

# 目 录

## 第二讲 数字图像处理基础知识

- 2.1 人类视觉系统
- 2.2 图像感知和获取
- 2.3 图像取样和量化
- 2.4 图像像素间关系
- 2.5 基本数学工具

# 学习目标

## 第二讲 数字图像处理基础知识

1. 了解人类视觉的一些重要功能和限制。
2. 了解如何产生和表示数字图像。理解图像取样与量化的基本知识。
3. 熟悉空间和灰度分辨率及它们对图像外观的影响，了解图像像素间的基本几何关系。熟悉数字图像处理所用的主要数学工具。
4. 能够应用多种入门的数字图像处理技术。

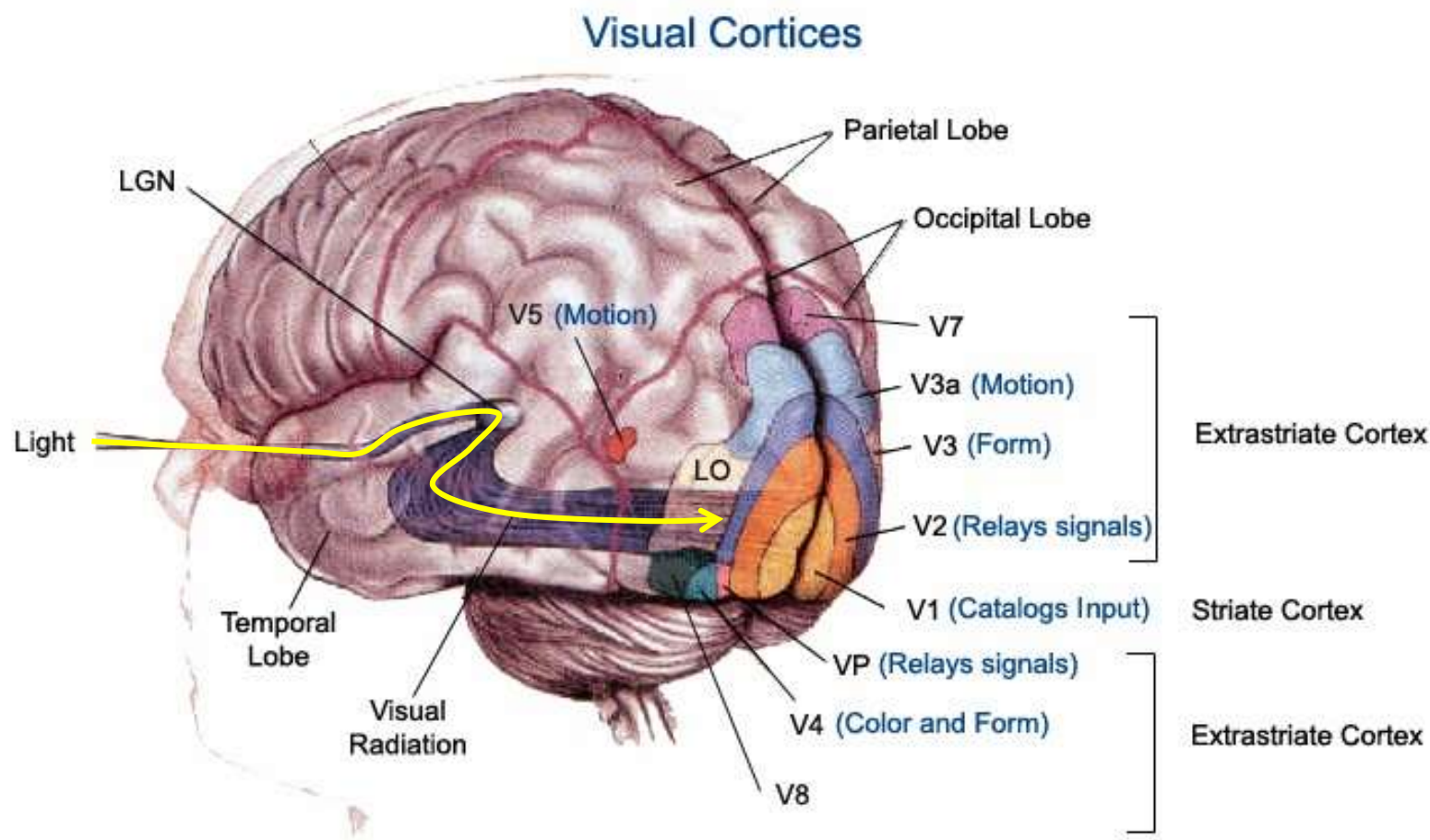
## 2.1 人类视觉系统

- 为什么研究人类视觉系统?

- 数字图像处理的质量评价多由人眼主观评价;
- 许多图像处理相关技术要根据人眼特性设计, 比如屏幕刷新频率、图像量化级别、立体显示(双目视觉)、图像压缩等;
- 人类认知图像内容的机制对于研究新的图像处理算法至关重要;
- .....

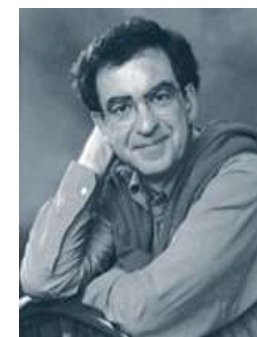
# 2.1 人类视觉系统

## ● 人类视觉系统 (Human Visual System, HVS)



**Laurent Itti: GIST 模型**

Professor of computer science,  
psychology and neuroscience  
University of Southern California



**Tomaso Poggio: HMAX 模型**

Eugene McDermott Professor in the Brain  
Sciences and Human Behavior  
Director of the Center for Biological and  
Computational Learning at MIT

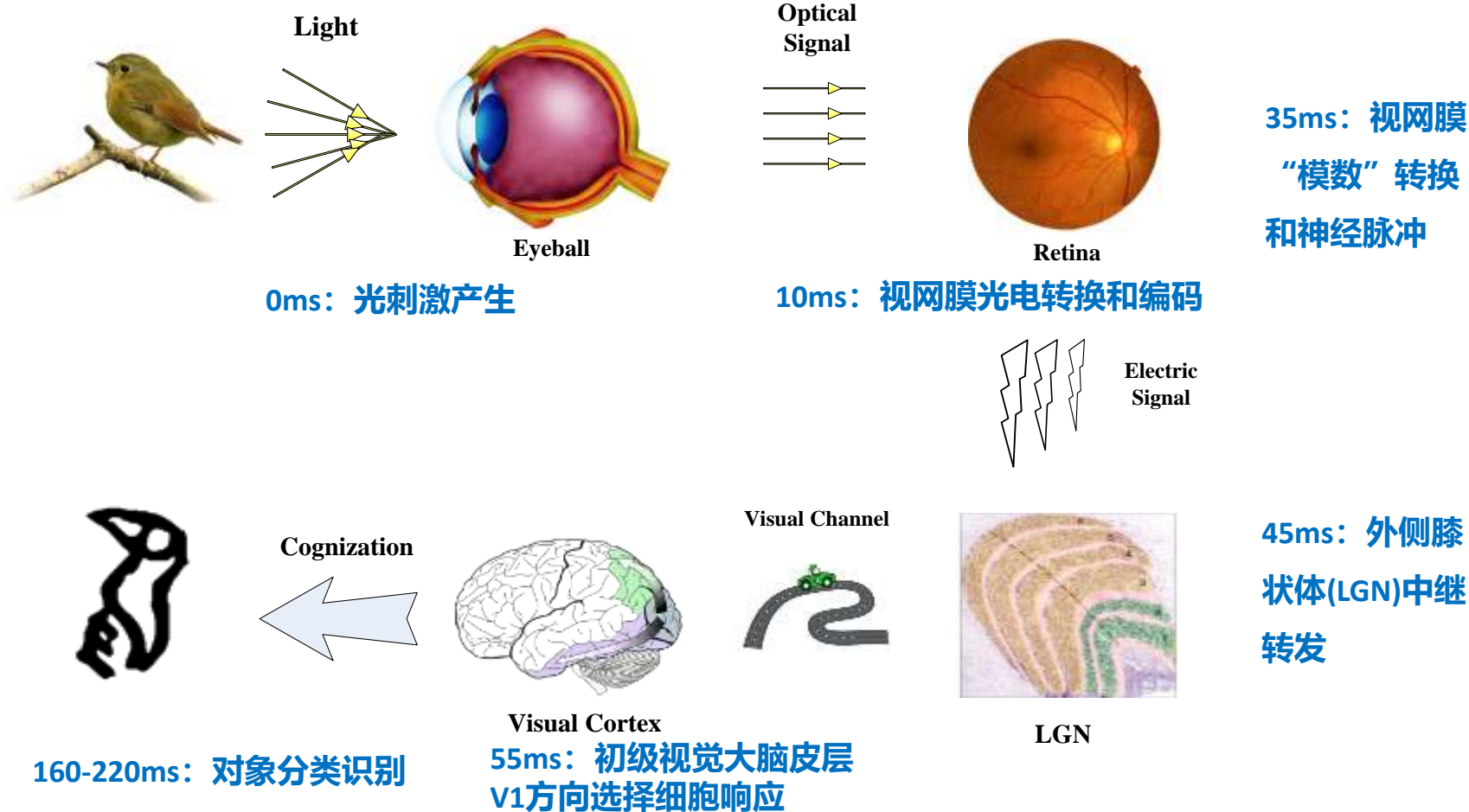
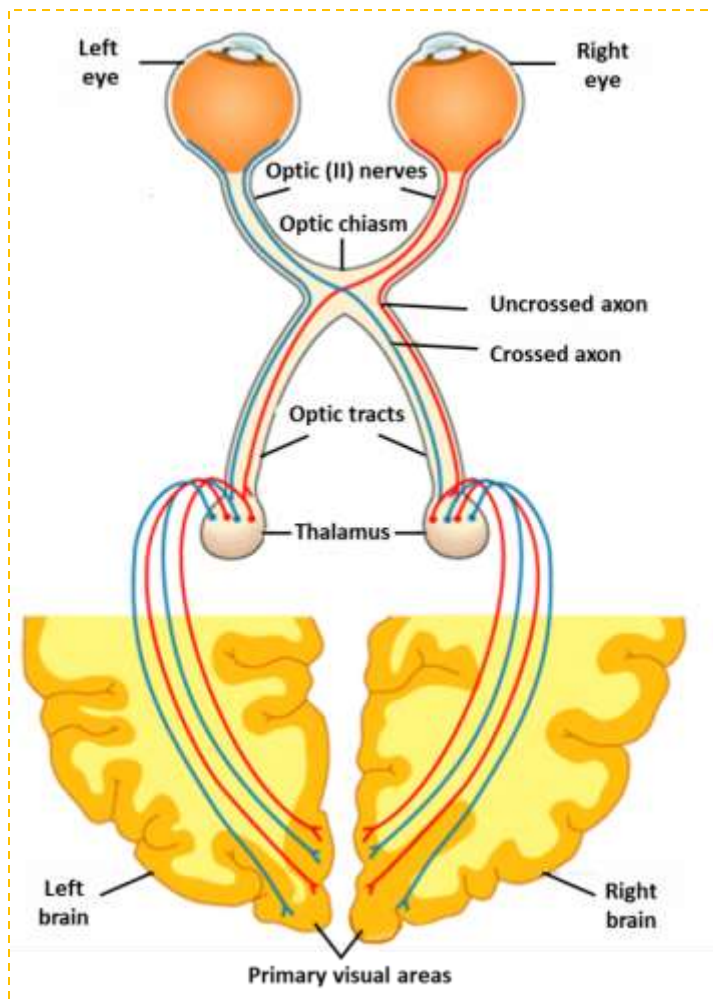
# 2.1 人类视觉系统

## ● 人类视觉系统 (Human Visual System, HVS)

[ Watson, Digital Images and Human Vision, 1993 ]

[ Wandell, Foundations of vision, 1995 ]

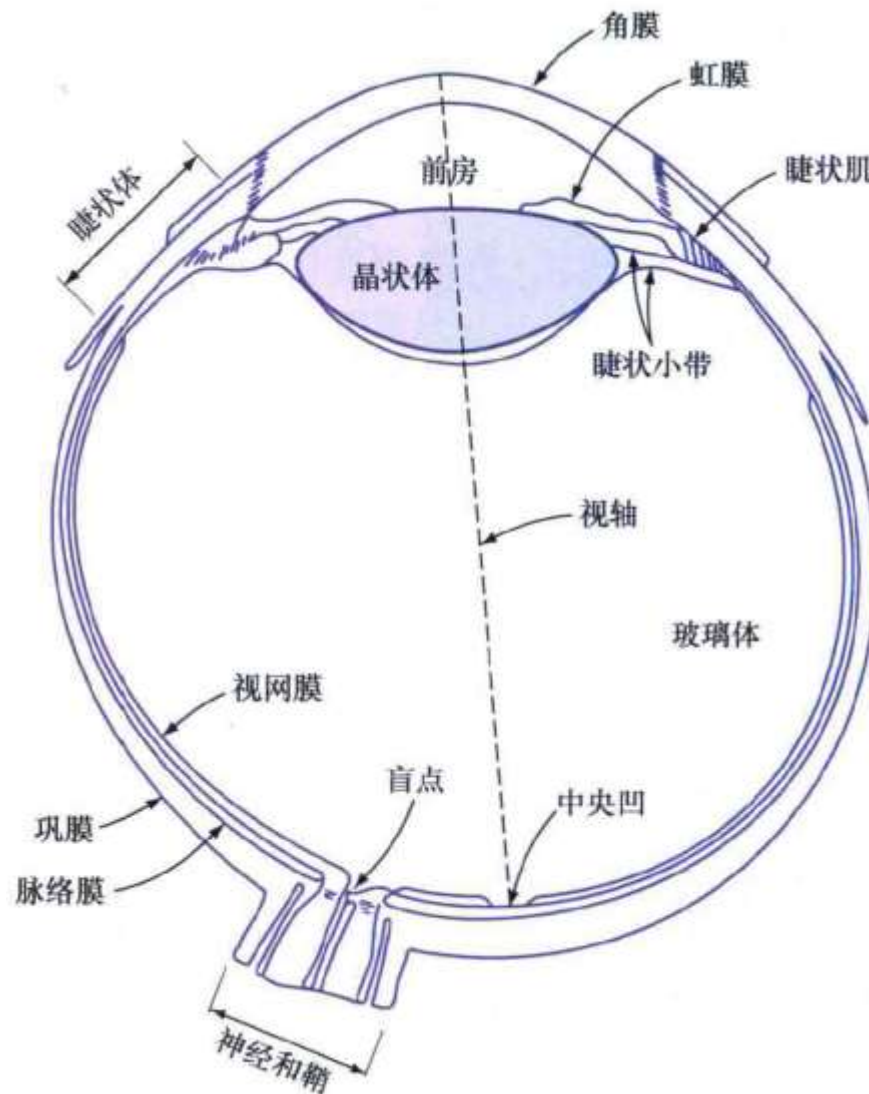
[ Marr, Vision 1982 ]



# 2.1 人类视觉系统

## ● 人眼的结构

- 近似为平均直径为20mm的球体，由三层膜包裹：
  - **角膜与巩膜外壳**：角膜硬而透明，巩膜不透明；
  - **脉络膜**：有血管网，眼睛的重要滋养源；外壳着色重，可减少入射光量和眼内散射光量；
  - **视网膜**：物体在视网膜上成像，感受器包括锥状体和杆状体。
- **虹膜控制着进入眼睛的光亮**
- **光线通过晶状体进入眼睛**





# 2.1 人类视觉系统

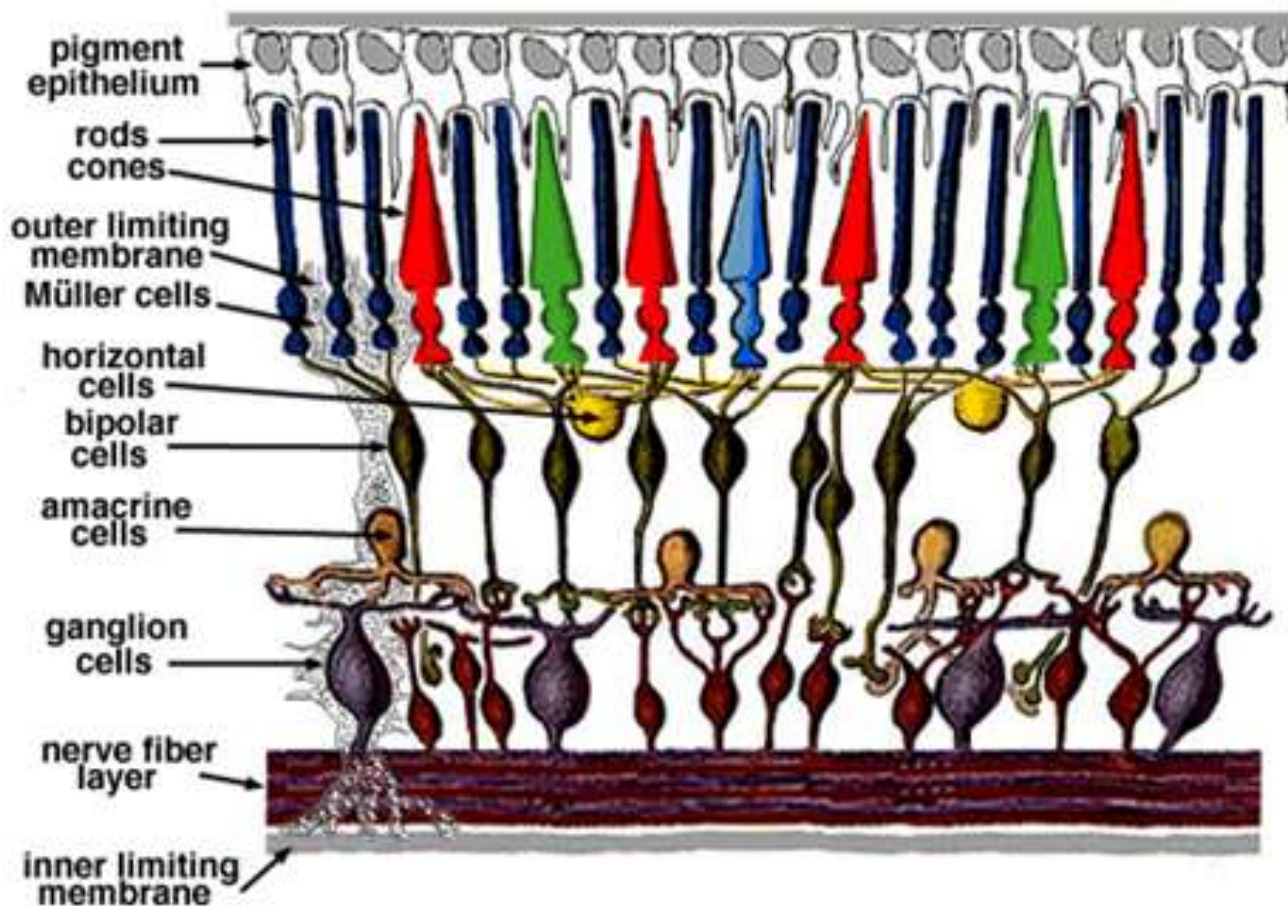
## ● 人眼的结构：视网膜有两类感光器

### ■ 锥状细胞

- 数目:600~700万, 位于中心凹附近
- 每个锥状细胞连接到单独一个双极性细胞
- 空间分辨率高, 对颜色敏感度高, 人可以充分地分辨图像细节
- 感光灵敏度低, 锥状视觉称为“明视觉”

### ■ 杆状细胞

- 数目:7500万~1.5亿
- 几个杆状细胞连接到同一个双极性细胞
- 空间分辨率低, 没有色彩感觉, 不感知事物的细节, 只感知一般的总体图像。
- 感光灵敏度高, 杆状视觉称为“暗视觉”



## 2.1 人类视觉系统

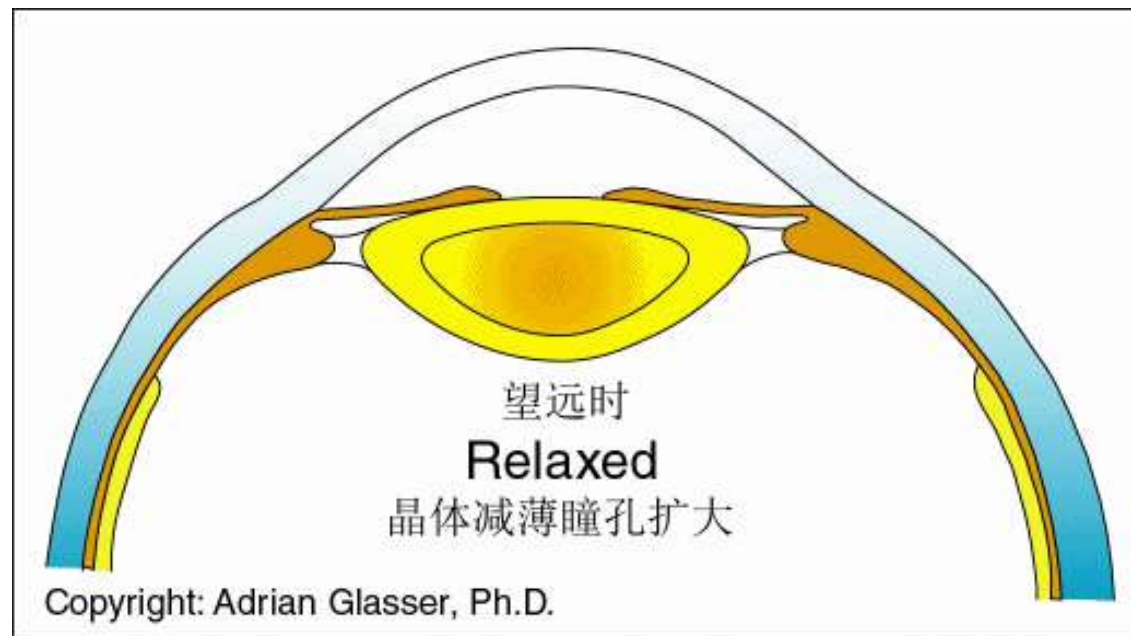
- 感光器的分布基本是关于中央凹对称的。锥状体在视网膜的中心也就是中央凹的中心区域最密。
- 从该中心向外到偏离视轴大约20度，杆状体的密度逐渐增大，然后向外到视网膜的极限边缘处，密度逐渐下降。
- 中央凹本身是视网膜中直径约为1.5mm的圆形凹坑。可以把中央凹看成是大小为1.5mm\*1.5mm的方形传感器阵列。



