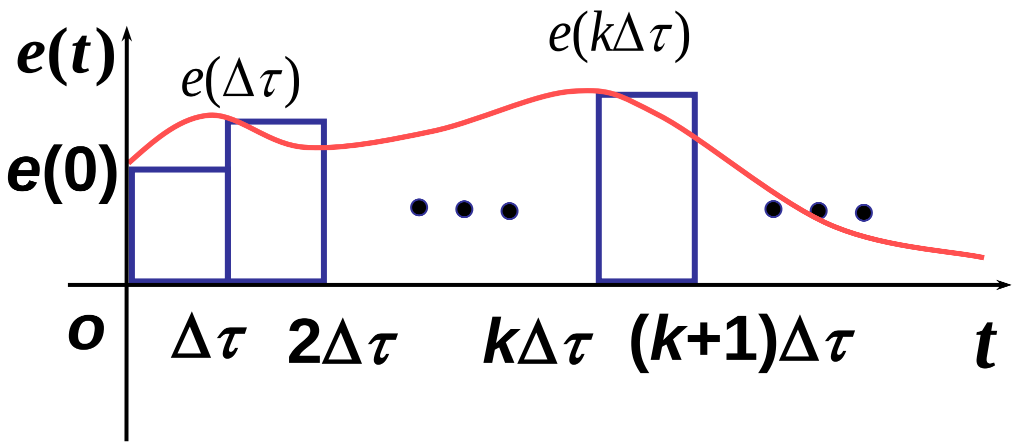
连续信号与系统的时域分析

一、连续信号的时域分解



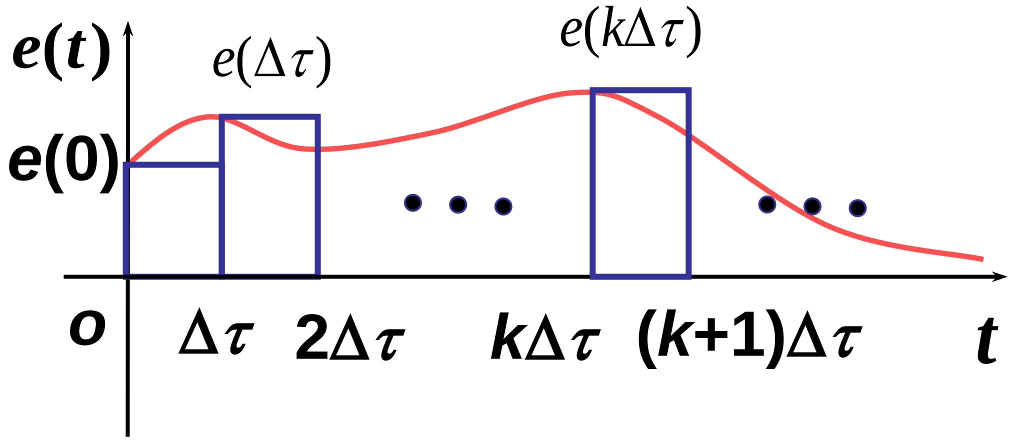
$$e(t)=\sum_{k=1}^{N}e_k(t) \quad \Longrightarrow \quad r(t)=\sum_{k=1}^{N}r_k(t)$$

要求子信号具有:

完备性: 任意函数都可以分解为该子信号的和;

简单性: 容易求得系统对该子信号的响应;

相似性: 不同子信号的响应具有内在联系,可以类推.



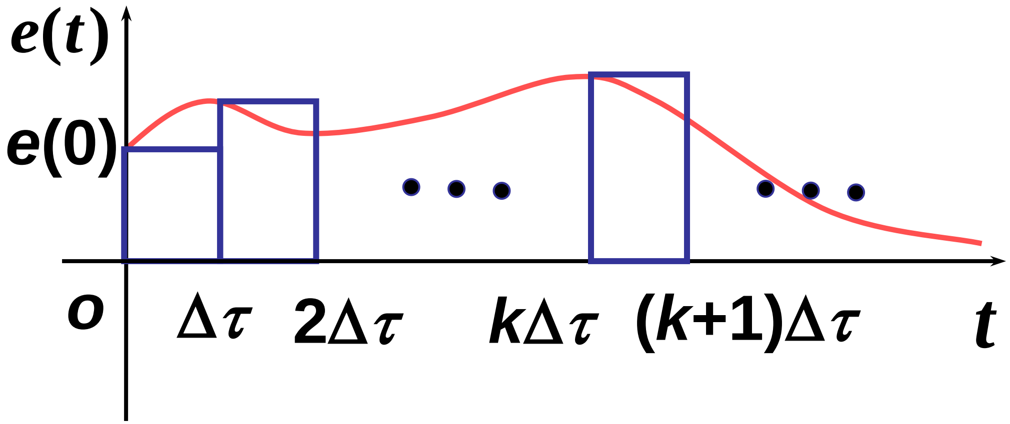
$$e(t) \approx \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)\ p(t-k\Delta\tau)\ \Delta\tau$$

$$e(t) \approx e(0)[u(t)-u(t-\Delta\tau)]+e(\Delta\tau)[u(t-\Delta\tau)-u(t-2\Delta\tau)]+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)[u(t-k\Delta\tau)-u(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

