, 方程$Ax+Cz+D=0$ 表示平行于Oy轴的平面;

注意： 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；

在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面.

- 下面讨论方程$Ax+By+Cz+D=0$ 的特殊情况:

  - **通过原点的平面**

    当$D=0$时, 方程$Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面.

  - **平行于坐标轴的平面**

    当$A=0$时, 方程$By+Cz+D=0$ 表示平行于Ox轴的平面;

    当$B=0$时, 方程$Ax+Cz+D=0$ 表示平行于Oy轴的平面;

    当$C=0$时, 方程$Ax+By+D=0$ 表示平行于Oz轴的平面.

- 通过坐标轴的平面

- **通过坐标轴的平面**

  当$A = D = 0$时, 方程$By + Cz = 0$ 表示通过Ox轴的平面;

- 通过坐标轴的平面

  当$A = D = 0$时，方程$By + Cz = 0$ 表示通过Ox轴的平面;

  当$B = D = 0$时，方程$Ax + Cz = 0$ 表示通过Oy轴的平面;

- **通过坐标轴的平面**

  当$A=D=0$时，方程$By+Cz=0$ 表示通过Ox轴的平面;

  当$B=D=0$时，方程$Ax+Cz=0$ 表示通过Oy轴的平面;

  当$C=D=0$时，方程$Ax+By=0$ 表示通过Oz轴的平面.

- 通过坐标轴的平面

当$A = D = 0$时, 方程$By + Cz = 0$ 表示通过Ox轴的平面;

当$B = D = 0$时, 方程$Ax + Cz = 0$ 表示通过Oy轴的平面;

当$C = D = 0$时, 方程$Ax + By = 0$ 表示通过Oz轴的平面.

- 平行于坐标平面的平面

- **通过坐标轴的平面**

  当$A=D=0$时, 方程$By+Cz=0$ 表示通过Ox轴的平面;

  当$B=D=0$时, 方程$Ax+Cz=0$ 表示通过Oy轴的平面;

  当$C=D=0$时, 方程$Ax+By=0$ 表示通过Oz轴的平面.

- **平行于坐标平面的平面**

  当$A=B=0$时, 方程$Cz+D=0$ 表示平行于Oxy面的平面;

- 通过坐标轴的平面

当$A=D=0$时, 方程$By+Cz=0$ 表示通过Ox轴的平面;

当$B=D=0$时, 方程$Ax+Cz=0$ 表示通过Oy轴的平面;

当$C=D=0$时, 方程$Ax+By=0$ 表示通过Oz轴的平面.

- 平行于坐标平面的平面

当$A=B=0$时, 方程$Cz+D=0$ 表示平行于Oxy面的平面;

当$A=C=0$时, 方程$By+D=0$ 表示平行于Oxz面的平面;

- 通过坐标轴的平面

当$A=D=0$时，方程$By+Cz=0$ 表示通过Ox轴的平面;

当$B=D=0$时，方程$Ax+Cz=0$ 表示通过Oy轴的平面;

当$C=D=0$时，方程$Ax+By=0$ 表示通过Oz轴的平面.

- 平行于坐标平面的平面

当$A=B=0$时，方程$Cz+D=0$ 表示平行于Oxy面的平面;

当$A=C=0$时，方程$By+D=0$ 表示平行于Oxz面的平面;

当$B=C=0$时，方程$Ax+D=0$ 表示平行于Oyz面的平面.

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

解: 向量$\vec{k}$垂直于Oxy面,

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

解: 向量$\vec{k}$垂直于Oxy面, 故取$\vec{k}=\{0,0,1\}$为法向量,

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

解: 向量$\vec{k}$垂直于Oxy面, 故取$\vec{k}=\{0,0,1\}$为法向量,

又因为Oxy面过原点$(0,0,0)$, 所以Oxy面的方程为

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

解: 向量$\vec{k}$垂直于Oxy面, 故取$\vec{k}=\{0,0,1\}$为法向量,

又因为Oxy面过原点$(0,0,0)$, 所以Oxy面的方程为

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0,$$

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

解: 向量$\vec{k}$垂直于Oxy面, 故取$\vec{k}=\{0,0,1\}$为法向量,

又因为Oxy面过原点$(0,0,0)$, 所以Oxy面的方程为

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0,$$

即 Oxy面的方程为 $z=0.$

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

解: 向量$\vec{k}$垂直于Oxy面, 故取$\vec{k}=\{0,0,1\}$为法向量,

又因为Oxy面过原点$(0,0,0)$, 所以Oxy面的方程为

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0,$$

即 Oxy面的方程为 $z=0$.