## 2.1 人类视觉系统

### ● 人眼的结构

- **睫状体、虹膜、瞳孔：**脉络膜最前端为睫状体和虹膜，虹膜的收缩控制进入眼睛的光亮；
- **瞳孔：**虹膜中间开口，直径可变，范围为2-8mm。
- **晶状体：**60%-70%水、6%脂肪、蛋白质构成；含有黄色色素，随年龄增大而加深；白内障等引起混浊，降低颜色辨别能力和视觉清晰度；吸收红外光和紫外光，过量时伤害眼睛。



25岁

60岁

80岁



# 2.1 人类视觉系统

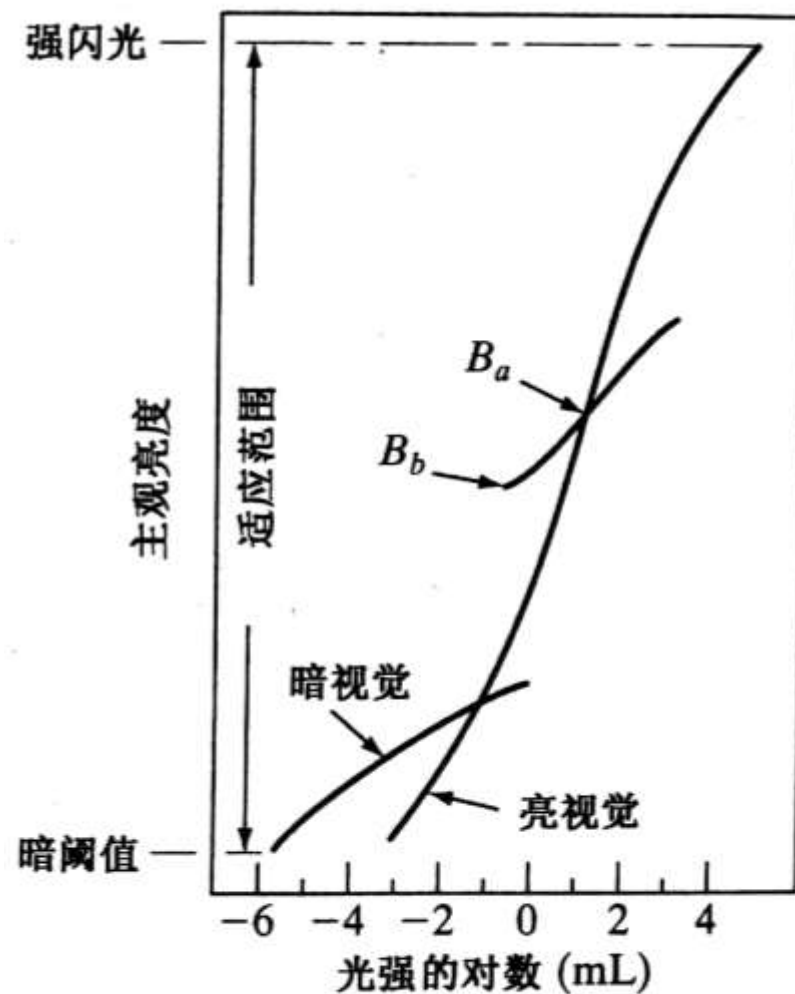
## ● 亮度适应与辨别

- **主观亮度：**即人眼感知到的亮度，是进入人眼的光强的对数函数。
  - 人眼可以感知的光强度范围很广： $10^{10}$  级
- **亮度适应现象：**人眼可以同时分辨的强度范围有限。眼睛能够同时辨别不同亮度级的总范围远小于整个适应范围。对于给定的一组条件，视觉系统的当前灵敏度水平称为亮度适应水平。

Light intensity  
光强度

$$b = \log(a)$$

Subjective brightness  
主观亮度



显示了特殊适应级别的主观亮度感知范围

# 2.1 人类视觉系统

## ● 亮度适应与辨别

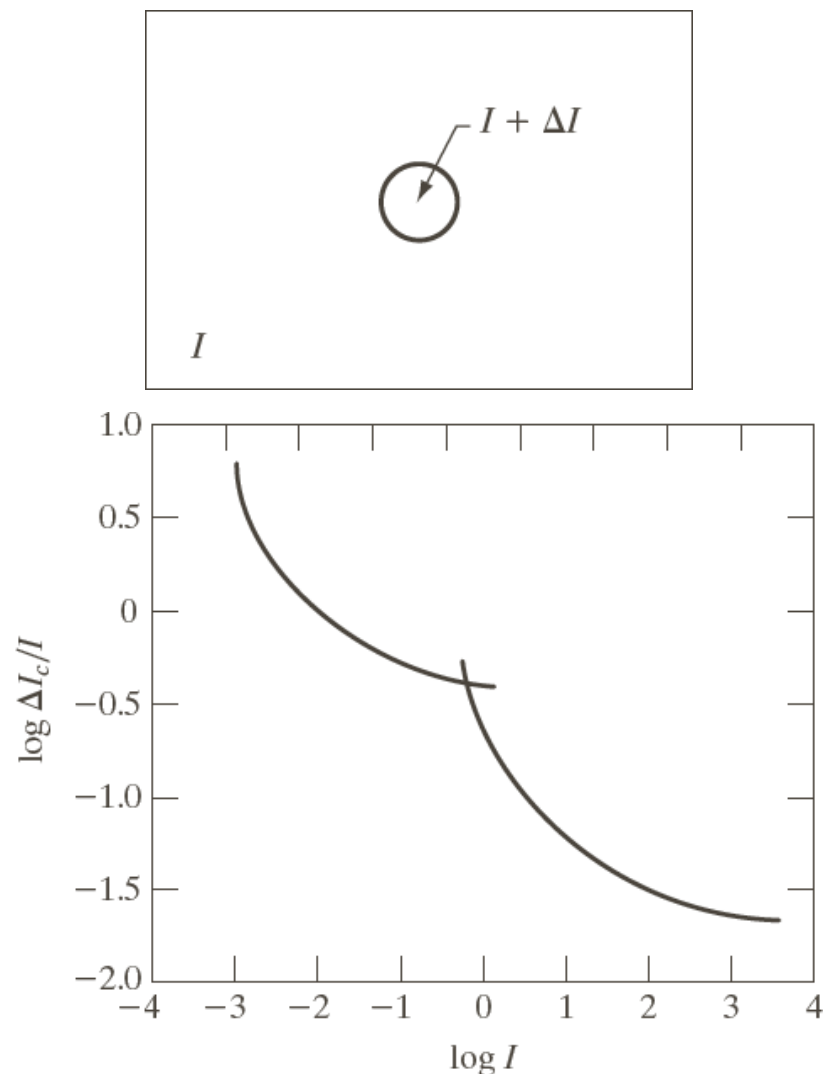
如何确定人类视觉系统的亮度辨别能力？

$\Delta I_c$ : 背景照射为 $I$ 时50%时间可辨别的照射增量

韦伯比:  $\Delta I_c / I$

曲线表明，在低照明级别，亮度辨别较差，但会随着背景照明的增加而明显改善。

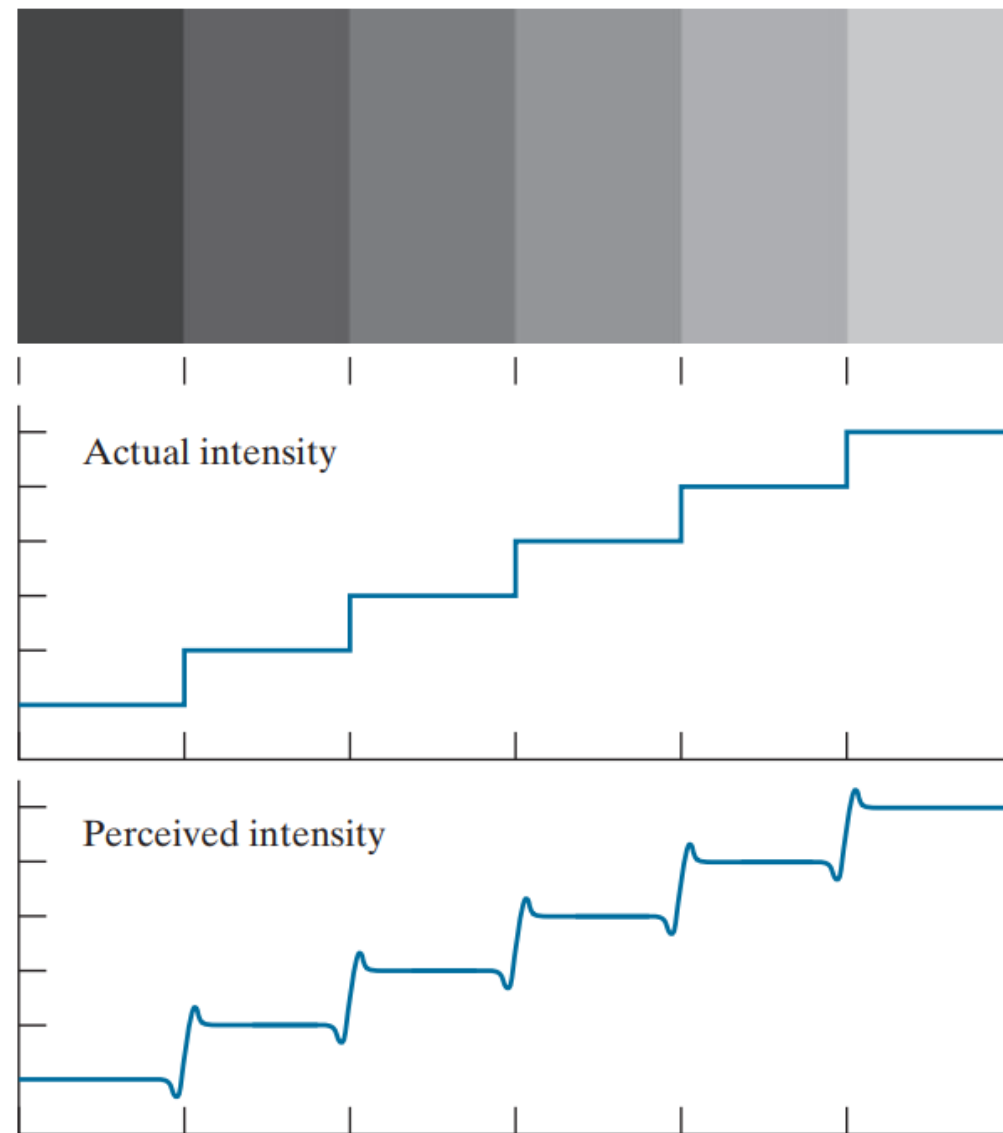
原因：在低照明水平下，视觉有杆状体执行，在高照明水平下，视觉由锥状体执行。



# 2.1 人类视觉系统

## ● 亮度适应与辨别

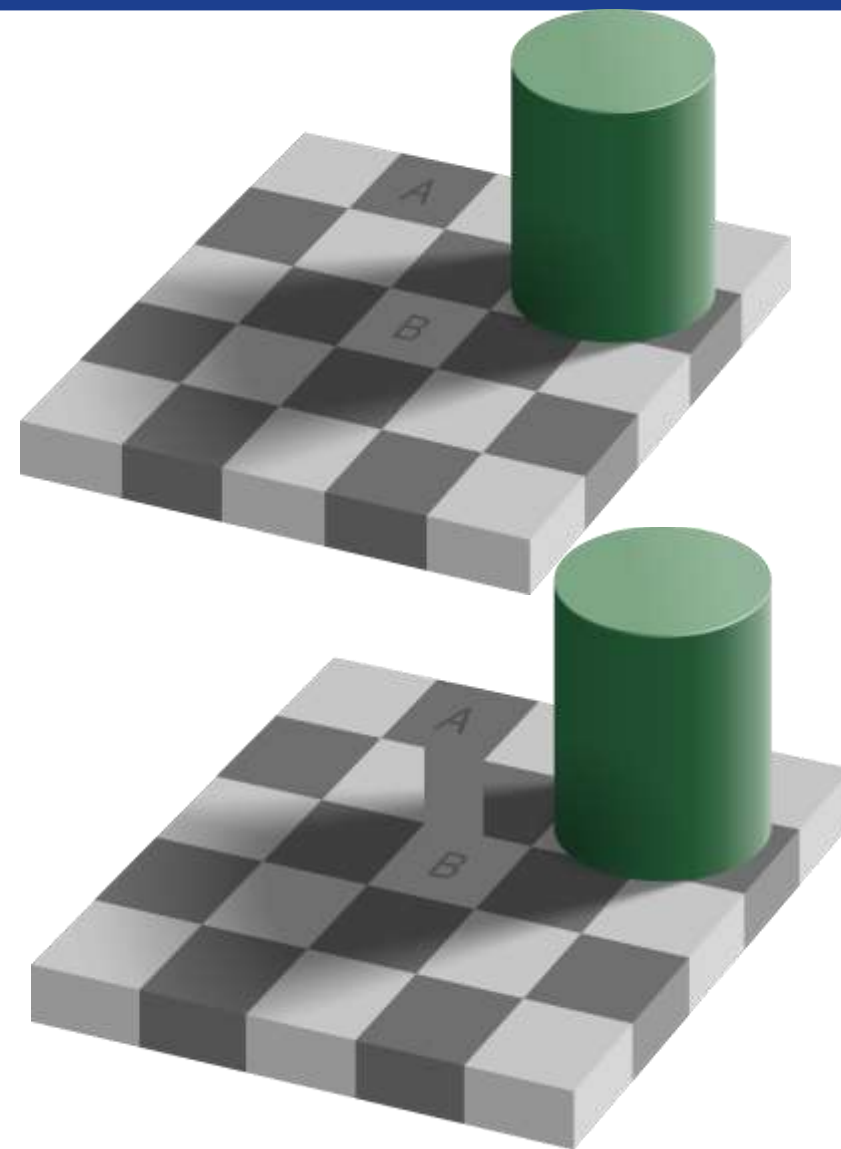
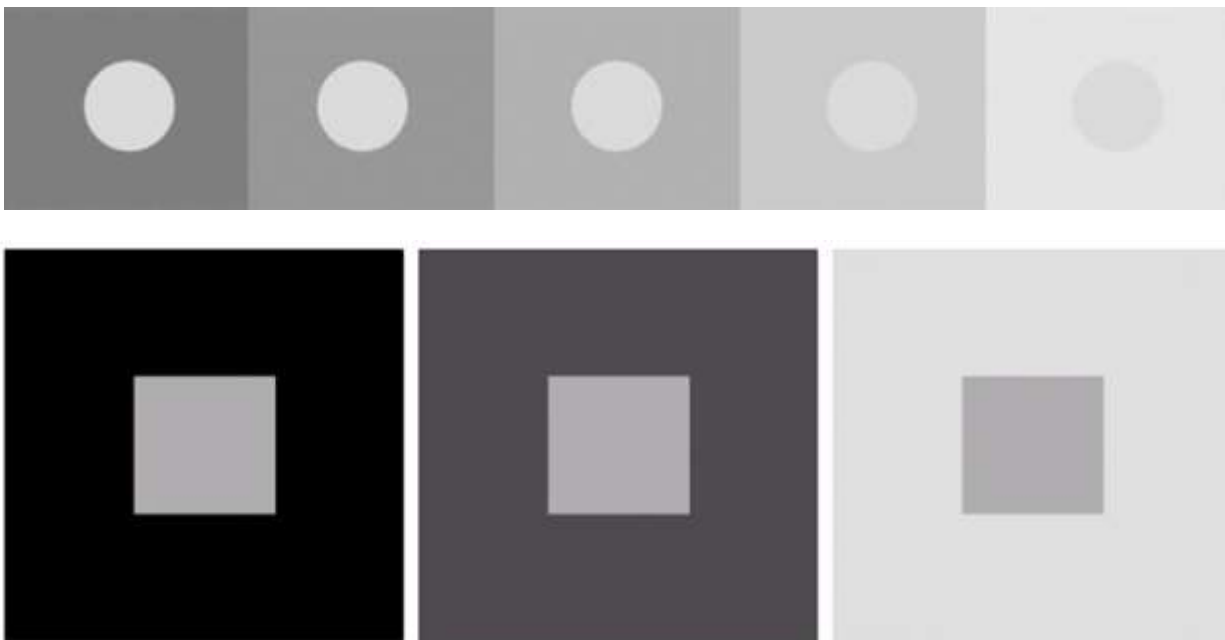
- **亮度适应现象：**感知亮度不是亮度的简单函数
  - **1. 马赫带：**视觉系统往往会在不同强度区域的边界处出现“下冲”或“上冲”现象（毛边）



# 2.1 人类视觉系统

## ● 亮度适应与辨别

- **亮度适应现象：**感知亮度不是亮度的简单函数
- **2. 同时对比：**人眼对某个区域感觉的亮度（主观亮度）不仅依赖于他自身的亮度，还与它的背景有关。



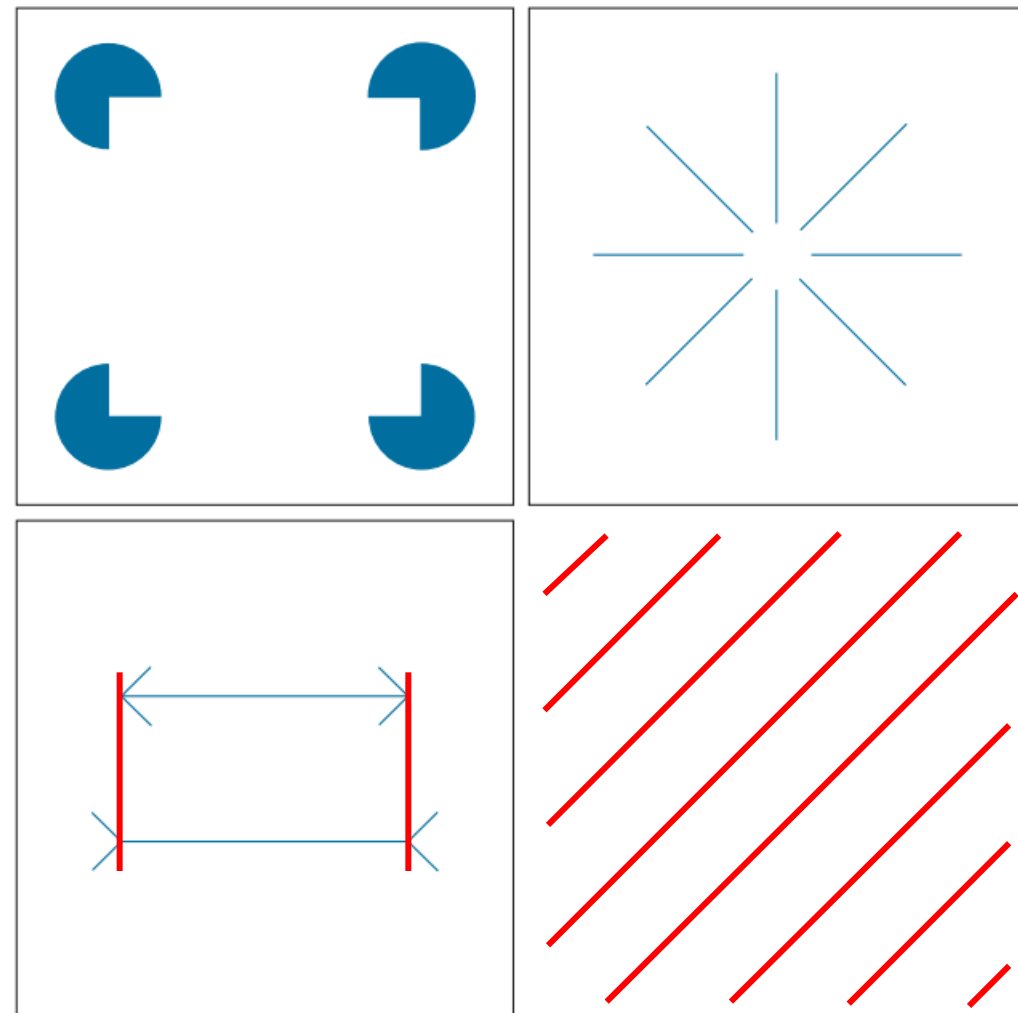
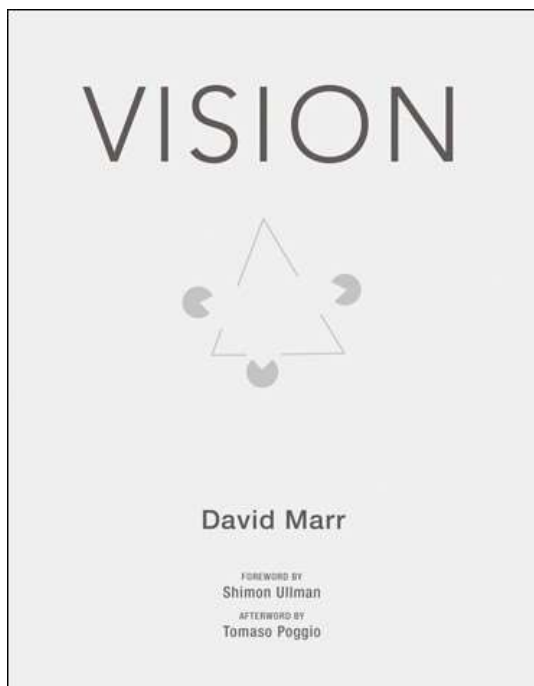