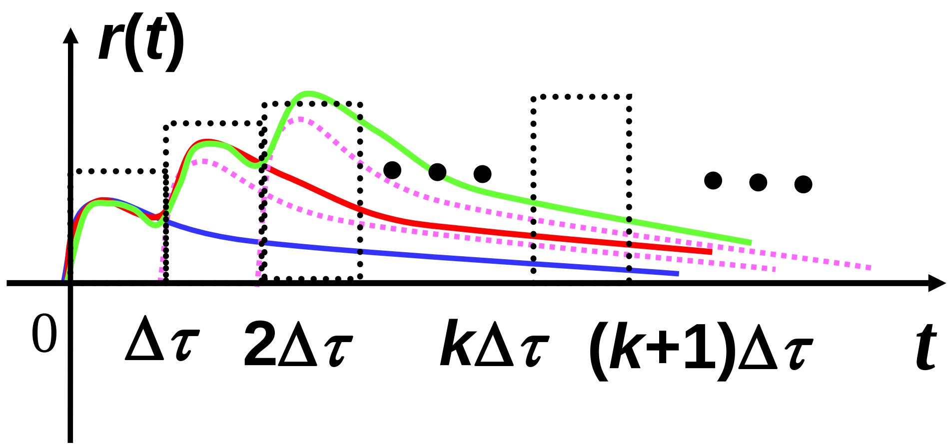
$$=\sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)\frac{1}{\Delta\tau}[u(t-k\Delta\tau)-u(t-(k+1)\Delta\tau)]\Delta\tau$$

$\boldsymbol{p(t-k\Delta\tau)}$ 单位矩形脉冲函数

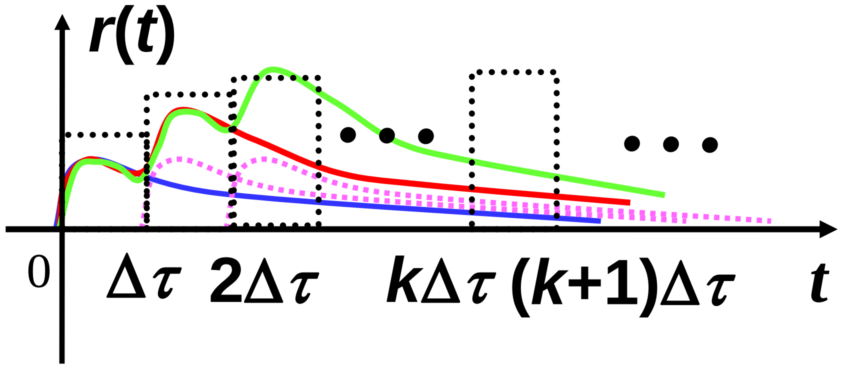


$$e(t) \approx \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)\, p(t-k\Delta\tau)\,\Delta\tau$$

若 单位矩形脉冲函数 $p(t)$ 的响应为 $h_p(t)$



$$r(t) \approx \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)\, h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$



$$e(t) \approx \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)\ p(t-k\Delta\tau)\ \Delta\tau$$

$$r(t) \approx \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau)\ h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

当$e(t)$分割得足够细，即$N \to \infty, \Delta\tau \to d\tau, k\Delta\tau \to \tau$

$$p = \frac{1}{\Delta\tau}[u(t-k\Delta\tau) - u(t-(k+1)\Delta\tau)] \quad \to \delta(t-\tau)$$

激励$\boldsymbol{e(t) = \int_0^t e(\tau)\ \delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau}$ ⇒ 信号分解 $\boldsymbol{e(t) = e(t) * \delta(t)}$

响应 $r(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} e(k\Delta\tau) h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$

积分

单位矩形脉冲函数响应 ⟶ $\boldsymbol{h(t-\tau)}$

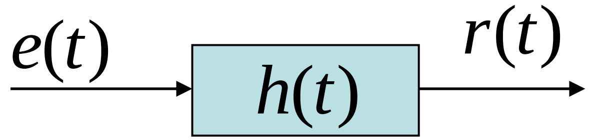
单位冲激响应

$$\boldsymbol{r(t) = \int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

卷积积分

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

二、连续时间系统的时域分析方法：



$$r(t) = e(t) * h(t)$$

要解决的问题：

1、如何求取LTI系统单位冲激响应？

2、卷积积分如何计算？

三、 卷积的计算及性质

1、卷积的定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

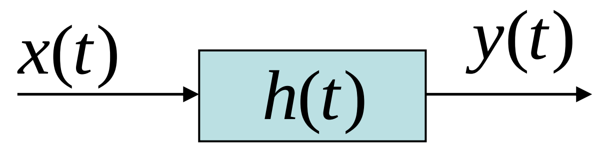
因果系统：

$$r(t) = \int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau = e(t) * h(t)$$

τ 积分变量（激励作用时刻）

t 参变量(观察响应时刻)

例1. 已知：某因果线性时不变系统



$$x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t) \qquad h(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

求： $\boldsymbol{y(t)}$。

解： 利用卷积积分计算响应 **y (t):**

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}u(\tau)e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-2t}\int_{0}^{t}e^{\tau}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-2t}(e^{t}-1)u(t)$$

$$=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

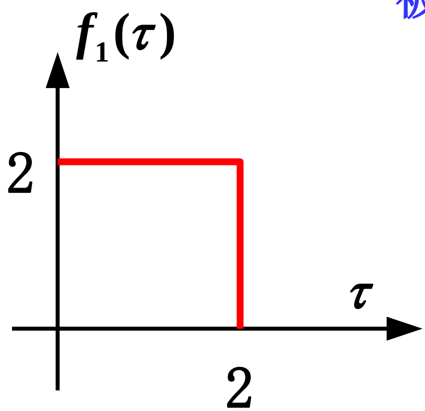
2、卷积的图形表示

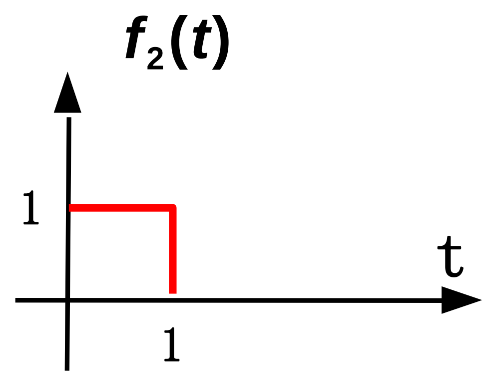
例2. $f_1(t)=2[u(t)-u(t-2)],\quad f_2(t)=u(t)-u(t-1)$