同理, Oyz面的方程为 $x=0$.

例2. 求Oxy坐标平面的方程.

解: 向量$\vec{k}$垂直于Oxy面, 故取$\vec{k}=\{0,0,1\}$为法向量,

又因为Oxy面过原点$(0,0,0)$, 所以Oxy面的方程为

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0,$$

即 Oxy面的方程为 $z=0.$

同理, Oyz面的方程为 $x=0.$

Oxz面的方程为 $y=0.$

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1), M_2(0,1,-1)$且与平面

π_2： $x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1), M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2: \ x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1), M_2(0,1,-1)$且与平面

π_2： $x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0,$

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2: x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2:\ x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore\ A+B+C+D=0,\ B-C+D=0.$

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2: \ x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解: (法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore \ A+B+C+D=0, \ B-C+D=0.$

π_1的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$, π_2法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2: \ x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore \ A+B+C+D=0, \ B-C+D=0.$

π_1的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$, π_2法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

由题知$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$,

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2: \ x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore \ A+B+C+D=0, \ B-C+D=0.$

π_1的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$, π_2法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

由题知$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, 则$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=0$,

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2: \ x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore \ A+B+C+D=0, \ B-C+D=0.$

π_1的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$, π_2法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

由题知$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, 则$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=0$, 即$A+B+C=0$,

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

π_2: $x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解: (法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore$ $A+B+C+D=0$, $B-C+D=0$.

π_1的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$, π_2法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 则$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$, 即$A+B+C=0$,

由上面式子可以求得$D=0, B=C, A=-2C$,

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面

$\pi_2: \ x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore \ A+B+C+D=0, \ B-C+D=0.$

π_1的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$, π_2法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 则$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$, 即$A+B+C=0$,

由上面式子可以求得$D=0, B=C, A=-2C$,

故平面π_1的方程为$-2Cx+Cy+Cz=0$,

例3. 平面π_1过点$M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$且与平面 π_2: $x+y+z=0$垂直，求平面π_1的方程.

解：(法1 利用一般方程求解)

设平面π_1的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

$\because$ 点M_1和M_2在平面π_1上,

$\therefore$ $A+B+C+D=0$, $B-C+D=0$.

π_1的法向量为$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$, π_2法向量为$\vec{n}_2=\{1,1,1\}$,

由题知$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, 则$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, 即$A+B+C=0$,

由上面式子可以求得$D=0, B=C, A=-2C$,

故平面π_1的方程为$-2Cx+Cy+Cz=0$, 即$2x-y-z=0$.

(方法2 利用点法式方程求解)

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且 $\overrightarrow{M_1 M_2} = \{-1, 0, -2\}$,

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$,

因为 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, 故可取

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$,

因为 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, 故可取

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \times \overrightarrow{M_1M_2}$$

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$,

因为 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, 故可取

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \{-2, 1, 1\},$$

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$,

因为 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, 故可取

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \{-2, 1, 1\},$$

取定点为$M_1(1, 1, 1)$代入点法式, 得平面π_1的方程:

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$,

因为 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, 故可取

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \{-2, 1, 1\},$$

取定点为$M_1(1, 1, 1)$代入点法式, 得平面π_1的方程:

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0,$$

(方法2 利用点法式方程求解)

设平面π_1的法向量为$\vec{n}_1 = \{A, B, C\}$,

已知π_2的法向量为$\vec{n}_2 = \{1, 1, 1\}$, 且 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$,

因为 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, 故可取

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \{-2, 1, 1\},$$

取定点为$M_1(1,1,1)$代入点法式, 得平面π_1的方程:

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0, \text{ 即 } 2x - y - z = 0.$$

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解：设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$，

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: 设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$,

平面$5x-4y-2z+3=0$ 的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$,

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解：设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$，

平面$5x-4y-2z+3=0$ 的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{i}$, $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 因此可取$\vec{n}_1$为:

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解：设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$，

平面$5x-4y-2z+3=0$ 的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{i}$, $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 因此可取$\vec{n}_1$为:

$$\vec{n}_1=\vec{n}_2\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -4 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,-2,4\},$$