# 2.1 人类视觉系统

- 亮度适应与辨别

- 亮度适应现象：感知亮度不是亮度的简单函数

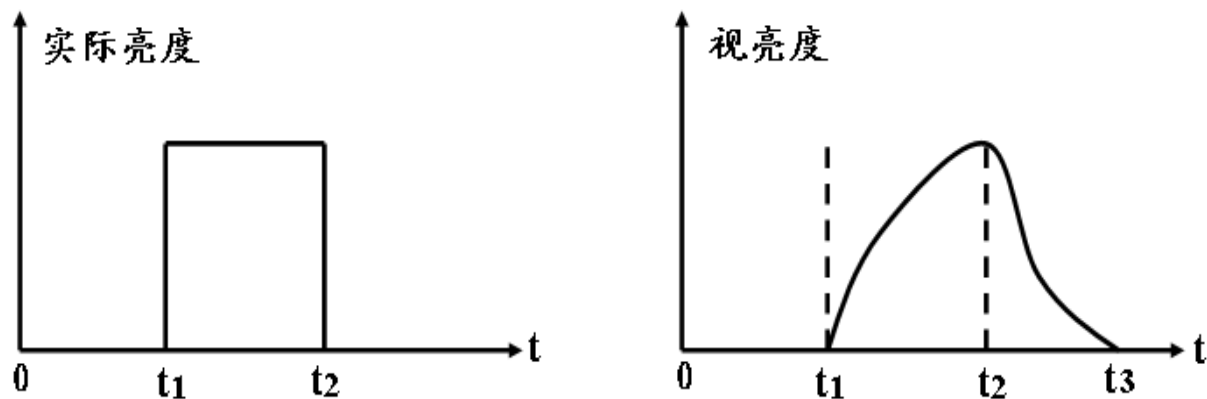
- 3. 光学错视：眼见未必为实



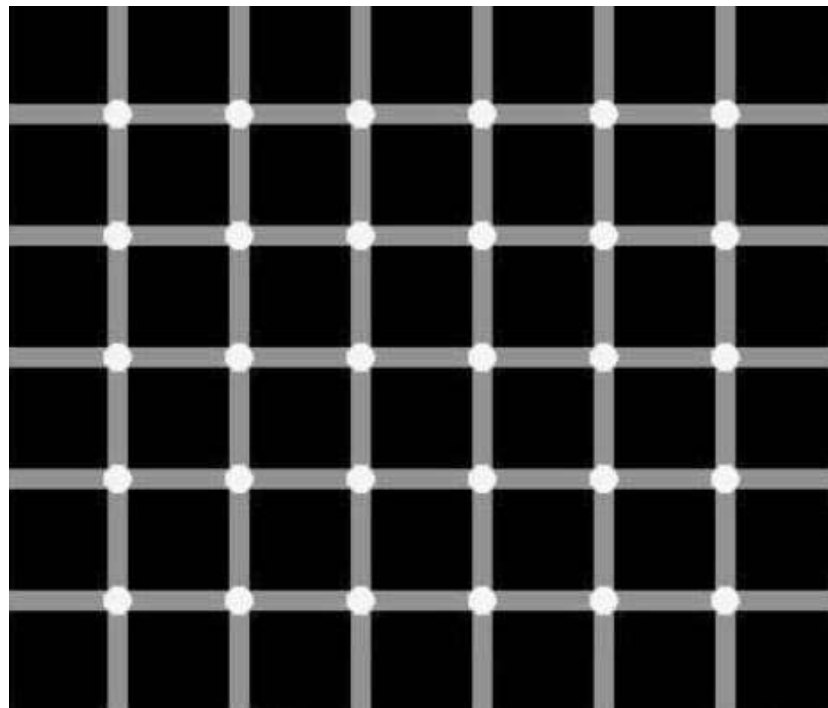
# 2.1 人类视觉系统

## ● 亮度适应与辨别

- **亮度适应现象：**感知亮度不是亮度的简单函数
- **4. 视觉惰性：**人眼的主观亮度感觉与光的作用时间有关，光像一旦在视网膜上形成，在它消失后，视觉系统将会对这个光像的感觉持续一段时间，例如眼对房间内灯的开关的感受。



视觉惰性示意图



# 2.1 人类视觉系统

## ● 亮度适应与辨别

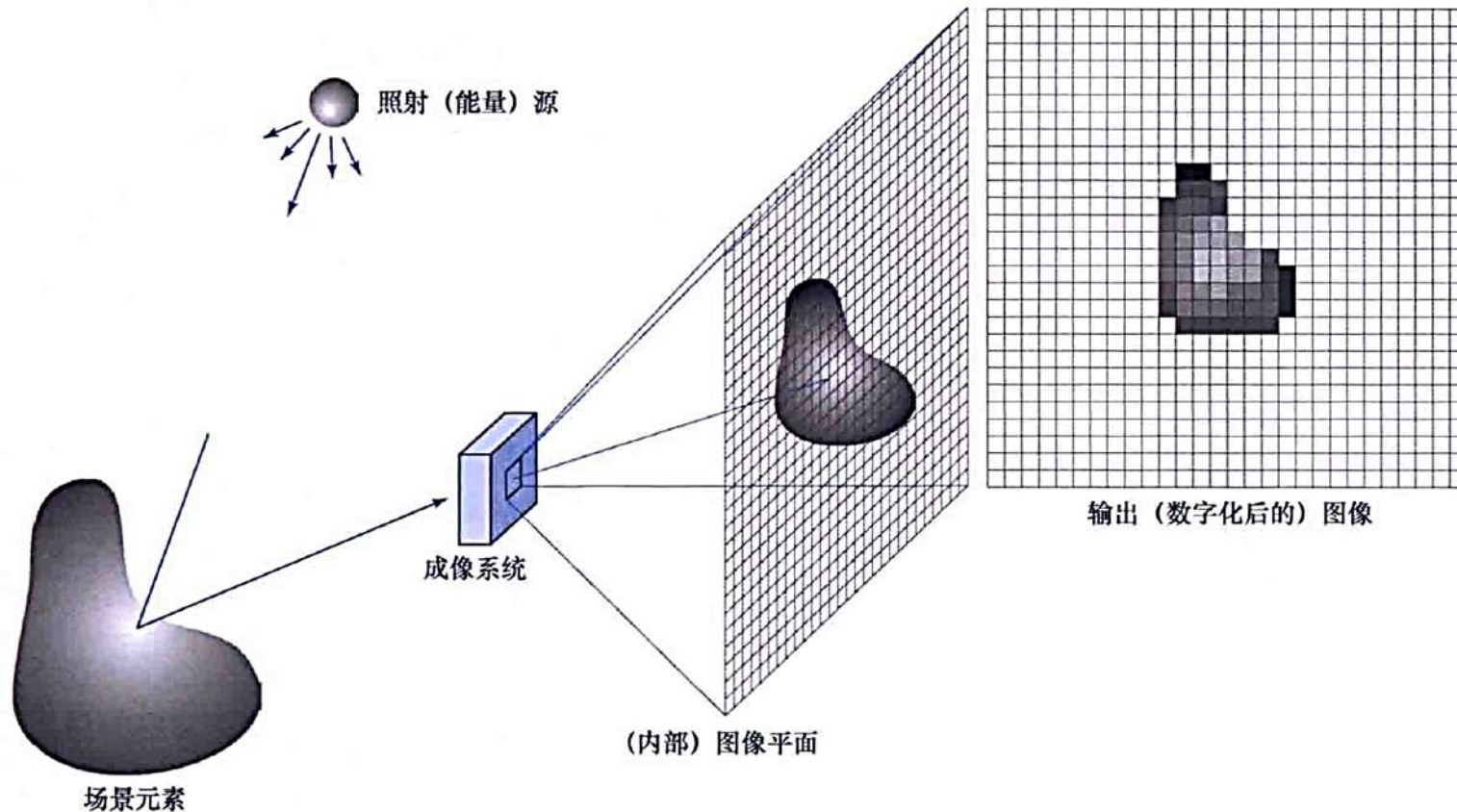
- **亮度适应现象：**感知亮度不是亮度的简单函数
- **4.视觉惰性——临界闪烁频率：**眼睛在周期性的光脉冲的作用下，如果它的频率不够高，则眼睛会感到一明一暗的闪烁现象。如果将光脉冲的频率增加到某一值时，由于视觉惰性，眼睛就感觉不到闪烁了。不引起闪烁感觉的光脉冲的最低重复频率称为临界闪烁频率。人眼的临界闪烁频率约为46Hz（赫兹是国际单位制中频率的单位，它是每秒中的周期性变动重复次数的计量。每秒钟振动（或振荡、波动）一次为1赫兹，或可写成次/秒，周/秒。因德国科学家赫兹而命名。）



## 2.2 图像感知和获取

### ● 一般图像采集过程

- 首先是利用对某种照射源敏感的物理器件，接受辐射并产生与所接受到的照射能量强度成正比的模拟电信号（光电转换过程）
- 然后将前面得到的模拟电信号转化为数字信号以输入进计算机进行处理（模数转换过程）



## 2.2 图像感知和获取

### ● 一般图像采集过程

#### □ 照射源

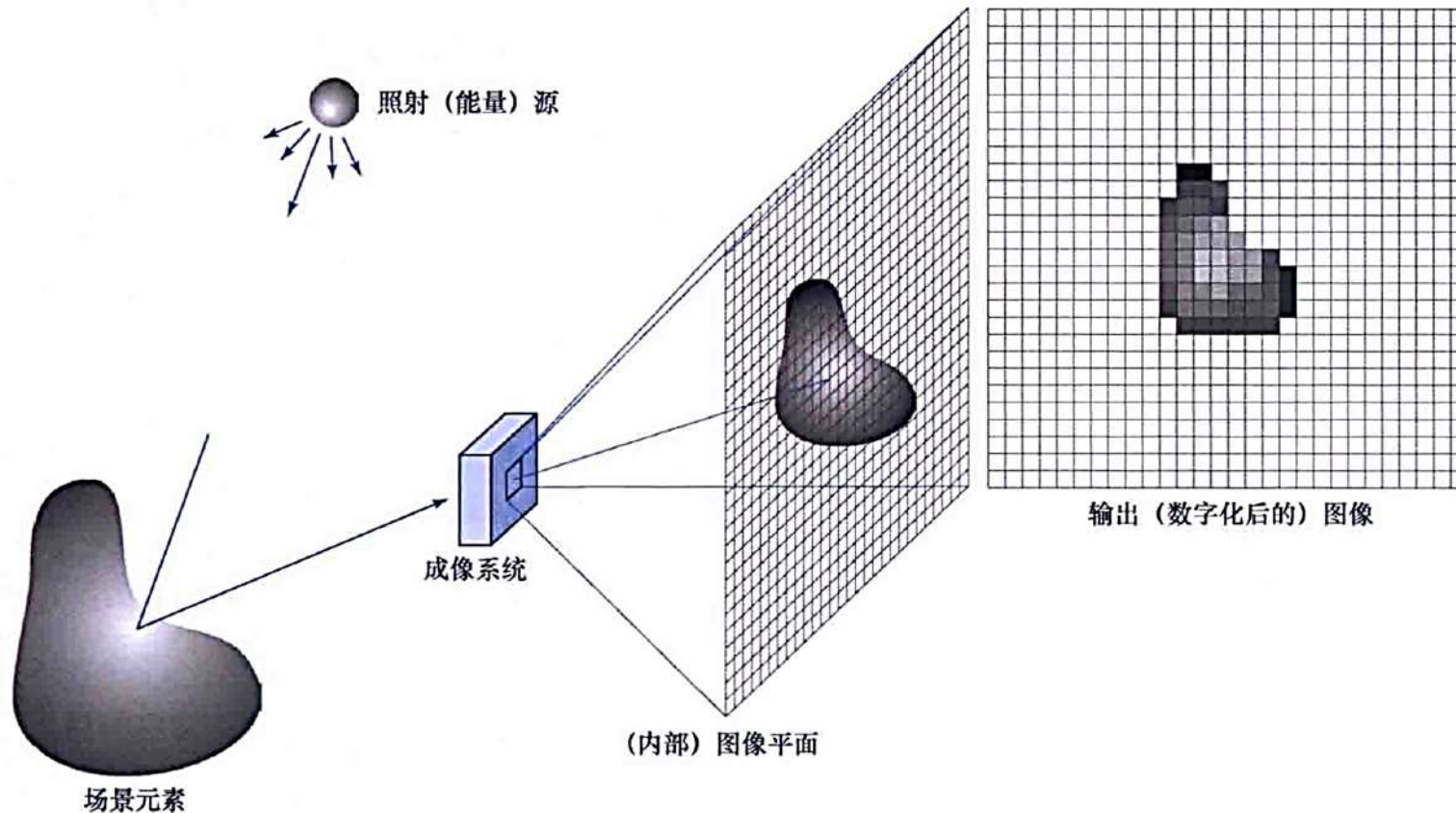
- 不局限于可见光
- X射线、微波、声波

#### □ 被观测目标

- 宏观、微观；内部、外部；
- 反射：日常拍照
- 透射：X射线诊断

#### □ 传感器

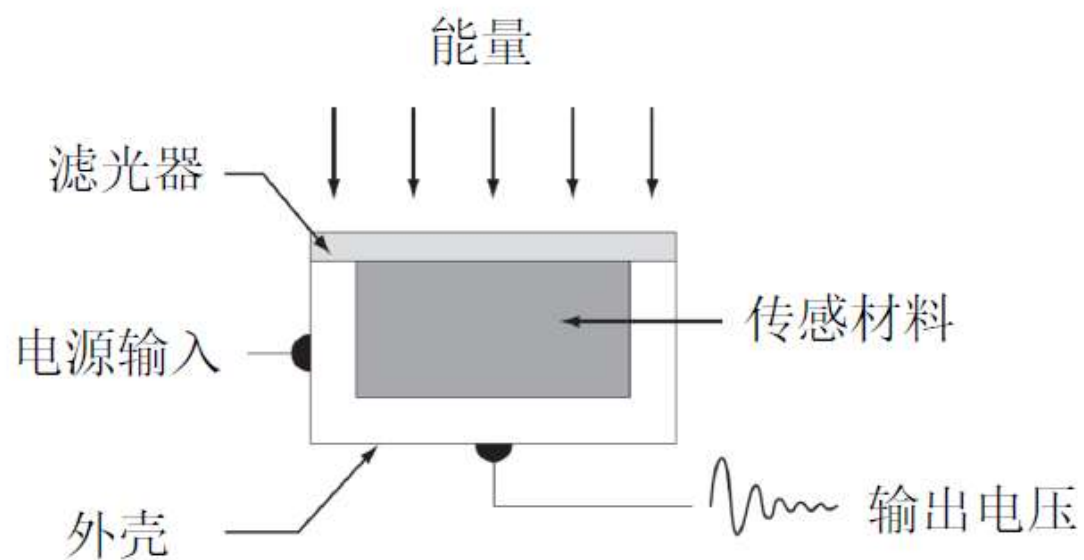
- 将照射能量变化为数字图像



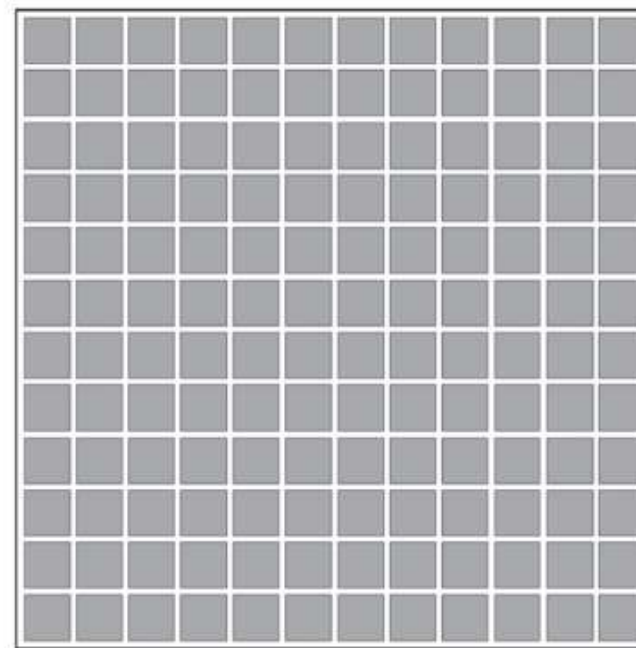


## 2.2 图像感知和获取

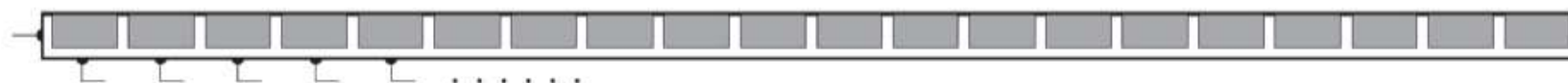
- 传感器类型



单个成像传感器



阵列传感器

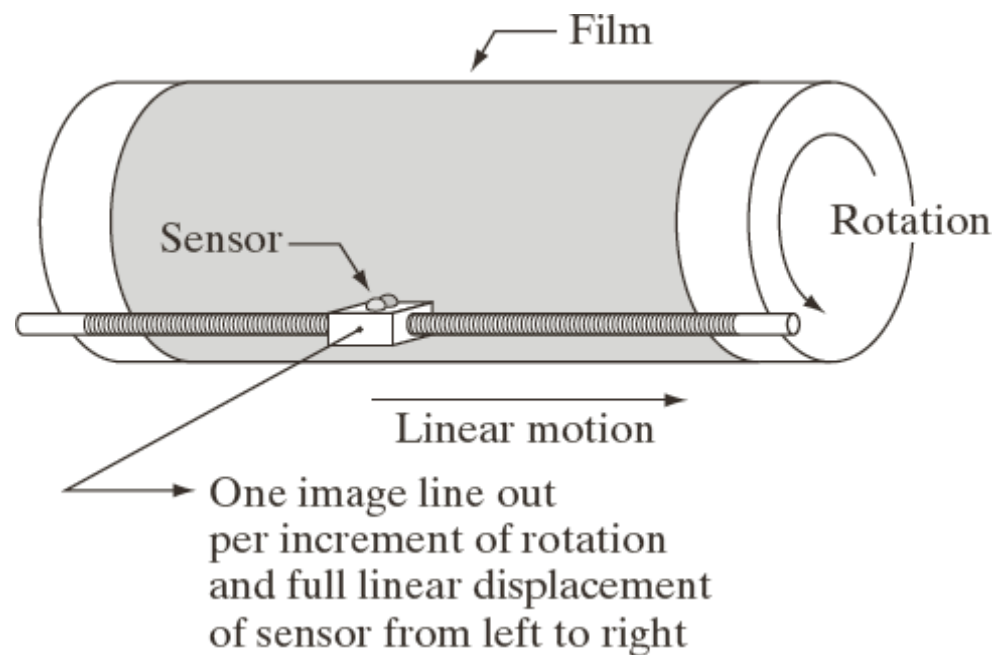


条带传感器

## 2.2 图像感知和获取

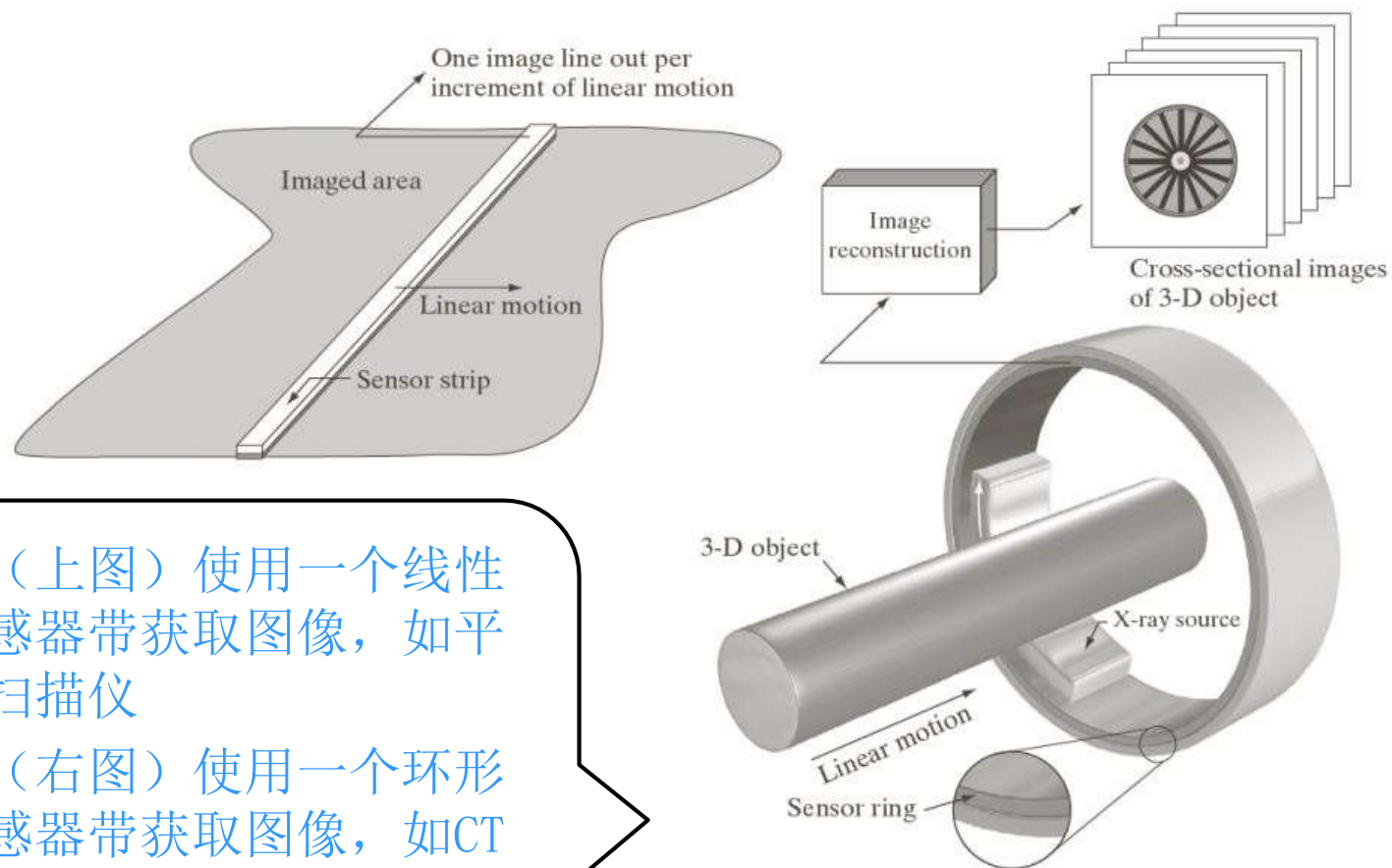
### ◆ 单个传感器通过运动来生成二维图像

胶片每旋转一个增量且传感器完整地  
从左到右线性移动  
一次，输出图像的一  
行。



## 2.2 图像感知和获取

### ◆ 使用条带传感器获取图像



1. (上图) 使用一个线性传感器带获取图像，如平板扫描仪
2. (右图) 使用一个环形传感器带获取图像，如CT和MRI成像

## 2.2 图像感知和获取

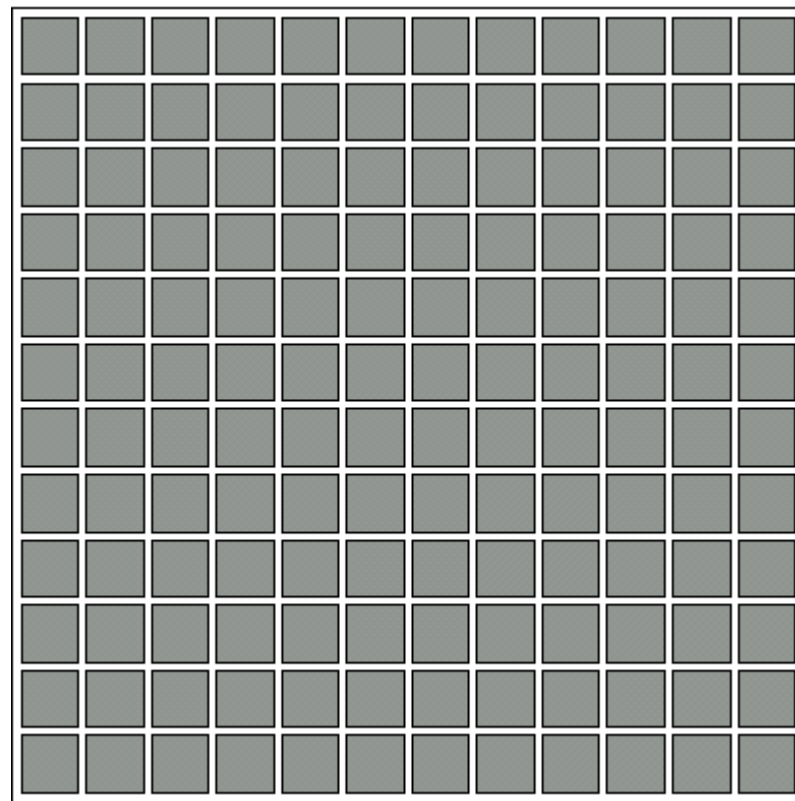
### ◆ 阵列成像传感器

#### CCD

英文全称：Charge-coupled Device

中文全称：电荷耦合元件。

不需要扫描，就能形成二维图像。



## 2.2 图像感知和获取

- 图像形成模型

- 二维函数  $f(x, y)$

$$0 < f(x, y) < \infty$$

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad \text{或者} \quad f(x, y) = i(x, y)t(x, y)$$

