



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

面向星星跟踪测量系统的无拖曳航天器编队技术研究

作者姓名: 张永合

指导教师: 梁旭文 研究员

中国科学院上海微系统与信息技术研究所

学位类别: 工学博士

学科专业: 通信与信息系统

培养单位: 中国科学院上海微系统与信息技术研究所

二零一六年一月

**Research on Drag-free Spacecrafts Formation Flying
Technique Applied for Spacecraft to Spacecraft Tracking
Measurement System**

**By
Yonghe ZHANG**

**A Dissertation Submitted to
Graduate University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
Doctor of Communications and Information Systems**

**Shanghai Institute of Microsystems and Information Technology
Chinese Academy of Sciences**

January, 2016

致 谢

首先要感谢我的导师梁旭文研究员，在长久的博士研究生涯中，在亦师亦友的氛围中，所探讨的学术、科研、生活等各种话题，给我增加了很多思索与领悟；而梁老师自己所秉承的“开拓、实干”之精神，让我在未来的道路上不敢懈怠，所提倡的“无名英雄、无怨无悔、无上光荣”之格言让人收敛内心、增加定力。还要感谢上海微系统所负责我攻读博士学位各项琐事的余翔波老师，对长久以来所给予的支持、鼓励与帮助表示感谢，并顺祝两位老师生活愉快。

感谢中科院数学与系统科学研究院刘润球研究员，其长期跟踪研究国际上引力波探测、重力场探测相关基础理论与技术，秉承“开放、包容”之学术思想，在历次交谈中使我加深了对核心问题的认识。

感谢同事吴树范博士，其在欧空局为 Lisa Pathfinder 项目工作多年，在无拖曳、QFT 控制方面有着很深的研究体会，对其掌握的技术与方法不吝赐教，对论文中相关方法的研究提供了很多帮助。

感谢意大利都灵理工大学的 Enrico Canuto 教授，Canuto 教授十几年来对 GOCE, NGGM 等重力场测量卫星的研究成果，缩短了我对如此复杂系统的认识过程，虽仅见过两面但受益匪浅，本论文中不少地方借鉴了 Canuto 教授的研究思想。

感谢胡文瑞院士及所牵头的 SAGM 项目，“中德合作”计划，感谢罗俊院士及提出的“天琴”计划，正是由于对上述项目的参与，使我广泛接触了国际上在该领域的研究者，打开了技术与学术交流之门。

感谢远在哈工大的硕士导师马广富教授以及李传江、胡庆雷、郭延宁等几位师兄师弟，虽参加工作十年有余，但数年来我们持续在卫星控制相关问题上保持探讨与交流。也感谢小卫星王亚敏、毛青筠、胡志强等几位新生力量的加入，一同挑战这一技术难题。

本人在职攻读博士，读博期间时值上海微小卫星工程中心快速发展时期，在参与项目与撰写论文时间分配上难免有所冲突，单位领导、项目组的同事均给予了充分的谅解与支持，更是在长期的理解与合作中建立了良好的友谊，无法一一列出他们的名字，在此一并表达衷心谢意。

感谢上海微小卫星工程中心所营造的创新文化与实干精神，单位谋求发展，个人亦有成长，而倡导的“报效祖国、回馈家庭”之精神，让每一位航天科研者倍感神圣与慰藉。

本人长期求学与工作在外，家中父母皆由长兄永海悉心照料，至慈母谢世，吾未有回馈，心念此事、难以平静。每遇心志苦楚之时，幸有妻赵丹能伴左右，难享说走就走的旅行，常遇来去匆匆之身影，却担家务之劳，燃夜归之灯，使人顿增一分坚持之动力。在此深深感谢家人支持。

掩卷，想起了远方的故乡、流逝的岁月、未知的将来，交织，像一首诗，诉说着：

岁月
是一条奔腾的长河
生活
似不能停止的陀螺
记忆中的风景
有多久未被吟唱
渐远 又渐进的
是那
回得去的故乡
看得见的村庄
却难寻的模样
在匆匆远行的路上
都化成
一阵涟漪
一抹忧伤
洒在途中
藏在心房

感谢所有关心和帮助过我的人们，祝您们人生路上一帆风顺！

面向星星跟踪测量系统的无拖曳航天器编队技术研究

张永合(通信与信息系统)
指导教师：梁旭文 研究员

摘要

宇宙中的引力波激起了时空的“涟漪”，证明了爱因斯坦所猜想的时空弯曲；地球上冰山运动、板块漂移，所引起的地表质量变化揭示着地球演化信息，认识宇宙、了解地球，需要在漫长的时空中捕捉到这些极其微弱的信号。科学家通过观测两个检验质量之间距离的微弱变化，反演出这些引力变化信息，然而所需的百公里到百万公里的距离尺度，纳米到皮米级测距精度，干扰信号的屏蔽与分离，均对空间技术提出了巨大挑战，甚至有些遥不可及。欧美的 eLISA 计划，GRACE-FO 计划，我国的“太极”计划、“天琴”计划，SAGM 计划，均显示了人类探索宇宙与地球的决心，而这些空间任务的提出与实施，也促使着空间激光测距、加速度测量、微推力、无拖曳(Drag-free)控制、高稳定航天器等航天尖端技术取得一次又一次突破。

本论文以重力场、引力波探测任务方向为背景，以下一代重力场探测无拖曳双星编队为具体对象，研究无拖曳编队卫星系统复杂回路动力学建模与控制这一核心共性问题，既包含了单颗卫星的无拖曳控制研究，也包含了两颗卫星之间的相对动力学建模与控制研究，突破了功率谱密度与系统耦合约束下的系统设计问题，提出了基于定量反馈理论(QFT)无拖曳编队控制系统回路成形，功率谱密度约束条件下的观测器特征值最优估计等新方法。

首先，结合下一代重力场探测工程任务，阐述了无拖曳编队系统的控制目标与约束条件，介绍了重力场系统的测量与控制原理，包括星星跟踪系统的观测量的定义，与重力场参数之间的关系，观测量的测量方法等。在此基础上，建立了无拖曳控制编队卫星系统的数学模型，分析了无拖曳卫星所受的外部、内部干扰及相应的噪声模型。

为了提高参考坐标系的精度，研究了基于功率谱密度约束的轨道动力学估计方法，提出了以状态估计误差均方根为目标函数，通过序列二次规划方法(SQP)获得满足约束条件的状态观测器优化方法，最终获得了优化的估计器参数。针对多输入多输出(MIMO)编队系统在低频段的强耦合的问题，提出了基于定量反馈理论(QFT)的编队控制系统回路成形方法，设计了面向具有通用性的全系数控制器矩阵，同时解决了频域约束与回路耦合的问题。

然后，研究了单星线加速度无拖曳、角加速度无拖曳控制方法，采用了动力学干扰观测器的方法，将外界干扰进行精确估计，分析了外干扰、模型不确定性、测量误

差等信号的功率谱对估计器回路频谱特性的约束,确定了估计器增益矩阵的取值边界,估计器的设计使得控制过程得以简化。基于 QFT 方法,设计了满足噪声约束的姿态控制回路控制器。

最后,基于本论文控制器的设计,开展了全回路的仿真分析,全面验证了回路之间的兼容性,证明了本论文所提出方法的有效性。

关键词: 重力场; 引力波; 无拖曳; 功率谱密度; 定量反馈理论; 编队

Research on drag-free spacecrafsts formation flying Technique applied for spacecraft to spacecraft tracking measurement system

Yonghe Zhang

Directed by: Prof. Xuwen Liang

Abstract

The direct observation of gravitational waves has proven Einstein's theory on bending of space-time; the mass variation of the earth's surface caused by plate drift or glacier movements reveals the evolution process of the earth. Therefore, in order to further explore the universe and the earth, it is necessary to collect those very weak signals in space-time. Through observing the subtle distance variation between two proof-masses, scientists could deduce information about the change of those gravities. However, the distance range requirements (hundreds to millions kilometers), measurement accuracy (nanometer to picometer) and disturbance signal shielding and separation have brought great challenges to space technologies. Fortunately, there are already some attempts, such as eLISA of Europe, GRACE-FO of the U.S.A., SAGM, TAIJI and TIANQIN plan of China, showing human beings' determination to explore Earth and the universe. Those attempts have remarkably improved a series of high technologies including inter-satellite distance measurement by laser, non-gravitational acceleration measurement, micro-thruster technology, drag-free control, super stable spacecraft, and so on.