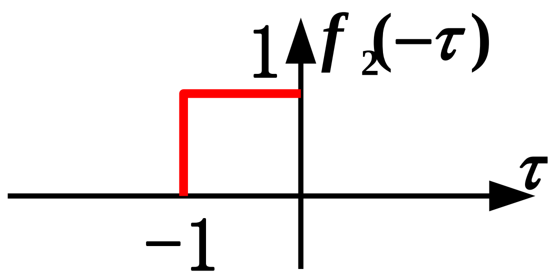
求 $f_1(t)*f_2(t)$

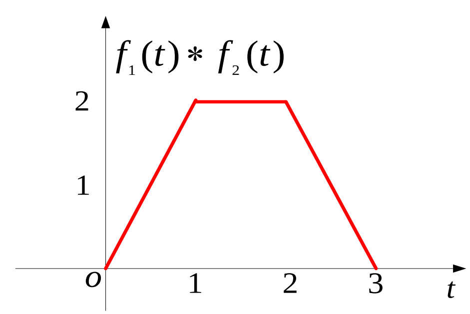
参变量

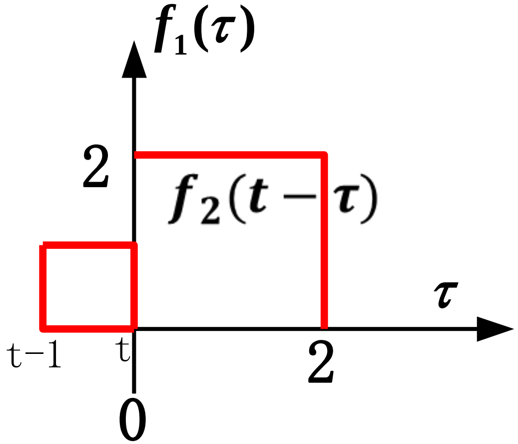
解: $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f_1(\tau)f_2(t-\tau)}_{\text{被积函数}}d\tau$ —— 积分变量