- 入射分量  $0 < i(x, y) < \infty$

- 反射分量  $0 < r(x, y) < 1$

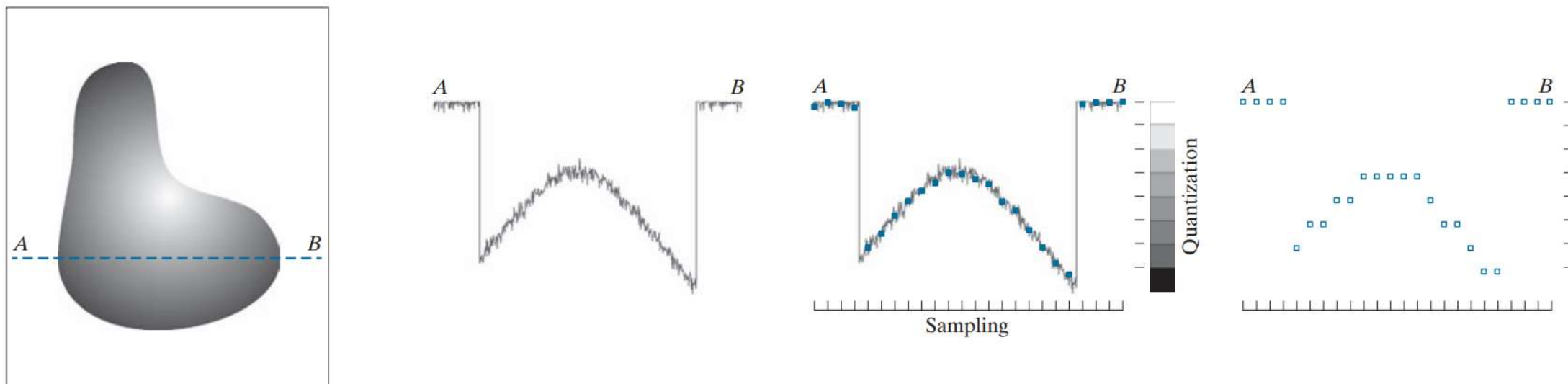
- 透射系数  $0 < t(x, y) < 1$



## 2.3 图像取样和量化

- 图像取样和量化概念

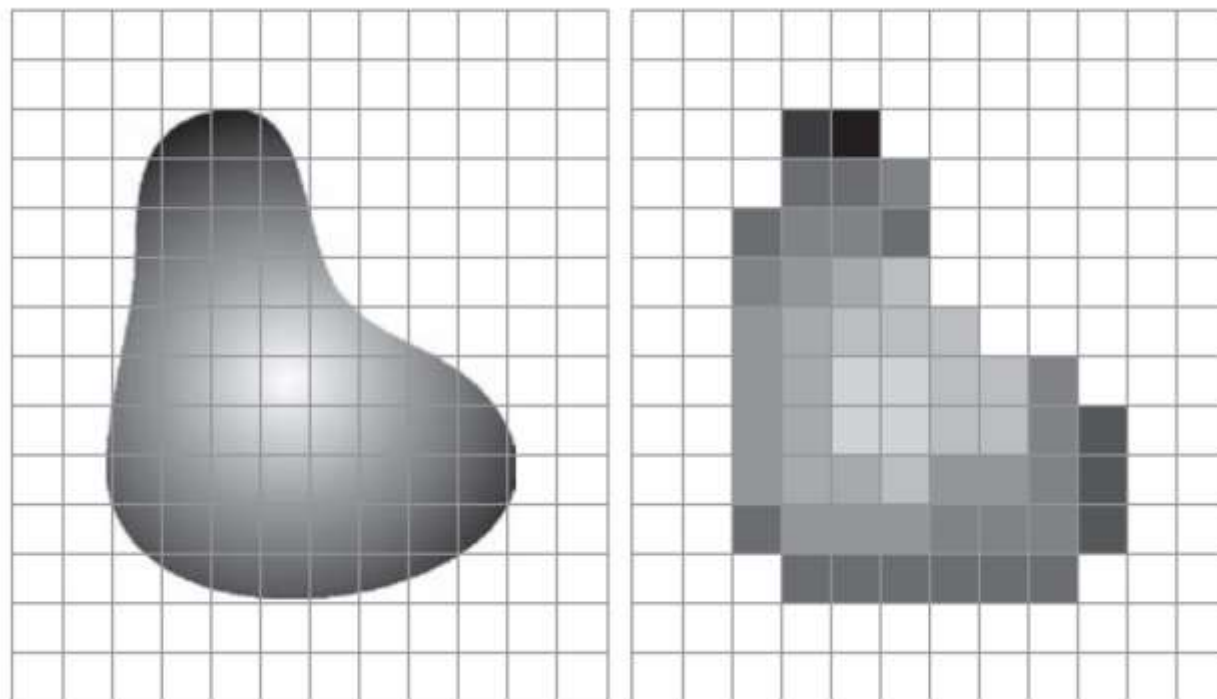
- 目的：把连续图像转换为数字图像
- 取样：对坐标进行数字化
- 量化：对幅值进行数字化



## 2.3 图像取样和量化

- 图像取样和量化概念

- **像素：**组成数字图像的基本单元。是一个二维元素，具有特定的位置  $(x, y)$  和幅值  $f(x, y)$ 。

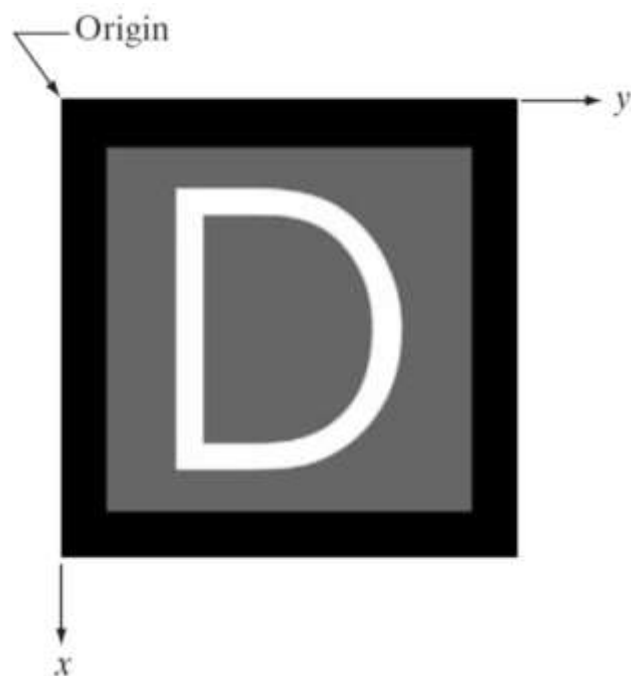


(a) 连续图像；

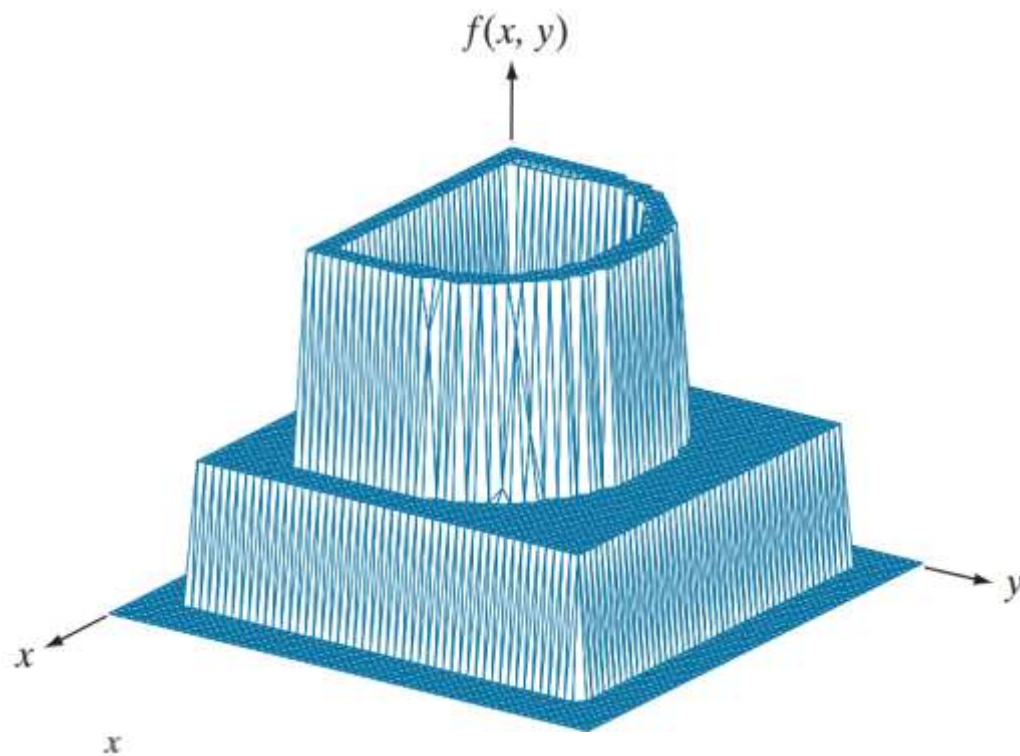
(b) 取样和量化后的结果

## 2.3 图像取样和量化

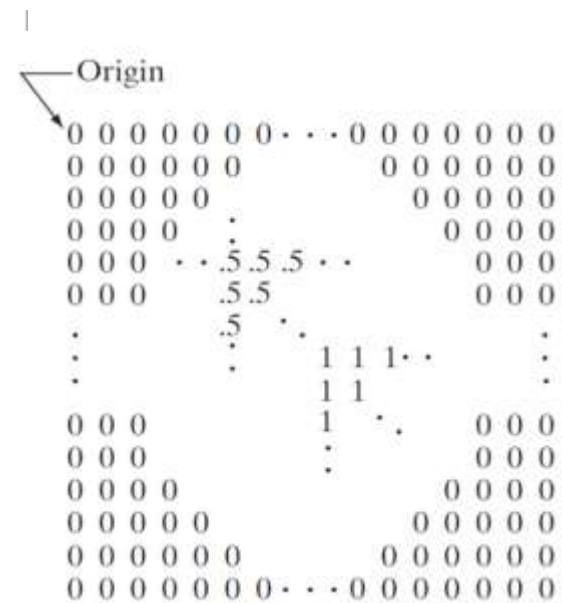
- 图像取样和量化概念



可见的灰度阵列



对应的函数图像



图像的二维数组形式

## 2.3 图像取样和量化

- 表示数字图像

- 2维数组 $f(x, y)$

- 包含 $M$ 行、 $N$ 列
- $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$
- $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 表示在 $(x, y)$ 处的值

- 空间域

- 图像坐标所张成的实平面

- 空间坐标

- $x$ 和 $y$

- 公式形式的2维数组

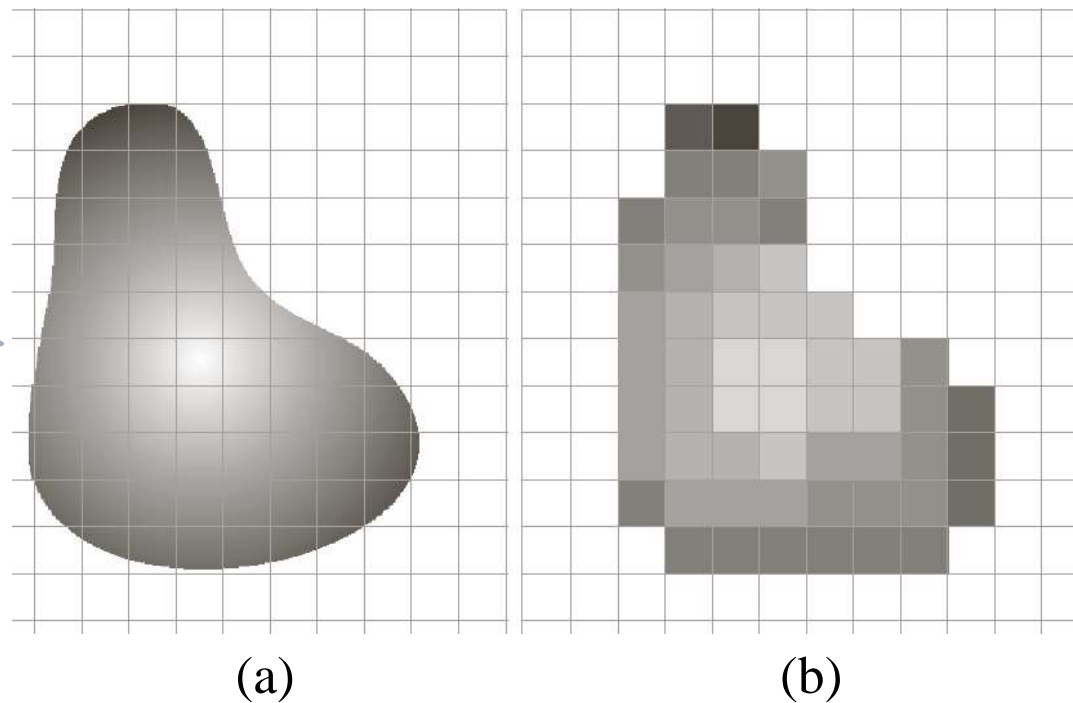
$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \cdots & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix}$$

- 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$

## 2.3 图像取样和量化

数字图像的性质在很大程度上取决于取样和量化中所用的**样本数**和**灰度级**。



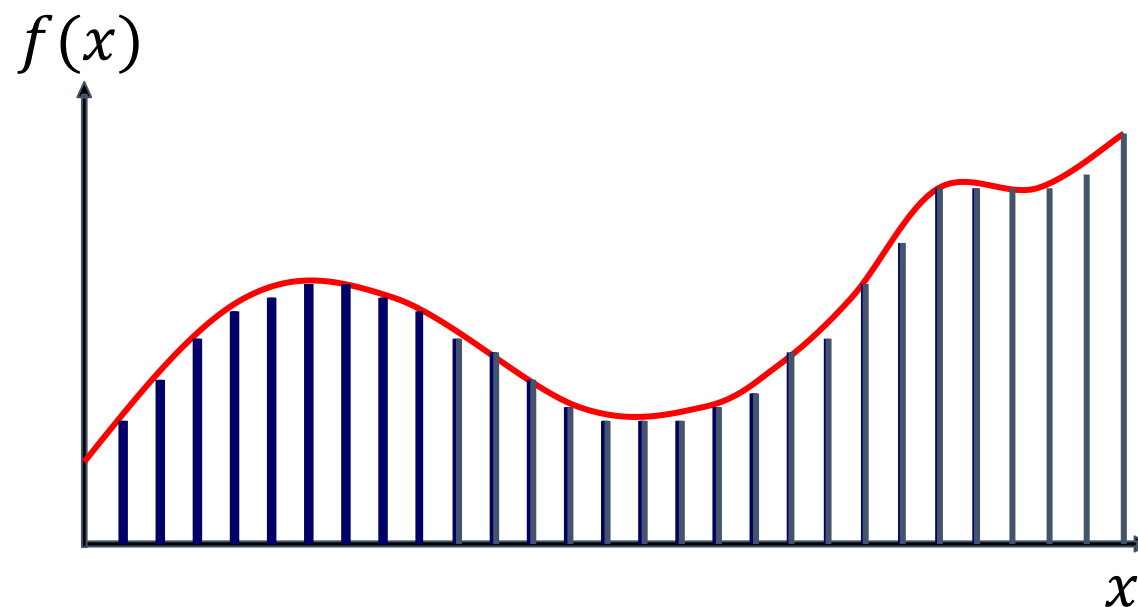
(a) 连续图像； (b) 取样和量化后的结果



## 2.3 图像取样和量化

### ● 图像取样和量化概念

- **量化：**函数取值的数字化被称为图像的量化。对像素的连续的亮度值作等间隔分层量化称为均匀量化；作不等间隔分层量化称为非均匀量化。
- **量化级数：**根据人眼的视觉特性，通常需要100多个量化级数。为了计算机的表达方便，量化级数一般为2的整数次幂，如256、128等。
- **量化误差：**量化是以有限个离散值近似表示无限的连续值，所以存在误差，称其为量化误差。对应均匀量化，量化层次越多，量化误差越小，但编码所需要的码字的比特数越多。



## 2.3 图像取样和量化

- **空间分辨率（对应取样）**

- 图像的尺寸，在成像时取了 $M \times N$ 个点的样

- **灰度分辨率（对应量化）**

- 处于存储和量化硬件的考虑，灰度级数通常取为2的整数次幂，即  $L=2^k$ 。

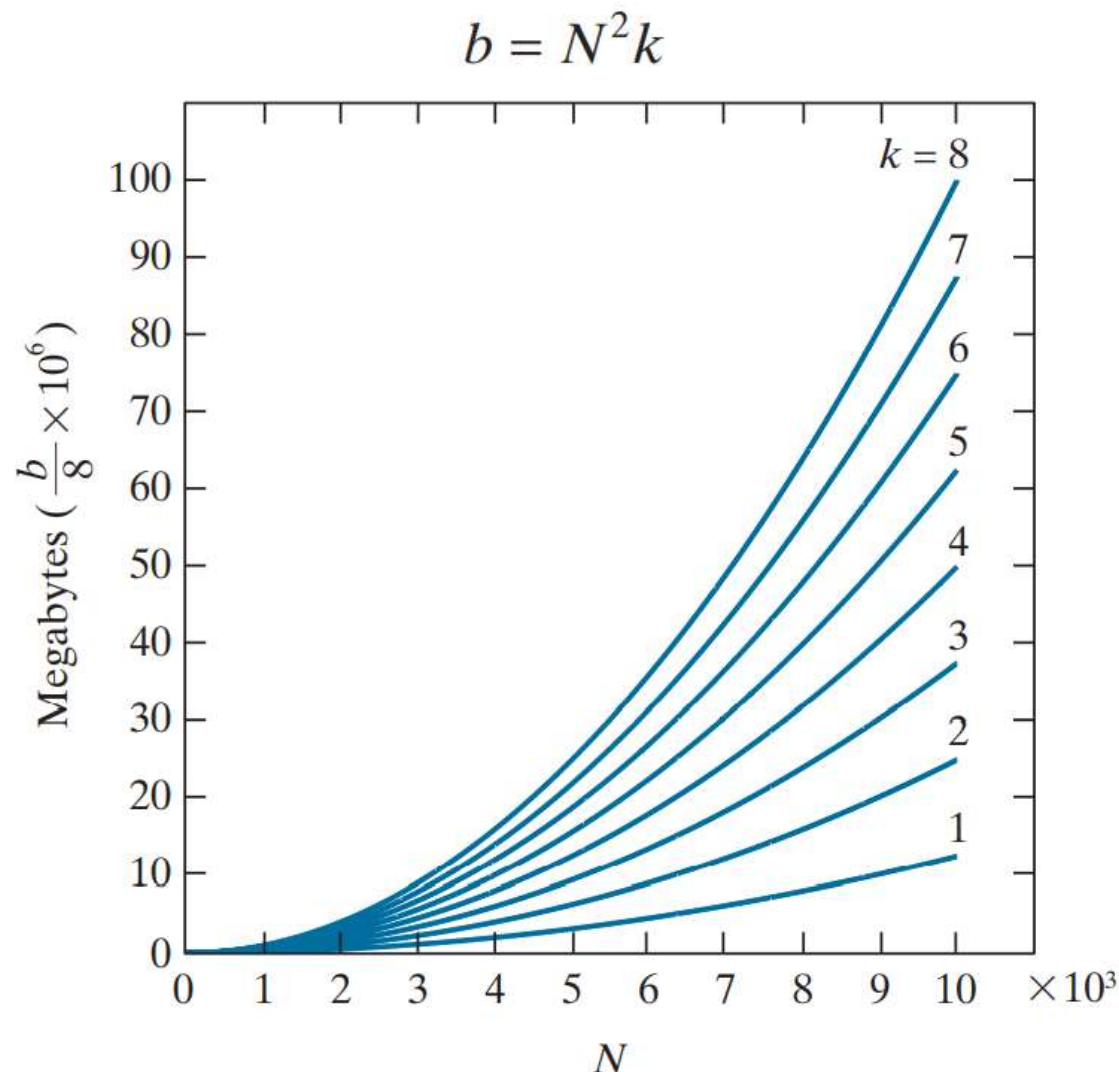
灰度级范围为： $[0, L-1]$ 。

- **存储一幅图像所需的位数 $b$ （单位是bit）**

$$b = M \times N \times k$$

When  $M = N$ , this equation becomes

$$b = N^2 k$$



## 2.3 图像取样和量化

### ◆ 空间和灰度分辨率

- 图像中可辨别的最小细节的度量
- 单位距离线对数(line pairs per unit distance)
- 单位距离点数(dots per unit distance)
  - 单位英寸点数(dots per inch, dpi)
  - 报纸 75 dpi, 杂志 133 dpi, 书 2044 dpi