Consider Earth's gravity survey and gravitational waves detection in space, this dissertation focuses on the research of multi-loops dynamics model and control method for a specific low-low satellite-satellite tracking Earth gravity survey mission. In this dissertation, both drag-free control for single satellite and relative dynamics and control for formation flying are investigated, in which the problem of system design with power spectral density (PSD) and system dynamics coupling constraints are addressed. A new closed control loop shaping algorithm for drag-free formation flying based on quantitative feedback theory (QFT) is proposed. An optimization observer model with minimum estimation error under PSD constraint is then designed.

Firstly, according to the next generation gravity field survey engineering mission, the requirements and constraints for the drag-free control system, the measure and control principle in gravity field system, which includes the definition of observation variables and its relationship with parameters of gravity field are introduced. Then, mathematical model of drag-free formation flying satellite system is established. Also, the mathematical noise modeles of external and internal disturbances on drag-free satellites are analyzed.

In order to enhance the precision of local orbital reference coordinate, after studing

the characteristic of orbit dynamics estimation method with PSD constraint, an optimized observation method is proposed. In this approach, the objective function is taken as the root mean square of estimating error, and the optimized estimation parameters are obtained by using sequential quadratic programming (SQP) method. Consider the issue of strong coupling effect in low frequency domain in a multi-in multi-out (MIMO) formation system, a QFT based closed control loop shaping method for formation control system is proposed, in which general fully-populated control matrix is designed. Meanwhile, both the problem of frequency constraint and loop coupling have been well solved.

Then, both linear acceleration drag-free control and angular acceleration drag-free control for single satellite are investigated. External disturbance forces are estimated precisely through a dynamic disturbance observer. The powder spectral density constraints to closed loop observer, caused by external disturbances, uncertainty of model and measuring error, are analyzed. The bound of gain matrix is determined and the designed estimation simplifies the control process. Based on QFT, this dissertation designs an attitude loop controller, which meets the noise constraints.

Finally, based on the control algorithm proposed in this dissertation, full-loop simulations are performed. The simulation results proved the compatibility of each loop, as well as the effectiveness of the controller.

Keywords: Gravity field; Gravitational Waves; Drag-free; Power Spectral Density; Quantitative Feedback Theory; Formation Flying.

目 录

致 谢	I
摘 要	I
Abstract	III
目 录	V
第 1 章 绪论	1
1.1 课题背景及研究意义	1
1.2 卫星项目发展现状与趋势	3
1.2.1 国外卫星发展概况	3
1.2.2 国内研究概况	9
1.2.3 国内外对比分析	11
1.3 星星跟踪 Drag-free 编队控制技术发展现状与趋势	11
1.4 存在问题及本论文研究内容	15
第 2 章 星星跟踪系统测量原理与要求	18
2.1 引言	18
2.2 星星跟踪无拖曳航天器系统组成	18
2.3 基于功率谱密度的无拖曳航天器误差定义	19
2.3.1 傅立叶变换及信号频谱	19
2.3.2 信号的功率谱密度	21
2.3.3 误差转换关系	22
2.4 基于激光干涉实现星间测距、测角原理	24
2.5 基于加速度计实现非保守力加速度测量原理	26
2.6 基于微推力器实现 drag-free 控制原理	27
2.7 基于低轨星星跟踪重力场测量任务要求	28
2.7.1 星星跟踪观测量与重力场参数的关系	28
2.7.2 重力场系统误差分解	29
2.8 本章小结	34
第 3 章 无拖曳航天器编队系统动力学建模	35
3.1 引言	35
3.2 坐标系定义	35
3.3 两星编队飞行轨道动力学模型	38
3.3.1 无拖曳单星轨道动力学模型	38
3.3.2 卫星编队系统相对动力学模型	41
3.4 单星 drag-free 动力学模型	46
3.5 姿态动力学方程	48
3.5.1 编队姿态参考坐标系的动力学方程	48
3.5.2 单星姿态动力学方程	49
3.6 无拖曳卫星干扰及噪声模型	50
3.6.1 卫星本体受到的外部干扰力	50
3.6.2 卫星本体受到的干扰力矩	52
3.6.3 加速度计测量噪声模型	53
3.6.4 推力器噪声模型	54

3.7	本章小结	56
第 4 章	编队回路相对位置估计与控制方法研究	57
4.1	引言	57
4.2	功率谱密度约束下的飞行坐标系估计	57
4.2.1	参考坐标系转化矩阵误差分析	57
4.2.2	基于轨道动力学的估计器模型	59
4.2.3	功率谱密度约束条件下的最优估计方法	61
4.2.4	轨道最优估计数值仿真	63
4.3	基于 QFT 的 MIMO 编队控制器设计方法	67
4.3.1	基于 QFT 的控制理论与设计方法	67
4.3.2	基于 QFT 的编队全系数控制器设计	74
4.3.3	仿真验证与分析	85
4.4	编队相对位置有限时间滑模控制器设计	86
4.4.1	有限时间定义及控制器设计	86
4.4.2	仿真验证与分析	92
4.5	本章小结	93
第 5 章	无拖曳回路干扰估计与控制方法研究	94
5.1	引言	94
5.2	线加速度 drag-free 回路动力学观测器设计	94
5.3	角加速度 drag-free 回路动力学观测器设计	98
5.4	数字仿真	101
5.4.1	线性无拖曳估计器数字仿真	101
5.4.2	角加速度无拖曳控制数字仿真	108
5.5	本章小结	112
第 6 章	姿态回路控制方法研究	113
6.1	引言	113
6.2	基于 QFT 的姿态控制器设计方法	113
6.3	姿态控制回路数字仿真结果	121
6.4	本章小结	125
第 7 章	全系统数字仿真与分析	126
7.1	引言	126
7.2	仿真模型及输入输出	126
7.3	仿真流程	129
7.4	仿真结果	132
7.5	本章小结	139
第 8 章	总结和展望	140
8.1	论文总结	140
8.2	论文创新点	140
8.3	今后工作的展望	141
参考文献	142	
附 录	149	
发表文章目录	154	
简 历	155	

表 格

表 1-1 不同科学目标对地球重力场的需求	2
表 1-2 Drag-Free 位移模式和加速度计模式的区别	13
表 2-1 星星跟踪测量系统参数表	19
表 2-2 微推力器指标	28
表 3-1 推力器参数	54
表 7-1 无拖曳编队仿真模型列表	126
表 7-2 无拖曳编队卫星参数列表	127
表 7-3 推力器安装矢量列表	128