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解：设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$，

平面$5x-4y-2z+3=0$ 的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{i}$, $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 因此可取$\vec{n}_1$为:

$$\vec{n}_1=\vec{n}_2\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -4 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,-2,4\},$$

取定点为$(0,0,0)$, 代入点法式, 得所求平面的方程:

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: 设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$,

平面$5x-4y-2z+3=0$ 的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{i}$, $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 因此可取$\vec{n}_1$为:

$$\vec{n}_1=\vec{n}_2\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -4 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,-2,4\},$$

取定点为$(0,0,0)$, 代入点法式, 得所求平面的方程:

$$0(x-0)-2(y-0)+(z-0)=0,$$

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: 设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$,

平面$5x-4y-2z+3=0$ 的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{i}$, $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 因此可取$\vec{n}_1$为:

$$\vec{n}_1=\vec{n}_2\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&-4&-2\\1&0&0\end{vmatrix}=\{0,-2,4\},$$

取定点为$(0,0,0)$, 代入点法式, 得所求平面的方程:

$0(x-0)-2(y-0)+(z-0)=0$, 即$y-2z=0$.

例4. 求通过Ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: 设所求平面的方程的法向量为$\vec{n}_1$,

平面$5x-4y-2z+3=0$ 的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$,

由题知$\vec{n}_1\perp\vec{i}$, $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 因此可取$\vec{n}_1$为:

$$\vec{n}_1=\vec{n}_2\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&-4&-2\\1&0&0\end{vmatrix}=\{0,-2,4\},$$

取定点为$(0,0,0)$, 代入点法式, 得所求平面的方程:

$0(x-0)-2(y-0)+(z-0)=0$, 即$y-2z=0$.

说明: 此题也可以利用平面的一般方程求解.

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解：(方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0$,

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: (方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{0,B,C\}$,

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: (方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{0,B,C\}$,

平面$5x-4y-2z+3=0$的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$.

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解：(方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0,$

其法向量为$\vec{n}_1=\{0,B,C\},$

平面$5x-4y-2z+3=0$的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}.$

$\because\ \vec{n}_1\perp\vec{n}_2,$

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: (方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{0,B,C\}$,

平面$5x-4y-2z+3=0$的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$.

$\because\ \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$,

$\therefore\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-4B-2C=0$,

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: (方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{0,B,C\}$,

平面$5x-4y-2z+3=0$的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$.

$\because\ \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$,

$\therefore\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-4B-2C=0$, 即$C=-2B$.

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解：(方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{0,B,C\}$,

平面$5x-4y-2z+3=0$的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$.

$\because\ \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$,

$\therefore\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-4B-2C=0$, 即$C=-2B$.

$\therefore\ By-2Bz=0$,

例4. 求通过ox 轴且垂直于平面$5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解: (方法2) 设所求平面的方程为$By+Cz=0$,

其法向量为$\vec{n}_1=\{0,B,C\}$,

平面$5x-4y-2z+3=0$的法向量为$\vec{n}_2=\{5,-4,-2\}$.

$\because\ \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$,

$\therefore\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-4B-2C=0$, 即$C=-2B$.

$\therefore\ By-2Bz=0$,

即所求平面的方程为$y-2z=0$.

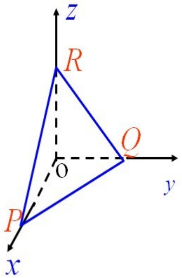
3. 平面的截距式方程

3. 平面的截距式方程

设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.

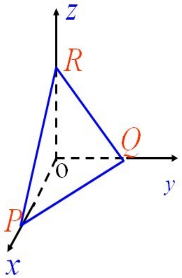
3. 平面的截距式方程

设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.



3. 平面的截距式方程

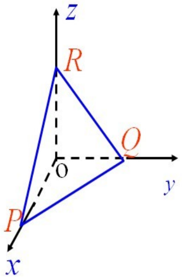
设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.



设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

3. 平面的截距式方程

设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.

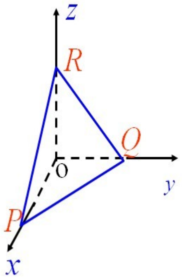


设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

则$Aa+D=0$, $Bb+D=0, Cc+D=0$,

3. 平面的截距式方程

设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.