## 2.3 图像取样和量化

### □ 空间分辨率与图像质量的关系：

空间分辨率越高，图像质量越好；空间分辨率越低，图像质量越差，会出现棋盘模式。

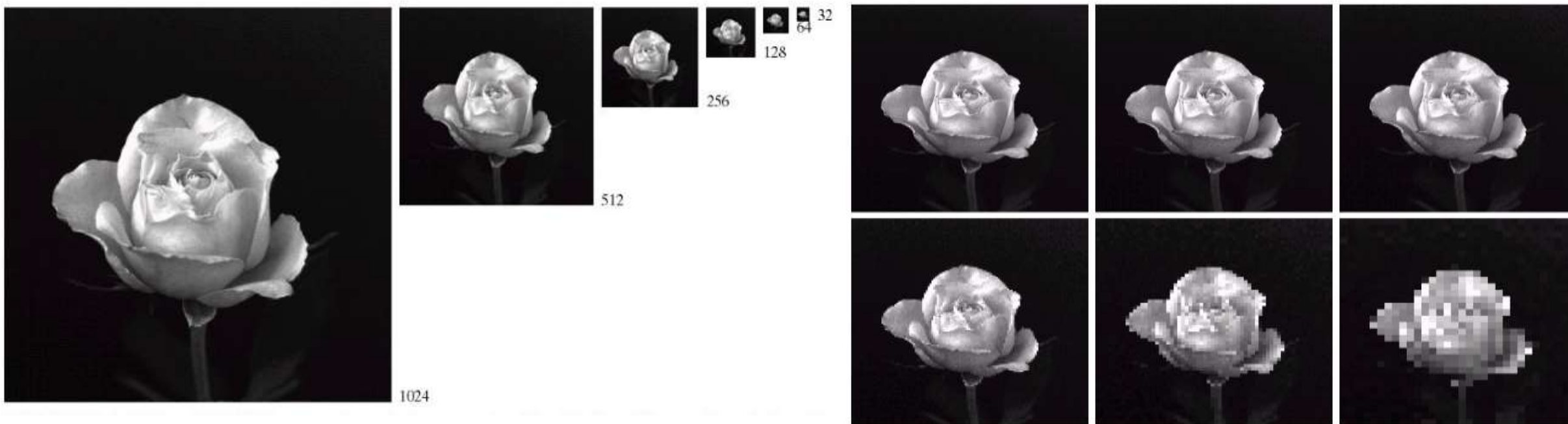
图像分别以  
1250dpi,  
300dpi,  
150dpi, 72dpi  
来显示。



## 2.3 图像取样和量化

□ 图像空间分辨率变化所产生的效果

■ **取样点数对图像质量的影响：**点数越多，图像质量越好。



## 2.3 图像取样和量化

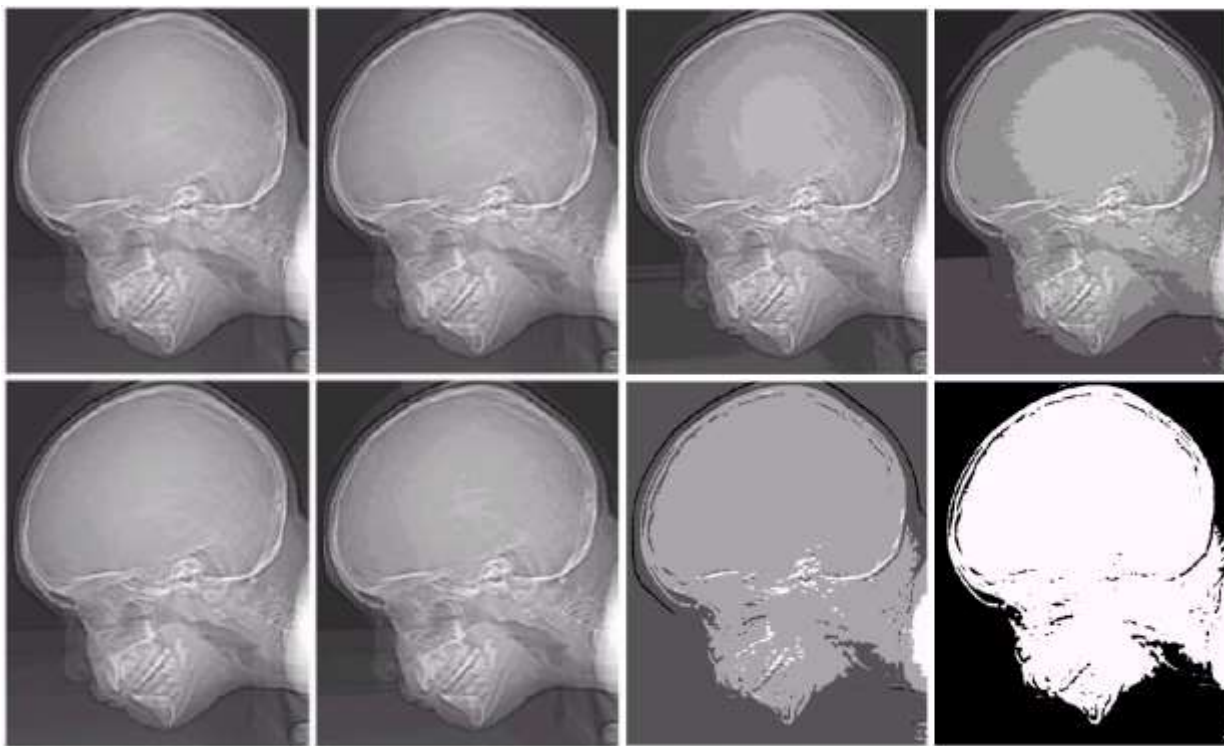
### ▣ 灰度分辨率：

- 图像灰度级中可分辨的最小变化。一般用灰度级或 比特数表示。
- 灰度级数通常是2的整数次幂。
- 最通用的是8比特。通常说一幅被量化为256级的图像有8比特的灰度分辨率。

## 2.3 图像取样和量化

### □ 灰度分辨率与图像质量的关系：

- 灰度分辨率越高，图像质量越好；灰度分辨率越低，图像质量越差，会出现虚假轮廓。



图像大小为 $452 \times 374$ ，分别以256,128,64,32,16,8,4,2的灰度级递减



## 2.3 图像取样和量化

- 灰度分辨率

- 灰度级对图像质量的影响：灰度级数越高，误差越小，图像质量越好。

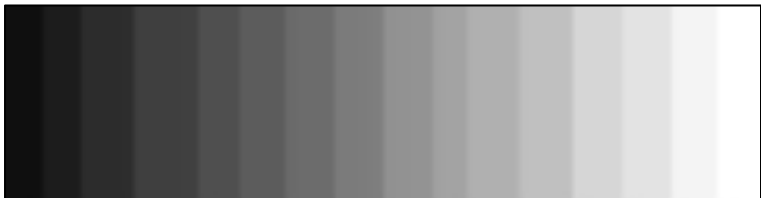
256个灰度级



64个灰度级



16个灰度级



## 2.3 图像取样和量化

- **随堂练习** ( $1\text{lp/mm}=2\text{pixel/mm}$ )

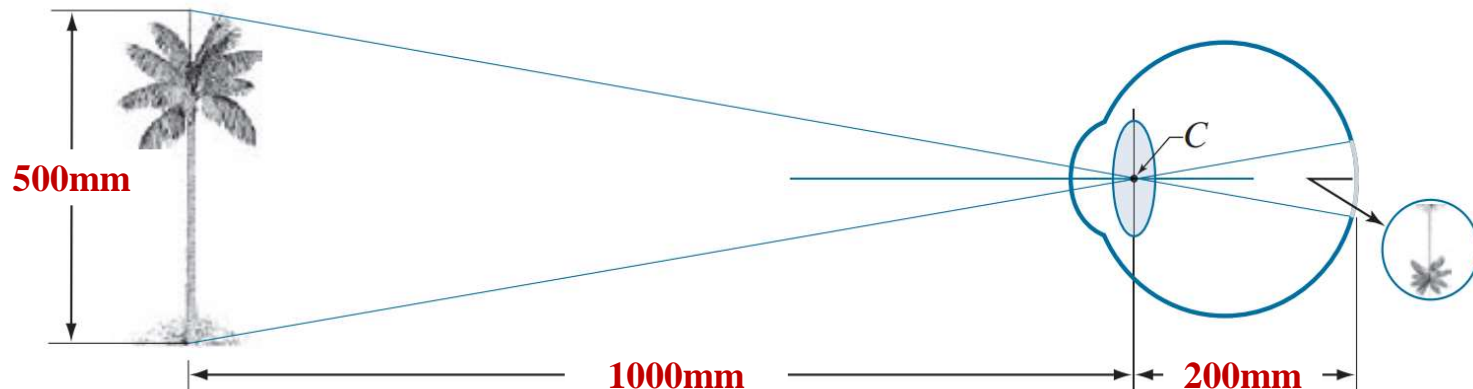
**2.5** 假设你正在准备一份报告，并且必须将一幅大小为  $2048 \times 2048$  像素的图像插入报告。

- (a)\* 假设打印机没有限制，要使图像打印在  $5\text{cm} \times 5\text{cm}$  的空间上，分辨率必须是多少线对每毫米？
- (b) 要使图像打印在 2 英寸  $\times$  2 英寸的空间上，分辨率必须是多少 dpi？

## 2.3 图像取样和量化

- 随堂练习 (1lp/mm=2pixel/mm)

2.8\* 假设某个自动成像应用需要使用 5 线对每毫米的最小分辨率来检测摄像机看到的物体中的特征。摄像机镜头的焦点与被摄区域之间的距离为 1m。成像面积为  $0.5\text{m} \times 0.5\text{m}$ 。假设配备了一个 200mm 的镜头，你的工作是挑选一款适当的 CCD 成像芯片。满足这一应用要求的 CCD 芯片的最小感测元素的数量和面积 ( $d \times d$ ) 是多少？（提示：成像模型如图 2.3 所示，为简单起见，假设成像区域是方形的。）



## 2.3 图像取样和量化

### ● 随堂练习

2.9 数字数据的传输常用波特率度量，它定义为符号数每秒（数据传输情况下是比特数每秒）。最低要求是，传输是以数据包形式实现的，数据包中包括一个开始位、一字节（8 比特）信息和一个结束位。利用这些事实回答下列问题：

- (a)\*使用 3M 波特（ $10^6$  比特/秒）的调制解调器传输 500 幅大小为  $1024 \times 1024$  像素的 256 灰度级图像，需要多少秒？[这是 DSL（数字用户线）的典型媒介速度。]
- (b) 使用 30G 波特（ $10^9$  比特/秒）的调制解调器时，传输这些图像需要多少秒？（对于商用线路，这是典型的媒介速度。）

## 2.4 图像像素间关系

- 像素间的一些基本关系

- 像素邻域

- ✓ 4邻域

- ✓  $D$ 邻域

- ✓ 8邻域

- 像素邻接

- ✓ 4连通

- ✓ 8连通

- ✓  $m$ 连通

- 像素距离

- ✓ 欧式距离

- ✓ 城市距离

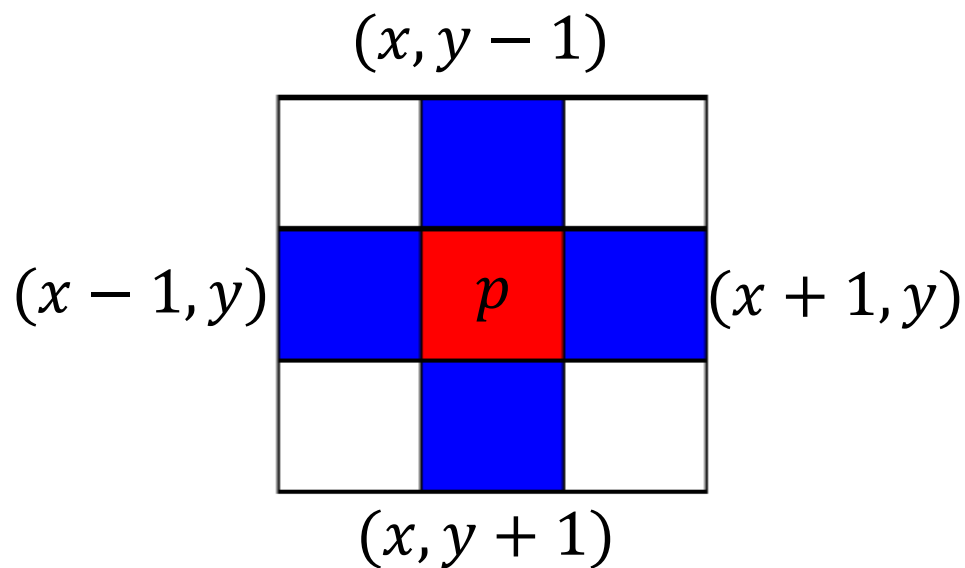
- ✓ 棋盘距离

## 2.4 图像像素间关系

- 像素邻域-4邻域

1. 像素  $p = (x, y)$  的4邻域  $N_4(p)$

- 4个垂直或水平的相邻像素  $(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1)$



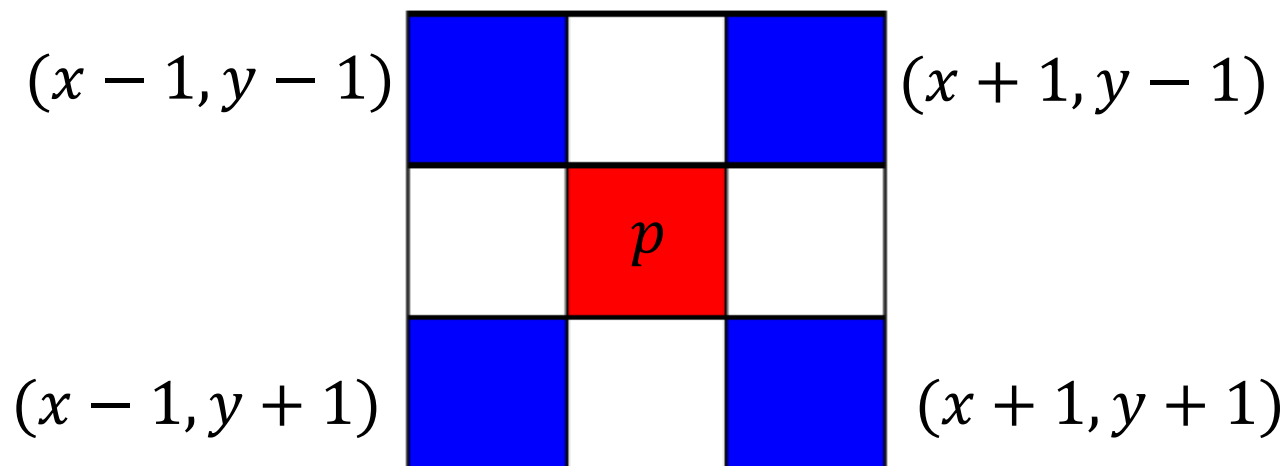
- 边界像素的邻域可能出界

## 2.4 图像像素间关系

- 像素邻域-D (Diagonal) 邻域

- 2. 像素 $p = (x, y)$ 的4对角邻域 $N_D(p)$

- 4个对角相邻的像素  $(x + 1, y + 1)$ ,  $(x + 1, y - 1)$ ,  $(x - 1, y + 1)$ ,  $(x - 1, y - 1)$



- 边界像素的邻域可能出界



## 2.4 图像像素间关系

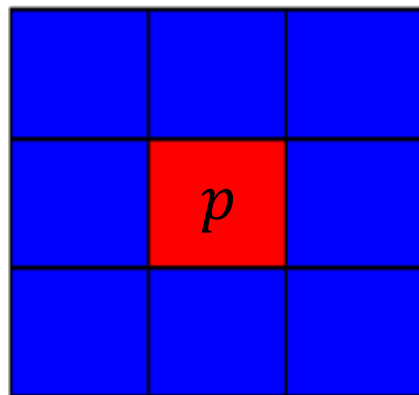
- 像素邻域-8邻域

- 3. 像素  $p = (x, y)$  的8邻域  $N_8(p)$

- 4邻域  $N_4(p)$  + 4对角邻域  $N_D(p)$

$$(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1)$$

$$(x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1)$$



- 边界像素的邻域可能出界

## 2.4 图像像素间关系

- 像素邻接

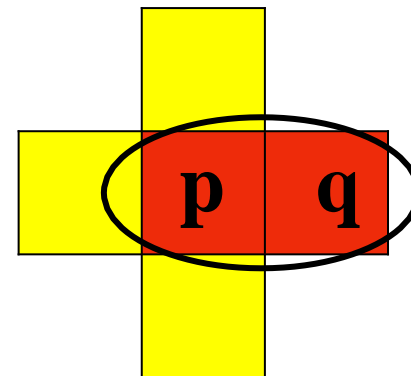
- 令 $V$ 是用于定义邻接性的灰度值集合
  - 对于二值图像,  $V = \{1\}$ 或 $V = \{0\}$
  - 对于非二值图像,  $V$ 是灰度级任意一个子集, 比如 $V = \{128, 129, \dots, 255\}$

## 2.4 图像像素间关系

### ● 像素邻接

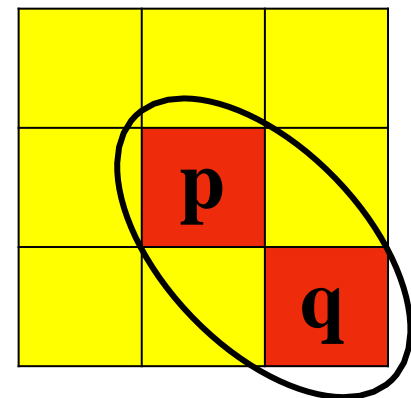
#### 1. 4邻接 (4-adjacency)

- $p$ 和 $q$ 的灰度值均属于集合 $V$
- $q$ 属于 $p$ 的4邻域, 即 $q \in N_4(p)$



#### 2. 8邻接 (8-adjacency)

- $p$ 和 $q$ 的灰度值均属于集合 $V$
- $q$ 属于 $p$ 的8邻域, 即 $q \in N_8(p)$



## 2.4 图像像素间关系

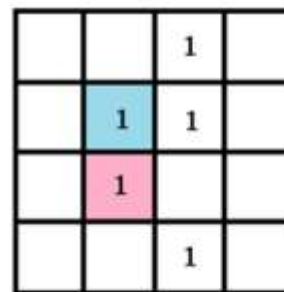
### ● 像素邻接

#### 3. $m$ 邻接 ( $m$ -adjacency)

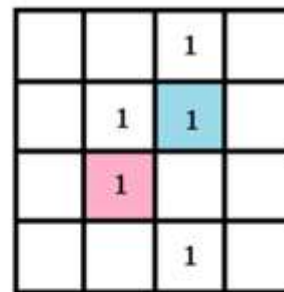
- $p$ 和 $q$ 的灰度值均属于集合 $V$

a)  $q$ 属于 $p$ 的4邻域, 即 $q \in N_4(p)$  或者

b)  $q$ 属于 $p$ 的4对角邻域, 即 $q \in N_D(p)$ ,  
且 $N_4(p) \cap N_4(q)$ 中没有元素的灰度属于 $V$



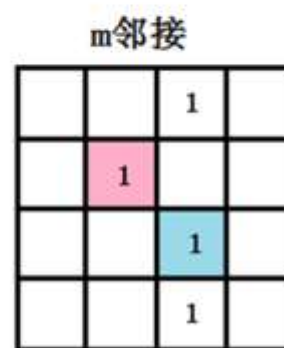
4邻接



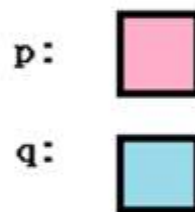
8邻接



不是 $m$ 邻接



$m$ 邻接



## 2.4 图像像素间关系

### ● 连通性

- 连通：通路上的所有像素灰度值满足相似准则，即 $(x_i, y_i)$ 与 $(x_{i-1}, y_{i-1})$ 邻接
- 种类：4-连通，8-连通，m-连通
- 闭合通路：一条从具有坐标 $(x, y)$ 的像素 $p$ ，到具有坐标 $(s, t)$ 的像素 $q$ 的通路，是具有坐标 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 的不同像素的序列。

其中， $(x_0, y_0) = (x, y), (x_n, y_n) = (s, t), (x_i, y_i)$ 和 $(x_{i-1}, y_{i-1})$ 是邻接的， $1 \leq i \leq n, n$ 是路径的长度。如果 $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ ，则该通路是闭合通路。

■ 例如右图：如果要从像素 $q$ 到像素 $p$ ：

- 4连通： $q$ 不能到 $p$ ，因为中心像素和右下角像素不满足4邻接关系
- 8连通： $q$ 可以到 $p$
- $m$ 连通： $q$ 可以到 $p$

0	1	1
0	1	0
0	0	1

Diagram illustrating pixel connectivity in a 3x3 grid. The grid contains values 0 and 1. Pixel  $q$  (top-right, value 1) and pixel  $p$  (bottom-right, value 1) are highlighted. Arrows indicate the path from  $q$  to  $p$  via the center pixel (value 1).