插 图

图 1-1 重力场测量水平及其应用对应关系图	3
图 1-2 CHAMP 卫星图	4
图 1-3 GRACE 卫星模拟图	4
图 1-4 GOCE 卫星在轨运行	5
图 1-5 eLISA 航天器及空间构型 ^[31]	6
图 1-6 LISA (左), eLISA (右) 绕太阳转动的轨道 ^{[33][34]}	7
图 1-7 LISA 探测器的有效载荷 ^[31]	7
图 1-8 LISA 质量块及其外罩 ^[34]	8
图 1-9 LISA Pathfinder 航天器及其载荷仪器 ^[36]	8
图 1-10 国外引力波、重力场相关项目的测量精度要求 ^[36]	9
图 1-11 中科院引力波探测任务预研究所建议的灵敏度范围 ^[48]	10
图 1-12 中山大学“天琴”任务建议的灵敏度范围 ^[49]	10
图 1-13 无拖曳卫星原理示意图	12
图 1-14 论文结构框图与相互关系	17
图 2-1 星星跟踪系统组成	19
图 2-2 相同方差对应的不同功率谱密度曲线	23
图 2-3 DWS 工作原理	25
图 2-4 静电悬浮加速度计	26
图 2-5 静电悬浮加速度计控制系统框图	27
图 2-6 系统加速度噪声融合后功率谱密度	30
图 2-7 系统距离噪声融合后功率谱密度	31
图 2-8 角加速度测量噪声及 drag-free 控制要求	32
图 2-9 指向误差的功率谱密度	34
图 3-1 卫星编队系统框图	35
图 3-2 J2000 地心惯性坐标系	36
图 3-3 地球固连坐标系	36
图 3-4 轨道坐标系	37
图 3-5 编队轨道坐标系	37

图 3-6 轨道极坐标系	38
图 3-7 大气阻力产生的干扰加速度时域曲线	51
图 3-8 大气阻力加速度功率谱密度幅值变化(ASD).....	51
图 3-9 太阳光压时域曲线	52
图 3-10 时域上的加速度计测量噪声模拟	53
图 3-11 模拟噪声的功率谱密度	54
图 3-12 时域上的微牛推力器噪声模拟	55
图 3-13 时域上的推力器噪声模拟	55
图 3-14 推力器噪声功率谱要求及数字模拟	55
图 4-1 当地轨道坐标系的真实值与估计值	58
图 4-2 当地轨道坐标系估计的误差功率谱密度约束	62
图 4-3 含有功率谱密度约束的最优状态估计器设计流程.....	63
图 4-4 高斯白噪声的功率谱密度	63
图 4-5 传递函数大小随频率变化关系	64
图 4-6 当 $\lambda=0.99$ 和 0.999 时的当地轨道坐标系估计误差功率谱密度	64
图 4-7 GPS 噪声和最优估计后的噪声	65
图 4-8 最小方差估计条件下的当地轨道坐标系误差功率谱密度	66
图 4-9 含有功率谱密度约束条件的最优估计器传递函数	66
图 4-10 含有功率谱密度约束条件的当地轨道坐标系最优功率谱密度	67
图 4-11 含有功率谱密度约束的速度、位置的最优估计误差	67
图 4-12 基于 QFT 的控制系统框图	68
图 4-13 第 i 路的等效 SISO 和 MISO	70
图 4-14 输入干扰抑制的系统框图	71
图 4-15 输出干扰抑制系统框图	71
图 4-16 QFT 控制系统结构图	74
图 4-17 相对增益矩阵幅值、相位随频率变化曲线	78
图 4-18 解耦处理后对角元素值与非对角元素值	80
图 4-19 X 轴回路 L11 的 Nichols 图	80
图 4-20 X 轴回路 L11 开环与上下界约束的阶跃响应	81

图 4-21 Z 轴回路 L22 的 Nichols 图	81
图 4-22 Z 轴回路 L22 开环与上下界约束的阶跃响应	82
图 4-23 Y 轴回路 L33 的 Nichols 图	83
图 4-24 Y 轴回路 L22 开环与上下界约束的阶跃响应	83
图 4-25 三个回路的闭环传函响应图	84
图 4-26 陷波器的伯德图	84
图 4-27 X 轴相对位置变化仿真曲线	85
图 4-28 X 轴加速度控制指令	85
图 4-29 Y 轴相对位置变化仿真曲线	85
图 4-30 Y 轴加速度控制指令	85
图 4-31 Z 轴相对位置变化仿真曲线	86
图 4-32 Z 轴加速度控制指令	86
图 4-33 相对距离误差功率谱密度曲线	86
图 4-34 编队控制指令功率谱密度曲线	86
图 4-35 相对距离误差功率谱密度曲线	86
图 4-36 编队控制指令功率谱密度曲线	86
图 4-37 两颗卫星相对位置 δr 变化曲线	92
图 4-38 相对速度 v 仿真变化曲线	93
图 4-39 控制力 u 仿真曲线	93
图 5-1 线性干扰加速度观测器	94
图 5-2 动力学估计器结构示意图	95
图 5-3 非重力线加速度干扰的上边界	98
图 5-4 不同特征值对应的边界设计	98
图 5-5 不同特征值对应的 V_{lx}, S_{lx}	98
图 5-6 角加速度回路观测器的输入输出关系	99
图 5-7 外部角加速度干扰功率谱密度幅值	100
图 5-8 不同特征值对应的边界设计	100
图 5-9 特征值 $\gamma_a = 0.25$ 时对应的 V_{ax}, S_{ax}	100
图 5-10 外干扰线加速度	101

图 5-11 外干扰线加速度功率谱	101
图 5-12 外干扰线加速度估计值	102
图 5-13 外干扰线加速度估计值的功率谱	102
图 5-14 估计器收敛时间 (特征值 0.9)	103
图 5-15 估计器收敛时间 (特征值 0.7)	103
图 5-16 估计器收敛时间 (特征值 0.5)	103
图 5-17 估计残差功率谱 (特征值 0.9)	104
图 5-18 估计残差功率谱 (特征值 0.7)	104
图 5-19 估计残差功率谱 (特征值 0.5)	104
图 5-20 估计残差时间序列 (Y 轴, 特征值 0.9)	105
图 5-21 估计残差时间序列 (X,Z 轴, 特征值 0.9)	105
图 5-22 估计残差时间序列 (Y 轴, 特征值 0.7)	105
图 5-23 估计残差时间序列 (X、Z 轴, 特征值 0.7)	106
图 5-24 估计残差时间序列 (Y 轴, 特征值 0.5)	106
图 5-25 估计残差时间序列 (X, Z 轴, 特征值 0.5)	106
图 5-26 施加控制后的收敛过程 (10s 时施加控制)	107
图 5-27 施加控制后的残差加速度时间序列 (X, Z 轴, 特征值 0.7)	107
图 5-28 施加控制后的残差加速度时间序列 (Y 轴)	107
图 5-29 施加控制后的估计残差功率谱	108
图 5-30 作用于卫星上的干扰角加速度	108
图 5-31 作用于卫星上的干扰角加速度功率谱	109
图 5-32 估计干扰加速度的时间序列曲线	109
图 5-33 估计干扰加速度的功率谱密度曲线	109
图 5-34 估计器收敛过程曲线	110
图 5-35 干扰角加速度估计残差曲线 (X 轴、Z 轴)	110
图 5-36 干扰角加速度估计残差曲线 (Y 轴)	110
图 5-37 干扰角加速度估计残差功率谱	111
图 5-38 施加控制后的残差加速度时间序列 (Y 轴)	111
图 5-39 施加控制后的残差加速度时间序列 (Y 轴)	111

