向量代数与空间解析几何

东 南 大 学 数 学 学 院

2020

目　录

第一章　向量代数与空间解析几何

微积分中的许多概念和原理都有直观的几何意义.将抽象的数学概念和原理与几何直观相结合，不仅可以加深对问题的理解，而且能进一步激发人们的想象力和创造能力.几何的方法是现代数学重要的组成部分，而向量是研究几何问题的有力工具.由于篇幅所限，本章只介绍向量的代数运算与多元函数微积分中常用的一些空间解析几何知识.

§1.1　向量及其运算

§1.1.1　向量的概念

现实世界里的量，按数学抽象可以分为两类：一类只有大小，如时间、长度、面积、体积、温度等等，这类量只需用一个实数表示，称为"**数量**"或"**标量**"；而另一类量则既有大小又有方向，如力、位移、速度、电场强度、磁场强度等等.19 世纪末英国物理学家吉布斯（Gibbs）和海维赛（Heaviside）就这类量引进了向量的概念.

定义1.1.1. *如果一个量既有大小（用一个非负实数表示）又有方向，则称这个量为***向量**.

在数学中，通常用规定了起点和终点的线段，即有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段由起点至终点的方向表示向量的方向，以A为起点B为终点的有向线段所表示的向量记为AB(如图1.1).向量也常用一个粗体字母或一个上面带有箭头的字母来表示，如$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{F}$或$\vec{a}$，$\vec{F}$等等.

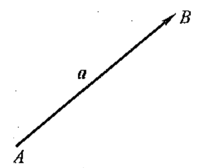

图 1.1

向量$\boldsymbol{a}$的大小称为$\boldsymbol{a}$的**模**(或**长度**)，也称为向量$\boldsymbol{a}$的**范数**，记为$|\boldsymbol{a}|$.

模为0的向量称为**零向量**，记为$\mathbf{0}$，零向量的方向是任意的，模为1的向量称为**单位向量**，与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量记为$\boldsymbol{a}_0$.

模为$|\boldsymbol{a}|$而方向与$\boldsymbol{a}$相反的向量称为$\boldsymbol{a}$的**负**(或**逆**)**向量**，记为$-\boldsymbol{a}$.

两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相同或相反，称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**平行**或**共线**，记为$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 显然，$\mathbf{0}$与任何向量$\boldsymbol{a}$都平行.

定义1.1.2. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个向量，如果$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相同，则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相等，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

由定义1.1.2可知，两个相等的向量，其起点未必是同一点.但因一个向量和它经过平行移动后所得的向量是相等的，所以为了讨论问题方便，我们常把几个有关向量的起点放在同一点来考虑.

§1.1.2　向量的线性运算

线性运算是向量最主要的一种运算，它包括向量的加法与数乘.

1)向量的加法与减法

向量的加法服从平行四边形法则：设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是任意两个向量，用$\vec{OA}$表示示$\boldsymbol{a}$，将$\boldsymbol{b}$的起点移至$O$点，并用$\vec{OB}$表示$\boldsymbol{b}$，然后以$\vec{OA}$ 和$\vec{OB}$为邻边作平行四边形$OACB$（图1.2），该平行四边形的对角线向量$\vec{OC}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$ 的和，记作$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 也可用三角形法则说明

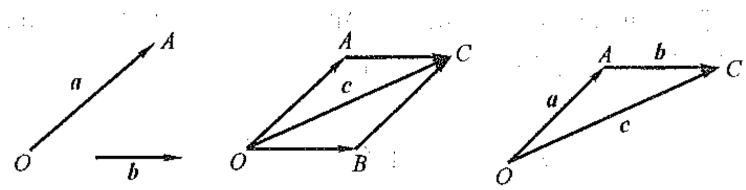

图 1.2

向量的加法：设$\boldsymbol{a}$为向量$\vec{OA}$，将向量$\boldsymbol{b}$的起点移至$\boldsymbol{a}$的终点A，此时$\boldsymbol{b}$的终点为C，那么向量$\vec{OC}$就是$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图1.2）.

减法是加法的逆运算，如果$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，那么$\boldsymbol{c}$就称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$ 之差，或$\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$之差，分别记为$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

由向量的加法法则可以得到向量的减法法则：将向量$\boldsymbol{a}$及向量$\boldsymbol{b}$的起点重合，由向量$\boldsymbol{b}$的终点指向向量$\boldsymbol{a}$ 的终点的向量$\boldsymbol{c}$就是$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图1.3）.

向量的加法具有下列性质：

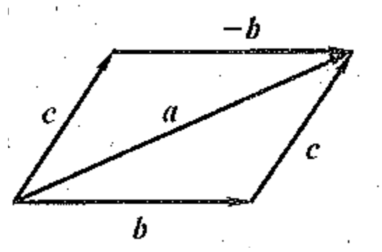

图 1.3

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律);

(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$(结合律);

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

最后的不等式具有明显的几何意义：三角形的任意一条边长不超过其他两条边长之和.

2)向量与数的乘法（数乘）

设$\boldsymbol{a}$为任意向量，λ为任意实数.我们定义λ**与**$\boldsymbol{a}$**的乘积**（简称**数乘**）是一个向量，记为$\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$的方向，当$\lambda>0$ 时与$\boldsymbol{a}$相同；当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$相反；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量的数乘具有下列性质：

(1) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$;

(3) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(4) $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$;

(5) 若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{a}$的单位向量$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

其中$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为任意向量，$\lambda,\mu$为任意实数.

§1.1.3　向量的数量积与向量积

1)向量在轴上的投影

(1)两个向量的夹角

我们先来定义空间两个向量的夹角.设有两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，将它们的起点移至同一点S，把其中一向量绕点S在两向量所决定的平面上旋转，使它的正向与另一向量的正向重合，这样得到的旋转角度θ（限定$0<\theta<\pi$）称为向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的**夹角**，记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$或$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$.当两向量的夹角$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，称两向量垂直;如果向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，且方向相同，则规定它们的夹角$\theta=0$;如果向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$平行而方向相反，则规定它们的夹角$\theta=\pi$，于是两非零向量的夹角θ满足$0\le\theta\le\pi$.

设$\boldsymbol{a}$是一非零向量，l是一根轴，定义向量$\boldsymbol{a}$与轴l的夹角，就是$\boldsymbol{a}$与同轴l 的正方向一致的向量间的夹角.同样可定义空间两轴之间的夹角.

向量$\boldsymbol{a}$与轴l的夹角记为$(\boldsymbol{a},l)$或$(\boldsymbol{a}\wedge l)$，两个轴l_1,l_2 的夹角记为(l_1,l_2)或$(l_1\wedge l_2)$.

(2)向量在轴上的投影

设有一个向量$\vec{AB}=\boldsymbol{a}$及一轴l，过$\vec{AB}$的起点A和终点B，分别作垂直于l的平面，它们与轴l分别交于A'及B'（图1.4），则有向线段$\overline{A'B'}$的值$A'B'$称为向量$\vec{AB}$在轴l上的**投影**，记为$(\vec{AB})_l$或$(\boldsymbol{a})_l$，即$(\vec{AB})_l=A'B'$. 其中$A'B'$ 是一个数，其绝对值等于$\overline{A'B'}$的长度，当$\overline{A'B'}$与l同方向时，其值为正;反方向时，其值为负.

向量$\vec{AB}$在轴l上的投影，等于该向量的模乘以这个向量与轴l的夹角的余弦，即

$$(\vec{AB})_l=|\vec{AB}|\cos(\vec{AB},l).$$

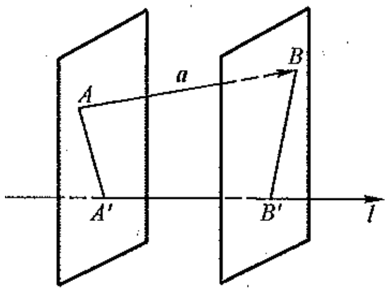

图 1.4

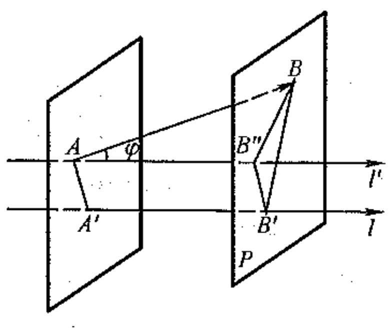

图 1.5

事实上，由图1.5易见

$$(\vec{AB})_l=A'B'=AB''=|\vec{AB}|\cos\varphi=|\vec{AB}|\cos(\vec{AB},l).$$

由此可知，两个相等的向量在同一轴上的投影相等.

2)数量积

(1)数量积的概念

设一物体在常力$\boldsymbol{F}$作用下沿某一直线移动，其位移为$\boldsymbol{S}$，则作用在物体上的常力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$\boldsymbol{W} = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{S}| \cos\theta,$$

其中θ为力$\boldsymbol{F}$与位移$\boldsymbol{S}$的夹角.

显然，功$\boldsymbol{W}$是由向量$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{S}$完全确定了的一个数.现在我们抽去其物理意义，来定义两个向量的数量积.

定义1.1.3. *两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的模与它们夹角的余弦的乘积，称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的***数量积**，*记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

其中$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$只要有一个是零向量，则规定它们的数量积为零.

数量积也叫**点积**或**内积**.

若注意到$|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$是向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影，即

$$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}} = |\boldsymbol{b}| \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

同样

$$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}} = |\boldsymbol{a}| \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

于是有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}} = |\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}$，即两个向量的数量积等于一个向量的模乘以另一个向量在这个向量上的投影.

(2)数量积的性质

由数量积的定义，可以导出下面几个重要结果：

1° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$，即$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 常记为$\boldsymbol{a}^2$，即$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$);

2° 设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$是两个非零向量，则$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 满足

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

注意到$0 \le (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \le \pi$，所以由上述余弦值可以唯一确定$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

3° 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个非零向量，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)数量积满足以下的运算规律：

1° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；

2° $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$（与数相乘的结合律）；

3° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）.

例1.1.1. 试用向量证明余弦定理.

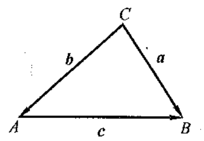

图 1.6

解 如图1.6，作$\triangle ABC$及向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，则有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 从而可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

□

例1.1.2. 试用向量证明三角形的三条高线相交于一点.

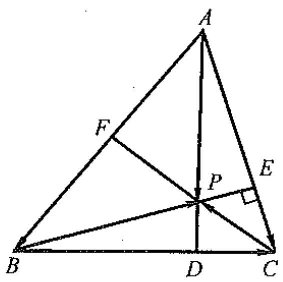

图 1.7

证　任给$\triangle ABC$，设BC边上的高线AD与AC边上的高线BE相交于点P，连接点C与点P并延长交AB边于F（图1.7）.

作向量$\vec{AB},\vec{AC},\vec{BC},\vec{AP},\vec{BP}$及$\vec{CP}$，则$\vec{AP}\perp\vec{BC},\vec{BP}\perp\vec{AC},\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB},\vec{BP}=\vec{AP}-\vec{AB}$，从而$\vec{AP}\perp(\vec{AC}-\vec{AB}),(\vec{AP}-\vec{AB})\perp\vec{AC}$，于是有

$$\vec{AP}\cdot\vec{AC}-\vec{AP}\cdot\vec{AB}=0, \tag{1.1.1}$$

$$\vec{AP}\cdot\vec{AC}-\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0, \tag{1.1.2}$$

(1.1.2)式减(1.1.1)式得

$$(\vec{AP}-\vec{AC})\cdot\vec{AB}=0,$$

即有$\vec{CP}\cdot\vec{AB}=0$, 所以$\vec{CP}\perp\vec{AB}$, 这表明CF是AB边上的高线，从而证明了$\triangle ABC$的三条高线交于一点. □

3) 向量积

(1)向量积的概念

在一均匀磁场$\boldsymbol{B}$中（图1.8），有一单位长度的导线，导线上通有强度为I的电流，在磁场作用下导线受到一力$\boldsymbol{F}$的作用，此力的大小为

$$|\boldsymbol{F}|=|\boldsymbol{I}||\boldsymbol{B}|\sin\theta,$$

这里$\theta=(\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})$是$\boldsymbol{I}$与$\boldsymbol{B}$的夹角，$\boldsymbol{F}$的方向垂直于$\boldsymbol{I}$和$\boldsymbol{B}$所在的平面，且$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{I},\boldsymbol{B}$之间符合右手法则，即当右手四指从$\boldsymbol{I}$经角$(\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})$到$\boldsymbol{B}$的转向握拳时，大拇指所指的方向便是$\boldsymbol{F}$的方向.