## 2.4 图像像素间关系

### ● 随堂练习

2.18 考虑右图所示的图像分割。

(a)\* 如 2.5 节所示, 令  $V = \{0, 1\}$  是定义邻接的灰度值集合。计算右图中  $p$  和  $q$  之间的最短 4 通路、8 通路和  $m$  通路的长度。如果在这两点之间不存在一个特殊的通路, 试说明原因。

(b) 令  $V = \{1, 2\}$ , 重做(a)问。

	3	1	2	1 ( $q$ )
	2	2	0	2
	1	2	1	1
( $p$ )	1	0	1	2

## 2.4 图像像素间关系

- 距离度量

- 三个像素点

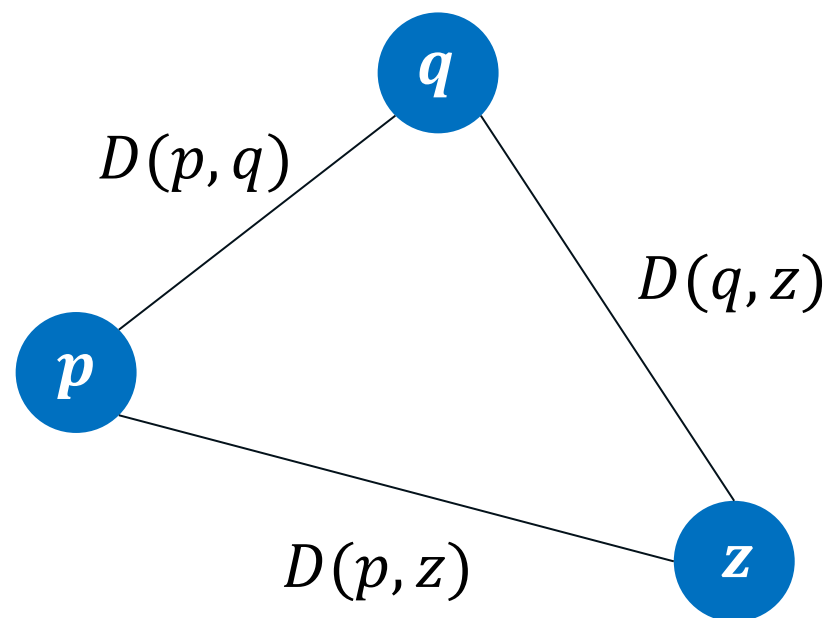
- $p = (x, y), q = (s, t), z = (v, w)$

- $D$ 是距离函数

- (a)  $D(p, q) \geq 0$  ( $D(p, q) = 0$  if  $p = q$ ),

- (b)  $D(p, q) = D(q, p)$ , and

- (c)  $D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$ .





## 2.4 图像像素间关系

- 距离度量

- 欧式距离

- 像素 $p(x, y)$ 和 $q(u, v)$ 间的欧式距离定义为：

$$D_e(p, q) = \left[ (x - u)^2 + (y - v)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- 与 $(x, y)$ 的欧式距离小于等于某个值 $r$ 的所有像素组成一个圆平面，其中 $(x, y)$ 为圆心， $r$ 为半径。

## 2.4 图像像素间关系

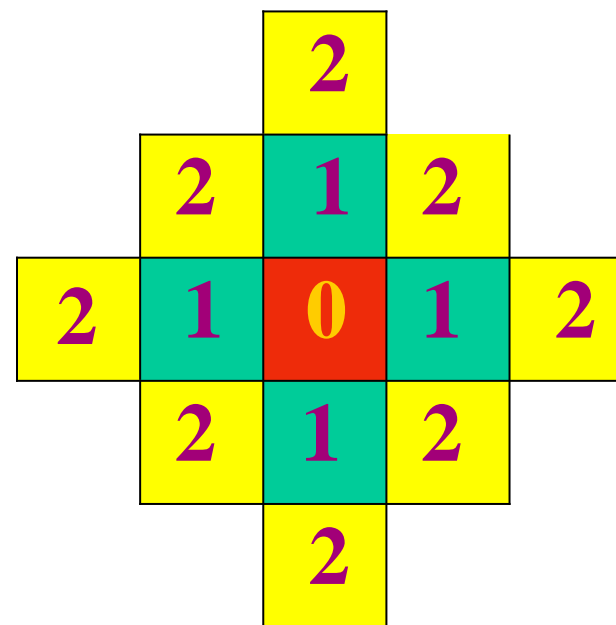
- 距离度量

- 城市距离 ( $D_4$ 距离)

- 像素 $p(x, y)$ 和 $q(u, v)$ 间的城市距离定义为:

$$D_4(p, q) = |x - u| + |y - v|$$

- 与 $(x, y)$ 的城市距离小于等于某个值 $r$ 的所有像素组成一个菱形。例如, 与点 $(x, y)$ 的 $D_4$ 距离小于等于2的像素, 形成右边固定距离的轮廓。
- 具有 $D_4 = 1$ 的像素是 $(x, y)$ 的4邻域



## 2.4 图像像素间关系

- 距离度量

- 棋盘距离 ( $D_8$ 距离)

- 像素 $p(x, y)$ 和 $q(u, v)$ 间的城市距离定义为:

$$D_8(p, q) = \max(|x - u|, |y - v|)$$

- 与 $(x, y)$ 的棋盘距离小于等于某个值 $r$ 的所有像素组成一个正方形。例如, 与点 $(x, y)$ 的 $D_8$ 距离小于等于2的像素, 形成右边固定距离的轮廓。
- 具有 $D_8 = 1$ 的像素是 $(x, y)$ 的8邻域

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

## 2.4 图像像素间关系

- 距离度量

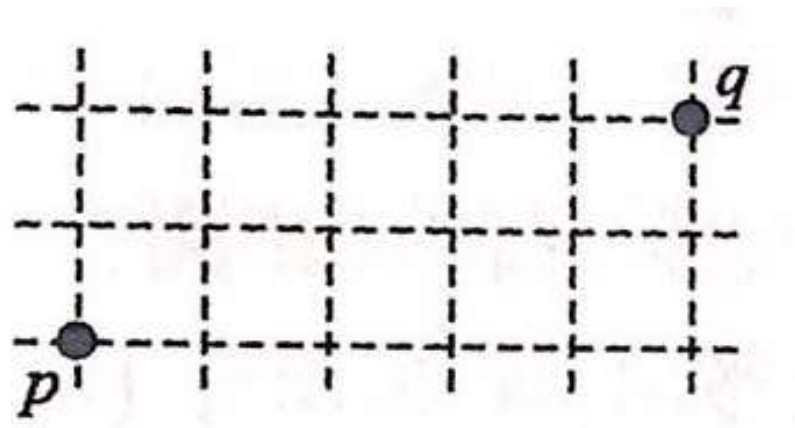
- $D_m$ 距离：在 $m$ 邻接的情况下，两点之间最短通路的长度，依赖于通路上的像素值和邻接点的像素值

- 当 $(p, q)$ 分别取 $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ ，从左下方的 $\mathbf{1}$ 到右上方的 $\mathbf{1}$ 的 $D_m$ 距离分别是多少？

0	$q$	$\mathbf{1}$
$p$	1	0
$\mathbf{1}$	0	0

## 2.4 图像像素间关系-练习题

- 计算如图所示的两个像素  $p$  和  $q$  之间的：
  - 欧式距离
  - 城市距离
  - 棋盘距离



## 2.5 基本数学工具

- 对应元素运算和矩阵运算

- 对于两幅的2x2图像

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- 逐元素相乘

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- 矩阵相乘

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

## 2.5 基本数学工具

- 线性运算和 nonlinear 运算

- 算子  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}[f(x, y)] = g(x, y)$$

- $\mathcal{H}$  是线性算子    a) 加性; b) 同质性。

$$\mathcal{H}[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = a\mathcal{H}[f_1(x, y)] + b\mathcal{H}[f_2(x, y)] = ag_1(x, y) + bg_2(x, y)$$

- 求和算子  $\Sigma$     线性运算

$$\begin{aligned}\Sigma[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] &= \Sigma af_1(x, y) + \Sigma bf_2(x, y) \\ &= a \Sigma f_1(x, y) + b \Sigma f_2(x, y) \\ &= ag_1(x, y) + bg_2(x, y)\end{aligned}$$



## 2.5 基本数学工具

- 线性运算和非线性运算

- 最大值操作 非线性运算

$$\max \left\{ (1) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \right\} = \max \left\{ \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \right\} \\ = -2$$

$$\max \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} + (-1) \max \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \right\} = 3 + (-1)7 \\ = -4$$

- 最小值操作、中值操作 非线性运算

## 2.5 基本数学工具

- 算术运算

- 加减乘除等

$$s(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$d(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

$$p(x, y) = f(x, y) \times g(x, y)$$

$$v(x, y) = f(x, y) \div g(x, y)$$

## 2.5 基本数学工具

### ● 算术运算

■ 图像去噪:  $g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$

- $f(x, y)$ 表示真实图像,  $g(x, y)$ 表示观测图像
- $\eta(x, y)$ 表示噪声, 假设噪声独立、0均值, 且噪声强度和图像值不相关
- 对 $K$ 幅不同的图像求平均

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g_i(x, y)$$

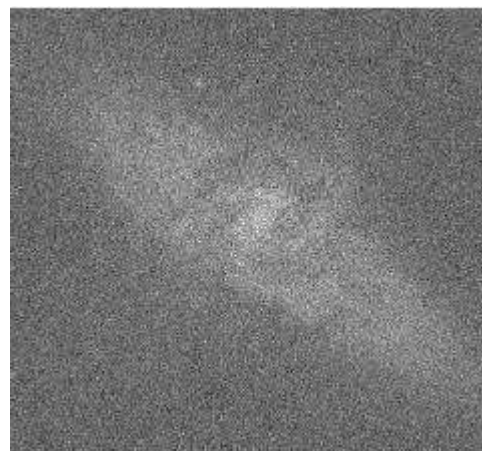
根据概率论:

$$E\{\bar{g}(x, y)\} = f(x, y) \quad \sigma_{\bar{g}(x, y)}^2 = \frac{1}{K} \sigma_{\eta(x, y)}^2 \quad \sigma_{\bar{g}(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sigma_{\eta(x, y)}$$

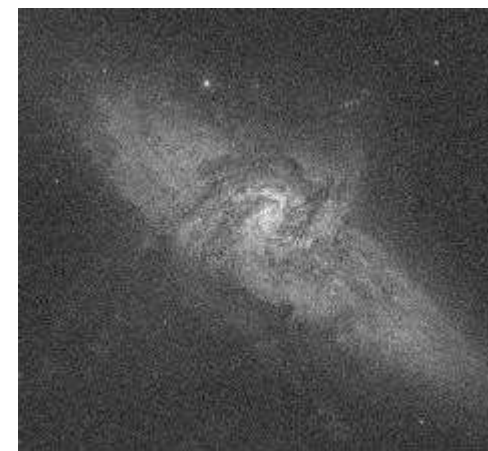
## 2.5 基本数学工具

- 算术运算

- 图像去噪:  $\bar{g}(x, y) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g_i(x, y)$   
 $E\{\bar{g}(x, y)\} = f(x, y)$



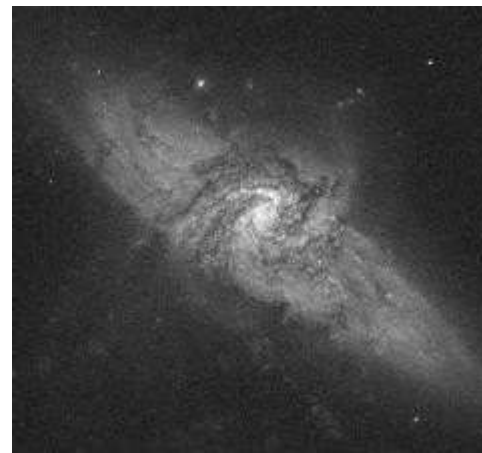
草帽星系样本噪声图像



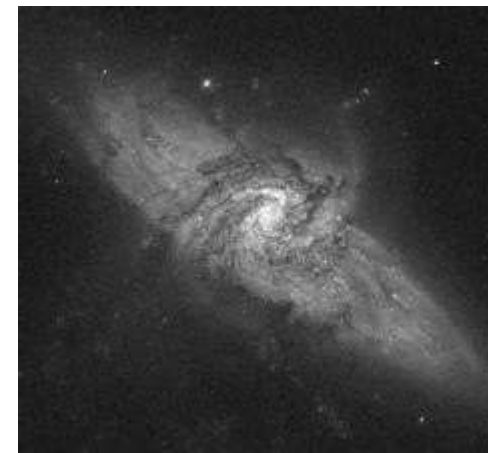
8帧平均



16帧平均



64帧平均

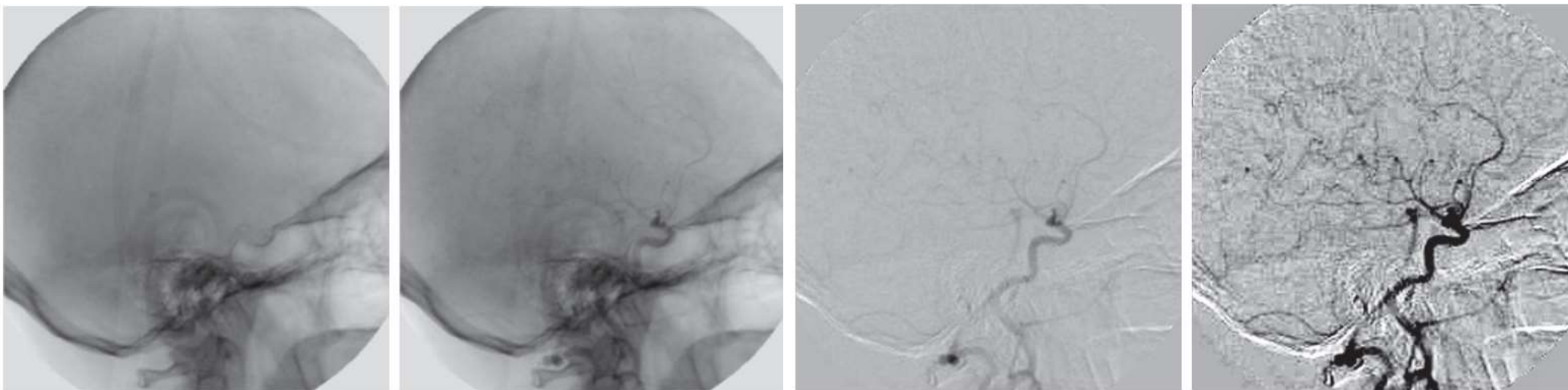


128帧平均

## 2.5 基本数学工具

- 算术运算

- 图像差异增强:  $d(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$



数字减影血管造影DSA

## 2.5 基本数学工具

- 算术运算

- 阴影校正:  $v(x, y) = f(x, y) \div g(x, y)$      $p(x, y) = f(x, y) \times g(x, y)$



图像校正

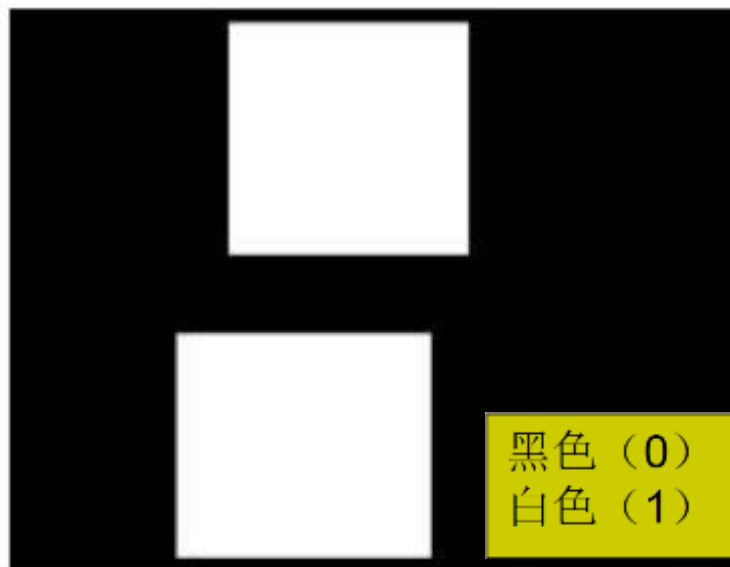
## 2.5 基本数学工具

- 算术运算

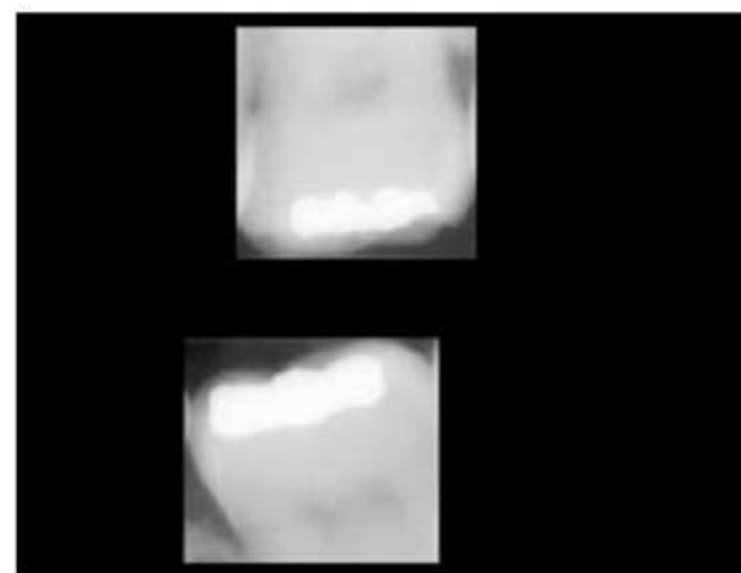
- 模版运算/感兴趣区域(ROI)运算:  $p(x, y) = f(x, y) \times g(x, y)$



牙齿的X射线图像



感兴趣的模板



相乘后的图像



## 2.5 基本数学工具

- 算术运算

- 灰度归一化

- 算术操作的结果可能不属于 $[0, 255]$
- 简单的做法
  - 负数设置为0, 大于255设置为255

- 保持更多的信息

$$f_m = f - \min(f)$$

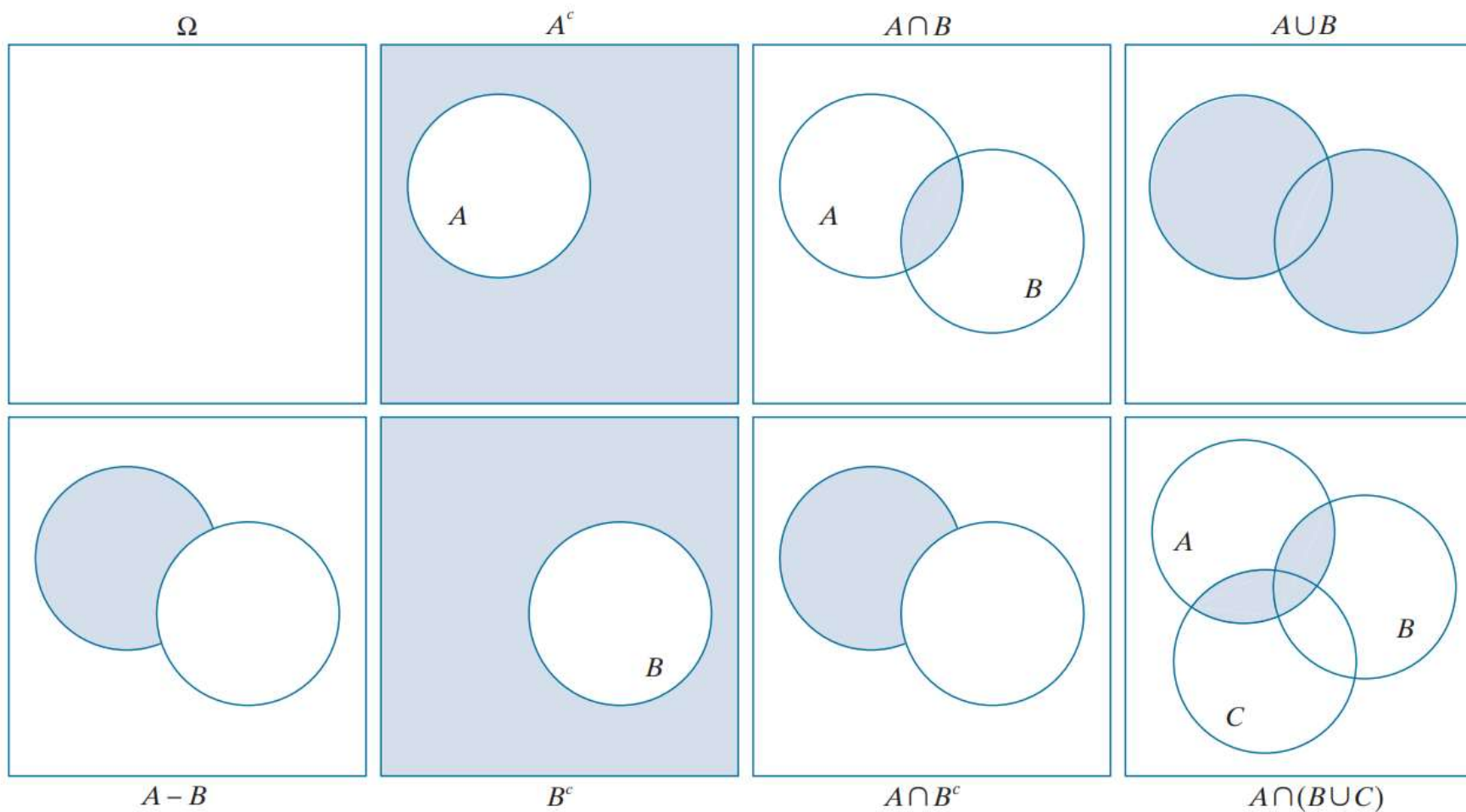
$$f_s = K \left[ f_m / \max(f_m) \right]$$