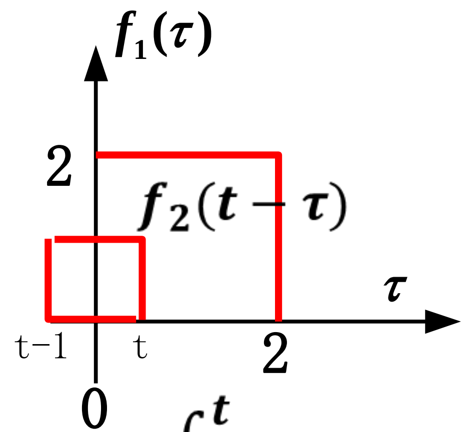




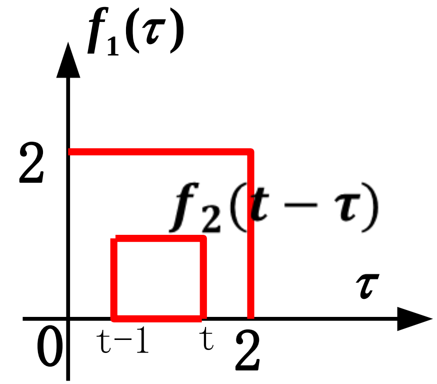




$t \le 0$ $\quad$ 0

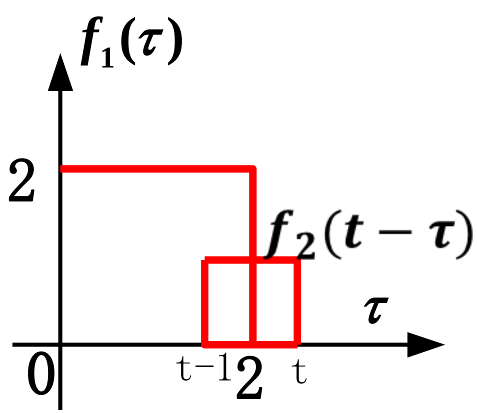


$0 < t \le 1$ $\quad$ $\int_0^t 2d\tau = 2t$



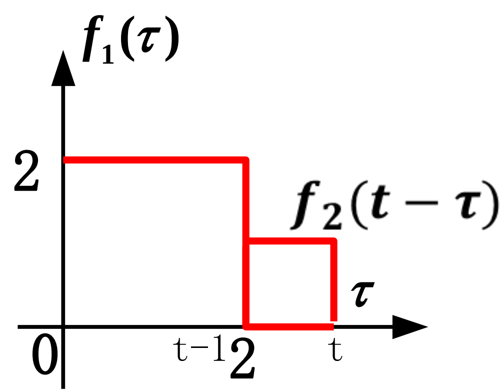
$1 < t \le 2$

$$\int_{t-1}^{t} 2d\tau = 2$$

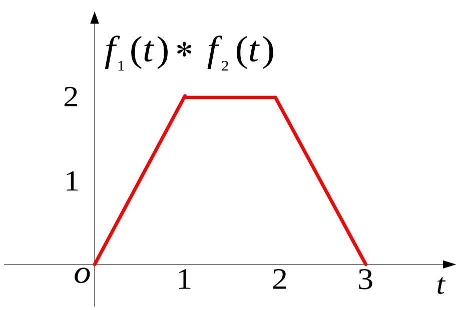


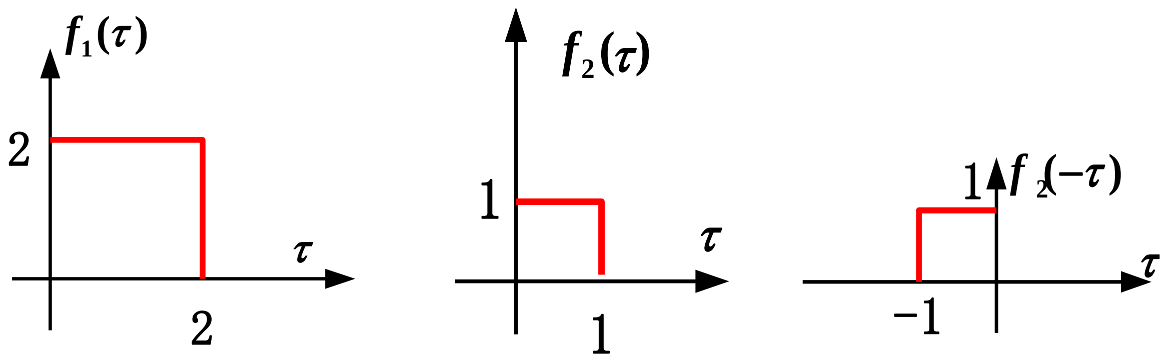
$2 < t \le 3$

$$\int_{t-1}^{2} 2d\tau = 6 - 2t$$



$3 < t$ $\quad$ 0





图解卷积：

1 改变图形中的横坐标，自变量由t变为τ；

2 将其中的一个信号反褶；

3 反褶后的信号平移t个单位；

4 两信号重叠部分相乘；

5 求乘积信号所围的面积。

反褶——>平移——>相乘——>叠加（积分）

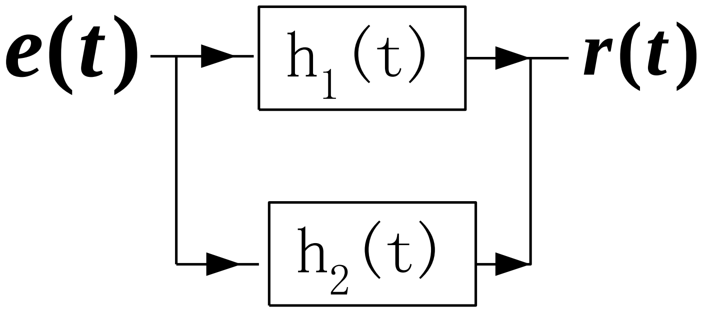
关键：积分上、下限的确定

3、 卷积性质

(1)、与乘法运算相同的性质：（代数运算）

①交换率：$f(t)*v(t)=v(t)*f(t)$

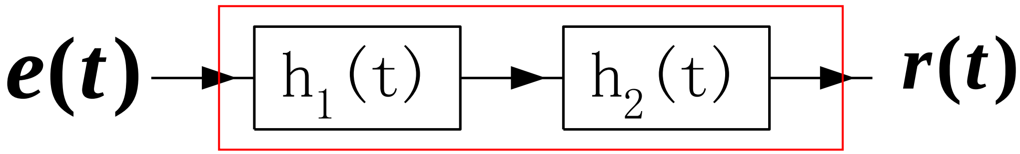
②分配率：$f(t)*[v(t)+w(t)]= f(t)*v(t)+ f(t)*w(t)$



$\boxed{\text{并联系统等效}}$ ⇨ $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$

一个并联系统的冲激响应等于各个子系统冲激响应之和

③结合率：$f(t)*[v(t)*w(t)]= [f(t)*v(t)]*w(t)$



串联系统等效 ⇒ $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$

1. 一个串联系统的冲激响应等于各个子系统冲激响应之卷积

2. 串连系统与子系统次序无关

(2)、函数延时后的卷积

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$
$$=x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

假设： **f(t)*v(t)=y(t)**

则： **$f(t-t_1)*v(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$**

如：$\delta(t-2)*\delta(t-3)=\delta(t-5)$

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$u(t)*u(t)=tu(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$u(t)*u(t-2)=(t-2)u(t-2)$$

例2. $f_1(t)=2[u(t)-u(t-2)],\quad f_2(t)=u(t)-u(t-1)$

求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

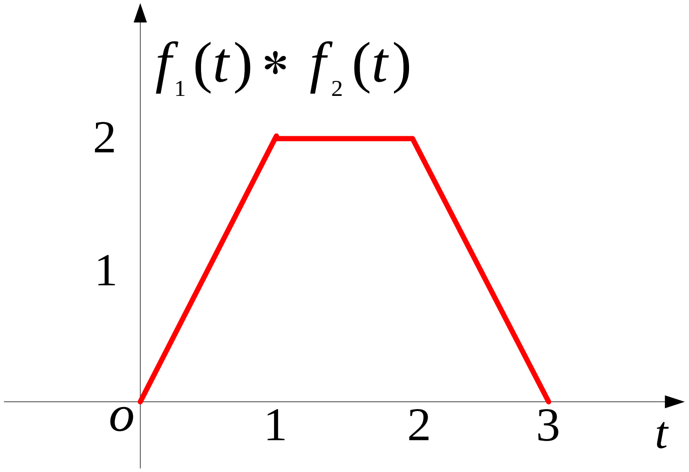
解: $u(t)*u(t)=tu(t)$

$$2[u(t)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-1)]$$

$$=2[u(t)*u(t)-u(t)*u(t-1)-u(t-2)*u(t)+u(t-2)*u(t-1)]$$

$$=2[tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)]$$

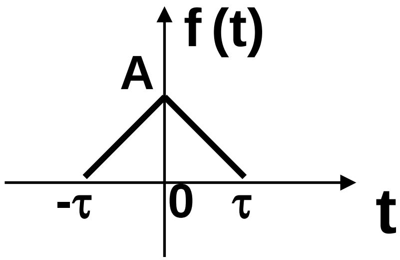
$$\begin{cases} t\le 0, & f(t)=0 \\ 0<t\le 1, & f(t)=2t \\ 1<t\le 2, & f(t)=2 \\ 2<t\le 3, & f(t)=6-2t \\ 3<t, & f(t)=0 \end{cases}$$