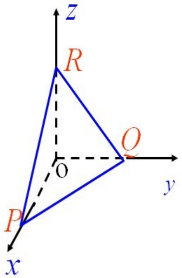
设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

则$Aa+D=0$, $Bb+D=0, Cc+D=0$,

$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c},$$

3. 平面的截距式方程

设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.



设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

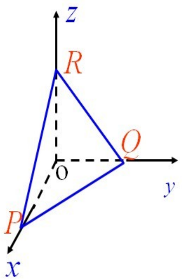
则$Aa+D=0$, $Bb+D=0, Cc+D=0$,

$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c},$$

$$\therefore -\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0,$$

3. 平面的截距式方程

设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.



设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

则$Aa+D=0$, $Bb+D=0, Cc+D=0$,

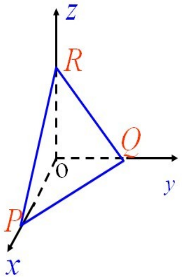
$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c},$$

$$\therefore -\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0,$$

化简得 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ——平面的截距式方程

3. 平面的截距式方程

设平面与坐标轴分别交于$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点, 其中$a\cdot b\cdot c\neq 0$, 试确定此平面的方程.



设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

则$Aa+D=0$, $Bb+D=0, Cc+D=0$,

$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c},$$

$$\therefore -\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0,$$

化简得 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ ——平面的截距式方程

a,b,c 称为此平面在Ox,Oy,Oz 轴上的截距.

4. 平面的三点式方程

4. 平面的三点式方程

已知平面上不共线的三点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求平面方程.

4. 平面的三点式方程

已知平面上不共线的三点$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 求平面方程.

解：设$M(x, y, z)$为平面上任一点,

4. 平面的三点式方程

已知平面上不共线的三点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求平面方程.

解: 设$M(x,y,z)$为平面上任一点,作向量$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$,

4. 平面的三点式方程

已知平面上不共线的三点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求平面方程.

解：设$M(x,y,z)$为平面上任一点,作向量$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$,

则 $\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$,

4. 平面的三点式方程

已知平面上不共线的三点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求平面方程.

解：设$M(x,y,z)$为平面上任一点,作向量$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$,

则 $\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$,

即
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

4. 平面的三点式方程

已知平面上不共线的三点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求平面方程.

解：设$M(x,y,z)$为平面上任一点,作向量$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$,

则 $\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$,

即 $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

——平面的三点式方程

二、直线的方程

二、直线的方程

以下任何一种情形，都能唯一确定一条直线：

二、直线的方程

以下任何一种情形，都能唯一确定一条直线：

1. 作为两个相交平面的交线；

二、直线的方程

以下任何一种情形，都能唯一确定一条直线：

1. 作为两个相交平面的交线；
2. 经过一个点，且平行于一个非零向量；

二、直线的方程

以下任何一种情形，都能唯一确定一条直线：

1. 作为两个相交平面的交线；
2. 经过一个点，且平行于一个非零向量；
3. 经过两个点.

1. 直线的一般方程

1. 直线的一般方程

当直线L作为两个相交平面

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

的交线时,

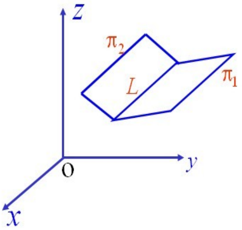
1. 直线的一般方程

当直线L作为两个相交平面

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

的交线时,

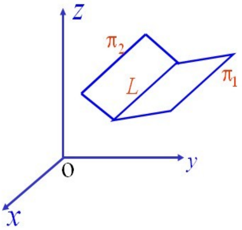


1. 直线的一般方程

当直线L作为两个相交平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



的交线时，

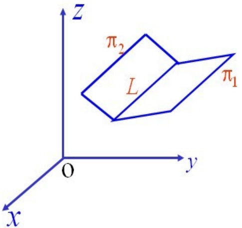
方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ 就表示交线L的方程.

1. 直线的一般方程

当直线L作为两个相交平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



的交线时,

方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ 就表示交线L的方程.

——空间直线L的一般方程

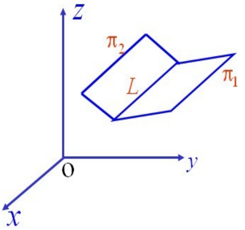
1. 直线的一般方程

当直线L作为两个相交平面

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

的交线时,



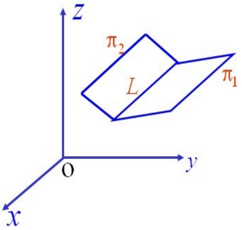
方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ 就表示交线L的方程.

