工科数学分析

贺丹（东南大学）

第五节 多元向量值函数的导数与微分

本节主要内容：

第五节 多元向量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 一元向量值函数的导数与微分

第五节 多元向量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 一元向量值函数的导数与微分
- 二元向量值函数的导数与微分

第五节 多元向量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 一元向量值函数的导数与微分
- 二元向量值函数的导数与微分
- 微分运算法则

第五节 多元向量值函数的导数与微分

本节主要内容：

- 一元向量值函数的导数与微分
- 二元向量值函数的导数与微分
- 微分运算法则
- 由方程组确定的隐函数的微分法

n元向量值函数

n元向量值函数

- 可以把n 元(m)维向量值函数的矩阵形式:

n元向量值函数

- 可以把n 元(m)维向量值函数的矩阵形式:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix},$$

n元向量值函数

- 可以把n 元(m)维向量值函数的矩阵形式:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$.

n元向量值函数

- 可以把n 元(m)维向量值函数的矩阵形式:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$.

- 一元向量值函数$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, 其向量形式为

n元向量值函数

- 可以把n 元(m)维向量值函数的矩阵形式:

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$.

- 一元向量值函数$\boldsymbol{f}:U(x_0)\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$, 其向量形式为

$$\boldsymbol{f}(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix},$$ 其中$f_i(x)$均为一元数量值函数.

一元向量值函数的导数与微分

一元向量值函数的导数与微分

定义5.1

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若

一元向量值函数的导数与微分

定义5.1

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(x_0 + \Delta x) - \boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}$$

一元向量值函数的导数与微分

定义5.1

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(x_0 + \Delta x) - \boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称$\boldsymbol{f}$在点x_0处可导, 并称此极限值为$\boldsymbol{f}$在x_0处的导数,

一元向量值函数的导数与微分

定义5.1

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(x_0 + \Delta x) - \boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称$\boldsymbol{f}$ 在点x_0 处可导, 并称此极限值为$\boldsymbol{f}$ 在x_0 处的导数,

记为$\boldsymbol{f}'(x_0)$ 或$\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或$D\boldsymbol{f}(x_0)$.

一元向量值函数的导数与微分

定义5.1

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(x_0 + \Delta x) - \boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称$\boldsymbol{f}$ 在点x_0 处可导, 并称此极限值为$\boldsymbol{f}$ 在x_0 处的导数, 记为$\boldsymbol{f}'(x_0)$ 或$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或$D\boldsymbol{f}(x_0)$.

下面来讨论$\boldsymbol{f}(x)$ 在x_0 处的可导性与其分量$f_i(x)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 的可导性的关系.

由于
$$\frac{\boldsymbol{f}(x_0+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}=\begin{bmatrix}\dfrac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x}\\ \dfrac{f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)}{\Delta x}\\ \vdots\\ \dfrac{f_m(x_0+\Delta x)-f_m(x_0)}{\Delta x}\end{bmatrix},$$

由于 $$\frac{\boldsymbol{f}(x_0+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}=\begin{bmatrix} \dfrac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x} \\ \dfrac{f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)}{\Delta x} \\ \vdots \\ \dfrac{f_m(x_0+\Delta x)-f_m(x_0)}{\Delta x} \end{bmatrix},$$

其第i 个分量为 $\dfrac{f_i(x_0+\Delta x)-f_i(x_0)}{\Delta x}$,

由于 $$\frac{\boldsymbol{f}(x_0+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}=\begin{bmatrix}\dfrac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x}\\ \dfrac{f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)}{\Delta x}\\ \vdots\\ \dfrac{f_m(x_0+\Delta x)-f_m(x_0)}{\Delta x}\end{bmatrix},$$

其第i 个分量为 $\dfrac{f_i(x_0+\Delta x)-f_i(x_0)}{\Delta x}$,

于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\boldsymbol{f}(x_0+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x}$ 存在的充分必要条件是下列极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_i(x_0+\Delta x)-f_i(x_0)}{\Delta x}\ (i=1,2,\cdots,m)$$ 均存在.

结论

函数$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$ 在x_0 处可导的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 都在x_0 处可导, 且导数等于

结论

函数$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$ 在x_0 处可导的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 都在x_0 处可导, 且导数等于

$$\boldsymbol{f}'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \cdots, f_m'(x_0))^T.$$

结论

函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可导的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可导, 且导数等于

$$\boldsymbol{f}'(x_0)=(f_1'(x_0),f_2'(x_0),\cdots,f_m'(x_0))^T.$$

- 若$\boldsymbol{f}$ 区间I 中的每一点都可导, 则称$\boldsymbol{f}$ 在I 上可导, 称$\boldsymbol{f}'(x)$ 为$\boldsymbol{f}$ 的导函数.