- $f_s \in [0, K]$

## 2.5 基本数学工具

### ● 集合运算和逻辑运算

- 与/交
- 或/并
- 非/补
- 或非
- 与非



## 2.5 基本数学工具

### ● 集合运算和逻辑运算

- 与/交
- 或/并
- 非/补
- 或非
- 与非

数字图像处理



数字图像处理

## 2.5 基本数学工具

- 空间操作

- 直接在图像像素上进行的操作

1. 单像素操作

2. 邻域操作

3. 几何空间变换

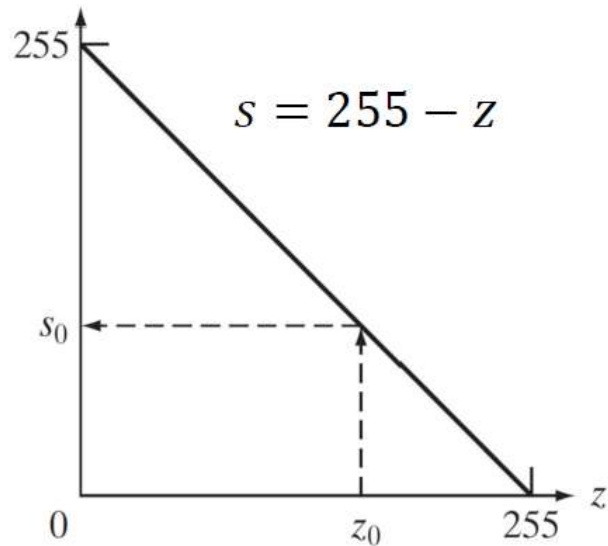
## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-单像素操作

- 以灰度为基础改变单个像素的值

$$s = T(z)$$

- $z$ 是原像素的灰度， $s$ 是处理后的灰度



8比特灰度图像的负图像

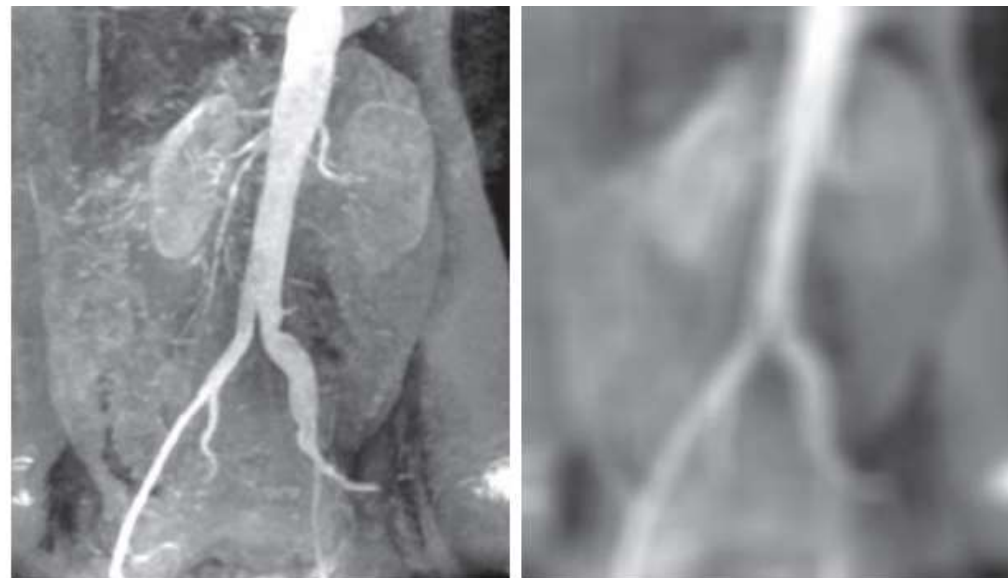
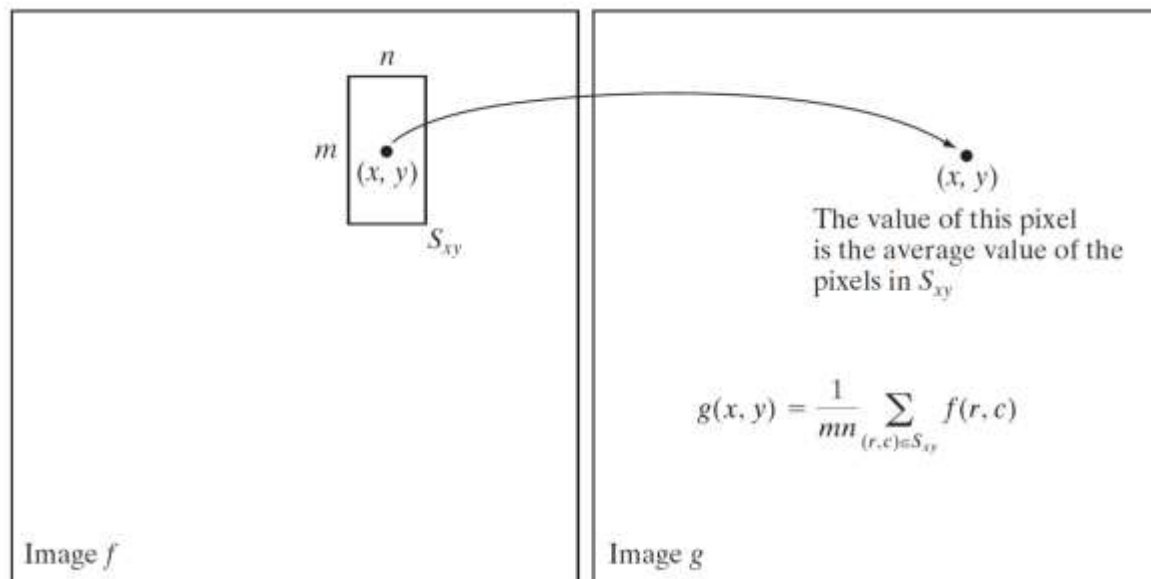




## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-邻域操作

- $S_{xy}$ 表示像素 $(x, y)$ 邻域像素点的集合
- 使用 $S_{xy}$ 中的所有像素计算一个输出



## 2.5 基本数学工具

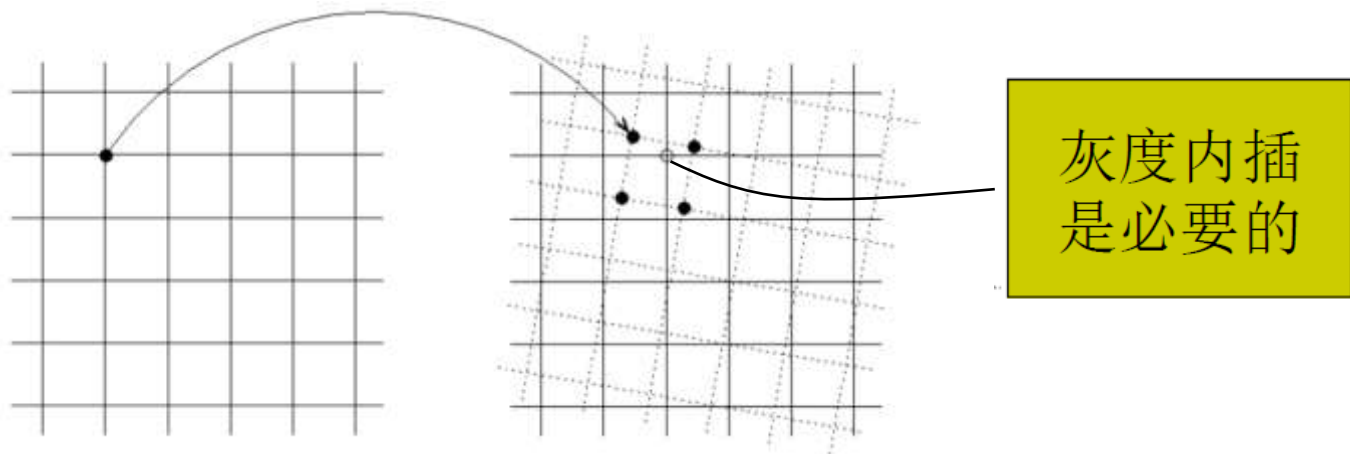
- 空间操作-几何变换

- 改变图像中像素间的空间关系

1. 坐标的空间变换  $(x', y') = T\{(x, y)\}$

2. 灰度内插

- 对变换后的像素赋灰度值





## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-几何变换

- 仿射变换：包含旋转、伸缩、平移、倾斜等变换

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31} \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}\end{aligned}$$

- $a_{31}$ 和 $a_{32}$ 刻画平移量
- $a_{11}$ 和 $a_{22}$ 刻画伸缩比例
- $a_{21}$ 和 $a_{12}$ 刻画倾斜程度

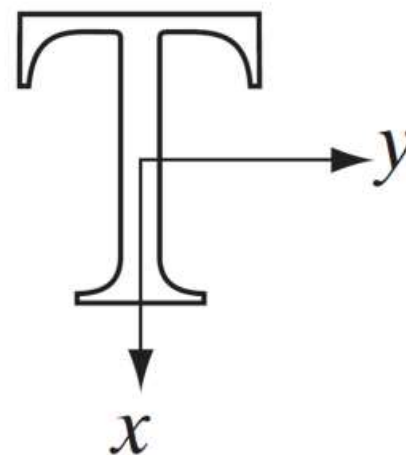
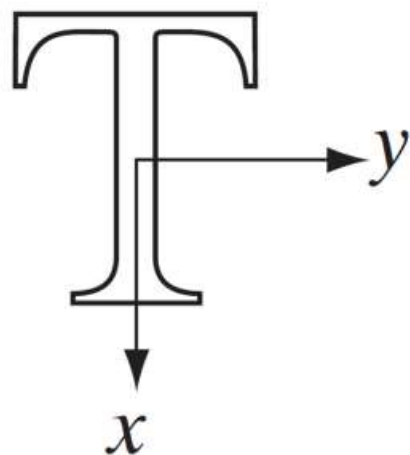
- 保持共线性 (co-linearity)
  - 共线的点变换后依然共线
- 保持距离比例 (ratios of distance)
  - 线的中心变换后依然是线的中心

## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-几何变换

- 恒等变换

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y\end{aligned}$$

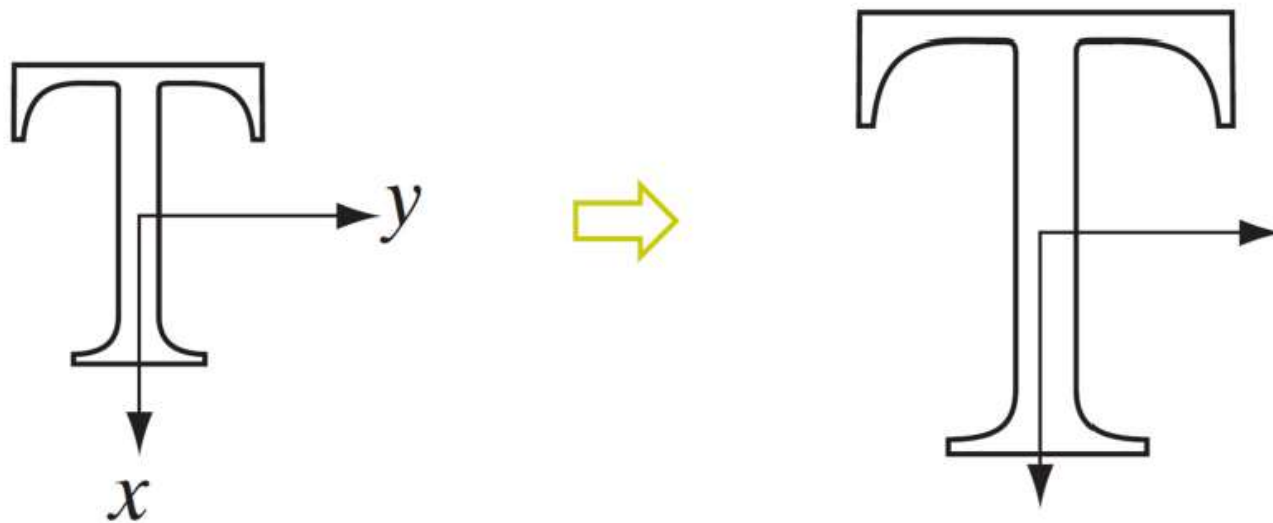


## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-几何变换

- 伸缩变换

$$\begin{aligned}x' &= c_x x \\ y' &= c_y y\end{aligned}$$



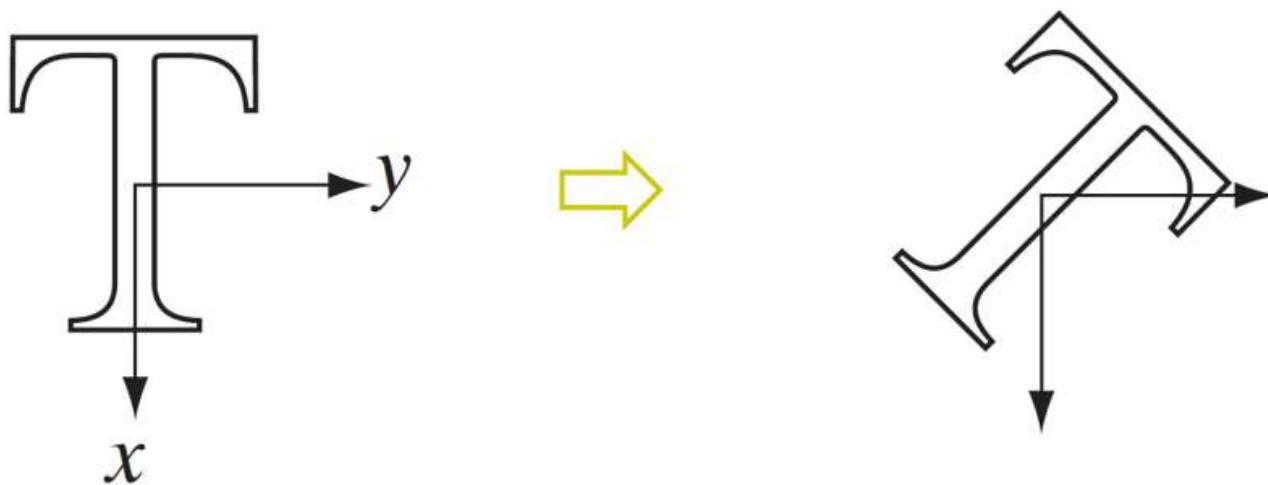
## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-几何变换

- 旋转变换

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$

$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

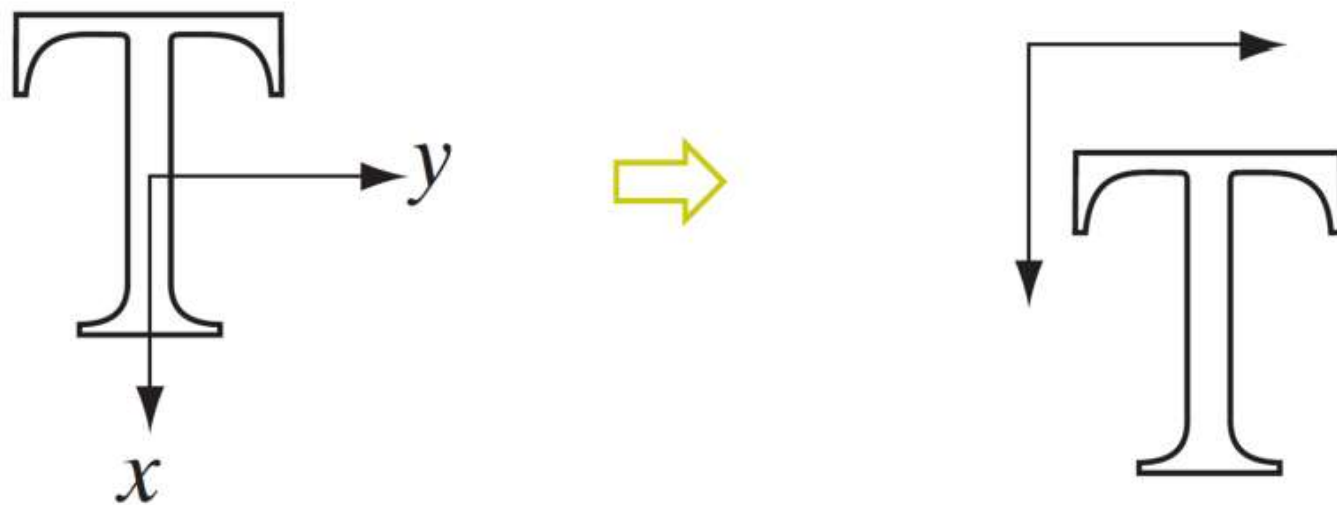


## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-几何变换

- 平移变换

$$\begin{aligned}x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y\end{aligned}$$



## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-几何变换

- 倾斜变换（垂直）

$$\begin{aligned}x' &= x + s_v \cdot y \\ y' &= y\end{aligned}$$



## 2.5 基本数学工具

- 空间操作-几何变换

- 倾斜变换 (水平)

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= s_h \cdot x + y\end{aligned}$$

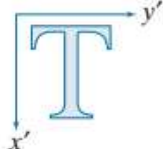
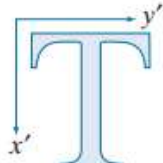
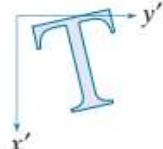
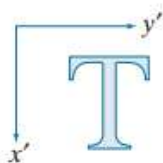
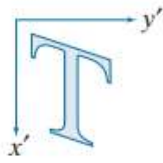
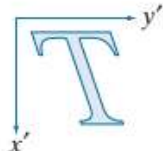




## 2.5 基本数学工具

- 空间运算-几何变换
- 用齐次坐标表示所有仿射变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformation Name	Affine Matrix, A	Coordinate Equations	Example
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$	
Scaling/Reflection (For reflection, set one scaling factor to -1 and the other to 0)	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = c_x x$ $y' = c_y y$	
Rotation (about the origin)	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$	
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + t_x$ $y' = y + t_y$	
Shear (vertical)	$\begin{bmatrix} 1 & s_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + s_v y$ $y' = y$	
Shear (horizontal)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = s_h x + y$	

## 2.4 图像像素间关系

### ● 随堂练习

2.37 由式(2.45)可知，坐标的仿射变换由下式给出：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中， $(x', y')$  是变换后的坐标， $(x, y)$  是原始坐标，表 2.3 中为各类变换给出了  $A$  的元素。变换回原始坐标的反变换  $A^{-1}$  对于执行逆映射同样重要。

(a)\* 求反缩放变换；

(b)\* 求反旋转变换；

## 2.5 基本数学工具

- 空间运算-图像配准

- 问题定义

- 输入图像、输出图像（参考图像）
- 估计变换函数

- 实际应用

- 相似时间内不同设备的图像
- 相同设备不同时间拍摄的图像

- 约束点

- 输入图像和输出图像中位置已知的相应点

## 2.5 基本数学工具

### ● 空间运算-图像配准

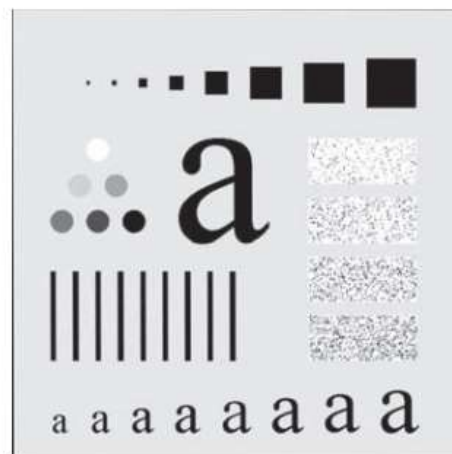
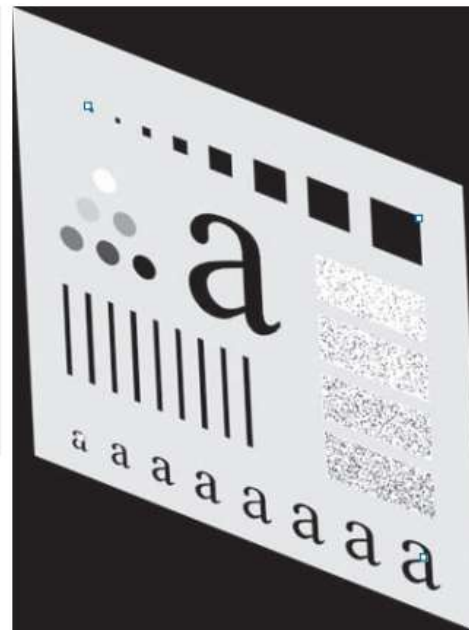
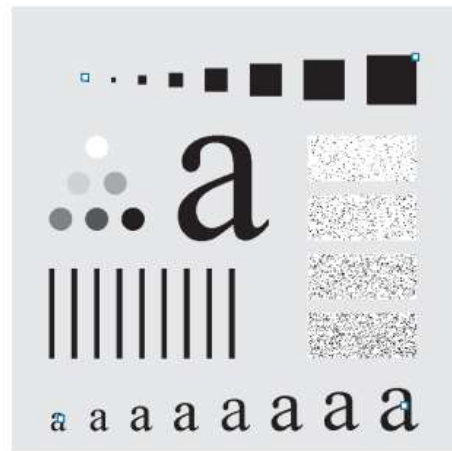
#### ■ 一般流程