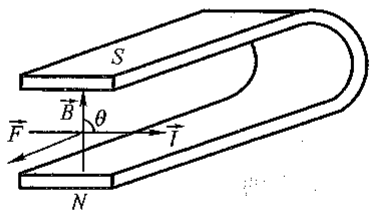

图 1.8

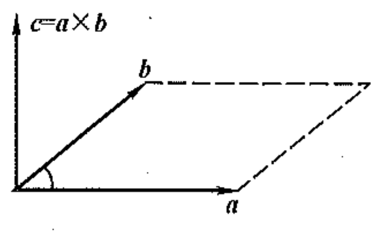

图 1.9

抽去以上问题的物理意义，我们定义两个向量的向量积.

定义1.1.4. 若由向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所确定的一个向量$\boldsymbol{c}$满足下列条件:

1° $\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$都垂直，其方向按从$\boldsymbol{a}$经角$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$到$\boldsymbol{b}$的右手法则确定，如图7.9 所示;

2° $\boldsymbol{c}$的大小为$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，则称$\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**向量积**，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

如果$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$中有一个是零向量，则规定它们的向量积为零向量.

向量积也叫做**叉积**或**外积**.

我们知道$\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的三角形面积，因此$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为边的平行四边形面积（图1.9)，这是向量积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的模的几何意义.

由向量积的定义可得下列结果：

1° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

2° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

3° 如果$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个非零向量，则$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2)运算性质

向量积具有下列运算性质：

1° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（反交换律)；

2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ （分配律)；

3° $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ （与数乘向量的结合律）.

例1.1.3. 试用向量证明正弦定理.

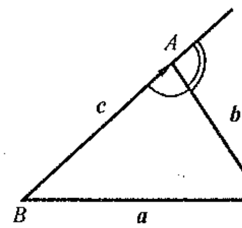

图 1.10

证 如图1.10，任给$\triangle ABC$，记$\vec{BC}=\boldsymbol{a},\vec{AC}=\boldsymbol{b},\vec{BA}=\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, 从而有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},$$

于是有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|=|-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|,$$

即

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}),$$

用$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$除上式得

$$\frac{\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{\sin(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{b}|},$$

上式即为正弦定理. □

4) 向量的混合积

(1)定义

我们称$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$为向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**混合积**，常记为$[\boldsymbol{abc}]$，即

$$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

我们知道，$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$是以$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为边的平行四边形的面积$S$，因此，

$$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}=S|\boldsymbol{a}|\cos\theta,$$

其中θ为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$的夹角，如图1.11所示.

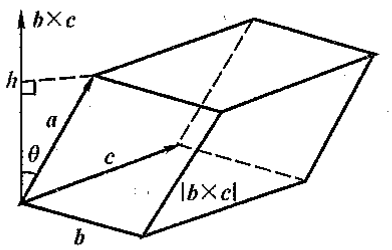

图 1.11

设以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积为$V$，其底面积为$S$、高为$h$，因为当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$成右手系时，$\theta$为锐角，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta=h$，所以混合积

$$[\boldsymbol{abc}]=S|\boldsymbol{a}|\cos\theta=Sh=V,$$

当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$成左手系时，$\theta$为钝角，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta=-h$，所以混合积

$$[\boldsymbol{abc}]=S|\boldsymbol{a}|\cos\theta=-Sh=-V,$$

综合以上讨论，得

$$[\boldsymbol{abc}]=\pm V.$$

当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$成右手系时，上式取“$+$”号；当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$成左手系时，上式取“$-$”号.由此可知混合积$[\boldsymbol{abc}]$的几何意义是：其绝对值表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻棱所构成的平行六面体的体积，其符号由$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$成右手系还是左手系而定.

(2)混合积的性质

由混合积的几何意义易见以下性质：

1° $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充要条件是混合积

$$[\boldsymbol{abc}]=0;$$

2° $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$,

或$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]=-[\boldsymbol{acb}]=-[\boldsymbol{bac}]=-[\boldsymbol{cba}]$. 换言之，混合积$[\boldsymbol{abc}]$轮换因子的顺序，其值不变，对换两因子的位置，只改变一个符号.

例1.1.4. *已知$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=2$，求$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.*

解 由数量积、向量积的分配律，并注意到混合积的两个性质

$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2[\boldsymbol{abc}]=4.\end{aligned}$$

□

习　题　一

1. 试用向量证明三角形中点连线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且为第三边长度的一半.

2. 设向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$两两不共线，证明：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ 的充要条件是$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成一个首尾相接的三角形.

3. 试研究下列问题：

   (1) 如果$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，能否得出结论$\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$或$\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$?

   (2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1$，在什么情况下成立？

   (3) 两个单位向量的数量积等于1对吗？

   (4) 如果$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\neq\mathbf{0}$，是否有$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$?

   (5) 如果$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\neq\mathbf{0}$，且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不平行于$\boldsymbol{c}$，是否有$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$?

4. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=26$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，求$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

6. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为单位向量，并满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，试求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

7. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，求证$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

§1.2 空间直角坐标系及向量运算的坐标表示

§1.2.1 空间直角坐标系

1) 空间直角坐标系

(1) 空间直角坐标系的建立

为了能使前面引入的向量运算转化为代数运算和用代数方法研究空间几何问题，需在空间中建立描述点的位置的坐标系.

在空间中取定一点O，过O点作三条互相垂直且以O点为原点的数轴Ox，Oy，Oz，称为**坐标轴**，也分别简称为x 轴，y轴，z轴，O点叫做**坐标原点**，其中三根坐标轴的次序和方向按习惯用法，通常规定为按右手法则排列（图1.12），这样就构成了空间直角坐标系$O-xyz$.两坐标轴所确定的平面称为**坐标平面**，按坐标轴的名称分别称为Oxy面、Oyz面和Ozx面（或简称为xy面、yz面和zx面）. 三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八

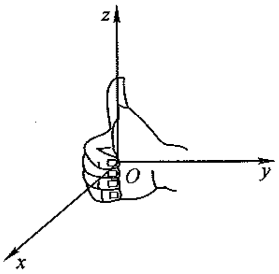

图 1.12

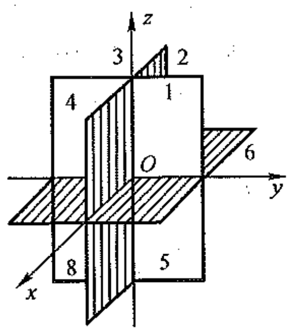

图 1.13

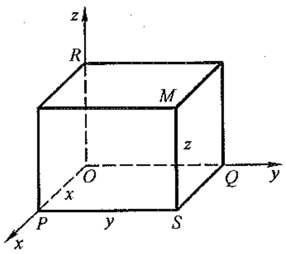

图 1.14

个**卦限**，在Oxy面上方的四个卦限分别是第一、二、三、四卦限，在Oxy面下方的分别是第五、六、七、八卦限（图1.13）.

(2) 点的坐标

设M是空间的一点，过点M作三个平面分别垂直于三根坐标轴，它们与三根坐标轴分别交于P,Q,R 三点，设这三点关于所在坐标轴的坐标分别为x,y,z，这样就由点M唯一确定了一个三元有序数组(x,y,z)；反之，对任意一个三元有序数组(x,y,z)，在三根坐标轴上分别取点P,Q,R使其在坐标轴上的坐标分别为x,y,z，过P,Q,R分别作垂直于相应的坐标轴的平面，设这三个平面相交于点M（图1.14），于是，一个三元有序数组(x,y,z)就确定了空间唯一的点M，这样就建立了空间的点M与三元有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系.三元有序数组(x,y,z)称为点M的**坐标**，记为$M(x,y,z)$，x,y,z分别称为点M的**横坐标、纵坐标和竖坐标**（或称x坐标、y坐标、z坐标）.

显然，原点的坐标为$(0,0,0)$；在x轴，y 轴，z轴上点的坐标分别是$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；在坐标面Oxy，Oyz，Ozx上点的坐标分别是$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.在今后的叙述中，常把一个点和表示这个点的坐标对应起来而不加区别.

(3) 坐标轴的平移

如图1.15中有两个坐标系$O-xyz$和$O'-x'y'z'$（新），假定这两个坐标系的各轴对应平行且指向相同.

设点M关于坐标系$O-xyz$的坐标是x,y,z，新坐标系的原点O'在$O-xyz$中的坐标是a,b,c. 点M关于新坐标系的坐标是x',y',z'，现讨论新旧坐标的关系.

设A是点O'在Oy轴上的投影，Q和Q_1分别是点M在Oy轴和$O'y'$轴上的投影，由平面

解析几何可知

$$OQ = OA + AQ = OA + O'Q_1,$$

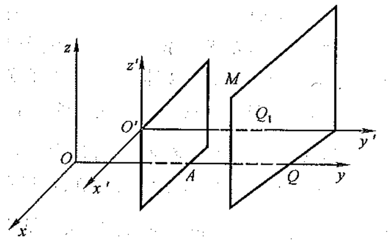

图 1.15

因为

$$OQ = y, \quad OA = b, \quad O'Q_1 = y',$$

所以

$$y = b + y'.$$

同样，若把O'投影到Ox轴及Oz轴上，可得M点的另外两个新、旧坐标的关系

$$x = a + x', \quad z = c + z'.$$

由此我们得到在坐标轴平移下用新系坐标表示旧系坐标的公式

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y', \\ z = c + z'. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

由(1.2.1)式也得到了在坐标轴平移下用旧系坐标表示新系坐标的公式

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b, \\ z' = z - c. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

(4) 两点间的距离

有了空间直角坐标系，空间的点就可以用其坐标来表示，于是两点间的距离也可以利用坐标来求.

1° 设点M的坐标为(x,y,z)，那么点M到原点O的距离就是三棱之长分别为$|x|,|y|,|z|$的长方体的对角线长（图7.14）.若以d表示点M到原点的距离，则

$$d^2=x^2+y^2+z^2,$$

于是得到点$M(x,y,z)$到原点O的距离公式

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.2.3}$$

2° 设两已知点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离$|M_1M_2|$. 若把坐标原点移到M_1处而保持轴的方向，则M_1关于新系的坐标是$(0,0,0)$，而M_2关于新系的坐标是$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，由公式(1.2.3)得

$$|M_1M_2|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.2.4}$$

由距离关于坐标平移的不变性，上式即为两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离公式.

例1.2.1. *已知$M(4,1,7),N(-3,5,0)$，在y轴上求一点P使得$|PM|=|PN|$.*

解 因点P在y轴上，设其坐标为$P(0,y,0)$，则由距离公式有

$$16+(y-1)^2+49=9+(y-5)^2,$$

可解得$y=-4$，故所求的点为$P(0,-4,0)$. □

2) 向量的坐标表示

(1) 向量的坐标

在给定的直角坐标系$O-xyz$中，分别在x轴、y轴、z轴的正方向上取单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$（图1.16），称它们为**基向量**（或**基本坐标向量**）.下面来讨论任一向量与基向量的关系.