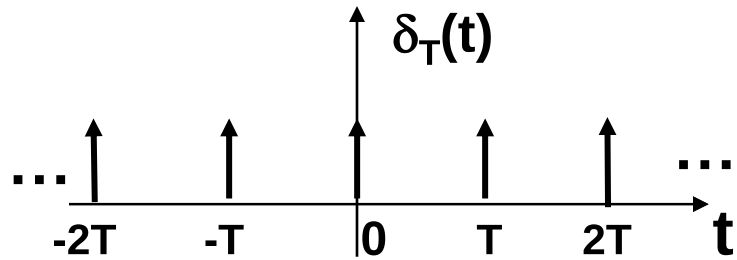
例3：$\delta_T(t)$为周期为T的周期性单位冲激函数序列

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t+kT)=\delta(t)+\delta(t+T)+\delta(t+2T)+\cdots+\delta(t+kT)+\cdots$$

f(t)如图示



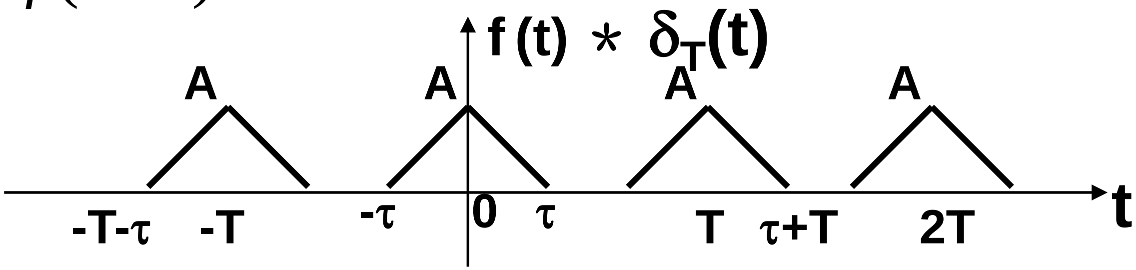
$2\tau<T$



试求$f(t) * \delta_T(t)$

解: $f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$

$$f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$$



(3)、卷积的微分与积分：

微分：

$$\frac{d}{dt}[f(t)*v(t)]=\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]*v(t)=f(t)*\left[\frac{d}{dt}v(t)\right]$$

积分：

$$\int_{-\infty}^{t}[f(\tau)*v(\tau)]d\tau=f(t)*[\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau]=[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau]*v(t)$$

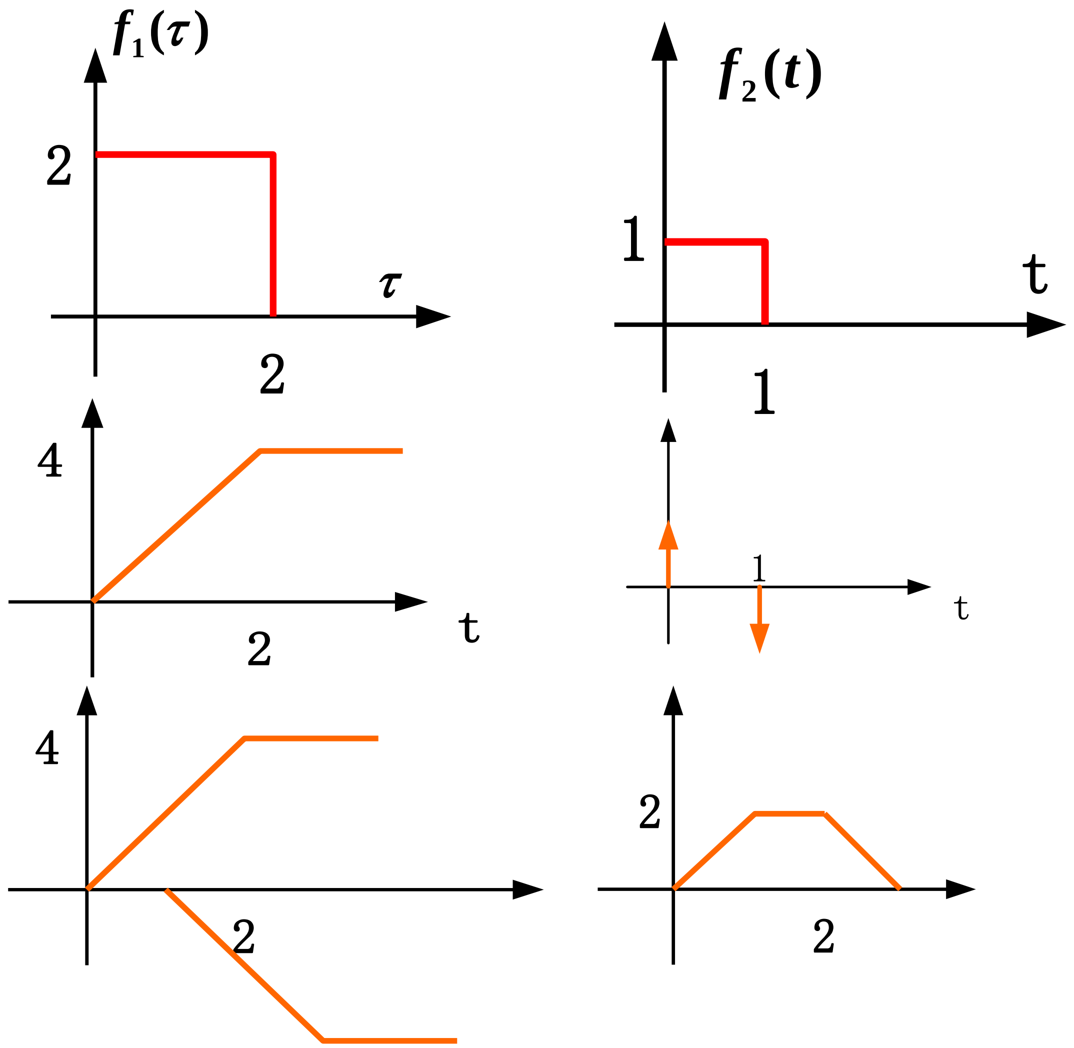
$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau*\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}(\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau)*v(\tau)=f(t)*v(t)$$