——空间直线L的**一般方程**

例如：方程组$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$，$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$，$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

1. 直线的一般方程

当直线L作为两个相交平面



$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

的交线时,

方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ 就表示交线L的方程.

——空间直线L的一般方程

例如：方程组$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

分别表示x轴，y轴，z轴.

2. 直线的标准方程(或点向式方程)

2. 直线的标准方程(或点向式方程)

与直线平行的非零向量称为直线的**方向向量**.

2. 直线的标准方程(或点向式方程)

与直线平行的非零向量称为直线的

方向向量.

设直线L过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{l, m, n\}$

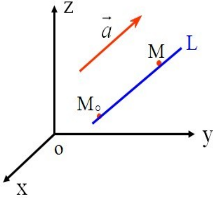
是直线L的方向向量, $M(x, y, z)$是

直线L上的任何一点,

2. 直线的标准方程(或点向式方程)

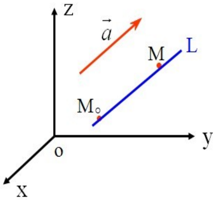
与直线平行的非零向量称为直线的**方向向量**.

设直线L过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{l, m, n\}$是直线L的方向向量, $M(x, y, z)$是直线L上的任何一点,



2. 直线的标准方程(或点向式方程)

与直线平行的非零向量称为直线的**方向向量**.



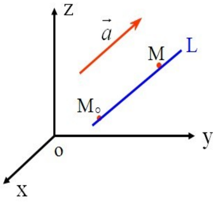
设直线L过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{l, m, n\}$ 是直线L的方向向量, $M(x, y, z)$是直线L上的任何一点,

则 $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, 且$\overrightarrow{M_0M} // \vec{a}$,

2. 直线的标准方程(或点向式方程)

与直线平行的非零向量称为直线的

方向向量.



设直线L过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{l, m, n\}$

是直线L的方向向量, $M(x, y, z)$是

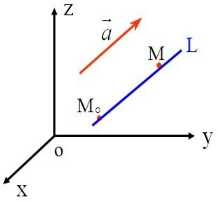
直线L上的任何一点,

则 $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, 且$\overrightarrow{M_0M} // \vec{a}$,

由两向量平行的充要条件可得 $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

2. 直线的标准方程(或点向式方程)

与直线平行的非零向量称为直线的**方向向量**.



设直线L过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{l, m, n\}$是直线L的方向向量, $M(x, y, z)$是直线L上的任何一点,

则 $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, 且$\overrightarrow{M_0M} // \vec{a}$,

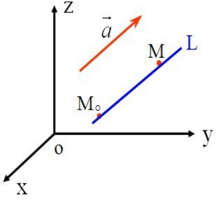
由两向量平行的充要条件可得 $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

——直线的**标准方程**或**点向式方程**

2. 直线的标准方程(或点向式方程)

与直线平行的非零向量称为直线的

方向向量.



设直线L过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{l, m, n\}$

是直线L的方向向量, $M(x, y, z)$是

直线L上的任何一点,

则 $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, 且$\overrightarrow{M_0M} // \vec{a}$,

由两向量平行的充要条件可得 $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

——直线的**标准方程**或**点向式方程**

直线的任一方向向量$\vec{a}$的三个坐标l, m, n称为直线的一组**方向数**.

显然，一直线的方向数有无穷多组，而其中任意两组方向数都对应成比例.

显然，一直线的方向数有无穷多组，而其中任意两组方向数都对应成比例.

- 对直线方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

显然，一直线的方向数有无穷多组，而其中任意两组方向数都对应成比例.

- 对直线方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$
  - 当l,m,n中有一个为零, 例如$l=0$, 而$m,n\neq 0$,

显然，一直线的方向数有无穷多组，而其中任意两组方向数都对应成比例.

- 对直线方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$
  - 当l,m,n中有一个为零，例如$l=0$，而$m,n\neq 0$，

    则上式应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$

显然，一直线的方向数有无穷多组，而其中任意两组方向数都对应成比例.