结论

函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可导的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可导, 且导数等于

$$\boldsymbol{f}'(x_0)=(f_1'(x_0),f_2'(x_0),\cdots,f_m'(x_0))^T.$$

- 若$\boldsymbol{f}$ 区间I 中的每一点都可导, 则称$\boldsymbol{f}$ 在I 上可导, 称$\boldsymbol{f}'(x)$ 为$\boldsymbol{f}$ 的导函数.
- 定义$\boldsymbol{f}$ 的二阶导数为:

结论

函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可导的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可导, 且导数等于

$$\boldsymbol{f}'(x_0)=(f_1'(x_0),f_2'(x_0),\cdots,f_m'(x_0))^T.$$

- 若$\boldsymbol{f}$ 区间I 中的每一点都可导, 则称$\boldsymbol{f}$ 在I 上可导, 称$\boldsymbol{f}'(x)$ 为$\boldsymbol{f}$ 的导函数.
- 定义$\boldsymbol{f}$ 的二阶导数为:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=\boldsymbol{f}''(x_0)=D^2\boldsymbol{f}(x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x)}{\mathrm{d}x}\right].$$

结论

函数$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$ 在x_0 处可导的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 都在x_0 处可导, 且导数等于

$$\boldsymbol{f}'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \cdots, f_m'(x_0))^T.$$

- 若$\boldsymbol{f}$ 区间I 中的每一点都可导, 则称$\boldsymbol{f}$ 在I 上可导, 称$\boldsymbol{f}'(x)$ 为$\boldsymbol{f}$ 的导函数.
- 定义$\boldsymbol{f}$ 的二阶导数为:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} = \boldsymbol{f}''(x_0) = D^2\boldsymbol{f}(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x)}{\mathrm{d}x}\right].$$

- 类似可以定义$\boldsymbol{f}$ 的n 阶导数: $D^n\boldsymbol{f}(x_0) = D(D^{n-1}\boldsymbol{f}(x))|_{x=x_0}$.

结论

函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可导的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可导, 且导数等于

$$\boldsymbol{f}'(x_0)=(f_1'(x_0),f_2'(x_0),\cdots,f_m'(x_0))^T.$$

- 若$\boldsymbol{f}$ 区间I 中的每一点都可导, 则称$\boldsymbol{f}$ 在I 上可导, 称$\boldsymbol{f}'(x)$ 为$\boldsymbol{f}$ 的导函数.
- 定义$\boldsymbol{f}$ 的二阶导数为:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=\boldsymbol{f}''(x_0)=D^2\boldsymbol{f}(x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x)}{\mathrm{d}x}\right].$$

- 类似可以定义$\boldsymbol{f}$ 的n 阶导数: $D^n\boldsymbol{f}(x_0)=D(D^{n-1}\boldsymbol{f}(x))|_{x=x_0}$.
- $\boldsymbol{f}^{(n)}(x_0)=\left(f_1^{(n)}(x_0),f_2^{(n)}(x_0),\cdots,f_m^{(n)}(x_0)\right)^T.$

- $m = 3$ 时一元向量值函数的物理意义：

- $m = 3$ 时一元向量值函数的物理意义:

用$\boldsymbol{r}(t)$ 表示指点在时刻t 空间位置的向径, 则质点在空间 $\mathbf{R}^3$ 中的运动方程可以用向量值函数$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 来表示, 其中 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, 于是,

- $m = 3$ 时一元向量值函数的物理意义:

用$\boldsymbol{r}(t)$ 表示指点在时刻t 空间位置的向径, 则质点在空间 $\mathbf{R}^3$ 中的运动方程可以用向量值函数$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 来表示, 其中 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, 于是,

质点的速度向量为: $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^T.$

- $m=3$ 时一元向量值函数的物理意义:

用$\boldsymbol{r}(t)$ 表示指点在时刻t 空间位置的向径, 则质点在空间 $\mathbf{R}^3$ 中的运动方程可以用向量值函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 来表示, 其中 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))^T$, 于是,

质点的速度向量为: $\boldsymbol{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^T.$

加速度向量为: $\boldsymbol{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^T.$

例1. 设有向量值函数$\boldsymbol{f}(x) = \begin{bmatrix} \sin 2x \\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \\ \arctan x^2 \end{bmatrix}$,

求$\boldsymbol{f}'(x)$, $\boldsymbol{f}''(x)$, $\boldsymbol{f}''(0)$.