设$M(x,y,z)$为空间一点，作向量$\vec{OM}$，P，Q，R分别为点M在Ox轴、Oy轴、Oz 轴上的投影点，显然点P在x 轴上的坐标为x，点Q在y轴上的坐标为y，点R在z轴上的坐标为z，作向量$\vec{OP}$，$\vec{OQ}$，$\vec{OR}$，则有

$$\vec{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \vec{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \vec{OR}=z\boldsymbol{k},$$

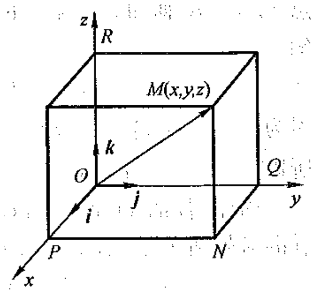

图 1.16

由向量的加法及图1.16，得

$$
\begin{aligned}
\vec{OM} &= \vec{OP} + \vec{PN} + \vec{NM} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} \\
&= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},
\end{aligned}
\tag{1.2.5}
$$

(1.2.5)式称为向量$\vec{OM}$的**坐标表示式**或**投影表示式**，简记为

$$\vec{OM} = (x, y, z)\text{或}\vec{OM} = \{x, y, z\},$$

其中(x, y, z)称为向量$\vec{OM}$的**坐标**.其实(x, y, z)就是$\vec{OM}$的终点M的坐标，所以任意给定个向量$\vec{OM}$，就对应着唯一的一个三元有序数组(x, y, z)；反之，任意给定一个三元有序数组(x, y, z)，就对应唯一的点M，也就对应唯一的向量$\vec{OM}$.由此可见，起点在原点O的向量与三元有序数组(x, y, z)一一对应.

一般地，设向量$\boldsymbol{a}$在三个坐标轴上的投影分别为a_x，a_y，a_z，由于向量可平行移动，将其起点移动到坐标原点O，因平移后的向量与原向量相等，故它在坐标轴上的投影仍为a_x，a_y，a_z，由(1.2.5)式可知，$\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{1.2.6}$$

或

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

(1.2.6)式表明，只要知道一个向量在三个坐标轴上的投影，就可以写出它的坐标表示式.

(2) 向量的模与方向余弦

设点A的坐标为(x,y,z)，则$\boldsymbol{a}=\vec{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，由空间两点间的距离公式知，向量$\boldsymbol{a}$的模

$$|\boldsymbol{a}|=|\vec{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

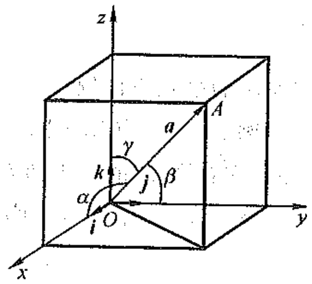

图 1.17

又设$\boldsymbol{a}$与三坐标轴的夹角分别为α，β，γ（图1.17），称它们为向量$\boldsymbol{a}$的**方向角**，方向角的余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**，由向量在轴上的投影可知

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|},\text{而且}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}(x^2+y^2+z^2)=1.$$

一般地，若已知$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，因为将向量平移使起点在原点并不改变$\boldsymbol{a}$的方向和大小，所以向量$\boldsymbol{a}$的模为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$
$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$
$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

同时三个方向余弦满足$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

以上关系式说明，若已知一个向量的坐标，则可唯一确定向量的模与方向余弦；反之，已知一个向量的模与方向余弦，可唯一确定向量的坐标

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,$$

于是

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}).$$

而

$$\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}\text{为}\boldsymbol{a}\text{的单位向量，即}$$

$$\boldsymbol{a}_0=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}.$$

§1.2.2 向量运算的坐标表示

1) 向量的加减法与数乘的坐标表示

设给定两个向量

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),$$

则由向量的加法的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),\end{aligned}$$

也就是说向量的加减变成了它们坐标的加减.

由数乘的运算规律可得

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z),\end{aligned}$$

于是数与向量的乘积就是用这个数去乘向量的三个坐标.

而两个非零向量$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$的充要条件$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则可写成

$$b_x=\lambda a_x,\quad b_y=\lambda a_y,\quad b_z=\lambda a_z,$$

或

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda,$$

即对应的坐标成比例.

例1.2.2. 设有作用于同一点的三个力，它们分别为：$\boldsymbol{F}_1=\{1,2,3\}$，$\boldsymbol{F}_2=\{2,-3,4\}$，$\boldsymbol{F}_3=\{3,4,-5\}$，求合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\{1,2,3\}+\{2,-3,4\}+\{3,4,-5\}\\&=\{6,3,2\},\end{aligned}$$

故$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$，$\boldsymbol{R}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{6}{7},\quad \cos\beta=\frac{3}{7},\quad \cos\gamma=\frac{2}{7}.$$

□

例1.2.3. (定比分点的坐标)设有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$，点C将有向线段M_1M_2分成两部分，使$\dfrac{M_1C}{CM_2}=\lambda$，求分点$C$的坐标（图*1.18*）.

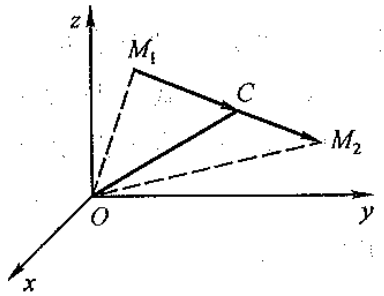

图 1.18

解　设C点的坐标为(x,y,z)，则依题意有

$$\vec{M_1C}=\lambda\vec{CM_2},$$

即

$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}=\lambda\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}.$$

由两向量相等的定义，知它们的对应坐标相等，故有

$$\begin{aligned}x-x_1&=\lambda(x_2-x),\\x-y_1&=\lambda(y_2-y),\\z-z_1&=\lambda(z_2-z),\end{aligned}$$

解之得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别，当$\lambda=1$时，得中点C的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

□

例1.2.4. 已知$\vec{AB}=(-3,0,4)$，$\vec{AC}=(5,-2,-14)$，求等分$\angle BAC$的单位向量.

解　$|\vec{AB}|=5, |\vec{AC}|=15$,

$$(\vec{AB})_0=\frac{1}{5}\vec{AB}=\left(-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right),$$

$$(\vec{AC})_0=\frac{1}{15}\vec{AC}=\left(\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right).$$

显然，以$(\vec{AB})_0, (\vec{AC})_0$为边的菱形的对角线向量为

$$c=(\vec{AB})_0+(\vec{AC})_0=\left(-\frac{4}{15},-\frac{2}{15},-\frac{2}{15}\right),$$

它平分$\angle BAC$，故所求的单位向量为

$$c_0=\frac{c}{|c|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

□

2) 数量积的坐标表示

注意到基向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$是两两垂直的，因此由数量积的定义有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0.$$

根据基向量的数量积与数量积的运算规律，可得数量积的坐标表达式.设给定了两个向量

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=&(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\=&a_xb_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})\\&+a_yb_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})\\&+a_zb_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\\=&a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

上式表明两向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和.

利用两向量数量积的坐标表示式，可得到以下重要结果：

若$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\quad\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例1.2.5. 设在常力$\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$作用下，质点的位移为$\boldsymbol{S}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求力$\boldsymbol{F}$所作的功，并求$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{S}$间的夹角（力的单位为牛顿，距离的单位为米）.

解 力$\boldsymbol{F}$所做的功

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}=&\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})\cdot(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\\=&2\cdot3+4\cdot2+6\cdot(-1)=8J,\end{aligned}$$

又$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{56},|\boldsymbol{S}|=\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$，

故

$$\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{S})=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}}{|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|}=\frac{8}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{14}}=\frac{2}{7},$$

于是

$$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{S})\approx73^\circ14'.$$

□

例1.2.6. 求与Oxy面平行，且垂直于向量$\boldsymbol{a}=(-4,3,7)$的单位向量.

解 设所求向量为$\boldsymbol{A}_0=(x_0,y_0,z_0)$，由于它平行于$Oxy$面，故$z_0=0$；因$\boldsymbol{A}_0$与$\boldsymbol{a}$垂直，所以

$$-4x_0+3y_0=0,$$

又因为$\boldsymbol{A}_0$是单位向量，故有

$$x_0^2+y_0^2=1,$$

解上面两式得

$$x_0=\pm\frac{3}{5},\quad y_0=\pm\frac{4}{5},$$

故所求的向量为

$$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)\text{或}\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right).$$

□

3) 向量积的坐标表示

先讨论基向量的向量积，注意到基向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$两两垂直，且按$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$的顺序成右手系，所以由向量积的定义和运算规律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=&\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=&\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=&-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

根据基向量的向量积与向量积的运算规律可得向量积的坐标表达式.设给定了两个向量

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=&(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\
=&a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\
&+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\
=&(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\
=&\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},
\end{aligned}$$

为便于记忆，我们借用三阶行列式按第一行展开的表达式，将$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 形式地表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

利用两向量的向量积的坐标表示式，可推得两向量$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$共线（即平行）的充要条件是两向量的坐标对应成比例，即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

上式若分母为零，则规定分子也为零，例如$b_x=0$，这时上式因为分母为零而失去意义，但为了保持形式上的一致，我们仍把它写成

$$\frac{a_x}{0}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

的形式，不过，这时应作这样的理解

$$a_x=0,\quad \frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

其余类推.

例1.2.7. 已知$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的向量.

解　由向量积的定义，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$就是一个符合要求的向量.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-1&3\\2&3&-1\end{vmatrix}\\&=(1-9)\boldsymbol{i}-(-4-6)\boldsymbol{j}+(12+2)\boldsymbol{k}\\&=-8\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

另外，$-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=8\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}-14\boldsymbol{k}$也是同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的向量. □

例1.2.8. 已知三角形三顶点为$A(4,10,7)$, $B(7,9,8)$和$C(5,5,8)$, 求三角形的面积S及AC边上的高h.

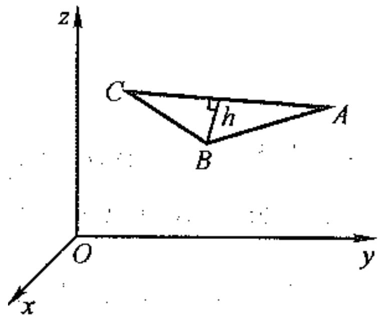

图 1.19

解　如图1.19

$$\vec{AB}=(3,-1,1),\quad \vec{AC}=(1,-5,1),$$

则

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&1\\1&-5&1\end{vmatrix}=(4,-2,-14).$$

三角形ABC的面积

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-2)^2+(-14)^2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{216}=3\sqrt{6}.\end{aligned}$$

因为$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2+(-5)^2+1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$，而

$$S = \frac{1}{2}|\vec{AC}| \cdot h.$$

所以

$$h = \frac{2S}{|\vec{AC}|} = \frac{2\times 3\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}.$$

□

4) 混合积的坐标表示

若$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这就是混合积的坐标表示式.

由此可直接推得：

(1) 三向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充要条件是

$$[\boldsymbol{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

(2) 四点$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

例1.2.9. 已知不在一平面上的四点$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4)$，求四面体$ABCD$的体积.