- 对直线方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$
  - 当l,m,n中有一个为零, 例如$l=0$, 而$m,n\neq 0$,

    则上式应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$
  - 当l,m,n中有两个为零, 例如$l=m=0$, 而$n\neq 0$,

显然，一直线的方向数有无穷多组，而其中任意两组方向数都对应成比例.

- 对直线方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

  - 当l,m,n中有一个为零, 例如$l=0$, 而$m,n\neq 0$,

    则上式应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$

  - 当l,m,n中有两个为零, 例如$l=m=0$, 而$n\neq 0$,

    则上式应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$

3. 直线的参数方程

3. 直线的参数方程

在直线的一般方程中，设

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

3. 直线的参数方程

在直线的一般方程中，设

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

则有

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

3. 直线的参数方程

在直线的一般方程中，设

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

则有

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

——直线的参数方程.

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

  将方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

  将方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 写为两个等式联立可得,

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

  将方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 写为两个等式联立可得,

  即 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$ 为一般方程.

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

  将方程 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 写为两个等式联立可得,

  即 $\begin{cases} \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \\ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \end{cases}$ 为一般方程.

- 将一般方程化为点向式方程:

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

  将方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 写为两个等式联立可得,

  即 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$ 为一般方程.

- 将一般方程化为点向式方程:

  首先在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0),

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

  将方程$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$写为两个等式联立可得,

  即 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$ 为一般方程.

- 将一般方程化为点向式方程:

  首先在直线上任取一点(x_0,y_0,z_0)，直线的方向向量为

  $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2,$

直线的三种方程（点向式方程、参数方程和一般方程）在应用上各有方便之处, 因此需掌握它们相互转换的方法.

- 由直线的点向式方程容易导出参数方程;

  反之, 由参数方程显然能直接写出点向式方程.

- 把点向式方程化为一般方程:

  将方程$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$写为两个等式联立可得,

  即 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$ 为一般方程.

- 将一般方程化为点向式方程:

  首先在直线上任取一点(x_0, y_0, z_0)，直线的方向向量为

  $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$，其中$\vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$，$\vec{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$.

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解(方法1): 先求直线上的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解(方法1): 先求直线上的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,

令$z_0=0$, 可求得$x_0=-2, y_0=0$，则取点$M_0(-2,0,0)$.

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解(方法1): 先求直线上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

令 $z_0=0$, 可求得 $x_0=-2, y_0=0$，则取点 $M_0(-2,0,0)$.

再找出直线的方向向量 $\vec{a}$,

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解(方法1): 先求直线上的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,

令$z_0=0$, 可求得$x_0=-2, y_0=0$，则取点$M_0(-2,0,0)$.

再找出直线的方向向量$\vec{a}$,

由于两平面的交线与这两平面的法向量$\vec{n}_1=\{1,1,1\}$

和$\vec{n}_2=\{2,-1,3\}$都垂直,

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解(方法1): 先求直线上的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

令$z_0=0$, 可求得$x_0=-2, y_0=0$，则取点$M_0(-2,0,0)$.

再找出直线的方向向量$\vec{a}$,

由于两平面的交线与这两平面的法向量$\vec{n}_1=\{1,1,1\}$

和$\vec{n}_2=\{2,-1,3\}$都垂直,

故取 $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解(方法1): 先求直线上的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

令$z_0=0$, 可求得$x_0=-2, y_0=0$，则取点$M_0(-2,0,0)$.

再找出直线的方向向量$\vec{a}$,

由于两平面的交线与这两平面的法向量$\vec{n}_1=\{1,1,1\}$

和$\vec{n}_2=\{2,-1,3\}$都垂直,

故取 $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\{4,-1,-3\}$,

例5. 用点向式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解(方法1): 先求直线上的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,

令$z_0=0$, 可求得$x_0=-2, y_0=0$，则取点$M_0(-2,0,0)$.