一元向量值函数的微分

一元向量值函数的微分

定义5.2

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ 是一元向量值函数, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$,

一元向量值函数的微分

定义5.2

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ 是一元向量值函数, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$,

若存在一个与Δx 无关的m 维列向量$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^T$ 使得

一元向量值函数的微分

定义5.2

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ 是一元向量值函数, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若存在一个与$\Delta x$ 无关的m 维列向量$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^T$ 使得

$$\boldsymbol{f}(x + \Delta x) - \boldsymbol{f}(x_0) = \boldsymbol{a}\Delta x + o(\rho),$$

一元向量值函数的微分

定义5.2

设$\boldsymbol{f}: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ 是一元向量值函数, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若存在一个与$\Delta x$ 无关的m 维列向量$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^T$ 使得

$$\boldsymbol{f}(x + \Delta x) - \boldsymbol{f}(x_0) = \boldsymbol{a}\Delta x + o(\rho),$$

其中$\rho = |\Delta x|$, $o(\rho)$ 是关于ρ 的高阶无穷小, 则称$\boldsymbol{f}$ 在点x_0 处可微, 并称$\boldsymbol{a}\Delta x$ 为$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x_0)$, 即$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x_0) = \boldsymbol{a}\Delta x$.

定理5.1

定理5.1

向量值函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可微的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可微, 且当$\boldsymbol{f}$ 可微时, 有

定理5.1

向量值函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可微的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可微，且当$\boldsymbol{f}$ 可微时，有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{f}'(x_0)\Delta x.$$

定理5.1

向量值函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可微的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可微, 且当$\boldsymbol{f}$ 可微时, 有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{f}'(x_0)\Delta x.$$

- 若记$\mathrm{d}x=\Delta x$, 则向量值函数$\boldsymbol{f}$ 在x_0 处的微分可表示为

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{f}'(x_0)\mathrm{d}x.$$

定理5.1

向量值函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在x_0 处可微的充要条件是$\boldsymbol{f}$ 的每个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在x_0 处可微, 且当$\boldsymbol{f}$ 可微时, 有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{f}'(x_0)\Delta x.$$

- 若记$\mathrm{d}x=\Delta x$, 则向量值函数$\boldsymbol{f}$ 在x_0 处的微分可表示为
$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{f}'(x_0)\mathrm{d}x.$$
- 一元向量值函数$\boldsymbol{f}$ 在x_0 处的可微性与其可导性是等价的.

二元向量值函数的导数与微分

二元向量值函数的导数与微分

定义5.1

设有二元向量值函数$\boldsymbol{f}: U((x_{01}, x_{02})) \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^m$, 其中

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

二元向量值函数的导数与微分

定义5.1

设有二元向量值函数$\boldsymbol{f}: U((x_{01}, x_{02})) \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^m$, 其中

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

如果$\boldsymbol{f}$的每个分量f_i都在$\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, x_{02})^T \in \mathbf{R}^2$处可微, 则称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处可微, 也称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处可导.

将$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \mathrm{d}f_2(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\end{bmatrix}$

称为$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的微分.

将$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \mathrm{d}f_2(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\end{bmatrix}$

称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的微分. 将$m\times 2$的矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times 2}$称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的导数, 其中$a_{ij}=\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}\ (i=1,\cdots,m;j=1,2)$,

将$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \mathrm{d}f_2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \end{bmatrix}$

称为$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的微分. 将$m \times 2$ 的矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times 2}$ 称为$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的导数, 其中$a_{ij} = \dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}$ $(i = 1, \cdots, m; j = 1, 2)$, 记为$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$. 于是$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的微分可以表示为

将$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \mathrm{d}f_2(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\end{bmatrix}$

称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的微分. 将$m\times 2$的矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times 2}$称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的导数, 其中$a_{ij}=\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}$ $(i=1,\cdots,m;j=1,2)$, 记为$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$. 于是$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的微分可以表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\quad(\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2)^T).$$

$$\text{矩阵}\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times 2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times 2}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$通常称为

$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的Jacobi矩阵.

矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times 2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ 通常称为 $\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的Jacobi矩阵.