$$\frac{df(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau=f(t)*\frac{d}{dt}(\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau)=f(t)*v(t)$$

推论：

$$\boxed{f(t)*v(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau*\frac{dv(t)}{dt}=\frac{df(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau}$$

例4：利用微积分性质求下面两个函数的卷积



卷积的说明：折线信号和其它信号的卷积，折线信号的微分一般可以化成冲激信号，利用冲激信号的卷积求解.

4、 常用函数的卷积

$$(1)\ f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$(2)\ f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

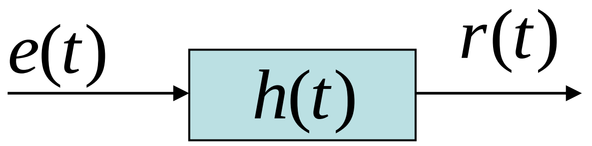
$$(3)\ f(t) * \delta'(t) = f'(t) * \delta(t) = f'(t)$$

$$(4)\ f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

$$(5)\ u(t) * u(t) = tu(t)$$

$$(6)\ e^{-t}u(t) * u(t) = (1-e^{-t})u(t)$$

连续LTI系统的单位冲激响应?



$$r(t) = e(t) * h(t)$$

单位冲激响应：系统对单位冲激信号的零状态响应

连续LTI系统的微分方程描述

对于一个n阶线性时不变系统，激励函数 e(t) 与响应函数 r(t) 之间的关系总可以用一个n阶线性常系数微分方程来描述：

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\ldots+a_1\frac{d}{dt}r(t)+a_0r(t)$$

$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}e(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\ldots+b_1\frac{d}{dt}e(t)+b_0e(t)$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^n}{dt^n}r(t)=\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^k}{dt^k}e(t)$$

解的形式为：

$$r(t)=r_1(t)（\text{通解}）+r_2(t)(\text{特解}）$$

齐次解　　　非齐次解

齐次方程： $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^n}{dt^n} r(t) = 0$

当特征方程的特征根全为单根 λ_k

$$r(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t}$$

零输入响应

初始条件： $r(0), r'(0), \cdots r^{(n-1)}(0) \Rightarrow C_k$

线性系统：零输入--零输出特性

$e(t) = 0 \Rightarrow r(t) = 0 \Rightarrow C_k = 0$

$r(0), r'(0), \cdots r^{(n-1)}(0) = 0$ 零初始条件

⇓

线性常系数微分方程： 线性、因果性、时不变性

当线性常系数微分方程具有一组不全为零的初始条件时，它所描述的系统是一个增量线性系统。

一、系统方程的算子表示法

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\ldots+a_1\frac{d}{dt}r(t)+a_0r(t)$$

$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}e(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\ldots+b_1\frac{d}{dt}e(t)+b_0e(t)$$

微分算子：$p=\dfrac{d}{dt};p^n=\dfrac{d^n}{dt^n};\dfrac{1}{p}=\int_{-\infty}^{t}(\quad)d\tau;$

$\Downarrow$ 代数方程

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)r(t)=$$
$$(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0)e(t)$$

$$D(p)r(t)=N(p)e(t) \qquad r(t)=\frac{N(p)}{D(P)}e(t) \qquad r(t)=H(p)e(t)$$

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0} \qquad r(t)=h(t)*e(t)$$

转移算子

$$H(p)\rightarrow h(t)$$

二、 算子运算法则

$$1: mp+np=(m+n)p$$ m,n为任意整数

$$2: p^m p^n = p^{m+n}$$ m,n同为正数或负数

问：$\cancel{p\frac{1}{p}=\frac{1}{p}p}$?

微分和积分的次序不能交换

问:~~px(t)=py(t) ⇒ x(t)=y(t)~~

如：$x(t)=y(t)+C$

$$px(t)=py(t)$$

$$x(t)\neq y(t)$$

三、单位冲激响应——解的形式：

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)r(t)$$
$$= (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)e(t)$$

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)h(t)$$
$$= (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)\delta(t)$$

1．**n>m** 时

$$h(t) = H(p)\delta(t)$$

$$= \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}\delta(t)$$

$$= \left(\frac{k_1}{p-\lambda_1} + \frac{k_2}{p-\lambda_2} + \cdots + \frac{k_n}{p-\lambda_n}\right)\delta(t)$$

$$h_1(t) = \frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t) \Rightarrow h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)$$

$$h_1(t) = \frac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t) \qquad \frac{d}{dt}h_1(t) - \lambda_1 h_1(t) = k_1\delta(t)$$

$$e^{-\lambda_1 t}\frac{d}{dt}h_1(t) - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}h_1(t) = k_1 e^{-\lambda_1 t}\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\lambda_1 t}h_1(t)\right] = k_1 e^{-\lambda_1 t}\delta(t)$$