解 由几何知，四面体$ABCD$的体积V等于以向量$\vec{AB}$，$\vec{AC}$和$\vec{AD}$为棱的平行六面体体积的$\dfrac{1}{6}$，因而
$$V=\frac{1}{6}|[\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}]|.$$
因$\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，$\vec{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$，$\vec{AD}=(x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1)$，
所以
$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix},$$
式中正负号的选择必须和行列式的符号一致. □

习 题 二

1. 给定点$M(a,b,c)$，试求：
   (1) M在三个坐标平面上投影点的坐标；
   (2) M在三个坐标轴上投影点的坐标；
   (3) M到三个坐标轴的距离；
   (4) M关于原点、x轴、Oxy面的对称点的坐标.
2. 求点$A(1,-3,2)$关于点$M(-1,2,1)$的对称点B的坐标.
3. 在yz平面上，求与三个点$A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$等距离的点.
4. 四面体的顶点是$A(-7,3,-2)$，$B(0,2,1)$，$C(4,-1,0)$和$D(-1,0,-3)$，平移坐标轴将坐标原点移至点$M(6,-2,1)$，试求四面体顶点的新坐标.
5. 确定α,β,γ的值，使两向量$\alpha\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+(\beta-1)\boldsymbol{k},3\boldsymbol{i}+\gamma\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$相等，并求出其模.
6. 原点O为起点，点$P(1,3,5)$为终点，M是$\vec{OP}$的中点，求$\vec{OM}$的坐标表示式.

7. 设一向量与x轴及y轴的夹角相等，而与z轴的夹角是前者的两倍，求这个向量的方向余弦.

8. 求平行于向量$\boldsymbol{a} = (6, 7, -6)$的单位向量.

9. 设$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$，试用单位向量$\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{c}_0$表示向量$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

10. 求两个向量$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$之间的夹角.

11. 已知向量$\boldsymbol{a} = (3, -6, 1), \boldsymbol{b} = (1, 4, -5), \boldsymbol{c} = (3 - 4, 12)$，求$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{c}$上的投影.

12. 证明三向量$2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, 3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 13\boldsymbol{k}$和$20\boldsymbol{i} - 29\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$两两互相垂直.

13. 设$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$，求非零向量$\boldsymbol{\omega}$，使得$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$.

14. 试确定m和n为何值时，向量$\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$共线.

15. 试求与$\boldsymbol{a} = (2, -1, 1)$及$\boldsymbol{b} = (1, 2, -1)$都垂直的单位向量.

16. 已知三角形顶点$A(1, -1, 2), B(5, -6, 2)$和$C(1, 3, -1)$，试计算AC边上高的长度.

17. 已知空间三个点P_1, P_2, P_3，设O为空间任意一点，并设向量

$$\vec{OP_1} = \boldsymbol{r}_1, \quad \vec{OP_2} = \boldsymbol{r}_2, \quad \vec{OP_3} = \boldsymbol{r}_3,$$

证明三角形$P_1P_2P_3$的面积是

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1|.$$

18. 试证四点$A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1)$及$D(2, 1, 3)$在同一平面上.

19. 证明向量$\boldsymbol{a} = (2, -4, 2), \boldsymbol{b} = (3, -3, 6)$与$\boldsymbol{c} = (3, -4, 5)$共面，并求出$\lambda, \mu$，使$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.

20. 已知$\boldsymbol{a} = (3, 1, 2), \boldsymbol{b} = (3, 0, 4), \boldsymbol{c} = (-3, 1, -1), \boldsymbol{d} = (4, 4, -1)$，试求出$\lambda, \mu, \nu$使

$$\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}.$$

§1.3 平面与直线

空间的曲面和曲线，可以看作是满足一定条件的点的集合.

对空间的一张曲面S，当取定了空间直角坐标系后，曲面上的点$M(x,y,z)$的坐标x,y,z满足一定的条件，这个条件一般可写成一个三元方程$F(x,y,z)=0$，如果曲面S与方程$F(x,y,z)=0$之间存在如下关系：

(1) 若点$M(x,y,z)$在曲面S上，则M的坐标x,y,z就满足三元方程$F(x,y,z)=0$；

(2) 若一组数x,y,z适合方程$F(x,y,z)=0$，则以x,y,z为坐标的点$M(x,y,z)$就在曲面S 上，

那么就称$F(x,y,z)=0$是曲面S的**方程**，而曲面S称为方程$F(x,y,z)=0$的**图形**.

本节将以向量为工具建立平面与直线的方程并研究它们之间的一些关系.

§1.3.1 平面的方程

1) 平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一已知平面，这个向量就称为该平面的**法向量**.

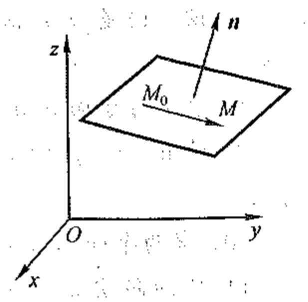

图 1.20

设已知平面π上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$和平面的法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，我们来建立平面π的方程.

设$M(x,y,z)$是平面π上的任意一点，作向量$\vec{M_0M}$（图1.20），则$\vec{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$故

$$\vec{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

又$\vec{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，于是，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1.3.1}$$

平面上所有点的坐标都满足方程(1.3.1)；反之，不在这个平面上的点，其坐标都不满足方程(1.3.1)（因为这样的点与M_0所连成的向量与法向量$\boldsymbol{n}$不垂直），所以(1.3.1)式就是过已知点$M(x_0, y_0, z_0)$，而法向量为$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$的平面的方程，称它为平面的**点法式方程**.

2) 平面的一般方程

如果将(1.3.1)式改写为

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0,$$

其中$-(Ax_0+By_0+Cz_0)$是一常数值，若记为D，则得

$$Ax+By+Cx+D=0. \tag{1.3.2}$$

反之，若$(A, B, C) \neq \mathbf{0}$，则一次方程(1.3.2) 式一定表示一个平面.

事实上，取方程(1.3.2)的一组解(x_0, y_0, z_0)，则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{1.3.3}$$

由(1.3.2)减去(1.3.3) 得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

它表示过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，以(A, B, C)为法向量的一个平面.

方程(1.3.2)称为平面的**一般方程**.

要注意，在平面解析几何中，一次方程表示一条直线，而在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面，两者切不可混淆.

对于一些特殊的三元一次方程，读者应熟悉它们所表示的平面的特点，例如：

当$D=0$时，$Ax+By+Cz=0$表示过原点的平面；

当$C=0$时，平面的法向量$\boldsymbol{n}=(A, B, 0)$垂直于z轴，故方程$Ax+By+D=0$表示平行于z轴的平面；

当$B=C=0$时，因法向量$\boldsymbol{n}=(A, 0, 0)$同时垂直于y轴与z轴，故方程$Ax+D=0$，即$x=-\dfrac{D}{A}$表示平行于yOz面，也就是垂直于x 轴的平面.

例1.3.1. 求通过三点$P_1(a,0,0),P_2(0,b,0),P_3(0,0,c)$的平面方程（其中$a,b,c$均不为零）.

解 设平面的点法式方程为

$$A(x-a)+B(y-0)+C(z-0)=0.$$

因为平面的法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$同时垂直于$\vec{P_1P_2},\vec{P_1P_3}$，而

$$\vec{P_1P_2}=(-a,b,0),\quad \vec{P_1P_3}=(-a,0,c),$$

所以可取

$$\boldsymbol{n}=\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=bc\boldsymbol{i}+ca\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k},$$

故所求的平面方程为

$$bc(x-a)+ca(y-0)+ab(z-0)=0,$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{1.3.4}$$

□

方程(1.3.4)称为平面的**截距式方程**，a,b,c分别称为该平面在x轴、y轴、z轴上的**截距**.

例1.3.2. 已知平面通过点$P(1,-5,1)$和$Q(3,2,-12)$，而且平行于y轴，求此平面的方程.

解 因所求平面平行于y轴，故可设它的方程为

$$Ax+Cz+D=0.$$

因点P,Q在此平面上，故它们的坐标应满足上述方程，即

$$\begin{cases}A+C+D=0,\\ 3A-12C+D=0,\end{cases}$$

解此方程组得$A=-\dfrac{13}{15}D, C=-\dfrac{2}{15}D$. 将它们代入以上方程，消去$D$，即得

$$13x+2z-15=0,$$

这就是所求平面的方程. □

例1.3.3. 求通过点$M_0(1,-1,1)$且通过z轴的平面方程.

解　法一，在平面上任取一点$M(x,y,z)$，在z轴上任取一个定点，例如取$O(0,0,0)$，显然，三向量$\vec{M_0M},\vec{OM_0},\boldsymbol{k}$（$z$轴上的单位向量）共面，因为

$$\vec{M_0M}=(x-1,y+1,z-1),\vec{OM_0}=(1,-1,1),\boldsymbol{k}=(0,0,1),$$

故

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

化简得平面方程，$x+y=0$.

法二，因为平面过z轴，可设平面方程为

$$Ax+By=0,$$

因$M_0(1,-1,1)$在平面上，所以$A-B=0$，即$A=B$，故所求平面方程为

$$x+y=0.$$

□

例1.3.4. 已知平面上不共线的三点$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$，求平面方程.

解　在平面上任取一点$M(x,y,x)$，作向量$\vec{M_1M},\vec{M_1M_2},\vec{M_1M_3}$，因为这三个向量共面，故

$$\vec{M_1M}\cdot(\vec{M_1M_2}\times\vec{M_1M_3})=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \tag{1.3.5}$$

这就是所求平面的方程.　□

方程(1.3.5)称为平面的**三点式方程**.

§1.3.2 直线的方程

以下任何一种情形，都能唯一确定一条直线：

(1) 作为两个相交平面π_1与π_2的交线；

(2) 经过两点M_1, M_2；

(3) 经过一点M_0，且平行于一个非零向量.

由此，可以求得相应的直线方程.

1) 直线的一般方程

当直线L作为两个相交平面

$$\begin{aligned} &\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ &\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

的交线时，两平面方程的联立方程组(1.3.6) 式就表示这条交线L 的方程，我们称(1.3.6)式为直线的**一般方程**.

2) 直线的标准方程

给定一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$与一个非零向量$\boldsymbol{a} = (l, m, n)$，则对过点$M_0$且与$\boldsymbol{a}$平行的直线$L$上的任何一点$M(x, y, z)$，都有

$\vec{M_0M} // \boldsymbol{a}$，而$\vec{M_0M} // \boldsymbol{a} \Leftrightarrow$两向量的对应坐标成比例，即

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{1.3.7}$$

(1.3.7)式称为直线的**标准方程**（或**点向式方程**），向量$\boldsymbol{a}$称为直线的**方向向量**，$\boldsymbol{a}$的三个坐标l, m, n称为直线的**方向数**.

显然，一直线的方向数有无穷多组，而其中任意两组方向数都对应成比例.

(1.3.7)式可写成二个独立等式的联立，即写成直线的一般方程

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

反之，也可将直线的一般方程(1.3.6)式，写成直线的标准方程(1.3.7)式，这只要在直线L上任取一点(x_0, y_0, z_0)并确定L的方向向量$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$，其中$\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

3) 直线的两点式方程

给定两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则过这两点的直线L的方向向量可取为$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，于是得方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1.3.8}$$

(1.3.8)式称为直线的**两点式方程**.

在(1.3.7)，(1.3.8)中，如果分母有一为零，例如(1.3.7)式中$l=0$，习惯上仍将直线方程写成

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

的形式，此时$\dfrac{x-x_0}{0}$不是通常意义下的分式，这里的0只表示直线方向向量在x轴上的投影为零，即直线垂直于x轴，上述方程组应理解为

$$\begin{cases}\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n},\\ x=x_0.\end{cases}$$

若(1.3.7)式中$l=m=0$，则(1.3.7)式应理解为

$$\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0.\end{cases}$$

即直线与z轴平行.

4) 直线的参数方程

在直线的标准方程(1.3.7)式中，令等公比为t. 即

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

于是

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt.\end{cases} \tag{1.3.9}$$

在(1.3.9)式中，对于不同的t值，对应着直线上不同的点，(1.3.9)式称为直线的**参数方程**.

若记向量$\boldsymbol{r}=(x,y,z),\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$，则(1.3.9) 式又可写为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t. \tag{1.3.10}$$

(1.3.10)式称为直线的**向量式方程**.