图 5-40 施加控制后的残差加速度时间序列 (Y 轴)	112
图 5-41 施加控制后的残差加速度时间序列 (Y 轴)	112
图 6-1 指向约束及敏感器噪声功率谱幅频特性.....	114
图 6-2 QFT 姿态控制系统结构图	114
图 6-3 控制量约束边界及传递函数模拟曲线关系.....	116
图 6-4 X 轴控制器对应 $L_1(j\omega_k)$ 与边界 $B_1(j\omega_k)$ 的关系	117
图 6-5X 轴闭环传函与边界约束伯德图	117
图 6-6 X 轴控制量传函与边界约束伯德图	117
图 6-7 闭环系统阶跃响应.....	118
图 6-8 闭环系统冲击响应.....	118
图 6-9 Y 轴控制器对应 $L_1(j\omega_k)$ 与边界 $B_1(j\omega_k)$ 的关系	119
图 6-10 Y 轴闭环传函与边界约束伯德图	119
图 6-11 X 轴控制量传函与边界约束伯德图	119
图 6-12 Z 轴控制器对应 $L_1(j\omega_k)$ 与边界 $B_1(j\omega_k)$ 的关系	120
图 6-13 Z 轴闭环传函与边界约束的伯德图	120
图 6-14 Z 轴控制量传函与边界约束伯德图	120
图 6-15 星敏感器噪声功率谱	121
图 6-16 星敏感器噪声时间序列.....	121
图 6-17 姿态误差角时间序列曲线.....	122
图 6-18 姿态误差角功率谱密度曲线.....	122
图 6-19 角加速度控制量功率谱	123
图 6-20 激光回路相对角度测量误差时间序列	123
图 6-21 激光回路相对角度测量误差功率谱	124
图 6-22 基于激光测量误差的姿态控制误差角功率谱	124
图 6-23 基于激光测量误差的角加速度控制功率谱	124
图 7-1 推力器安装矩阵.....	128
图 7-2 编队飞行仿真流程图.....	130
图 7-3 重力场测量无拖曳卫星编队仿真软件界面	131
图 7-4 无控制下的两星相对距离变化	132

图 7-5 全回路仿真下的两星相对距离变化	132
图 7-6 卫星 A 的编队控制指令时间序列.....	133
图 7-7 卫星 A 的编队控制指令功率谱（稳态）	133
图 7-8 卫星 B 的编队控制指令时间序列.....	134
图 7-9 卫星 B 的编队控制指令功率谱（稳态）	134
图 7-10 卫星 A 的非重力线加速度残差功率谱密度.....	135
图 7-11 卫星 A 的角加速度残差功率谱密度.....	135
图 7-12 卫星 A 的姿态误差时间序列	136
图 7-13 卫星 A 的姿态误差功率谱密度	136
图 7-14 卫星 B 的姿态误差时间序列.....	137
图 7-15 卫星 B 的姿态误差功率谱密度	137
图 7-16 两颗卫星相对姿态误差	138
图 7-17 卫星 A 的推力器推力指令时间序列.....	138
图 7-18 卫星 A 的推力器推力指令时间序列（放大）	139

第1章 绪论

1.1 课题背景及研究意义

引力波探测、重力场探测均为空间基础科学的研究范畴，一个是探索宇宙，一个是认识地球，对扩展人类认知，加深对宇宙、地球的理解具有重要意义。在探测方法和涉及的关键技术方面，二者也有很多共同之处，相比之下，空间引力波探测所需的测量精度更高，目前所提的空间引力波探测计划，如欧美的 eLISA 计划，中国的“太极”计划，“天琴”计划，其发射时间均为 2030 年以后。世界上重力场探测空间任务已处于实施阶段，美国、欧洲已发射了相应的卫星，目前正开展下一代探测任务的研究，逐步提高测量与反演精度，中国目前还没有重力场探测卫星发射升空，相关的科学家与工程师正在追赶欧美步伐。就技术成熟度而言，重力场探测技术的实现可以作为引力波探测发展的一个阶梯。随着科技的进步，国家经济势力的提高，相信对我国空间基础科学的研究投入会越来越高，几代科学家的梦想终将变为现实。本论文以重力场、引力波探测任务方向为背景，结合工程实际，研究两类任务均所需的无拖曳控制及编队关键技术，对未来相关项目的实施与发展具有重要意义。

引力波作为爱因斯坦广义相对论的四个预言之一，是最后一个被直接观测到的现象。2016 年 2 月 11 日，美国科学家宣布其“激光干涉引力波天文台（LIGO）”探测器直接探测到了引力波，是物理学界和宇宙学界的重大突破。

随着人类探测到引力波这一事件的传播，我国正在开展的相关计划也浮出水面，这包括“天琴计划”与“太极计划”。中山大学提出并牵头的“天琴”计划分为 4 个阶段：第一阶段完成月球/卫星激光测距系统、大型激光陀螺仪等“天琴”计划的地面辅助设施；第二阶段，完成无拖曳控制、星载激光干涉仪等关键技术验证、空间等效原理实验验证；第三阶段，完成高精度惯性传感、星间激光测距等关键技术验证，全球重力场测量；第四阶段，完成所有空间引力波探测所需的关键技术。“太极计划”为中国科学院牵头论证的引力波探测计划，其设想之一是在 2030 年前后发射三颗卫星组成引力波探测星组，实现这一计划一种方案是参加欧洲空间局的 eLISA 双边合作计划，另一方案是发射三颗中国的引力波探测卫星组进行独立引力波探测。因此，在中国的空间引力波探测已形成了打“太极”玩“天琴”的局面。欧洲以太空引力波探测为科学目标的 eLISA 项目开展已有十几年之久，它的技术验证卫星 Lisa pathfinder 已于 2015 年 12 月 3 日发射升空，作为 eLISA 的探路者，踏出了太空观测引力波的第一步。

地球重力场是构成地球系统各种物质通过重力相互作用所产生的基本物理场，它反映了地球各圈层相互作用和动力过程中的物质质量空间分布、运动和变化，承载地球系统演化进程中的一切与其重力作用机制相关信息，是地球的物理环境及其变化等重要信息的载体，是研究地球内部和外部物质运动状态和动力学机制的重要约束^{[1]~[4]}，为人类认识和解决自然资源、环境及灾害等问题提供重要的依据^{[5]~[7]}。与此同时在导

航与定位、航空航天、水下导航等应用学科也发挥重要的作用^{[2][8][9]}。

传统的重力探测技术由于受到自然条件的限制，难以获取全球均匀分布的高精度地球重力场信息^[10]。卫星重力测量技术的实现，开创了高精度全球重力场观测全球环境变化试验的新纪元。不同于传统的重力观测技术，重力卫星全天候、高精度、大范围的观测优势，可获取全球均匀覆盖的地球重力场信号。卫星重力测量是以卫星为载体，利用卫星本身为重力传感器或卫星所携带的重力传感器（加速度仪、精密测距系统和重力梯度仪等），通过 SST（高低或低低卫星跟踪卫星）和 SGG（卫星重力梯度）模式测量全球均匀分布、高精度的地球重力场及其时间变化^{[2][5][11][12]}。

