第六章 二重积分习题课

贺 丹 （东南大学）

(一) 交换积分次序

(一) 交换积分次序

1. 化积分为极坐标形式的二次积分:

(一) 交换积分次序

1. 化积分为极坐标形式的二次积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(一) 交换积分次序

1. 化积分为极坐标形式的二次积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 将二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$ 化为直角坐标系下的二次积分.

(一) 交换积分次序

1. 化积分为极坐标形式的二次积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 将二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$ 化为直角坐标系下的二次积分.

3. 交换积分次序:

(1) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(一) 交换积分次序

1. 化积分为极坐标形式的二次积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 将二次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$ 化为直角坐标系下的二次积分.

3. 交换积分次序:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1+\cos\theta}^{2} f(\rho,\theta)d\rho.$

(一) 交换积分次序

1. 化积分为极坐标形式的二次积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 将二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$ 化为直角坐标系下的二次积分.

3. 交换积分次序:

(1) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1+\cos\theta}^{2} f(\rho,\theta)d\rho.$

思考: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$

4. 计算下列二重积分

4. **计算下列二重积分**

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^y y^2 \mathrm{e}^{-x^4} \mathrm{d}x$;

4. **计算下列二重积分**

(1) $$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^y y^2 \mathrm{e}^{-x^4} \mathrm{d}x;$$

(2) $$\int_1^2 \mathrm{d}y \int_2^y \frac{\sin x}{x-1} \mathrm{d}x.$$

(二) 灵活运用对称性来化简计算

(二) 灵活运用对称性来化简计算

1. $$\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} (x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

(二) 灵活运用对称性来化简计算

1. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} (x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ____________.

2. 设$D: x^2+y^2 \leq R^2$，则$\displaystyle\iint\limits_{D}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy =$ ____________.

(二) 灵活运用对称性来化简计算

1. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1}(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____________.

2. 设$D: x^2+y^2\leq R^2$，则$\displaystyle\iint\limits_{D}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=$ ____________.

3. (作业题) $\displaystyle\iint\limits_{D}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____________,

   其中 f 连续, $D=\{(x,y)|x^3\leq y\leq 1, x\geq -1\}$.

(二) 灵活运用对称性来化简计算

1. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

2. 设$D: x^2+y^2\le R^2$，则$\displaystyle\iint\limits_{D}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=$ __________.

3. (作业题) $\displaystyle\iint\limits_{D}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________,

   其中 f 连续, $D=\{(x,y)|x^3\le y\le 1, x\ge -1\}$.

4. 计算$\displaystyle I=\iint\limits_{D}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D: x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1$.

(二) 灵活运用对称性来化简计算

1. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1}(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

2. 设$D: x^2+y^2\leq R^2$，则$\displaystyle\iint\limits_{D}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=$ ________.

3. (作业题) $\displaystyle\iint\limits_{D}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________,

其中 f 连续, $D=\{(x,y)|x^3\leq y\leq 1, x\geq -1\}$.

4. 计算$I=\displaystyle\iint\limits_{D}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D: x^2+y^2\leq 1, x+y\geq 1$.

5. 计算二重积分$\displaystyle\iint\limits_{D}\frac{2x+3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$同题4.

6. (作业题) 证明 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$

6. (作业题) 证明 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

7. 设 $f \in C_{[0,1]}$, 证明 $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x \geq 1$.

6. (作业题) 证明 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

7. 设 $f \in C_{[0,1]}$, 证明 $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x \geq 1$.

(三) 被积函数有绝对值的问题

6. (作业题) 证明 $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$

7. 设 $f \in C_{[0,1]}$, 证明 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x \geq 1.$

(三) 被积函数有绝对值的问题

求二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$

(四) 未知函数中含有二重积分的问题

(四) 未知函数中含有二重积分的问题

1. 设$f(x,y)$连续, 且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中$D$是由$y=0, y=x^2, x=1$所围成的区域, 则$f(x,y)=$________.

(四) 未知函数中含有二重积分的问题

1. 设$f(x,y)$连续, 且$f(x,y)=xy+\iint\limits_{D} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中$D$是由$y=0, y=x^2, x=1$所围成的区域, 则$f(x,y)=$ ________.

2. 求$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(五) 二重积分的一般坐标变换

(五) 二重积分的一般坐标变换

1. (作业题) 计算 $\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是以点$(0,0),(1,0),(0,1)$

为顶点的三角形区域.

(五) 二重积分的一般坐标变换

1. (作业题) 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是以点$(0,0),(1,0),(0,1)$为顶点的三角形区域.

2. 设函数$f\in C_{[0,a]}$, 证明: $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x$, 其中$D=\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq a\}(a>0)$.

(六) 练习

(六) 练习

1. $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$的极坐标形式为____________.

(六) 练习

1. $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$的极坐标形式为____________.

2. 将$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$化成极坐标系下的二次积分.

(六) 练习

1. $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$的极坐标形式为____________.

2. 将$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$化成极坐标系下的二次积分.

3. 计算二重积分$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$x=-2, y=0$, $y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围成的平面区域.

(六) 练习

1. $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$的极坐标形式为__________.

2. 将$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$化成极坐标系下的二次积分.

3. 计算二重积分$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$x=-2, y=0$, $y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围成的平面区域.

4. 求$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=[0,1]\times[0,1]$.

5. **已知平面区域**D**满足**$\{(x,y)||x|\leq y,(x^2+y^2)^3\leq y^4\}$,

求$\displaystyle\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

5. **已知平面区域D满足**$\{(x,y)||x| \le y, (x^2+y^2)^3 \le y^4\}$,

求$\displaystyle\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

6. **求** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{2-y} \frac{x+y}{x^2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x.$

5. 已知平面区域D满足$\{(x,y)||x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\}$，求$\displaystyle\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6. 求$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{2-y}\frac{x+y}{x^2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x$.

7. 证明: $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}y=\pi[f(a)-f(0)]$.