例1.3.5. *已知直线的一般方程为*

$$\begin{cases} 2x-3y-z+3=0, \\ 4x-6y+5z-1=0, \end{cases}$$

求它的标准方程和参数方程.

解 两个平面的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(2,-3,-1)$和$\boldsymbol{n}_2=(4,-6,5)$，因此，直线的方向向量$\boldsymbol{a}$可取为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix}=(-21,-14,0)=-7(3,2,0).$$

为了求出直线上的一个点M_0，令$y=0$，解方程组

$$\begin{cases} 2x-z=-3, \\ 4x+5z=1, \end{cases}$$

得$M_0(-1,0,1)$.因此直线的标准方程为

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{0},$$

而参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2t, \\ z=1. \end{cases}$$

□

§1.3.3　有关平面、直线的几个基本问题

1) 夹角

(1) 直线与直线的夹角

设两条直线L_1和L_2的方向向量分别为$\boldsymbol{a}_1=(l_1,m_1,n_1),\boldsymbol{a}_2=(l_2,m_2,n_2)$.

两条直线的夹角就是它们的方向向量$\boldsymbol{a}_1$和$\boldsymbol{a}_2$间的夹角，并规定两条直线之间的夹角θ满足$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$. 则可由公式

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}\tag{1.3.11}$$

求出它们的夹角.

(2) 两个平面之间的夹角

设平面π_1和π_2的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.平面$\pi_1$和$\pi_2$之间的夹角就是它们的法向量$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$间的夹角，通常也规定其夹角在0到$\dfrac{\pi}{2}$之间.

由(1)与(2)易知：

直线L_1和L_2互相垂直的充要条件是$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0$，即

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$$

平行的充要条件是

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};$$

平面π_1和π_2互相垂直的充要条件是$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$，即

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0;$$

平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

(3) 直线与平面的夹角

直线与它在某平面上的投影直线的夹角φ称为直线与该平面的夹角.

设直线L的方向向量为$\boldsymbol{a}=(l,m,n)$，平面π的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$. 因直线的方向向量$\boldsymbol{a}$与平面的法向量$\boldsymbol{n}$间的夹角为$\dfrac{\pi}{2}-\varphi$或$\dfrac{\pi}{2}+\varphi$（图1.21），又因

$$\sin\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=|\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi)|=|\cos\theta|,$$

所以，由两向量夹角余弦的公式，得

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|} = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.3.12}$$

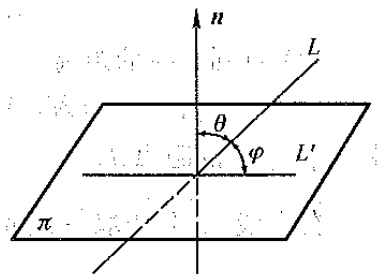

图 1.21

例1.3.6. 求直线$x-2=y-3=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的夹角.

解 直线的方向向量为$\boldsymbol{a}=(1,1,2)$，平面的法向量$\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$，直线与平面的夹角为φ，则

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|} = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

所以

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad (\varphi\text{不取钝角}).$$

□

若直线L与平面π垂直，则直线的方向向量与平面的法向量必平行，因此直线与平面垂直的充要条件是$\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$；

若直线L与平面π平行，则直线的方向向量与平面的法向量必垂直，因此直线与平面平行的充要条件是$Al+Bm+Cn=0$.

2) 距离

(1) 点到平面的距离

设已知平面π的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$为平面π外一点，求P_1到平面π的距离d.

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面π上任一点，平面的法向量$\boldsymbol{n}$与向量$\overrightarrow{P_0P_1}$的夹角为θ（图1.22），则从点P_1到平面的距离等于$\overrightarrow{P_0P_1}$在法向量$\boldsymbol{n}$上的投影的绝对值，即

$$d = |\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot |\cos\theta|.$$

因为$|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}| = |\boldsymbol{n}| \cdot |\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot |\cos\theta|$，所以

$$\begin{aligned} d =& |\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot |\cos\theta| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{n}|} \\ =& \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot |A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0)|, \end{aligned}$$

注意到$P_0(x_0, y_0, z_0)$是π上点，故有$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, 于是就得到

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.3.13}$$

(2) 点到直线的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$为直线L外一点（L的方向向量为$\boldsymbol{a}$），求M_1到L的距离d.

在直线L上任取一点M_0，作向量$\overrightarrow{M_0M_1}$，由向量积模的几何意义，以$\overrightarrow{M_0M_1}$和$\boldsymbol{a}$为边的平行四边形面积为$|\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{a}|$（图1.23）. 则$M_1$到$L$的距离$d$为这个平行四边形在$\boldsymbol{a}$上的高，于是

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

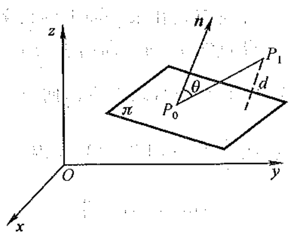

图 1.22

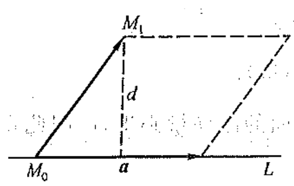

图 1.23

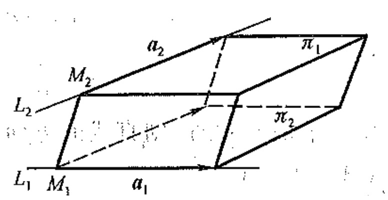

图 1.24

(3) 两异面直线的距离

一切从L_1上的点到L_2上的点所连线段长度的最小值称为异面直线L_1, L_2的距离.

设给定了两直线L_1, L_2，其方向向量分别为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$，又设$M_1, M_2$分别为$L_1, L_2$上的一已知点，易知$L_1, L_2$的距离

$$d = \frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}$$

其中$|[\overrightarrow{M_1M_2}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]|$为图中平行六面体体积（图1.24），$|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|$为底面面积，其实$d$即为平行平面$\pi_1,\pi_2$的距离.

3) 直线与平面的交点

设直线L的参数方程是

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt,\quad z=z_0+nt,$$

平面π的方程是

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

则直线与平面的交点的坐标必须同时满足这两个方程，将直线方程代人平面方程中，得

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0,$$

即

$$(Al+Bm+Cn)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0.$$

(1) 若$Al+Bm+Cn\neq 0$（即直线与平面不平行），则由上式可解得

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn},$$

将t值代入直线方程，即得直线与平面的交点坐标.

(2) 若$Al+Bm+Cn=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$，则直线与平面平行，且点$(x_0,y_0,z_0)$不在平面上，所以没有交点.

(3) 若$Al+Bm+Cn=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，则直线在平面上，此时直线上的所有点都是交点.

例1.3.7. 求直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的交点.

解 将所给直线方程化为参数方程

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t,$$

将它代入已知平面方程中，得

$$2(2+t)-(3+t)+(4+2t)-6=0,$$

求出t值为$\frac{1}{3}$，从而得到

$$x=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\quad y=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3},\quad z=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3},$$

即交点的坐标为$\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{14}{3}\right)$. □

4) 过直线的平面束

设直线L的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

我们建立一次方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{1.3.14}$$

其中参数λ,μ满足$\lambda^2+\mu^2\neq 0$. 因为(1.3.14)式是x,y,z 的一次方程，所以对于λ,μ的任何一组值，它表示一个平面，又若一点M_0在直线L上，则点M_0的坐标也一定满足方程(1.3.14)式，于是点M_0在式(1.3.14)所示的平面上，因此方程(1.3.14)式表示通过直线L的平面.而且对应于不同的λ,μ值（确切地说是λ,μ的比值），方程(1.3.14)式表示通过直线L的不同的平面；反之可证，通过直线L的任何平面都包含在方程(1.3.14)式所表示的平面内.

通过定直线的所有平面的集合称为**平面束**，而方程(1.3.14)称为交于直线L的平面束方程.

例1.3.8. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$与已知平面$x-4y-8z+12=0$成$45^\circ$角的平面方程.

解 设所求平面的方程为

$$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0,$$

其法向量为$\boldsymbol{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$，已知平面的法向量为$\boldsymbol{n}_2=\{1,-4,-8\}$，依题设，有

$$\cos 45^\circ=\pm\frac{1\times(1+\lambda)-4\times 5-8\times(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

（分子大于零时，取“$+$”，分子小于零时，取“$-$”），即

$$\pm\frac{\lambda-3}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由此解得$\lambda=-\dfrac{3}{4}$，故所求平面方程为

$$(x+5y+z)-\frac{3}{4}(x-z+4)=0,$$

即

$$x+20y+7z-12=0.$$

另外，经检验，平面$x-z+4=0$也与已知平面$x-4y-8z+12=0$成45°角. □

习 题 三

1. 是否存在满足下列条件的平面？如果存在的话，是否唯一？

   (1) 过一已知点且与一已知直线平行；

   (2) 过一已知点且与一已知直线垂直；

   (3) 过一已知点且与一已知平面平行；

   (4) 过一已知点且与一已知平面垂直；

   (5) 过两已知点且与一已知直线平行；

   (6) 过两已知点且与一已知直线垂直；

   (7) 过两已知点且与一已知平面平行；

   (8) 过两已知点且与一已知平面垂直.

2. 求满足下列条件的平面方程：

   (1) 过点$(4,-7,1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行；

   (2) 过点$A(2,9,-6)$且与向径$\vec{OA}$垂直；

   (3) 过原点且垂直于平面$x-y+z-7=0$及$3x+2y-12z-5=0$；

   (4) 过点$(6,2,-4)$且与各坐标轴截距相等；

   (5) 过点$(1,1,1)$和点$(0,1,-1)$且与平面$x+y+z=0$相垂直；

   (6) 过点$(7,6,7),(5,10,5)$和$(-1,8,9)$；

   (7) 过点$(-3,1,-2)$和z轴；

   (8) 过点$(4,0,-2),(5,1,7)$且平行于x轴.

3. 求平行于平面$5x-14y+2z+36=0$，且与此平面的距离为3 的平面方程.

4. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 通过点$(2,-3,8)$且平行于z轴；

(2) 通过坐标原点和点(a,b,c)；

(3) 通过点$(-3,5,-9)$且与两直线$\begin{cases} y=3x+5, \\ z=2x-3, \end{cases}$ $\begin{cases} z=5x+10, \\ y=4x-7, \end{cases}$相交；

(4) 通过点$(1,2,3)$和z轴相交，且和直线$x=y=z$垂直

5. 将下列直线的一般方程化为标准方程：

$$(1)\ \begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-5y+2z-1=0, \\ z=2+5y. \end{cases}$$

6. 求下列直线夹角的余弦：

(1)$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{7}$和$\dfrac{x+6}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$;

(2)$\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$和$\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0. \end{cases}$

7. 求直线$\begin{cases} 3x-y-2z=0, \\ 6x-3y+2z=2 \end{cases}$和各坐标轴之间的夹角.

8. 一平面过两点$(0,4,0),(0,0,-1)$，并与平面$y+z+2=0$的交角为$\dfrac{\pi}{3}$，求这平面的方程.

9. 求平面$2x-2y+z+6=0$与各坐标面夹角的余弦.

10. 求点$A(1,2,3)$到直线$\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+z=3 \end{cases}$的距离.

11. 求直线$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+12}{3}=\dfrac{z-4}{6}$和平面$6x+15y-10z=0$的交角.

12. 已知直线L_1,L_2的方向向量分别为$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,M_1,M_2$分别为$L_1,L_2$上的已知点，试用向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{M_1M_2}$满足的关系讨论直线$L_1,L_2$平行、异面、相交的充要条件.