在地球重力场测量中具有划时代意义的德国 CHAMP 卫星^{[13][14]}、美德 GRACE 卫星^{[15][16]}以及欧空局 GOCE 卫星^{[17][18]}已相继于 2000 年 7 月、2002 年 3 月和 2009 年 3 月发射升空。这三颗重力卫星具有互补性，相互结合测量可望对地球重力场异常的测量精度达到 mGal (1 Gal=1cm/s²) 水平，空间分辨率达到 100m 左右，大地水准面的精度达到 cm 量级。在时变重力场方面，自 2002 年 GRACE 低轨卫星跟踪卫星发射以来，大尺度上定量揭示全球环境变化导致的地表质量分布与迁移，为定量探测和研究地球物理环境及至全球环境变化提供了独特的、不可替代的手段。出于对全球时变重力场变化测量的需求，还需要在 GRACE 卫星的基础上，进一步提高分辨率。进一步改进时变地球重力场测量精度，其目的主要是更快更高精度监测全球重力场变化，从而获取地球大质量运动（例如北极冰覆盖、全球水迁移、板块运动等），为全球气候、地震、地球物理、海洋等方面研究提供精确的数据^{[19][24]}，满足人类日益增加对地球认识、预防或预报大范围的甚至是全球性灾害的需求^[1]。不同科学目标对重力场的测量需求如下表所示：

表 1-1 不同科学目标对地球重力场的需求

应用领域		振幅		空间分辨率 (km)	主要周期
		大地水准面	重力异常		
海洋	海流，深海环流，海平面	10mm 0.01mm/y	10μGal	300-5000 1000-5000	季节和年际 长期
冰	冰质量平衡	1mm 0.01mm/y	1μGal	100-4000 5000	季节和年际 长期
固体地球	冰后回弹 地幔构造	1mm/y 1μm/y	1μGal/y 0.01μGal/y	100-2000	长期 长期
陆地水	水储量，蒸发	10mm	10μGal	100-5000	几周至年际
大气		10mm	10μGal	50-5000	周年、季节
潮汐	固体潮和海潮	1000mm	100μGal	10-10000	周日,半周日

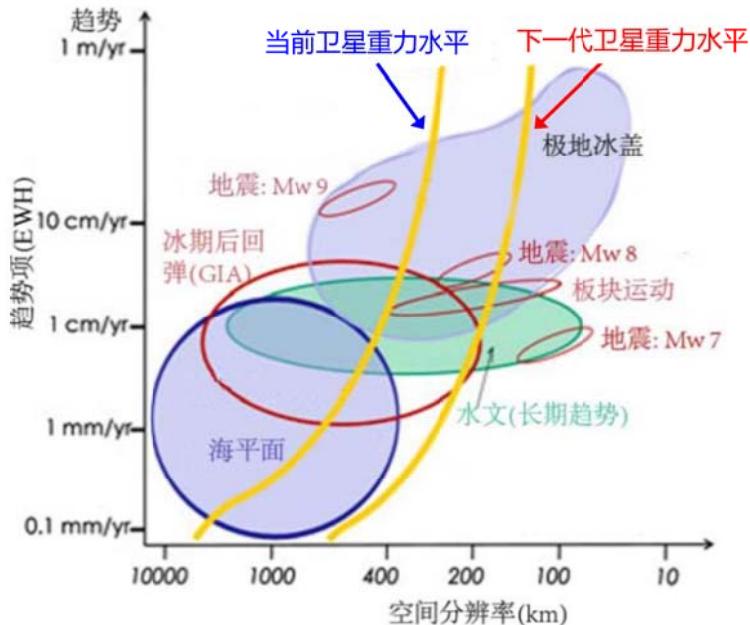


图 1-1 重力场测量水平及其应用对应关系图

目前美国宇航局正在着手计划于 2017 年发射后继卫星 GRACE Follow-on^[25]，其星座设计和观测模式与目前的 GRACE 计划完全一致，并通过搭载星间激光测距开展初步在轨实验；未来还计划开展 GRACE II 任务。欧空局近年来也在开展下一代重力卫星任务（NGGM）^[26]的前期预研工作。

我国在重力场测量方面还属于起步阶段，我国在各个研究、应用领域所采用的重力场模型仍是别的国家发布的模型，无法满足高精度、高分辨率地球重力场信息的需求。为尽快摆脱我国空间大地测量数据依靠国外卫星技术的局面，针对星星跟踪技术的深入研究成为十分紧迫的任务^{[12][37]}。

作为二十一世纪高新引力波探测、重力场测量技术，其所涉及的星间激光链路瞄准、锁相和纳米、皮米级干涉技术，惯性传感技术，超静超稳卫星平台技术，微推进等技术可以预见在其它领域也会有广泛的应用前景^[11]。本论文面向下一代引力波、重力场探测的任务背景，以低轨重力场星星跟踪系统为对象，重点研究无拖曳航天器的编队技术，论文成果预期可为建设我国未来引力波探测、重力场探测航天器的技术发展提供支撑。

1.2 卫星项目发展现状与趋势

1.2.1 国外卫星发展概况

(1) CHAMP 卫星

CHAMP 卫星^{[13][14]}由德国波茨坦地学研究中心(GFZ)独立研制，如图 1-2 所示，是世界上首次采用高低轨道卫一卫跟踪技术的重力卫星。它利用高轨道卫星（GPS 卫星）来确定低轨道卫星（CHAMP 卫星）的轨道坐标。这种高低轨道卫一卫跟踪技

术的优点为：卫星之间连续跟踪；避免对流层折射的影响；卫星间的距离变化率直接感应到地球重力场的精细部分。

CHAMP 卫星预期寿命 5 年，运行在圆形近极轨道，倾角 87.277 度，偏心率 0.004，近地点约 470 千米。CHAMP 卫星反演重力场的空间分辨率可达到 500 千米，在此分辨率下将比现有重力场模型的精度提高 1~2 个数量级，即 1000 千米波长以上中长波大地水准面测定精度可达到 1 厘米。

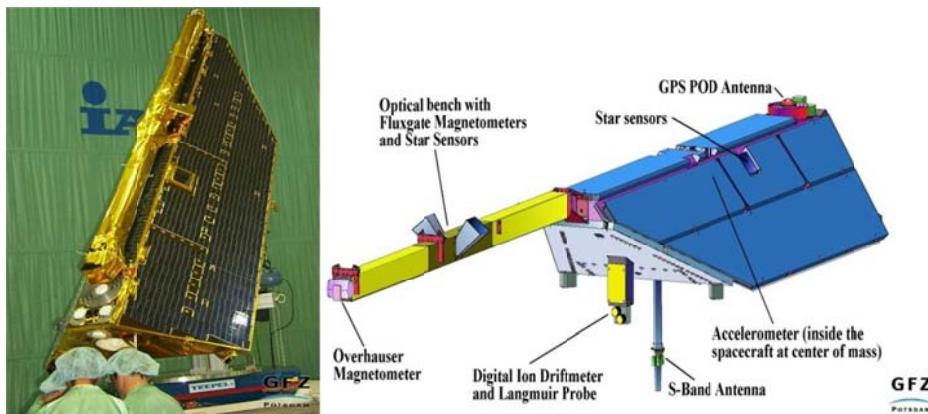


图 1-2 CHAMP 卫星图

(2) GRACE 及 GFO (GRACE Follow-On) 卫星

2002 年 3 月成功发射的美德合作卫星重力计划 GRACE^{[15], [16]}，提供空间分辨率约为 200km 而时间分辨率为 1 个月的时变地球重力场模型序列。GRACE 由两颗相距 220km，高度为 500km，倾角约为 90° 的近地极轨卫星组成。由于采用星载 GPS 和非保守力加速度计等高精度定轨技术，以及高精度的星星跟踪数据反演地球重力场。在几百公里和更大空间尺度上，GRACE 重力场的精度大大超过此前的卫星重力计划。根据 GRACE 时变重力场反演的地球系统质量重新分布，对固体地球物理，海洋物理，气候学以及大地测量等应用有重要的意义。

