习题课四　二重积分的计算

贺 丹（东南大学）

(一) 交换积分次序问题

1. 化积分为极坐标形式的二次积分：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 将二次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho$ 化为直角坐标系下的二次积分.

答案：1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho$

2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

3. 交换积分次序:

(1) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{1+\cos\theta}^{2} f(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho.$

答:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}y$

(2) $\int_1^2 \mathrm{d}\rho \int_{\arccos(\rho-1)}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta$

思考

交换积分次序 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{2a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho \mathrm{d}\rho.$

答案：原式$= \int_{0}^{\sqrt{2}a} \rho \mathrm{d}\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{\rho}{2a}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \mathrm{d}\varphi$

$$+ \int_{\sqrt{2}a}^{2a} \rho \mathrm{d}\rho \int_{-\arccos\frac{\rho}{2a}}^{\arccos\frac{\rho}{2a}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \mathrm{d}\varphi$$

4. 计算下列二重积分

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^y y^2 \mathrm{e}^{-x^4} \mathrm{d}x;$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}y \int_2^y \frac{\sin x}{x-1} \mathrm{d}x.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^{y^2}}{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}y.$

答案： (1) $\dfrac{1}{12}(\mathrm{e}^{-1}-1)$; (2) $\cos 2 - \cos 1$; (3) $\mathrm{e}-1$.

(二) 灵活运用对称性来化简计算

1. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________. $\quad\dfrac{1}{3}$

2. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________. $\quad\dfrac{\pi R^4}{4}(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2})$

3. $\displaystyle\iint\limits_{D}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________,

   其中 f 连续, $D=\{(x,y)|x^3\leqslant y\leqslant 1,x\geqslant -1\}$. $\quad -\dfrac{2}{5}$

4. 计算$I=\displaystyle\iint\limits_{D}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D:x^2+y^2\leqslant 1,x+y\geqslant 1$.

   答: $2-\dfrac{\pi}{2}$

5. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{2x+3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$同题4.

答: 原积分$= \displaystyle\frac{5}{2}\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = 5-\frac{5\pi}{4}.$

6. 证明 $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$

7. 设$f\in C_{[0,1]}$, 证明 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 1.$

(三) 被积函数有绝对值的问题

求二重积分

$$\iint_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\}.$

答案： $\pi-2.$

(四)求带有重积分的未知函数

1. 设$f(x,y)$连续, 且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中$D$由$y=0, y=x^2, x=1$所围成的区域, 求$f(x,y)$.

答案： $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$.

2.求函数$f(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

书P121 1(7)

答案： $f(z)=\begin{cases} 0, & z\leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{-z}+z-1, & 0<z\leqslant 1, \\ (1-\mathrm{e})\mathrm{e}^{-z}+1, & z>1. \end{cases}$

1. 计算$\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是以点$(0,0),(1,0),(0,1)$为顶点的三角形区域.

答案: $\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})$.

2. 设函数$f\in C_{[0,a]}$, 证明: $\displaystyle\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x$,

其中$D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant a\}(a>0)$.

提示: 令$x+y=u,y=v$.

(六) 练习

1. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$的极坐标形式为____________.

答案： $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$

2. 将$\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$化成极坐标系下的二次积分.

答案： $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_{2\cos\varphi}^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$

3. 计算二重积分$\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$x=-2, y=0$, $y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围成的平面区域. $4-\dfrac{\pi}{2}$

4. 求 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D=[0,1]\times[0,1].$ $e-1$

5. 已知平面区域D满足$\{(x,y)||x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4\}$,

求 $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ $\dfrac{43\sqrt{2}}{120}$

6. 证明: $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}y=\pi[f(a)-f(0)].$

提示: 交换积分次序, 再对内层的定积分做换元,

令 $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-y}}=t.$

7. 求极限 $\lim\limits_{r\to0^+}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 答案：$\pi.$

8. 求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^6}\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \sin(xy)^2\mathrm{d}y.$ 答案：$\frac{1}{18}.$

9. 计算二次积分 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi}(\theta^2-1)e^{\rho^2}\mathrm{d}\rho.$

答案：$\left(\frac{4}{3}\pi^2-1\right)(e^{\pi^2}-1).$

10. 设D为由曲线$(3x+y+5)^2+(2x+3y-6)^2=1$围成的平面区域, 则 $\iint\limits_D \left((3x+y+5)^2+(2x+3y-6)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

答案：$\frac{\pi}{14}.$