将此等式双方从 0- 到 t 取定积分：

$$e^{-\lambda_1 t}h_1(t) - h_1(0^-) = k_1\int_{0^-}^{t} e^{-\lambda_1 \tau}\delta(\tau)d\tau \qquad h_1(0^-) = 0$$

$$h_1(t) = \int_{0^-}^{t} k_1 e^{\lambda_1 (t-\tau)}\delta(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad h_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}u(t)$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t}u(t)$$

（这里只考虑λ均为单根）

问题：若λ_k均为k阶重根？

$$h_k(t) = (A_1 + A_2 t + \cdots + A_k t^{k-1}) e^{\lambda_1 t} u(t)$$

2. n=m 时

$$h(t) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \delta(t)$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t} u(t) + b_m \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt} h_1(t) - \lambda_1 h_1(t) = b_1 \frac{d}{dt} \delta(t)$$

$$h_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} u(t) + b_1 \delta(t)$$

3. n<m 时

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t} u(t) + A_0 \delta^{(m-n)}(t) + \cdots + A_{m-n} \delta(t)$$

例1：求系统 $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d^3}{dt^3}e(t)+4\frac{d^2}{dt^2}e(t)-5e(t)$

的单位冲激响应

分析： $r(t)=H(p)e(t)$

解： $(p^2+3p+2)r(t)=(p^3+4p^2-5)e(t)$

$$H(p)=\frac{p^3+4p^2-5}{p^2+3p+2}=p+1+\frac{-2}{p+1}+\frac{-3}{p+2}$$

$$r(t)=pe(t)+e(t)+\frac{-2}{p+1}e(t)+\frac{-3}{p+2}e(t)$$

当 $\boldsymbol{e(t)=\delta(t)}$

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)+(-2e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$$

阶跃响应与冲激响应

单位阶跃函数与单位冲激函数之间的关系:

1. 微分:
$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

2. 积分:
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

问题1：系统的单位阶跃响应与单位冲激响应之间的关系?

问题2：若已知系统的单位阶跃响应，系统的单位冲激响应?

问题3：若已知系统的单位阶跃响应，系统的输出？

线性系统： $e_1(t) \to r_1(t) \qquad e_2(t) \to r_2(t)$

$$k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t) \to k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)$$

时不变系统： $e(t) \to r(t) \qquad e(t - t_0) \to r(t - t_0)$

线性时不变系统： $e(t) \to r(t)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t) - e(t - \Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t) - r(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt} e(t) \to \frac{d}{dt} r(t)$$

单位冲激函数是单位阶跃函数的导数

结论1：单位冲激响应是单位阶跃响应的导数。

同理： $\int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{t} r(\tau)d\tau$

单位阶跃函数是单位冲激函数的积分

结论 2： 单位阶跃响应是单位冲激响应的积分

记：单位冲激响应 $h(t)$

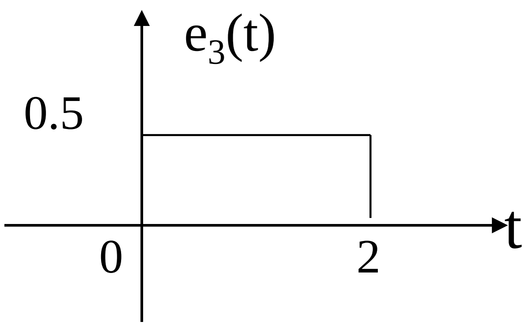
单位阶跃响应 $s(t)$

单位阶跃响应与单位冲激响应之间的关系：

1. 微分: $h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$ 2. 积分: $s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t)dt$

$$r(t) = e(t) * h(t) = \frac{d}{dt} e(t) * s(t) = e(t) * \frac{d}{dt} s(t)$$

例2：已知某增量线性时不变系统在相同的初始条件下，
当$e_1(t)=u(t)$时，全响应为$r_1(t)=(2e^{-t}+2e^{-2t}-\cos 3t)\,u(t)$;
若$e_2(t)=3u(t)$时，全响应为$r_2(t)=(4e^{-t}+2e^{-2t}-3\cos 3t)\,u(t)$;
求该系统的单位冲激响应$h(t)$,
若激励为$e_3(t)$如图示时，求系统的零状态响应。



分析：深刻理解系统零输入和零状态响应，以及利用不同响应之间的关系求冲激响应。

$$e_2(t)-e_1(t) \Longrightarrow r_2(t)-r_1(t)$$

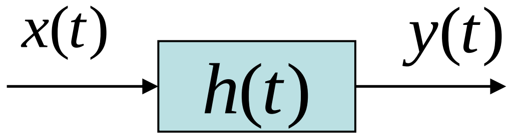
$$2u(t) \Longrightarrow (2e^{-t}-2cos3t)u(t)$$

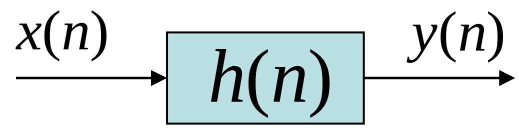
$$u(t) \Longrightarrow (e^{-t}-cos3t)u(t)=s(t)$$

$$h(t)=\frac{d}{dt}s(t)$$

$$y(t)=e_3(t)*h(t)=\frac{d}{dt}e_3(t)*s(t)$$

线性时不变系统的性质





$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad y(n) = x(n) * h(n)$$

根据单位冲激响应（单位脉冲响应）分析系统的性质：

1、记忆性：即时系统与动态系统

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$k \neq n, \quad h(n-k) = 0$$