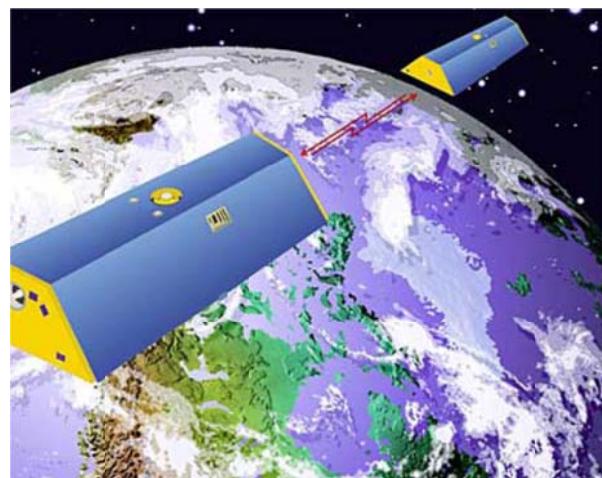


图 1-3 GRACE 卫星模拟图

GRACE 采用低低卫—卫跟踪技术，这种技术既包含了两组高低卫—卫跟踪测量

系统，还以差分原理测定两个低轨卫星的相互运动，因此较之 CHAMP 卫星，其精度大大提高。卫星星载微加速度计(ACC)是测量作用在卫星上非保守力摄动的关键有效载荷，其测量值是两卫星处引力位差和附加在两卫星上在星间距离方向上非保守摄动加速度差的综合反映，K 波段微波仪用于进行低低卫一卫跟踪测量。

相对于 CHAMP，GRACE 采用较优的 SST 模式。由于 GRACE 同时发射两颗低轨道卫星在同一个轨道上，彼此相距约 220km，采取一个“追踪”另一个的观测方式。两者之间的相对运动，即卫星间的距离变化用微波干涉仪极其精密地测量，用其一阶微分便可求得重力加速度。而 CHAMP 实际上是通过轨道的摄动感应地球非球形引力摄动。GRACE 所得到的静态和动态重力场的精度将比 CHAMP 高一个数量级，空间解析度(半波长) 可达 100~200km。

基于 GRACE 成功的经验，美国下一步的计划是发射 GRACE Follow-On 卫星^[25]，在 GRACE 的基础上进一步提高测量性能，改进的内容包括：

- 1) 用激光测距代替微波测距，将星间距离的测量精度，从 $10\mu\text{m}$ 提高到 80nm ；
- 2) 采用更高精度的平台敏感器，提高卫星的姿态测量精度；
- 3) 降低卫星轨道，提高对重力场的敏感度，这也意味着空间干扰大，卫星控制与测量更加困难；
- 4) 改进控制方法，施加无拖曳控制。

(3) GOCE 卫星

2009 年 3 月 17 日发射的 GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explore) 是欧空局(ESA)的一颗重力场和静态洋流探测卫星，它是欧空局(ESA)负责运作的所谓“生命行星计划”的人造地球卫星探测计划之一。GOCE 的主要科研任务是提供高精度、高空间分辨率的静态重力场信息。GOCE 的几个主要应用领域为：固体地球、绝对海洋环流、冰川学、大地测量学和海平面研究。

GOCE 卫星重 1100kg，运行于太阳同步轨道，轨道高度 260km，轨道倾角 96.7° ，任务周期预计 20 个月。卫星采用体长 5.3m、横截面 1m^2 的八边形箭状结构，两个尾翼提供额外的空气稳定性，如图 1-4 所示。



图 1-4 GOCE 卫星在轨运行

GOCE 卫星在高分辨率、高精度重力场探测方面有 4 个基本而又独特的性能：三

维空间尺度内的连续跟踪；对诸如空气阻力、辐射压力等非保守力的连续补偿；选择的低轨道(约 250km)及该轨道处强烈的重力信号；通过使用卫星重力梯度来抵消重力场在高度方向上的衰减。GOCE 将以前所未有的精度测量地球重力场，任务目标是：以 10^{-5} m/s²(1mGal)的精度测定重力异常；以 1~2cm 的精度测定大地水准面；对于重力异常和大地水准面确定的空间分辨率优于 100km。

(4) NGGM 项目

“新一代重力测量任务”(NGGM)^[28]是 ESA 的空间研究计划，该项目属于预先研究项目，其目标是测量地球质量随季节的变化，要求动态场的分辨率为 200km (1 个月)，同时也是在 GRACE 已取得成果的基础上，进一步提高分辨率与测量精度。NGGM 采用激光作为星间距测量手段，Thales-Alenia 公司已研制出激光测量仪，一方面该仪器能够发射激光束，同时还能接收激光束，检测束激光束偏离中心的位置，并产生指向误差信号，使一颗卫星上的激光束跟踪上另一颗卫星。

e.motion 项目是德国科学家提出的下一代重力场测量任务概念，分析了采用 1 对、2 对卫星所能够达到的性能指标，采用激光测距，建议测距精度 $40\text{--}200 \text{ nm}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，加速度测量达到 $4\times 10^{-11} \sim 2\times 10^{-10} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$ 水平^[29]。

(5) LISA, eLISA 及 Lisa pathfinder 项目

激光干涉空间天线(Laser Interferometer Space Antenna, LISA)原来是一个由美国国家航空航天局(NASA)和欧洲航天局(ESA)合作的引力波探测计划，计划发射 3 个空间探测器，运行于绕日的引力波探测实验轨道，LISA 将利用激光干涉的方法精确测量信号相位，从而对于来自宇宙间遥远的引力波源的低频($10^{-4}\text{--}1\text{ Hz}$)且微弱的引力波进行探测。这将是人类第一座太空中的引力波天文台，对引力波天文学的理论和实验研究、广义相对论的一些实验观测以及早期宇宙的天体物理学和宇宙学研究有重要意义^[30]。

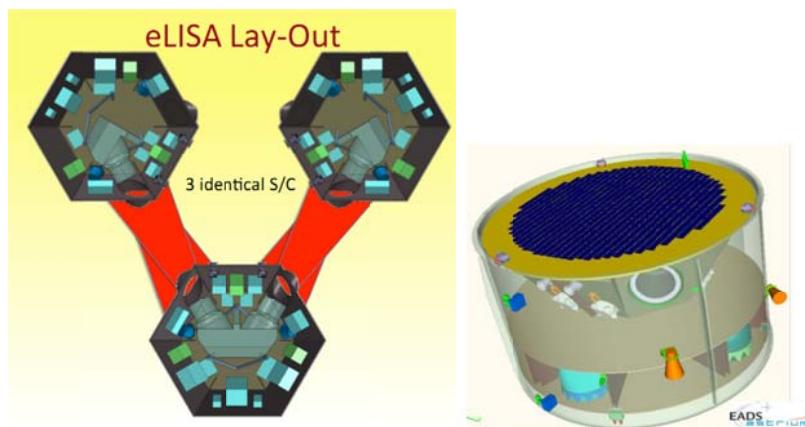


图 1-5 eLISA 航天器及空间构型^[31]