- 若向量值函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 可导, 则它在$\boldsymbol{x}_0$ 处的导数就是它在该点处的Jacobi矩阵.

例2. 设有向量值函数

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\left(\sin(x^2-y^2),\ln(x^2+z^2),\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^T,$$

求$D\boldsymbol{f}(x,y,z)$, $D\boldsymbol{f}(1,1,1)$.

n 元数量值函数的导数与微分

n 元数量值函数的导数与微分

上述定义可以推广到n 元向量值函数$\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$:

n 元数量值函数的导数与微分

上述定义可以推广到n 元向量值函数$\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$:

若$\boldsymbol{f}$ 的每个分量函数在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则Jacobi矩阵

n 元数量值函数的导数与微分

上述定义可以推广到n 元向量值函数$\boldsymbol{f}\colon U(\boldsymbol{x}_0)\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$:

若$\boldsymbol{f}$ 的每个分量函数在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则Jacobi矩阵

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla f_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \nabla f_2(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \nabla f_m(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix}$$

n 元数量值函数的导数与微分

上述定义可以推广到n 元向量值函数$\boldsymbol{f}\colon U(\boldsymbol{x}_0)\subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$:

若$\boldsymbol{f}$ 的每个分量函数在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则Jacobi矩阵

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix}$$

为$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的导数.

n 元数量值函数的导数与微分

上述定义可以推广到n 元向量值函数$\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$:

若$\boldsymbol{f}$ 的每个分量函数在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则Jacobi矩阵

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix}$$

为$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的导数.

- 类似地可以定义$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的微分: $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

说明: 当$m = n$ 时, 函数f 在x_0 处的导数Jacobi矩阵为方阵, 该方阵的行列式称为f 在x_0 处的Jocabi行列式, 将此行列式记为

说明: 当$m=n$ 时, 函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的导数Jacobi矩阵为方阵, 该方阵的行列式称为$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的Jocabi行列式, 将此行列式记为

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

说明: 当$m=n$时, 函数$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的导数Jacobi矩阵为方阵, 该方阵的行列式称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的Jocabi行列式, 将此行列式记为

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

例如, 当$\boldsymbol{f}$为一个二元(二维)向量值函数时, 它在$\boldsymbol{x}_0$处的Jocabi行列式为

说明: 当$m=n$ 时, 函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的导数Jacobi矩阵为方阵, 该方阵的行列式称为$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处的Jocabi行列式, 将此行列式记为

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

例如, 当$\boldsymbol{f}$ 为一个二元(二维)向量值函数时, 它在$\boldsymbol{x}_0$ 处的Jocabi行列式为

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)=\left.\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}\end{vmatrix}$$

向量值函数的偏导数

向量值函数的偏导数

定义

设$\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是一个$n(n \geqslant 2)$ 元向量值函数，若极限

向量值函数的偏导数

定义

设$\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是一个$n(n \geqslant 2)$ 元向量值函数，若极限

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta x_i \boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x_i}$$

存在(其中$\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$ 是第i 个分量为1，其余分量为0 的n 维向量)，

向量值函数的偏导数

定义

设$\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是一个$n(n \geqslant 2)$ 元向量值函数，若极限

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta x_i \boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x_i}$$

存在(其中$\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$ 是第i 个分量为1，其余分量为0 的n 维向量)，则称此极限值为函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数，记为$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$ 或$\boldsymbol{f}_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)$.

结论: 函数f 在x_0 处关于x_i 的偏导数存在的充要条件是:

结论: 函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在的充要条件是: $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在,

结论: 函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在的充要条件是: $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在, 且当$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$ 存在时, 有

结论: 函数$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处关于x_i的偏导数存在的充要条件是: $\boldsymbol{f}$的每一个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$在$\boldsymbol{x}_0$处关于x_i的偏导数存在, 且当$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$存在时, 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i},\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right)^T.$$

结论: 函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在的充要条件是: $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在, 且当$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$ 存在时, 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i},\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right)^T.$$

定理5.2

结论: 函数$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在的充要条件是: $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量f_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处关于x_i 的偏导数存在, 且当$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$ 存在时, 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i},\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right)^T.$$

定理5.2

设$\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0)\subseteq \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是一个$n(n\geqslant 2)$ 元向量值函数, $\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微的充分条件是它的所有分量对各变量的偏导数都在$\boldsymbol{x}_0$ 点连续.