13. 求证下列各对直线相交，并求交点坐标及由这对直线所确定的平面方程：

(1) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$和$\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{2}$;

(2) $\begin{cases} 2x-y+3z+3=0, \\ x+10y-21=0 \end{cases}$和$\begin{cases} 2x-y=0, \\ 7x+z-6=0. \end{cases}$

14. 求出下列各对直线的距离和公垂线方程：
(1) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-11}{-2}=\dfrac{z-4}{1}, \dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y+7}{-6}=\dfrac{z}{1}$;
(2) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-1}, \dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$.

15. 求过原点且包含平面$x+y+z=1$和$2x-y+7z=5$的交线的平面方程.

16. 求垂直于平面$5x-y+3z-2=0$且与它的交线在Oxy面上的平面方程.

17. 求过直线$\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ 且垂直于平面$x+4y-3x+7=0$的平面方程.

18. 求过直线$\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 2x-y+3z=0. \end{cases}$且平行于直线$x=2y=3z$的平面方程.

19. 求平行于z轴且含点$(3,-1,5)$和$(7,9,4)$的平面方程.

20. 求一平面，使它通过两平面$3x+y-z+5=0$与$x-y+z-2=0$的交线且与平面$y-z=0$成$45°$的角.

§1.4　空间曲面与空间曲线

本节以两种方式来讨论空间曲面与空间曲线：

(1) 根据几何形体上动点的几何特征来建立其方程；

(2) 根据方程的特点，讨论方程所表示的几何形体的形状（对曲面仅限于常见的二次曲面）.

§1.4.1　球面与柱面

1) 球面

由两点间的距离公式，容易推得球心在$M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为R的**球面方程**

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

一般地，一个关于x, y, z的二次方程，若平方项系数相等且缺xy, yz, zx各项，通过配方就可化成上述球面方程，例如

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 2 = 0$$

配方后得$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2^2$，这是以$(1, -2, -1)$为球心，2为半径的球面方程.

特别当球心在原点时，半径为R的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2) 柱面

平行于定直线L并沿曲线C移动的直线所形成的曲面叫做**柱面**（图1.25），定曲线C叫做柱面的**准线**，动直线叫做柱面的**母线**.

我们首先建立母线平行于坐标轴的柱面方程，这样的方程以后经常用到.

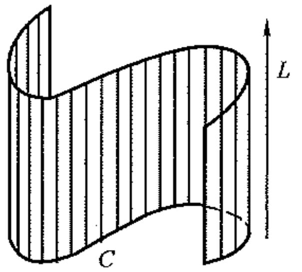

图 1.25

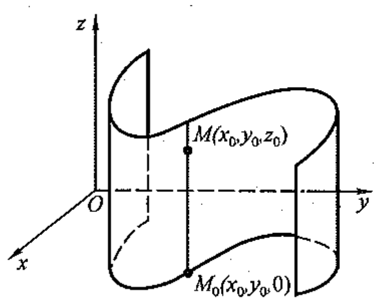

图 1.26

设柱面的母线平行于z轴，准线C是Oxy面上的曲线，其方程为

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

如图1.26所示.在柱面上任取一点$M(x_0, y_0, z_0)$，过M作平行于z轴的直线，它与Oxy面关于点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，因M_0必在准线上，故有

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

由于点M与点M_0有相同的横坐标与纵坐标，故M点的坐标也必满足方程$F(x,y)=0$；反之，如果空间一点$M(x_0,y_0,z_0)$满足方程$F(x,y)=0$，即$F(x_0,y_0)=0$，故过$M(x_0,y_0,z_0)$且与z 轴平行的直线必通过准线C上的点$M_0(x_0,y_0,0)$，即$M(x_0,y_0,z_0)$在过$M_0(x_0,y_0,0)$的母线上，于是$M(x_0,y_0,z_0)$必在柱面上.因此，方程$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面.

一般地，只含x,y而缺z的方程$F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面.

类似地，只含x,z而缺y的方程$G(x,z)=0$与只含y,z而缺x的方程$H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于y轴和x轴的柱面.

例如$x^2+y^2=a^2$，表示母线平行于z轴的圆柱面（图1.27(a)）；$x^2=2py(p\neq 0)$表示母线平行于z轴的抛物柱面（图1.27 (b)）；$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$表示母线平行于$y$轴的双曲柱面（图1.27($c$)）.

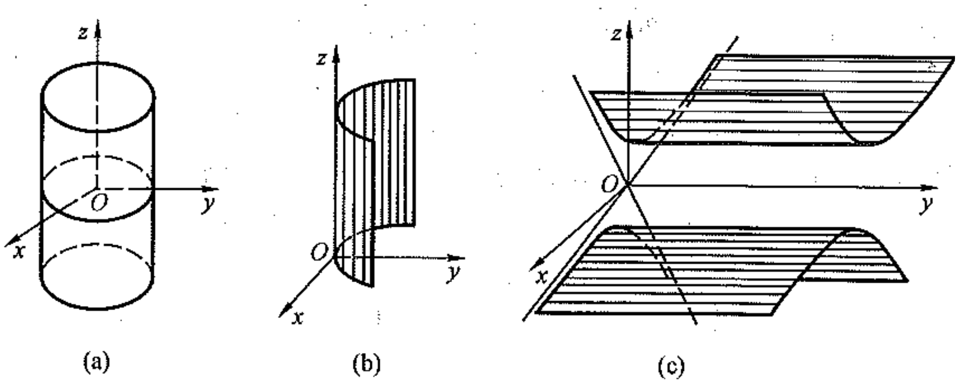

图 1.27

§1.4.2 空间曲线

1) 曲线的一般方程

我们知道，直线可以看成是两个相交平面的交线，其一般方程是这两个平面方程联立而得的方程组.一般地，空间曲线L可以看成是两个曲面Σ_1与Σ_2的交线.设曲面Σ_1与Σ_2的方程分别为$F(x,y,z)=0$与$G(x,y,z)=0$，则曲线L上的点的坐标应同时满足这两个方程，反之，若空间的点$M(x,y,z)$的坐标满足这两个方程的联立方程组，则说明M既在Σ_1上又

在Σ_2上，即M是曲线L上的点，因此曲线L可以用方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1.4.1}$$

来表示，方程组(1.4.1)称为空间曲线L的**一般方程**.

因为通过一条空间曲线的曲面有无穷多个，故我们可以用不同的方法选择其中两个曲面，使其交线是给定的曲线.这就是说，表示曲线的方程组不是唯一的，可以用与它等价的联立方程组来代替.例如，方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

都表示Oxy面上以原点为圆心，R为半径的圆周.

2) 曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表示，即把曲线上的动点的坐标x,y,z分别表示成参数t的函数

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases} \tag{1.4.2}$$

当给定$t=t_1$时，由方程组(1.4.2)即得曲线上的一个点$(x(t_1),y(t_1),z(t_1))$，随着t的变动，可得到曲线上的全部点.我们将此方程组称为曲线的**参数方程**.

例1.4.1. *点M在半径为r的圆柱面上以角速度ω作等速圆周运动，同时又以速度v沿平行于轴线的方向作等速运动，求点M的运动曲线方程.*

解　取坐标系如图1.28所示.设动点由A点出发，经过时间t运动到点M，所转过的角为$\theta=\omega t$，点M的坐标为$M(x,y,z)$，则它在Oxy面上的投影P一定在圆柱面的准线上，P点的坐标为$P(x,y,0)$，故知

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta,$$

当动点由A运动到M时，它就沿z轴方向从P增高到M，故$PM=vt$，即

$$z=vt=\frac{v}{\omega}\theta$$

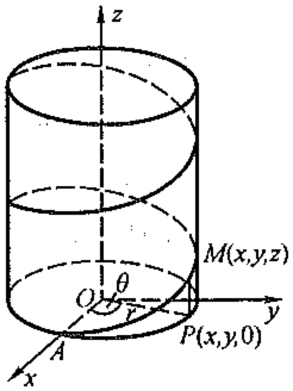

图 1.28

令$\dfrac{v}{\omega}=b$，则$z=b\theta$，所以得到曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \quad (0\le\theta<+\infty). \\ z=b\theta, \end{cases}$$

这条曲线称为**圆柱螺旋线**（又称**等进螺线**）. □

3) 空间曲线在坐标面上的投影

已知空间曲线L和平面π（图1.29），从L向平面π引垂线，垂足构成的曲线L_1称为L 在平面π上的**投影曲线**.实际上它就是通过L而垂直于平面π的柱面与平面π的交线，这个柱面称为从L到π的**投影柱面**.

设曲线L的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

由方程组消去z，得到一个不含z的方程

$$\Phi_1(x,y)=0,$$

它表示母线平行于z轴的柱面.因为此柱面方程是由曲线L的方程消去z得到的，所以L上

点的前两个坐标x, y必满足这个方程，因此柱面过曲线L. 这个柱面与Oxy面的交线

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

一般说来就是曲线L在Oxy面上的投影曲线.

同样，若从曲线L的方程中分别消去x与y，得到柱面方程

$$\Phi_2(y,z)=0 \text{与} \Phi_3(x,z)=0,$$

则

$$\begin{cases} \Phi_2(y,z)=0, \\ z=0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} \Phi_3(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$$

一般说来分别是曲线L在Oyz面上与Oxz面上的投影曲线.

投影曲线在重积分计算中很有用处.

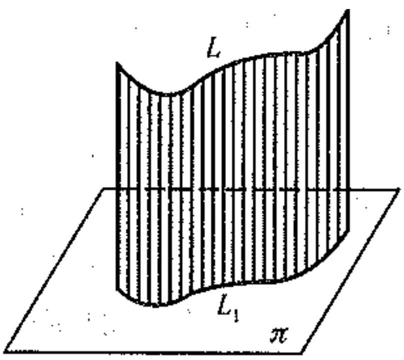

图 1.29

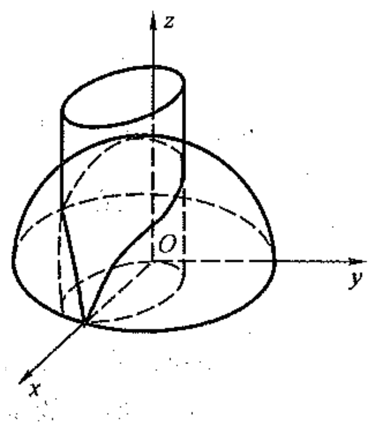

图 1.30

例1.4.2. 求柱面$x^2+y^2-ax=0$与球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$的交线在Oxy面上和在Oxz 面上的投影曲线.

解　两曲面的交线为

$$L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2-ax=0. \end{cases}$$

曲面$x^2+y^2-ax=0$是通过L而且母线垂直于Oxy平面的柱面，因此曲线L在Oxy面的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2-ax=0, \\ z=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2, \\ z=0. \end{cases}$$

这是Oxy面上的一个圆.

从曲线L的方程中消去y，得到$z^2+ax=a^2$，所以曲线L在Oxz面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z^2+a(x-a)=0, \\ y=0 \end{cases} \qquad (x\geq 0),$$

这是Oxz面上的一段抛物线.

图1.30给出了两个曲面上半部分的图形. □

§1.4.3 锥面

设直线通过定点M且和定曲线C（C不过定点M）相交，这直线沿曲线C移动所生成的曲面称为**锥面**（图1.31），点M称为锥面的**顶点**，动直线称为锥面的**母线**，曲线C称为锥面的**准线**.

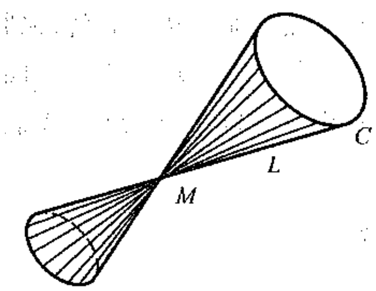

图 1.31

现在来建立锥面的方程.