LISA 由三个相同的航天器构成为一个边长为 5×10^6 km 的等边三角形, 如图 1-5 所示, 即每两个航天器之间的夹角为 60° 。LISA 将采用的是与地球相同的日心轨道, 星座的中心运行于地球轨道上, 且落后地球 20° , 星座平面与黄道面成 60° 夹角, 如图 1-6 所示。这种设计是为了尽可能减少地球引力造成的影响。从太阳系的上方往下看, LISA 三角形的中心将沿地球轨道转动, 每一个探测器将以一年为周期绕这个中心转动。目前由于 NASA 的退出, LISA 发展成为了 eLISA, 成为了欧空局项目, 受经费约束, 原来的三个臂缩减为 2 个臂, 采用一个主航天器和两个副航天器, 臂长变为 1×10^6 km, 同时也在谋求国际合作^{[32]~[35]}。

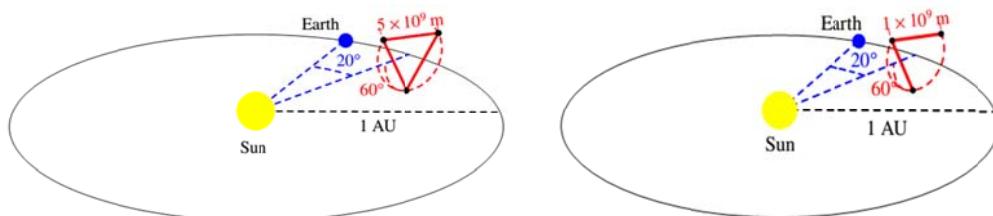


图 1-6 LISA (左), eLISA (右) 绕太阳转动的轨道^{[33][34]}

探测器中间有一个“Y”形的仪器舱, LISA 的有效载荷位于“Y”形仪器舱的两个上臂内, 如图 1-7 所示。在每一个航天器上都有两个完全相同的光学台装置、两个望远镜和两个红外激光器。光学台包含激光光源、光学分束器、光检测器、光学镜组等组成干涉仪的光学器件, 以及一系列进行数字信号处理的电子器件。两个望远镜的直径为 40cm, 用以聚焦入射和射出光线。

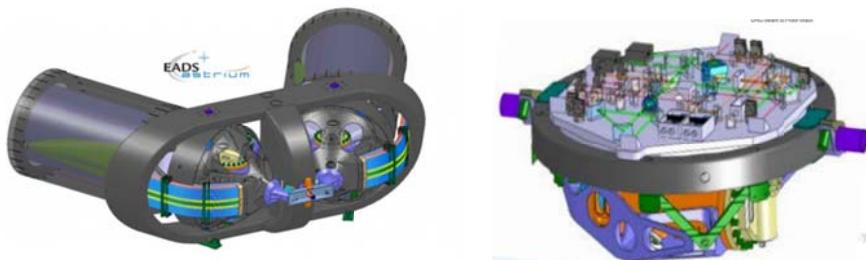
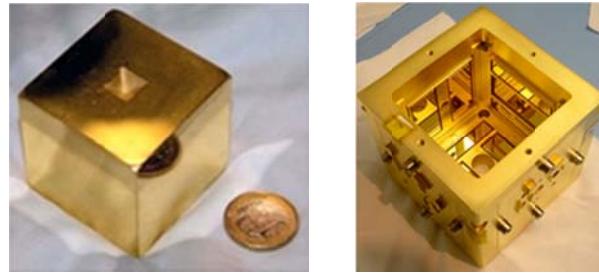


图 1-7 LISA 探测器的有效载荷^[31]

每颗卫星分别有 2 个质量块, 悬浮于光学平台中心, 质量块为合金立方体(75%金和 25%铂), 重 1.96kg, 边长 4.6cm, 具有非常弱的磁化系数, 其中一个表面被打磨成光滑的平面镜用来反射激光, 质量块及其电极外罩如图 1-8 所示。质量块的作用之一是作为航天器无拖曳控制的参照, 之二是作为干涉仪光程端点。探测引力波的敏感部件, 需要保证质量块受到的加速度干扰在 0.1mHz 附近低于 $3 \times 10^{-15} \text{ ms}^{-2}\text{Hz}^{-1/2}$ 。

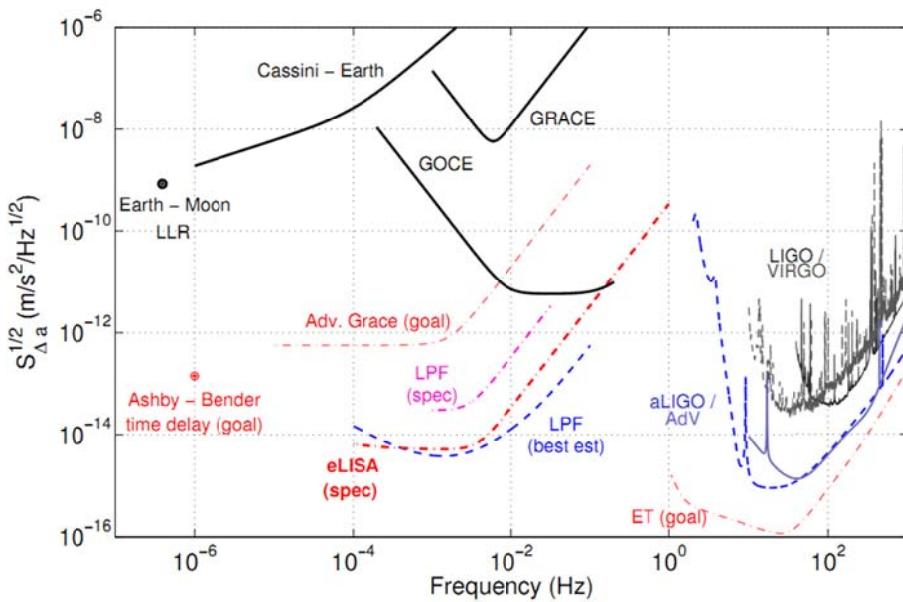
图 1-8 LISA 质量块及其外罩^[34]

质量块各自悬浮在每个隔热罩内，在时空弯曲和伸缩时它们可以自由的漂移。为了 LISA 的正常运转，每个质量块都必须沿独立的轨道绕太阳转动。探测器会把它们隔离在真空室内，并将使用必要的硬件—激光器和小望远镜来监测它们相对位置的波动。

由于 LISA 项目耗资巨大，周期长，技术挑战与风险非常多，作为 LISA 项目的探路者 LISA Pathfinder (LPF) 就产生了，将 LISA 项目中提到的相距 5×10^6 km 两个检验质量先集成到一颗卫星上做实验，验证相关技术，对 LISA 项目中 95% 的噪声进行在轨评估，以降低未来项目实施的风险，该卫星已于 2015 年 12 月 3 日发射升空。

图 1-9 LISA Pathfinder 航天器及其载荷仪器^[36]

对检验质量加速度的测量精度是一个极为核心的任务指标，图 1-10 显示了 GRACE, GOCE, eLISA, LPF 以及探测到引力波的地面 LIGO 的加速度敏感精度水平与对应的频率区间，也表示了这些项目之间的探测目标区别。

图 1-10 国外引力波、重力场相关项目的测量精度要求^[36]

1.2.2 国内研究概况

我国在上世纪 80 年代开始了卫星重力测量的理论工作，本世纪初逐步开展了卫星重力测量关键技术（包括 GPS 双频接收机、KBR 测距、加速度计^{[38]~[45]}，航天器平台）等攻关研究。