微分运算法则

定理5.3

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数f 与g 都在点x 处可微, u 是在x 处可微的数量值函数, 则有

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数$\boldsymbol{f}$ 与$\boldsymbol{g}$ 都在点$\boldsymbol{x}$ 处可微，u 是在$\boldsymbol{x}$ 处可微的数量值函数，则有

(1) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}$ 处可微，且导数为

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数$\boldsymbol{f}$ 与$\boldsymbol{g}$ 都在点$\boldsymbol{x}$ 处可微, u 是在$\boldsymbol{x}$ 处可微的数量值函数, 则有

(1) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}$ 处可微, 且导数为 $D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$;

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}$都在点$\boldsymbol{x}$处可微, u 是在$\boldsymbol{x}$处可微的数量值函数, 则有

(1) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为 $D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$;

(2) $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}$都在点$\boldsymbol{x}$处可微，u是在$\boldsymbol{x}$处可微的数量值函数，则有

(1) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{x}$处可微，且导数为 $D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$;

(2) $\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ 在$\boldsymbol{x}$处可微，且导数为

$$D\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x});$$

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}$都在点$\boldsymbol{x}$处可微, u 是在$\boldsymbol{x}$处可微的数量值函数, 则有

(1) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为 $D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$;

(2) $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为

$$D\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x});$$

(3) $u\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为 $D(u\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = uD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})Du(\boldsymbol{x})$;

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}$都在点$\boldsymbol{x}$处可微，u是在$\boldsymbol{x}$处可微的数量值函数，则有

(1) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{x}$处可微，且导数为 $D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$;

(2) $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ 在$\boldsymbol{x}$处可微，且导数为

$$D\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x});$$

(3) $u\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}$处可微，且导数为$D(u\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=uD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})Du(\boldsymbol{x})$;

(4) 若$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$，则$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{x}$处可微，且导数为

微分运算法则

定理5.3

设有向量值函数$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}$都在点$\boldsymbol{x}$处可微, u 是在$\boldsymbol{x}$处可微的数量值函数, 则有

(1) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为 $D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$;

(2) $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为

$$D\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^T D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x});$$

(3) $u\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为$D(u\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = uD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})Du(\boldsymbol{x})$;

(4) 若$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, 则$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}$处可微, 且导数为

$$D(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})(x) = D\boldsymbol{f}(x)\times\boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{f}(x)\times D\boldsymbol{g}(x).$$

向量值函数的链式法则

定理5.4

向量值函数的链式法则

定理5.4

设有向量值函数$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_p)^T$ 在点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 处可微，向量值函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在对应点$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in\mathbf{R}^p$ 处可微，则复合函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微，并且

向量值函数的链式法则

定理5.4

设有向量值函数$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_p)^T$ 在点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 处可微，向量值函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在对应点$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in\mathbf{R}^p$ 处可微，则复合函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微，并且

$$D\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)}D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0).$$

向量值函数的链式法则

定理5.4

设有向量值函数$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_p)^T$ 在点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 处可微，向量值函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在对应点$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in\mathbf{R}^p$ 处可微，则复合函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微，并且

$$D\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)}D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0).$$

- 当$n=m=p$ 时，$D\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_0),D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)$ 与$D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$ 都是方阵，求导公式的两端可以取对应的Jacobi行列式即得：

向量值函数的链式法则

定理5.4

设有向量值函数$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_p)^T$ 在点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 处可微，向量值函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$ 在对应点$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in\mathbf{R}^p$ 处可微，则复合函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}_0$ 处可微，并且

$$D\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)}D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0).$$

- 当$n=m=p$ 时，$D\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_0),D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)$ 与$D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$ 都是方阵，求导公式的两端可以取对应的Jacobi行列式即得：

$$\frac{\partial(w_1,w_2,\cdots,w_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\frac{\partial(g_1,g_2,\cdots,g_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

例3. 设有向量值函数$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_1u_2 \end{bmatrix}$, 其中$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, 且$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} x_1+\mathrm{e}^{x_2} \\ \sin x_1 \end{bmatrix}$, 其中$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

求$D\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]$.