再找出直线的方向向量$\vec{a}$,

由于两平面的交线与这两平面的法向量$\vec{n}_1=\{1,1,1\}$

和$\vec{n}_2=\{2,-1,3\}$都垂直,

$$\text{故取 } \vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\{4,-1,-3\},$$

$$\therefore \text{ 直线的点向式方程为 } \frac{x+2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

(方法2) 方程组$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$ 中分别消去y和x,

(方法2) 方程组 $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$ 中分别消去y和x,

得 $\begin{cases} 3x+4z+6=0, \\ 3y-z=0. \end{cases}$

(方法2) 方程组 $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$ 中分别消去y和x,

得 $\begin{cases} 3x+4z+6=0, \\ 3y-z=0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z=-\dfrac{3}{4}(x+2), \\ z=3y. \end{cases}$

(方法2) 方程组 $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$ 中分别消去y和x,

得 $\begin{cases} 3x+4z+6=0, \\ 3y-z=0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z=-\dfrac{3}{4}(x+2), \\ z=3y. \end{cases}$

写成连等式得点向式方程 $\dfrac{x+2}{-\frac{4}{3}}=3y=z$, 即

(方法2) 方程组$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$ 中分别消去y和x,

得$\begin{cases} 3x+4z+6=0, \\ 3y-z=0. \end{cases}$ 即$\begin{cases} z=-\dfrac{3}{4}(x+2), \\ z=3y. \end{cases}$

写成连等式得点向式方程 $\dfrac{x+2}{-\frac{4}{3}}=3y=z$, 即

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

(方法2) 方程组$\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$ 中分别消去y和x,

得$\begin{cases} 3x+4z+6=0, \\ 3y-z=0. \end{cases}$ 即$\begin{cases} z=-\dfrac{3}{4}(x+2), \\ z=3y. \end{cases}$

写成连等式得点向式方程 $\dfrac{x+2}{-\frac{4}{3}}=3y=z$, 即

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

令上式比值为t, 得直线的参数方程: $\begin{cases} x=-2+4t, \\ y=-t, \\ z=-3t. \end{cases}$

(方法3) 在直线上取两点$M_0(-2,0,0)$ 和$M_1(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,

(方法3) 在直线上取两点$M_0(-2,0,0)$ 和$M_1(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,

则直线的方向向量为$\overrightarrow{M_0M_1}=\{2,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\}$.

(方法3) 在直线上取两点$M_0(-2,0,0)$ 和$M_1(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,

则直线的方向向量为$\overrightarrow{M_0M_1}=\{2,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\}$.

$\therefore$ 直线的点向式方程$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{z}{-\frac{3}{2}}$,

(方法3) 在直线上取两点$M_0(-2,0,0)$ 和$M_1(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,

则直线的方向向量为$\overrightarrow{M_0M_1}=\{2,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\}$.

$\therefore$ 直线的点向式方程$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z}{-\frac{3}{2}}$, 即

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

(方法3) 在直线上取两点$M_0(-2,0,0)$ 和$M_1(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,

则直线的方向向量为$\overrightarrow{M_0M_1}=\{2,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\}$.

$\therefore$ 直线的点向式方程$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{z}{-\frac{3}{2}}$, 即

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

令上式比值为t, 得直线的参数方程: $\begin{cases} x=-2+4t, \\ y=-t, \\ z=-3t. \end{cases}$

4. 直线的向量式方程

4. 直线的向量式方程

在直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ 中，

4. 直线的向量式方程

在直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ 中，

若记 $\vec{r} = \{x, y, z\}, \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \vec{a} = \{l, m, n\},$

4. 直线的向量式方程

在直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ 中，

若记 $\vec{r} = \{x, y, z\}, \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \vec{a} = \{l, m, n\}$,

则有

4. 直线的向量式方程

在直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ 中，

若记 $\vec{r} = \{x, y, z\}, \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \vec{a} = \{l, m, n\}$,

则有

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$$

4. 直线的向量式方程

在直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ 中，

若记 $\vec{r} = \{x, y, z\}, \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \vec{a} = \{l, m, n\}$,

则有

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$$

——直线的向量式方程

5. 直线的两点式方程

5. 直线的两点式方程

求过点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$的直线的方程.

5. 直线的两点式方程

求过点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$的直线的方程.

解: 因为直线过点M_1, M_2,

5. 直线的两点式方程

求过点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$的直线的方程.

解: 因为直线过点M_1, M_2,

所以可取$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$为方向向量,

5. 直线的两点式方程

求过点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$的直线的方程.

解: 因为直线过点M_1, M_2,

所以可取$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$为方向向量,

故所求直线方程为

5. 直线的两点式方程

求过点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$的直线的方程.

解: 因为直线过点M_1, M_2,

所以可取$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$为方向向量,

故所求直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

5. 直线的两点式方程

求过点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的方程.

解: 因为直线过点M_1, M_2,

所以可取$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$为方向向量,

故所求直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

——直线的两点式方程