设锥面准线C的方程是

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

其顶点M_0的坐标是(x_0,y_0,z_0)，那么通过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$和准线C上的点(X,Y,Z) 的母线的方程是

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{Y-y_0}=\frac{z-z_0}{Z-z_0},$$

其中点(x,y,z)是母线上的任一点.当点(X,Y,Z)在曲线C上移动时，点(x,y,z)就是锥面上的点，因为(X,Y,Z)是准线上的点，所以满足方程

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0, \\ F_2(X,Y,Z)=0, \end{cases}$$

将它与母线方程联立，消去X,Y和Z，即得锥面的方程.

若锥面方程是关于x,y,z的二次式，则称之为**二次锥面**.

例1.4.3. 设锥面的顶点是坐标原点,准线是椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c, \end{cases}$$

求锥面的方程（图1.32）.

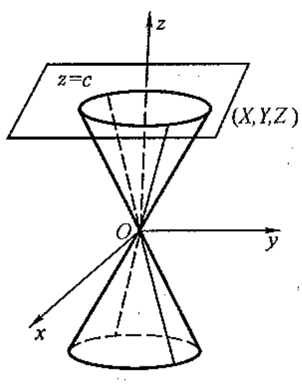

图 1.32

解 通过顶点$(0,0,0)$和准线上的点(X,Y,Z)的母线方程为

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z},$$

即

$$x=z\frac{X}{Z},\quad y=z\frac{Y}{Z},$$

其中(x,y,z)是母线上任一点.因为点(X,Y,Z)在准线上，所以$Z=c,\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$，于是$X=c\dfrac{x}{z},Y=c\dfrac{y}{z}$，代入$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

这就是所求锥面（称为椭圆锥面）的方程. □

注意：顶点在原点的锥面方程关于坐标(x,y,z)是齐次的，即若(x,y,z) 满足方程，则对任意实数t，(tx,ty,tz)也满足方程.

§1.4.4 旋转曲面

球面可以看作是圆周围绕其直径旋转而成的曲面，圆柱面可以看成是一条直线绕与其平行的另一条直线旋转而成的曲面.以下我们讨论一条平面曲线绕其同平面上的一条直线旋转而成的曲面的方程.

设在Oyz面上曲线L的方程为

$$\begin{cases}F(y,z)=0,\\ x=0,\end{cases}$$

将L绕z轴旋转一周就得到一个旋转曲面，现在来求这个曲面的方程.

设$M(x,y,z)$为旋转曲面上的任意一点，它由曲线L上的点$M_0(0,y_0,z_0)$绕z轴旋转而得（图1.33），显然M与M_0有相同的竖坐标，即$z=z_0$，同时，M与M_0到z轴的距离相等，即

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y_0|,$$

或

$$y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

$M_0(0,y_0,z_0)$在L上，应满足方程$F(y,z)=0$，将$z_0=z, y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}$代入$F(y_0,z_0)=0$，得旋转曲面上的任一点$M(x,y,z)$满足的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

上式即为曲线$L:\begin{cases}F(y,z)=0,\\ x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转所得旋转曲面的方程.

从以上分析过程可以看出，一般地，

若在曲线L的方程$\begin{cases}F(y,z)=0,\\ x=0\end{cases}$中$z$保持不变，而将$y$改写为$\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到曲线$L$绕$z$ 轴旋转而成的旋转曲面方程

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0;$$

若在$F(y,z)=0$中y保持不变，将z改写成$\pm\sqrt{x^2+z^2}$，就得到曲线L绕y轴旋转而成的旋转曲面方程

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

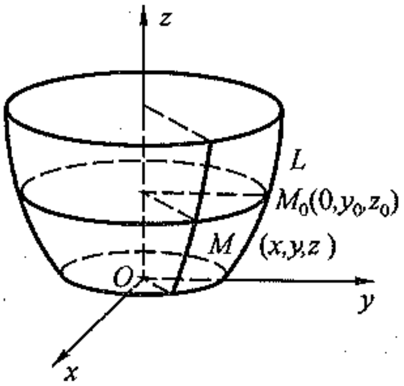

图 1.33

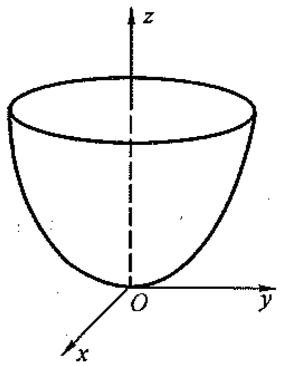

图 1.34

例1.4.4. *求抛物线线*$\begin{cases}y^2=2pz,\\ x=0\end{cases}$ $(p>0)$*绕*z*轴旋转所得的旋转曲面方程.*

解 在方程$y^2=2pz$中，将y^2换成x^2+y^2，即

$$x^2+y^2=2pz \quad (p>0),$$

上式就是抛物线绕z轴旋转所得的旋转曲面方程，这种曲面叫旋转抛物面（图1.34）. □

§1.4.5　几个常见的二次曲面

上面介绍了球面、柱面、锥面，并讨论了一些二次柱面和二次锥面.下面再给出几个常见的二次曲面的方程，并用平面截痕法（即用平行于坐标面的不同平面去截曲面）来讨论它们的图形.

1) 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0)$$

所确定的曲面称为**椭球面**.

由方程知

$$\frac{x^2}{a^2}\leq 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leq 1,\quad \frac{z^2}{c^2}\leq 1,$$

即$-a\leq x\leq a,-b\leq y\leq b,-c\leq z\leq c$.

这说明整个曲面介于六个平面$x=\pm a,y=\pm b,z=\pm c$所围成的长方体内，a,b,c称为椭球的**半轴**.

用三个坐标面$x=0,y=0,z=0$分别截这个椭球面，所截得的曲线分别是三个坐标面上的椭圆

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

再用平面$z=h(|h|\leq c)$截椭球面，截得的曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

由此得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

当$1-\dfrac{h^2}{c^2}>0$时，上面方程可写为

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1,$$

它表示平面$z = h$上的一个椭圆，两个半轴分别为$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$及$\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$. 当$|h|$逐渐增大时，所截得的椭圆逐渐缩小；当$|h| = c$时，所截得的椭圆变为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$，即收缩成点$(0,0,\pm c)$.

同样，可以用平面$x = h(|h| \le a)$或$y = h(|h| \le b)$去截椭球面，并进行类似的讨论.

这样就可以画出椭球面的图形(图1.35).

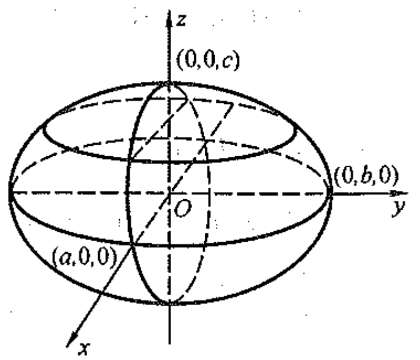

图 1.35

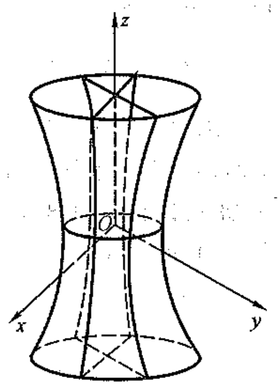

图 1.36

2) 单叶双曲面

方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，或$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，或$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所确定的曲面都称为**单叶双曲面**.

和讨论椭球面的方法一样，可以用平面截痕法来了解曲面的形状，此处不作详细讨论了.

方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的图形如图1.36 所示.

3) 双叶双曲面

方程

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

或

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

或

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

所确定的曲面均称为**双叶双曲面**.

通过平面截痕法可以了解它们的图形，其中$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的图形如图1.37所示.

4) 椭圆抛物面

方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$，或$y=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$，或$x=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$所确定的曲面均称为**椭圆抛物面**，其中$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$的图形如图1.38 所示.

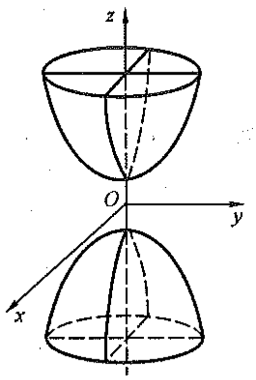

图 1.37

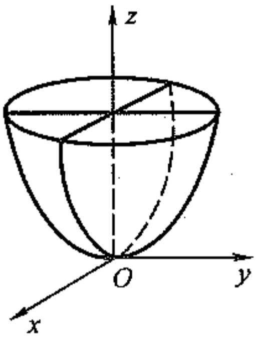

图 1.38

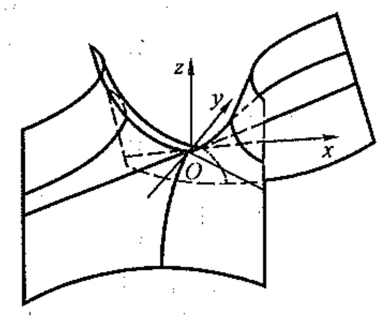

图 1.39

5) 双曲抛物面

方程$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$，或$y=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$，或$x=\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$所确定的曲面均称为**双曲抛物面**.

我们来讨论双曲抛物面$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$的图形.

用平面$z=0$去截此曲面，得到Oxy面上的两条相交直线

$$\begin{cases} bx\pm ay=0, \\ z=0. \end{cases}$$

用平面$x=0$去截此曲面，得到Oyz面上开口向下的抛物线

$$\begin{cases} y^2=-b^2z, \\ x=0. \end{cases}$$

用平面$y=0$去截此曲面，得到Oxz面上开口向上的抛物线

$$\begin{cases} x^2=a^2z, \\ y=0. \end{cases}$$

用平面$z=k$去截曲面，得到曲线

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}, \\ z=k, \end{cases}$$

即在平面$z=k$上的双曲线$\dfrac{x^2}{ka^2}-\dfrac{y^2}{kb^2}=1$.用$x=k$去截此曲面，得到曲线

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}, \\ x=k, \end{cases}$$

即在平面$x=k$上的抛物线$z=\dfrac{k^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$. 用平面$y=k$去截此曲面，则得到在平面$y=k$上的抛物线

$$\begin{cases} z+\dfrac{k^2}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}, \\ y=k, \end{cases}$$

这个曲面的图形如图1.39所示，由于曲面的形状像马鞍，因此，也叫**马鞍面**.

§1.4.6　曲面的参数方程

若曲面Σ上的点的坐标(x,y,z)表示成两个参数(u,v)的函数：

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

则上面的方程组叫做曲面Σ的**参数方程**.如果能从方程组中消去参数(u,v)就得到曲面Σ的隐式方程$F(x,y,z)=0$.

例如，以z轴为对称轴的圆柱面$x^2+y^2=a^2$，可表示参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=a\sin\varphi, \\ z=u \end{cases} \qquad (0\le\varphi\le 2\pi, -\infty<u<+\infty).$$

而参数方程

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

表示球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.$\theta =$常数表示顶点在原点O、中心轴为z轴的半圆锥面，它与球面的交线是圆，习惯上称为**纬线**；而$\varphi =$常数则表示过z轴的半平面，它与球面的交线是半个大圆弧，习惯上称为**经线**（图1.40）.

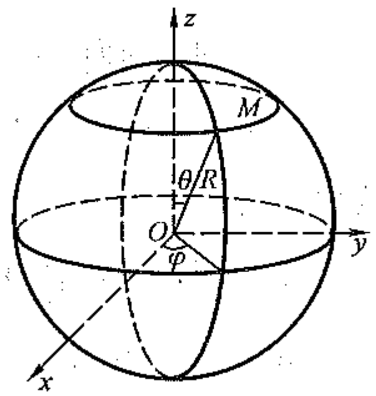

图 1.40

习 题 四

1. 求适合下列条件的旋转曲面方程，并作出草图：

(1) 曲线$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36, \\ z = 0 \end{cases}$绕$x$轴旋转一周；

(2) 曲线$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36, \\ z = 0 \end{cases}$绕$y$轴旋转一周；

(3) 曲线$\begin{cases} z^2 = 5x, \\ y = 0 \end{cases}$绕$x$轴旋转一周；

(4) 曲线$\begin{cases} x^2 + z^2 = 9, \\ y = 0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周.