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程

$$x + y + z + xyz = 0$$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程

$x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

设$F(x, y, z) = x + y + z + xyz$,

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程

$x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

设$F(x, y, z) = x + y + z + xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{1 + yz}{1 + xy}$,

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

设$F(x, y, z) = x + y + z + xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{1 + yz}{1 + xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{1 + xz}{1 + xy}$,

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程

$x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

设$F(x, y, z) = x + y + z + xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{1 + yz}{1 + xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{1 + xz}{1 + xy}$,

$\therefore u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot (-\dfrac{1 + yz}{1 + xy})$,

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

设$F(x, y, z) = x + y + z + xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{1 + yz}{1 + xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{1 + xz}{1 + xy}$,

$\therefore u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \left(-\dfrac{1 + yz}{1 + xy}\right)$,

由$x + y + z + xyz = 0$可得, 当$x = 0, y = 1$ 时, $z = -1$.

5.4 方程组确定的隐函数的微分法

例. 设$u = f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求$u_x(0, 1)$.

解: $u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

设$F(x, y, z) = x + y + z + xyz$,

则$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{1+yz}{1+xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{1+xz}{1+xy}$,

$\therefore u_x(x, y) = \mathrm{e}^x yz^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot (-\dfrac{1+yz}{1+xy})$,

由$x + y + z + xyz = 0$可得, 当$x = 0, y = 1$ 时, $z = -1$.

故$u_x(0, 1) = 1$.

解法2： 看作方程组的情形.

解法2： 看作方程组的情形.

$$\text{方程组}\begin{cases} u = \mathrm{e}^x y z^2, \\ x + y + z + xyz = 0 \end{cases}$$ 确定u 和z 均为x, y 的函数,

解法2： 看作方程组的情形.

方程组$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x y z^2, \\ x + y + z + xyz = 0 \end{cases}$ 确定u 和z 均为x, y 的函数,

两个方程分别对x求偏导数得:

解法2：　看作方程组的情形.

方程组$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x y z^2, \\ x + y + z + xyz = 0 \end{cases}$ 确定u 和z 均为x, y 的函数,

两个方程分别对x求偏导数得:

$$\begin{cases} u_x = \mathrm{e}^x y z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot z_x, \\ 1 + z_x + yz + xy \cdot z_x = 0. \end{cases}$$

解法2： 看作方程组的情形.

方程组$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x y z^2, \\ x + y + z + xyz = 0 \end{cases}$ 确定u 和z 均为x, y 的函数,

两个方程分别对x求偏导数得:

$$\begin{cases} u_x = \mathrm{e}^x y z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot z_x, \\ 1 + z_x + yz + xy \cdot z_x = 0. \end{cases}$$

可解出$u_x(x,y) = \mathrm{e}^x y z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot (-\dfrac{1+yz}{1+xy})$,

解法2： 看作方程组的情形.

方程组$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x y z^2, \\ x + y + z + xyz = 0 \end{cases}$ 确定u 和z 均为x, y 的函数,

两个方程分别对x求偏导数得:

$$\begin{cases} u_x = \mathrm{e}^x y z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot z_x, \\ 1 + z_x + yz + xy \cdot z_x = 0. \end{cases}$$

可解出$u_x(x,y) = \mathrm{e}^x y z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot (-\dfrac{1+yz}{1+xy})$,

由$x + y + z + xyz = 0$可得, 当$x = 0, y = 1$ 时, $z = -1$.

解法2： 看作方程组的情形.

方程组$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x y z^2, \\ x + y + z + xyz = 0 \end{cases}$ 确定u 和z 均为x, y 的函数,

两个方程分别对x求偏导数得:

$$\begin{cases} u_x = \mathrm{e}^x y z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot z_x, \\ 1 + z_x + yz + xy \cdot z_x = 0. \end{cases}$$

可解出$u_x(x,y) = \mathrm{e}^x y z^2 + 2\mathrm{e}^x yz \cdot (-\dfrac{1+yz}{1+xy})$,

由$x + y + z + xyz = 0$可得, 当$x = 0, y = 1$ 时, $z = -1$.

故$u_x(0,1) = 1 + 2 \cdot 0 = 1$.

问: $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 由方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 所确定,

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ $=?$

问: $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 所确定,

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ =?

解: 方程组为 $\begin{cases} F(x,y(x),z(x)) = 0 \\ G(x,y(x),z(x)) = 0 \end{cases}$, 对 x 求导可得:

问: $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 由方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 所确定,

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ $=?$

解: 方程组为 $\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$, 对 x 求导可得:

$$\begin{cases} F_x + F_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \\ G_x + G_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + G_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$$

问: $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 由方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 所确定,

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ =?