##### ● 建模 (双线性近似)

$$x = c_1v + c_2w + c_3vw + c_4$$

$$y = c_5v + c_6w + c_7vw + c_8$$

- 8个参数
- 寻找约束点
  - 4个约束点、8个方程，求解方程组
- 执行映射
  - 灰度内插
- 增加约束点
  - 将原图分成多个4边形，逐个处理

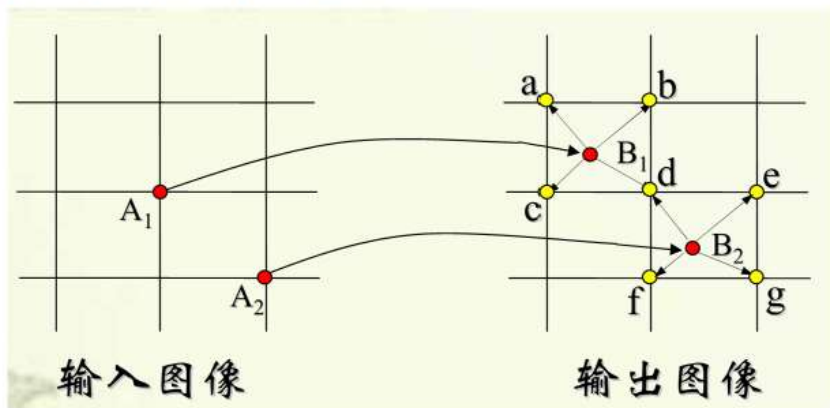


## 2.5 基本数学工具

### ● 灰度插值问题

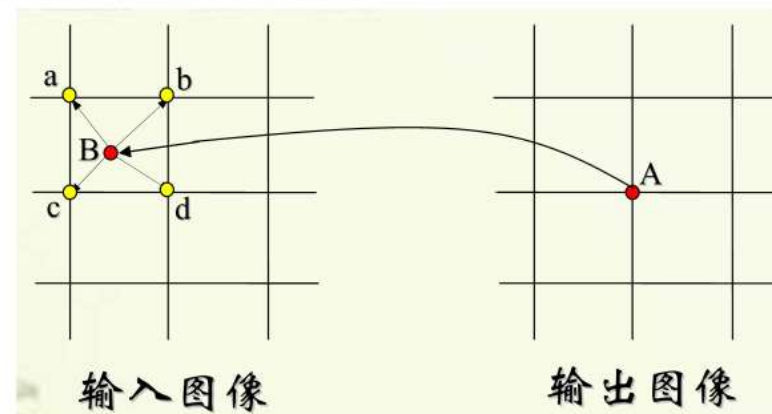
#### ● 前向映射

- 根据输入 $(v, w)$ , 计算输出 $(x, y) = T\{(v, w)\}$
- 利用映射后的像素灰度值, 计算输出图像像素的灰度值



#### ● 反向映射

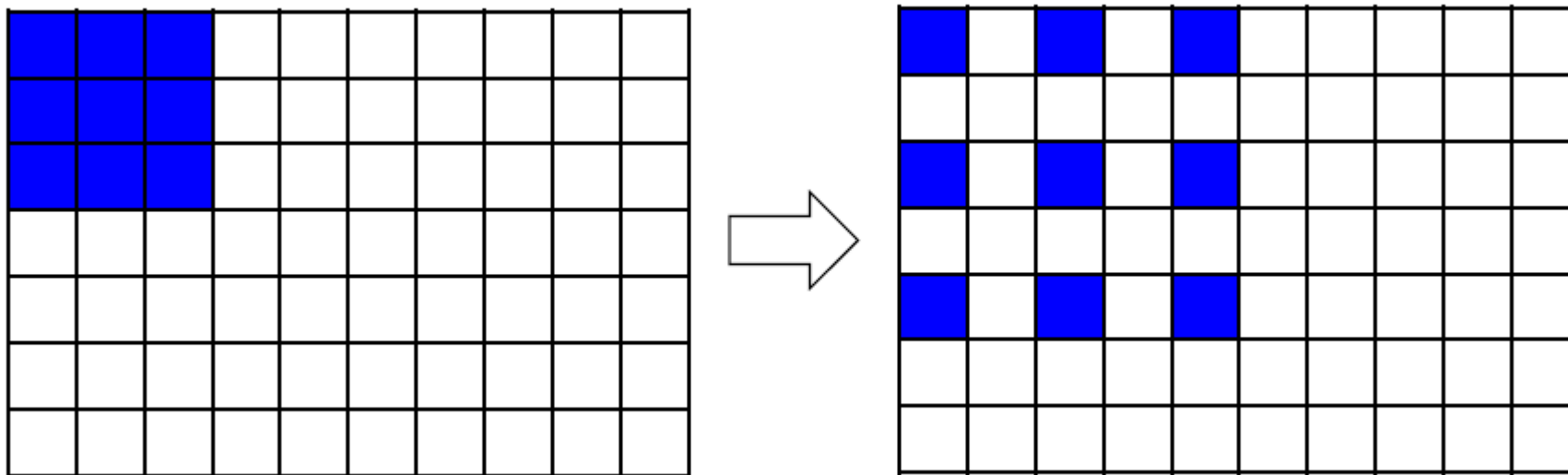
- 根据输出 $(x, y)$ , 寻找输入 $(v, w) = T^{-1}\{(x, y)\}$
- 利用原图像内的像素灰度值, 计算逆映射位置处的灰度值



## 2.5 基本数学工具

- 灰度插值问题

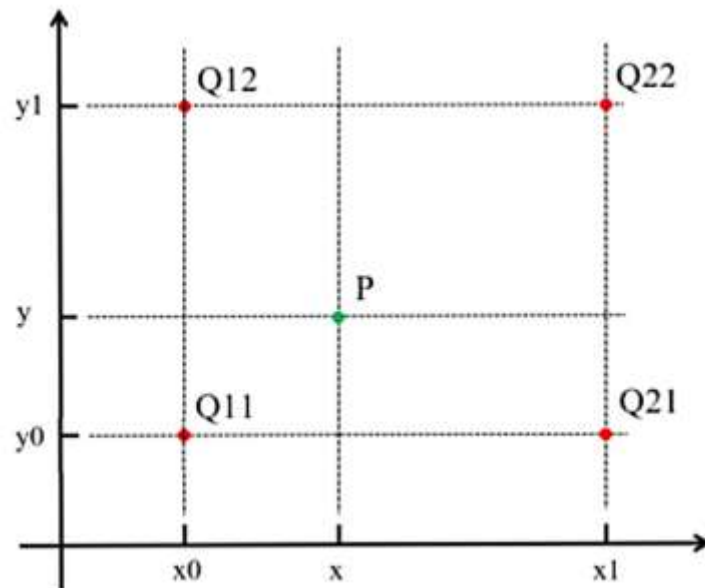
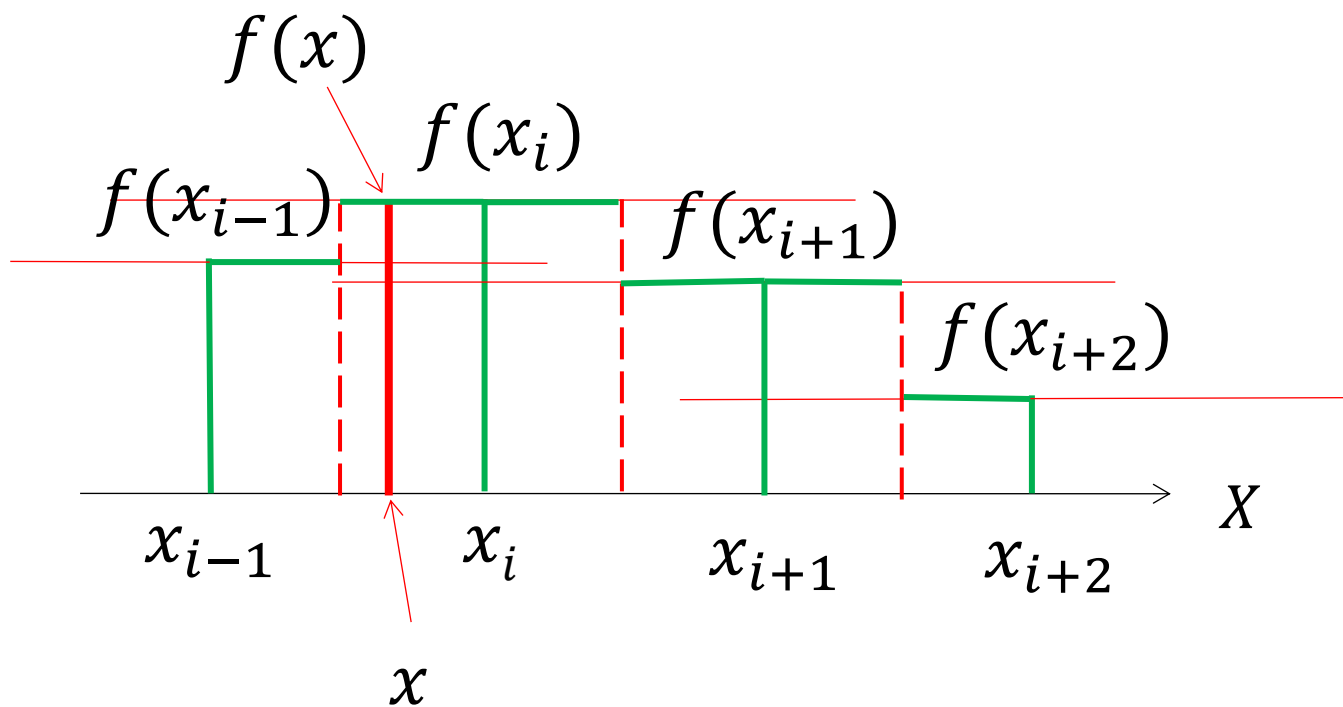
$$\begin{aligned}x' &= 2x \\ y' &= 2y\end{aligned}$$



## 2.5 基本数学工具

- 插值算法

### 最近邻插值 (Nearest Interpolation)

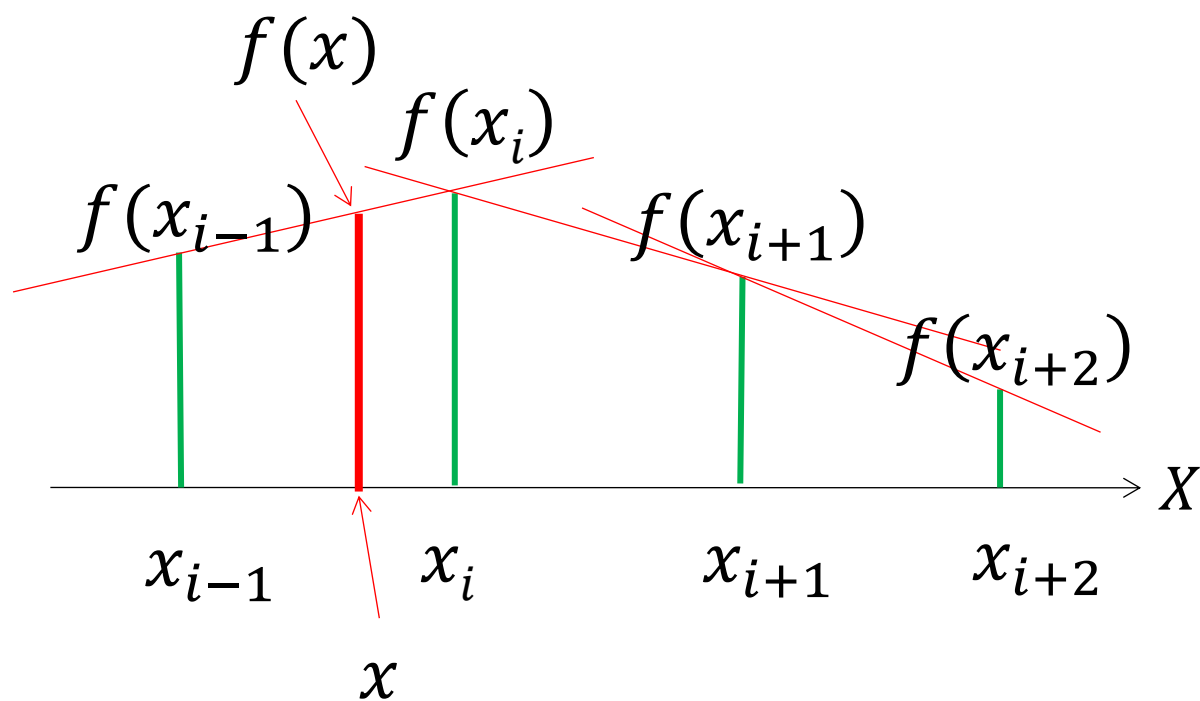




## 2.5 基本数学工具

- 灰度插值算法

### 线性插值 (Linear Interpolation)

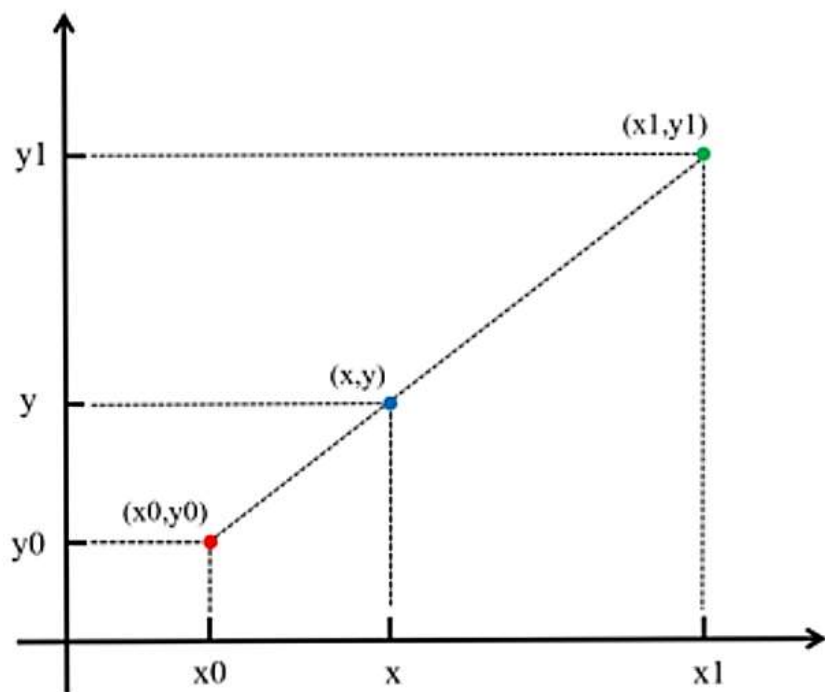


$$\frac{f(x) - f(x_{i-1})}{x - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$
$$f(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + f(x_{i-1})$$

## 2.5 基本数学工具

- 灰度插值算法

### 线性插值 (Linear Interpolation)

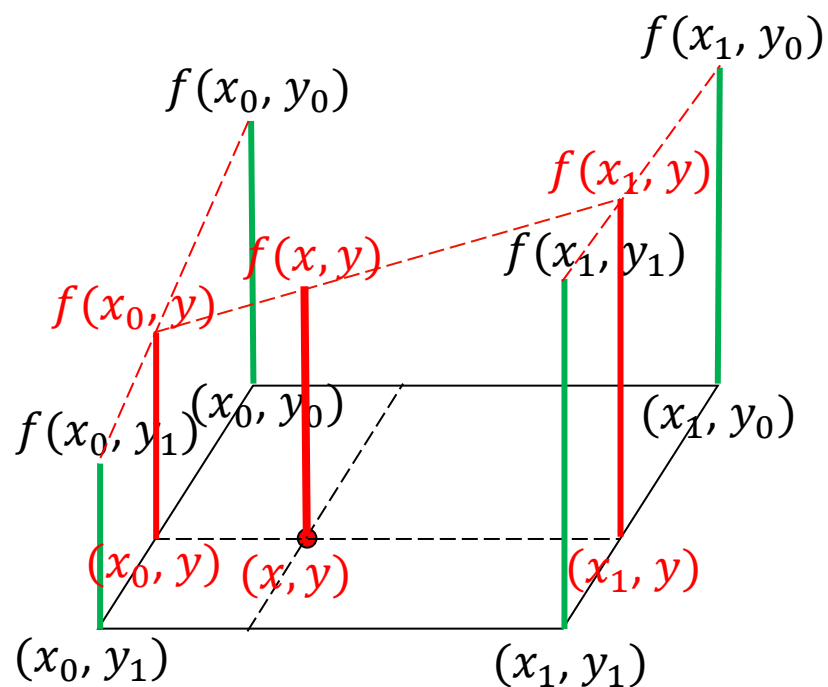


$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0$$

## 2.5 基本数学工具

- 灰度插值算法

### 双线性插值 (Bilinear Interpolation)



$$f(x_0, y_0) \quad f(x_0, y_1) \quad f(x_1, y_0) \quad f(x_1, y_1) \quad \longrightarrow \quad f(x, y)$$

$$f(x_0, y_0) \quad f(x_0, y_1) \quad \longrightarrow \quad f(x_0, y)$$

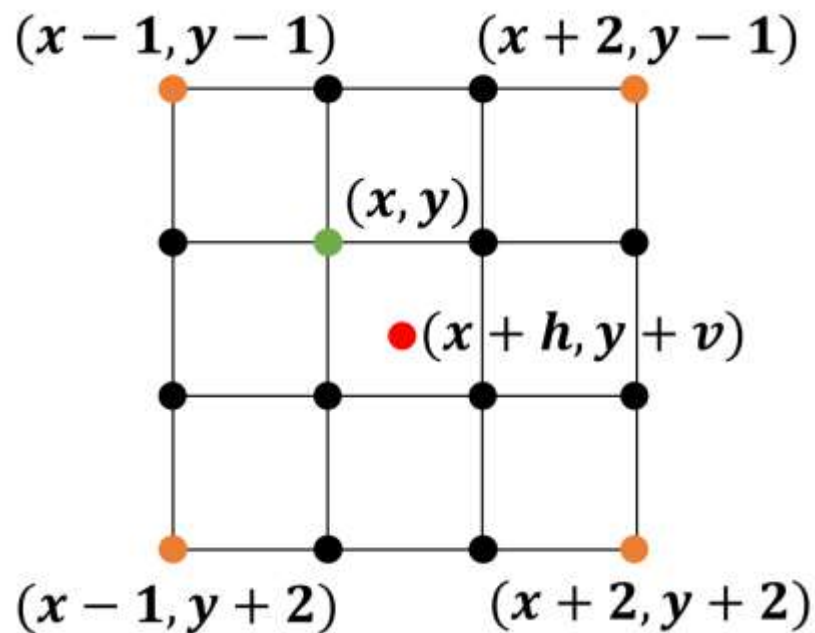
$$f(x_1, y_0) \quad f(x_1, y_1) \quad \longrightarrow \quad f(x_1, y)$$

$$f(x_0, y) \quad f(x_1, y) \quad \longrightarrow \quad f(x, y)$$

## 2.5 基本数学工具

- 灰度插值算法

### 双三次插值 (Bicubic Interpolation)



$$f(x, y) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(x_i, y_j) w(x - x_i) w(y - y_j)$$

$$w(d) = \begin{cases} (a+2)|d|^3 - (a+3)|d|^2 + 1 & \text{for } |d| \leq 1 \\ a|d|^3 - 5a|d|^2 + 8a|d| - 4a & \text{for } 1 < |d| < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 2.5 基本数学工具

- 灰度插值算法

- 图像旋转 $21^\circ$ 、反向映射



最近邻内插



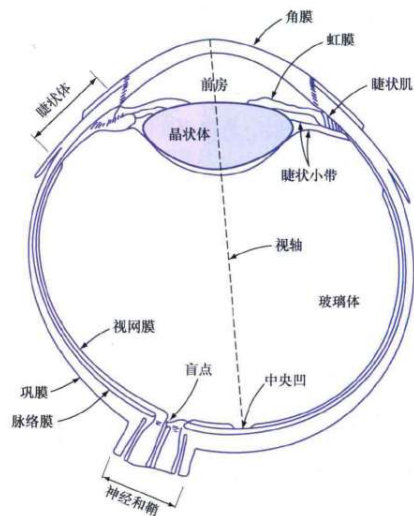
双线性内插



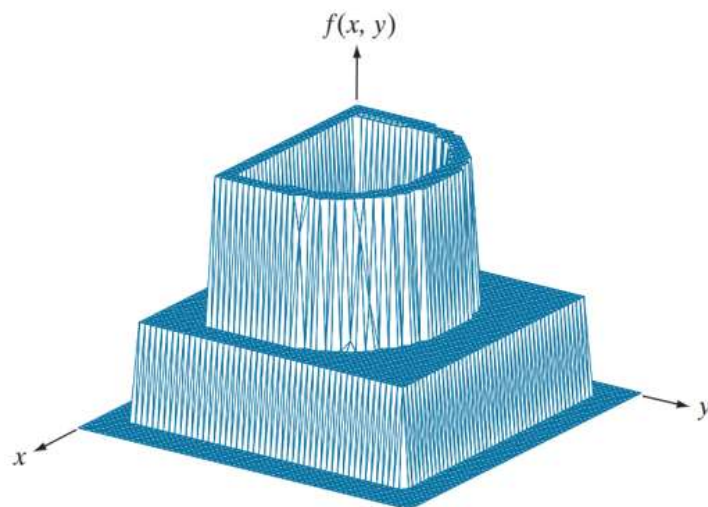
双三次内插

# 总结

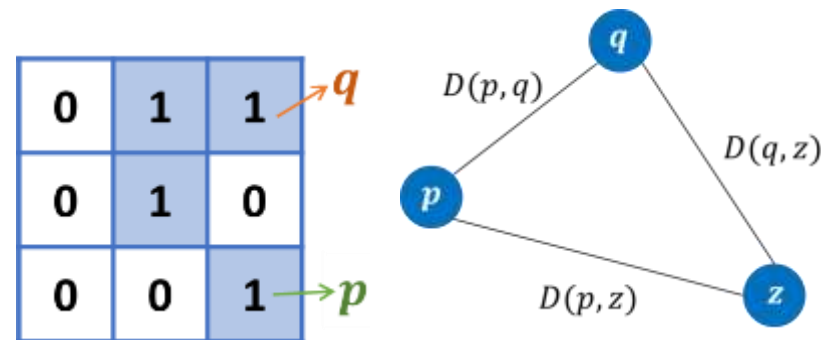
## ● 人类视觉系统



## ● 取样和量化



## ● 像素间的关系



## ● 基本数学工具

- 对应元素运算和矩阵运算
- 线性运算和非线性运算
- 算术运算
- 集合运算和逻辑运算

- 图像变换 (仿射变换/配准)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 插值方法

- ◆ 最近邻插值
- ◆ 线性插值/双线性插值
- ◆ 双三次插值