2. 指出下列方程表示怎样的曲面，并作出草图：

(1) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; (2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$;

(3) $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$; (4) $x^2+y^2+2z=0$

3. 求从曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$到$Oxy$平面的投影柱面的方程.

4. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2-z=0,\\z=x+1\end{cases}$在$Oxy$平面上的投影曲线的方程.

5. 求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$与平面$x-z+2=0$的交线在$Oxy$ 面上的投影曲线的方程及以此投影曲线为准线，母线平行于z轴的柱面的方程.

6. 求两球面$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线在Oxy面上的投影曲线的方程.

7. 求母线平行于向量$2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，而准线为$\begin{cases}x^2+y^2=9,\\z=1\end{cases}$的柱面方程.

8. 画出由曲面$z=3x^2+y^2$与$z=1-x^2$所围成立体的草图，并求此两曲面的交线在Oxy面上的投影曲线的方程.

9. 求与Oxy平面成$45°$角，且过点$(1,0,0)$的直线的轨迹.

10. 求直线$\begin{cases}x+y+z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影曲线的方程.

11. 已知柱面的准线为$\begin{cases}x^2-y^2=z,\\x+y+z=0.\end{cases}$ 母线垂直于准线所在平面，求柱面方程.

12. 已知锥面的顶点为$M_0(3,-1,-2)$，准线为单叶双曲面$x^2+y^2-z^2=1$ 与平面$x-y+z=0$的交线，求锥面方程.

13. 证明曲线$\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 5\cos t. \end{cases}$是一个圆，并求它的圆心和半径.

14. 将曲面的参数方程$\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \\ z = r^2\cos 2\theta \end{cases}$（常数$a, b \neq 0$）化为直角坐标方程.

§1.5 向量函数

本节在前面介绍的向量及其代数运算的基础上，简略地介绍向量函数及其分析运算.

在向量代数中所研究的向量是模和方向都不改变的向量，即所谓常向量.但在实际问题中遇到的向量大多是模和方向会改变的向量，即所谓变向量或变矢.变向量中比较重要的一类则是向量函数.

定义1.5.1. *设有变数t和变向量$\boldsymbol{A}$，如果对于t在某个数集内的每一个值，按照某种法则，都有一个确定的向量$\boldsymbol{A}$与之对应，则称$\boldsymbol{A}$为数性变量t的***向量函数**.*记为*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t).$$

如果在空间直角坐标系中向量$\boldsymbol{A}$的三个坐标为$A_x(t), A_y(t), A_z(t)$, 则$\boldsymbol{A}$的坐标表示式为

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\boldsymbol{i} + A_y(t)\boldsymbol{j} + A_z(t)\boldsymbol{k}, \tag{1.5.1}$$

或

$$\boldsymbol{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t)). \tag{1.5.2}$$

在几何上，如果我们把$\boldsymbol{A}(t)$的起点放在坐标原点，则当t变化时$\boldsymbol{A}(t)$ 的终点M 就描绘出一条曲线（图1.41），这条曲线称为向量函数$\boldsymbol{A}(t)$的**矢端曲线**.它就是向量函数$\boldsymbol{A}(t)$的几何图形，向量函数$\boldsymbol{A}(t)$的坐标表示式，称为曲线的**向量方程**.

例如，向量函数$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$（其中$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \boldsymbol{a} = (l, m, n), -\infty < t < +\infty$）的图形是一条过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，以向量$\boldsymbol{a}$为方向向量的直线.

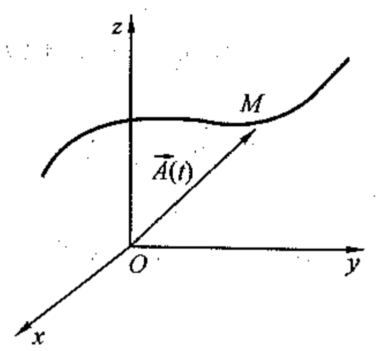

图 1.41

§1.5.1 向量函数的极限和连续

定义1.5.2. 设向量函数$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$在$t_0$的某个邻域内有定义（在$t_0$可以没有定义），$\boldsymbol{A}_0$为一常向量，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得当$0<|t-t_0|<\delta$时，恒有

$$|\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}_0|<\varepsilon,$$

则称t趋于t_0时，向量函数$\boldsymbol{A}(t)$有极限$\boldsymbol{A}_0$，或说$\boldsymbol{A}(t)$在t_0的极限为$\boldsymbol{A}_0$，记为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}_0. \tag{1.5.3}$$

若$\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{A}_0$的坐标表示式分别为

$$\boldsymbol{A}(t)=(A_x(t),A_y(t),A_z(t)),\boldsymbol{A}_0=(A_{ox},A_{oy},A_{oz}),$$

则(1.5.3)式等价于$\lim\limits_{t\to t_0}A_x(t)=A_{ox},\lim\limits_{t\to t_0}A_y(t)=A_{oy},\lim\limits_{t\to t_0}A_z(t)=A_{oz}$.

正因为这种等价性，我们也可以利用向量函数$\boldsymbol{A}(t)$的坐标$A_x(t),A_y(t),A_z(t)$（一元函数）在t_0的极限来定义$\boldsymbol{A}(t)$在t_0的极限，以下用这种观点来定义向量函数的连续、可导、可积.

定义1.5.3. 设向量函数$\boldsymbol{A}(t)=(A_x(t),A_y(t),A_z(t))$在$t_0$的某一邻域内有定义，如果$A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$在$t_0$连续，则称向量函数$\boldsymbol{A}(t)$ 在t_0连续.

如果$A_x(t),A_y(t),A_z(t)$在某区间内连续，则称$\boldsymbol{A}(t)$在该区间内连续.

§1.5.2　向量函数的导数

定义1.5.4. 设向量函数$\boldsymbol{A}(t)=(A_x(t),A_y(t),A_z(t))$，如果$A_x(t),A_y(t),A_z(t)$都在$t_0$处可导，则称$\boldsymbol{A}(t)$在$t_0$处可导，其导数$\boldsymbol{A}'(t_0)$为

$$\boldsymbol{A}'(t_0)=(A_x'(t_0),A_y'(t_0),A_z'(t_0)).$$

若$A_x(t),A_y(t),A_z(t)$都在某区间内可导，则称$\boldsymbol{A}(t)$在该区间内可导，其导函数$\boldsymbol{A}'(t)$为

$$\boldsymbol{A}'(t)=(A_x'(t),A_y'(t),A_z'(t)).$$

向量函数$\boldsymbol{A}(t)$的微分定义为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t\quad(\mathrm{d}t=\Delta t).$$

由定义可知，$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$也是一个向量，当$\mathrm{d}t>0$时，它与$\boldsymbol{A}'(t)$同向；当$\mathrm{d}t<0$ 时，它与$\boldsymbol{A}'(t)$反向.

$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$的坐标表示式为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{A}=&(A_x'(t)\mathrm{d}t,A_y'(t)\mathrm{d}t,A_z'(t)\mathrm{d}t)\\=&(\mathrm{d}A_x,\mathrm{d}A_y,\mathrm{d}A_z).\end{aligned}$$

特别，对于矢径函数$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z),$$

于是$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$.

§1.5.3　向量函数的积分

定义1.5.5. 设向量函数$\boldsymbol{A}(t)=(A_x(t),A_y(t),A_z(t))$，若存在向量函数

$$\boldsymbol{B}(t)=(B_x(t),B_y(t),B_z(t)),$$

使得$B_x'(t)=A_x(t),B_y'(t)=A_y(t),B_z'(t)=A_z(t)$，
则称$\boldsymbol{B}(t)$为$\boldsymbol{A}(t)$的一个原函数.$\boldsymbol{A}(t)$的原函数的全体，称为$\boldsymbol{A}(t)$的不定积分，记为

$$\int A(t)\mathrm{d}t$$

上式的坐标表示式为

$$\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = (\int A_x(t)\mathrm{d}t, \int A_y(t)\mathrm{d}t, \int A_z(t)\mathrm{d}t),$$

若$\boldsymbol{B}(t)$是$\boldsymbol{A}(t)$的一个原函数，则

$$\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C}\text{为任意常向量}).$$

定义1.5.6. 设向量函数$\boldsymbol{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$在区间$[\alpha, \beta]$上连续，定义$\boldsymbol{A}(t)$ 在$[\alpha, \beta]$上的定积分为

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = (\int_\alpha^\beta A_x\mathrm{d}t, \int_\alpha^\beta A_y\mathrm{d}t, \int_\alpha^\beta A_z\mathrm{d}t).$$

由以上定义可知，向量函数的不定积分与定积分与数量函数的不定积分与定积分有完全类似的性质.

总　习　题

1. 设$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，试问在什么条件下才能保证下列各式成立？

   (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

   (3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

   (5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

2. 已知$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$，计算：

   (1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$;　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

3. 在边长为1的立方体中，设OM为对角线，OA为棱，求$\vec{OA}$在$\vec{OM}$上的投影.

4. 甲烷分子CH_4由四个氢原子与一个碳原子组成，四个氢原子位于正四面体的四个顶点处，一个碳原子位于四面体的形心处，由$H-C-H$构成的角称为甲烷分子的键角，试求键角的大小.

5. 设$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}, |\boldsymbol{b}| = 1, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{\pi}{6}$，计算：

   (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角;

   (2) 以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{3b}$为邻边的平行四边形的面积.

6. 设$\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都为非零向量，证明：$\boldsymbol{c}$ 平分$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$的夹角.

7. 一动点与$x+y-z-1=0$和$x+y+z+1=0$两平面距离的平方和等于1，试求其轨迹.

8. 求平行于平面$2x+y+2z+5=0$而与三坐标平面所构成的四面体的体积为1的平面方程.

9. 设一平面垂直于平面$z=0$，并通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases}x=0,\\ y-z+1=0\end{cases}$的垂线，求这个平面的方程.

10. 求两条平行直线$x=t+1,y=2t-1,z=t$和$x=t+2,y=2t-1,z=t+1$间的距离.

11. 决定λ，使直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$和直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$相交.

12. 试证直线$\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$和直线$\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{2}$相交，并写出由此两直线决定的平面方程.

13. 求过点$(-1,0,4)$，且平行于平面$3x-4y+z-10=0$又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线方程.

14. (1) 假设Oxy面是一个镜面，一束激光沿着单位向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$所指向的方向射上镜面，然后沿着单位向量$\boldsymbol{b}$的方向反射出去.证明：$\boldsymbol{b}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}-a_z\boldsymbol{k}$.
(2) 设直角坐标系中的三个坐标平面为三个镜面，从$A(1,2,3)$处按$\boldsymbol{a}=(-4,-2,-1)$的方向发出一束激光，试求激光束经三个坐标平面连续反射后的反射光线的方程.

15. 证明平面$2x-12y-z+16=0$与双曲抛物面$x^2-4y^2=2z$的交线是两条相交的直线，并写出它们的标准式方程.

16. 求经过平面$x+28y-2z+17=0$和平面$5x+8y-z+1=0$的交线，且切于球面$x^2+y^2+z^2=1$ 的平面方程.

17. 求曲线$\begin{cases}z=2-x^2-y^2,\\ z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的方程.

18. 求柱面$z^2 = 2x$与锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$所围立体在三个坐标面上的投影区域.

19. 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) 抛物柱面$2y^2 = x$，平面$z = 0$及$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1$;

(2) 旋转抛物面$z = x^2 + y^2$，柱面$x = y^2$，平面$z = 0$及$x = 1$.