解: 方程组为 $\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$, 对 x 求导可得:

$$\begin{cases} F_x + F_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \\ G_x + G_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + G_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$$

解上述方程组可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_x \\ -G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_x \\ -G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}, \qquad = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}-F_x & F_z\\ -G_x & G_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}-F_y & F_x\\ -G_y & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)},\qquad =-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)},$$

其中，$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$.

由方程组确定的隐函数

由方程组确定的隐函数

定理

设三元函数$F(x,y,z), G(x,y,z)$满足下列条件:

(1) 在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的某个邻域内有对各个变量的连续偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=G(x_0,y_0,z_0)=0$;

(3) Jacobi行列式$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$满足

$$J|_{M_0}=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}=\left.\left|\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|\right|_{M_0}\neq 0,$$

则由方程组$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$在$x_0$的的某邻域$U(x_0,\delta)$内确定了唯一的一组具有连续导数的函数$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$，它们满足$\begin{cases} y_0=y(x_0) \\ z_0=z(x_0) \end{cases}$及$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))\equiv 0, \\ G(x,y(x),z(x))\equiv 0, \end{cases}$ $x\in U(x_0,\delta)$, 并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}.$$

定理5.5 (隐函数存在定理)

定理5.5 (隐函数存在定理)

设有函数方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$,

定理5.5 (隐函数存在定理)

设有函数方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$,

且四元函数$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$满足下列条件:

(1) 在$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某个邻域内有连续偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(3) Jacobi 行列式

$$J|_{M_0}=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{M_0}=\left.\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\right|_{M_0}\neq 0,$$

则由方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 在点M_0 的某邻域$U(M_0,\delta)$内

确定了唯一的一组具有连续导数的函数$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$,

它们满足$\begin{cases} u_0=u(x_0,y_0) \\ v_0=v(x_0,y_0) \end{cases}$ 及$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0, \end{cases}$

$(x,y)\in U(M_0,\delta)$, 并且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

例1. 求出方程组 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 所确定的隐函数的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

例1. 求出方程组$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 所确定的隐函数的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

解法1: 将方程组两边对x 求导, 得

例1. 求出方程组 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 所确定的隐函数的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

解法1: 将方程组两边对x 求导, 得

$$\begin{cases} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + v + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

例1. 求出方程组$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 所确定的隐函数的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

解法1: 将方程组两边对x 求导, 得

$$\begin{cases} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + v + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$

, 求解可得

例1. 求出方程组$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 所确定的隐函数的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

解法1: 将方程组两边对x 求导, 得

$$\begin{cases} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + v + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$, 求解可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}.$$

将方程组两边对y 求导, 得

将方程组两边对y 求导, 得

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} - v - y\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

将方程组两边对y 求导, 得

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} - v - y\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$

, 求解可得

将方程组两边对y 求导, 得

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} - v - y\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$

, 求解可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} v & -y \\ -u & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{xv - yu}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} x & v \\ y & -u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}.$$

解法2： 将方程组$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$两边求全微分，得到

解法2： 将方程组$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$两边求全微分，得到

$$\begin{cases} u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y - y\mathrm{d}v = 0 \\ u\mathrm{d}y + y\mathrm{d}u + v\mathrm{d}x + x\mathrm{d}v = 0 \end{cases}$$

解法2： 将方程组$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 两边求全微分，得到

$$\begin{cases} u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y - y\mathrm{d}v = 0 \\ u\mathrm{d}y + y\mathrm{d}u + v\mathrm{d}x + x\mathrm{d}v = 0 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x\mathrm{d}u - y\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y \\ y\mathrm{d}u + x\mathrm{d}v = -(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \end{cases},$$

解法2： 将方程组$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$两边求全微分，得到

$$\begin{cases} u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y - y\mathrm{d}v = 0 \\ u\mathrm{d}y + y\mathrm{d}u + v\mathrm{d}x + x\mathrm{d}v = 0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x\mathrm{d}u - y\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y \\ y\mathrm{d}u + x\mathrm{d}v = -(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \end{cases}$,

将$\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$视为未知变量，利用Cramer法则求解可得

$$\mathrm{d}u = \frac{-(xu+yv)\mathrm{d}x + (xv-yu)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}v = \frac{(yu-xv)\mathrm{d}x - (xu+yv)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}u = \frac{-(xu + yv)\mathrm{d}x + (xv - yu)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2},$$

$$\mathrm{d}v = \frac{(yu - xv)\mathrm{d}x - (xu + yv)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2},$$