$$n \neq 0, \quad h(n) = 0$$

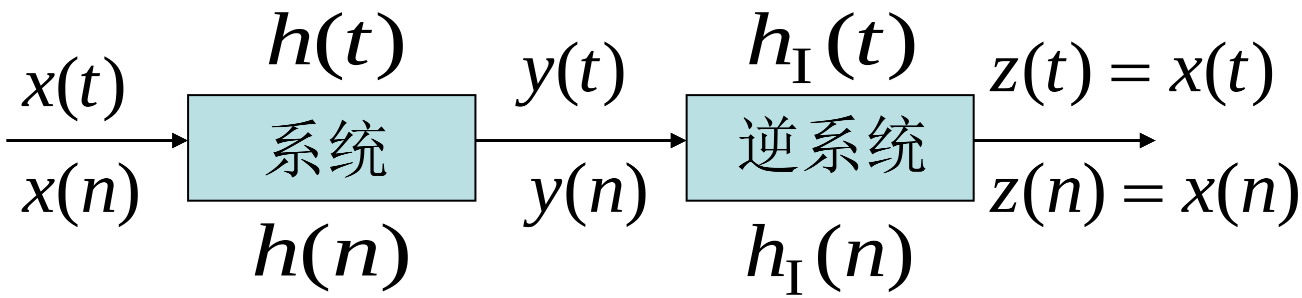
结论：

离散LTI即时系统： $h(n) = a\delta(n)$

连续LTI即时系统： $h(t) = a\delta(t)$

恒等系统： $h(n) = \delta(n) \qquad h(t) = \delta(t)$

2、系统的可逆性：



$$h(t)*h_{\mathrm{I}}(t)=\delta(t) \qquad h(n)*h_{\mathrm{I}}(n)=\delta(n)$$

例：某离散**LTI**系统： $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)=x(n)*u(n)$

该累加器的的单位脉冲响应： $h(n)=u(n)$

其逆系统的单位脉冲响应： $h_{\mathrm{I}}(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$

$$h(n)*h_{\mathrm{I}}(n)=u(n)*\delta(n)-u(n)*\delta(n-1)$$

$$=u(n)-u(n-1) \quad =\delta(n)$$

其逆系统： $y(n)=x(n)-x(n-1)$

累加器是可逆系统。 一阶差分运算系统可逆吗？

3、系统的因果性：

如果$x(n)$为因果信号：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k) \quad y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k) \quad y(n)=\sum_{k=0}^{n}x(k)h(n-k)$$

$$k>n, \quad h(n-k)=0$$

$$\boxed{n<0, \quad h(n)=0}$$

离散LTI系统因果的充分必要条件

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad y(t)=\int_{0}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\boxed{t<0, \quad h(t)=0}$$

连续LTI系统因果的充分必要条件

例1: $h(n)=(-1)^{n-1}u(n-1)$

例2： $h(n)=u(n) \qquad h_{\mathrm{I}}(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$

例3: $h(n)=\delta(n+1)$

连续LTI系统的方框图表示

N 阶连续系统： $$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

令： $$y_{(0)}(t) = y(t) \qquad x_{(0)}(t) = x(t)$$

$$y_{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} y_{(0)}(\tau)d\tau \qquad x_{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x_{(0)}(\tau)d\tau$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{t} y_{(k-1)}(\tau)d\tau \qquad x_{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x_{(k-1)}(\tau)d\tau$$

将微分方程两边进行N次积分（假设M=N）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{m} b_k x(n-k)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t) + a_N y_{(0)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$y_{(0)}(t) = y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_N}[\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)]$$

令： $$w(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_N}[w(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)]$$

例3：某连续LTI系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)+\frac{dx(t)}{dt}+3\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

试画出该系统的模拟框图

分析：$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^ky(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^kx(t)}{dt^k} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{N}a_ky_{(N-k)}(t)=\sum_{k=0}^{N}b_kx_{(N-k)}(t)}$$

解：　将系统方程两边同时进行两次积分

$$y_{(0)}(t)+2y_{(1)}(t)-2y_{(2)}(t)=x_{(2)}(t)+x_{(1)}(t)+3x_{(3)}(t)$$

$$y(t)=x_{(2)}(t)+x_{(1)}(t)+3x_{(3)}(t)-2y_{(1)}(t)+2y_{(2)}(t)$$

$$\begin{cases} w(t)=x_{(1)}(t)+x_{(2)}(t)+3x_{(3)}(t) \\ y(t)=w(t)-2y_{(1)}(t)+2y_{(2)}(t) \end{cases}$$

另解：$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)+\frac{dx(t)}{dt}+3\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2\frac{dy(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

引入微分算子 p

$$(p^3+2p^2-2p)y(t)=(p^2+p+3)x(t)$$

$$y(t)=\frac{p^2+p+3}{p^3+2p^2-2p}x(t)$$

令: $$q(t)=\frac{1}{p^3+2p^2-2p}x(t)$$

$$\begin{cases} y(t)=(p^2+p+3)q(t) \\ x(t)=(p^3+2p^2-2p)q(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 系统模拟框图

另解：$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-2\frac{dy(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

引入辅助函数 $q(t)$

$$\begin{cases}\dfrac{d^3q(t)}{dt^3}+2\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}-2\dfrac{dq(t)}{dt}=x(t)\\[2ex] y(t)=\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}+\dfrac{dq(t)}{dt}+3q(t)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 系统模拟框图

引入微分算子 p

$$\begin{cases}(p^3+2p^2-2p)q(t)=x(t) & \rightarrow q(t)=\dfrac{1}{p^3+2p^2-2p}x(t)\\[2ex] y(t)=(p^2+p+3)q(t) & \rightarrow y(t)=\dfrac{p^2+p+3}{p^3+2p^2-2p}x(t)\end{cases}$$

作业：P85

2.5

2.9

2.12 (a)(g)

2.14

2.17