于是得到: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2};$

$$\mathrm{d}u = \frac{-(xu+yv)\mathrm{d}x + (xv-yu)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}v = \frac{(yu-xv)\mathrm{d}x - (xu+yv)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

于是得到: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{xv-yu}{x^2+y^2};$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}.$$

例2. 设函数$u=u(x)$ 由方程组$\begin{cases} u=f(x,y) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,z)=0 \end{cases}$ 确定,

其中f, g, h 可微, 且$\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0$, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

例2. 设函数$u=u(x)$ 由方程组$\begin{cases} u=f(x,y) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,z)=0 \end{cases}$ 确定,

其中f, g, h 可微, 且$\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0$, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法1: 后两个方程分别对x 求导, 得:

例2. 设函数$u=u(x)$ 由方程组$\begin{cases} u=f(x,y) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,z)=0 \end{cases}$ 确定,

其中f, g, h 可微, 且$\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0$, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法1: 后两个方程分别对x 求导, 得:

$$\begin{cases} g_x+g_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (1) \\ h_x+h_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (2) \end{cases}$$

例2. 设函数$u=u(x)$ 由方程组$\begin{cases} u=f(x,y) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,z)=0 \end{cases}$ 确定,

其中f, g, h 可微, 且$\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0$, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法1： 后两个方程分别对x 求导, 得：

$$\begin{cases} g_x+g_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (1) \\ h_x+h_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (2) \end{cases}$$

由(2)得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{h_x}{h_z}$,

例2. 设函数$u=u(x)$ 由方程组$\begin{cases} u=f(x,y) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,z)=0 \end{cases}$ 确定,

其中f, g, h 可微, 且$\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0$, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法1: 后两个方程分别对x 求导, 得:

$$\begin{cases} g_x+g_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (1) \\ h_x+h_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (2) \end{cases}$$

由(2)得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{h_x}{h_z}$, 代入(1) 得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{h_xg_z-g_xh_z}{h_zg_y}$,

例2. 设函数$u=u(x)$ 由方程组$\begin{cases} u=f(x,y) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,z)=0 \end{cases}$ 确定,

其中f, g, h 可微, 且$\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0$, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法1: 后两个方程分别对x 求导, 得:

$$\begin{cases} g_x+g_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (1) \\ h_x+h_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 & (2) \end{cases}$$

由(2)得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{h_x}{h_z}$, 代入(1) 得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{h_xg_z-g_xh_z}{h_zg_y}$,

故 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{h_xg_z-g_xh_z}{h_zg_y}.$$

解法2: 对$u = f(x, y)$求全微分可得,

解法2: 对$u=f(x,y)$求全微分可得, $\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}x$,

解法2: 对$u=f(x,y)$求全微分可得, $\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}x$,

对g, h 微分可得, $\begin{cases} g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z=0 \\ h_x\mathrm{d}x+h_z\mathrm{d}z=0 \end{cases}$

解法2: 对$u=f(x,y)$求全微分可得, $\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}x$,

对g, h 微分可得, $\begin{cases} g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z=0 \\ h_x\mathrm{d}x+h_z\mathrm{d}z=0 \end{cases}$

解之, 得 $\mathrm{d}y=\dfrac{(h_xg_z-g_xh_z)}{g_yh_z}\mathrm{d}x$,

解法2: 对$u=f(x,y)$求全微分可得, $\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}x$,

对g, h 微分可得, $\begin{cases} g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z=0 \\ h_x\mathrm{d}x+h_z\mathrm{d}z=0 \end{cases}$

解之, 得 $\quad \mathrm{d}y=\dfrac{(h_xg_z-g_xh_z)}{g_yh_z}\mathrm{d}x,$

$$\therefore \mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\frac{(h_xg_z-g_xh_z)}{g_yh_z}\mathrm{d}x,$$

解法2: 对$u=f(x,y)$求全微分可得, $\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}x$,

对g, h 微分可得, $\begin{cases} g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z=0 \\ h_x\mathrm{d}x+h_z\mathrm{d}z=0 \end{cases}$

解之, 得 $\mathrm{d}y=\dfrac{(h_xg_z-g_xh_z)}{g_yh_z}\mathrm{d}x$,

$$\therefore \mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\frac{(h_xg_z-g_xh_z)}{g_yh_z}\mathrm{d}x,$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{h_xg_z-g_xh_z}{h_zg_y}.$$