为了探索我国 GRACE 以后重力卫星的发展方向和路线，2009-2011 年期间，由中科院有关研究所、高校以及研制卫星的技术公司的有关专家组成，组织进行可行性研究，并由中科院立项“先进空间重力测量(SAGM, Space Advanced Gravity Mission)”，研究工作有了实质性的推动。一些相关的研究机构、高等院校建立了一些实验基地，在理论及实验技术方面都有良好起步，取得很多进展，有了一定的积累和基础，初步形成了一支核心队伍。先进空间重力测量预研究并提出了下一代以激光取代微波测距的卫星跟踪重力卫星任务设计和具体指标^{[26][27]}，为后续的研究提供一个框架。

在引力波探测方面，空间引力波探测已被列入中国科学院制定的空间 2050 年规划中^[46]，我国将发展独立的任务概念^[47]，并有步骤的突破一系列关键技术。“太极计划”，“天琴计划”的预先研究都将支撑我国在该领域的学科与技术发展。

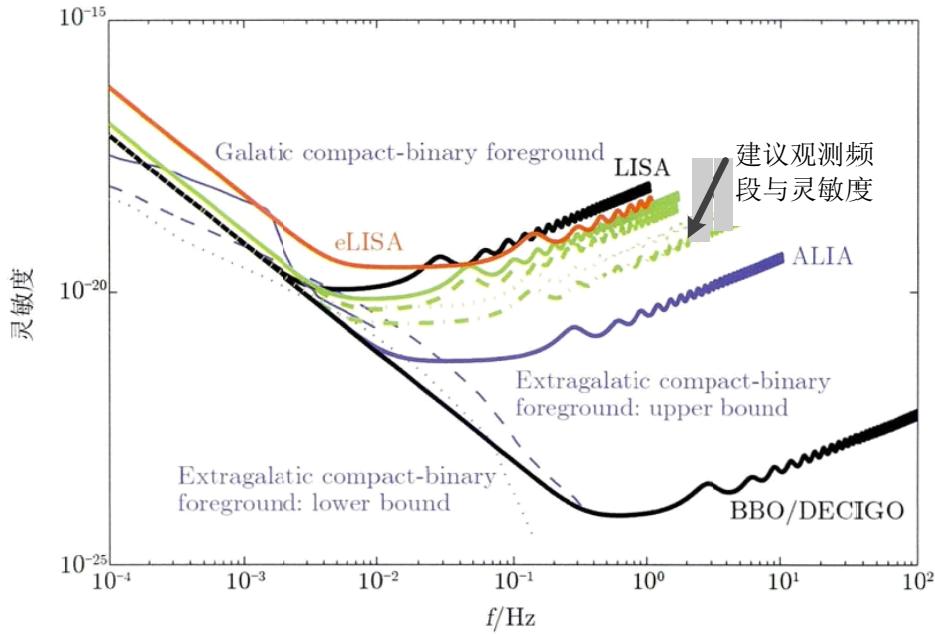


图 1-11 中科院引力波探测任务预研究所建议的灵敏度范围^[48]

中国科学院刘润球等经过对引力波探测科学目标与顶层方案的研究，提出了 3×10^6 km 脉冲星、位置噪声预算水平在 5~10 pm，具备对中等质量黑洞波源较好的探测能力， 3×10^{-15} m/s² 的加速度测量精度，如图 1-11 所示。

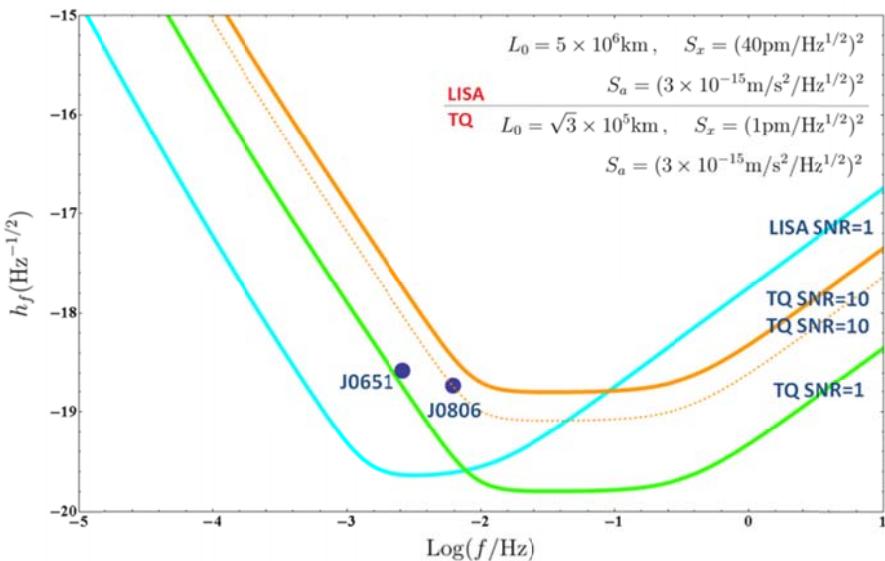


图 1-12 中山大学“天琴”任务建议的灵敏度范围^[49]

中山大学所提出的“天琴”任务为地球轨道航天器，其轨道高度为 6~10 万公里，臂长为 $\sqrt{3} \times 10^5$ km、位置噪声预算水平在 1 pm， 3×10^{-15} m/s² 的加速度测量精度，如图 1-12 所示。

虽经过十余年漫长的追赶，我国航天技术近几年也飞速发展，但在引力波探测、

重力场探测方面总的来说与欧美的差距较大，目前，这一形势正在逐步改善，有望未来可以与国际同步。

1.2.3 国内外对比分析

卫卫跟踪技术包括高低卫卫跟踪和低低卫卫跟踪。高低跟踪主要是利用 GNSS 卫星定位系统来精确确定低轨的重力卫星轨道。对于重力卫星而言，定轨精度已经达到厘米级。随着北斗系统的发展和数据处理方法的改善，我国在此领域进展很大，已达到或基本达到国际先进水平。

低低卫卫跟踪是利用星间微波或者激光测距来精确测量低轨两颗或多颗卫星之间的距离。GRACE 卫星已经成功实施了 K 和 Ka 波段测距（KBR），其测距精度优于 10 微米，测速精度优于 1 微米/秒。另外，美欧等国一直致力于星间激光测距，在空间引力波天线计划 LISA（Laser Interferometer Space Antenna）^[50]的预先研究资助下，美欧等国已经解决了卫卫星间激光干涉测量的关键技术，地面测试精度已经达到 $10\text{pm}/\text{Hz}^{1/2}$ 。我国在星间激光干涉测量在我国空间引力波探测计划推动下，精度也达到相应水平。

对于卫星重力测量而言，必须精确测量或者补偿航天器受到的非保守力。非保守力测量需要研制出高精度加速度计或者惯性传感器。美、法等国在此领域一直处于国际领先水平，并在上世纪就开展了高精度空间加速度计研究。CHAMP 卫星和 GRACE 卫星搭载的 STAR 和 SUPERSTAR 加速度计在轨低频分辨率分别达到了 10^{-9} m/s^2 和 10^{-10} m/s^2 。对于 GOCE 重力梯度卫星而言，重力梯度仪的关键还是加速度计，加速度计分辨率需要达到 $2 \times 10^{-12}\text{ m/s}^2$ 。我国目前华中科技大学研制的加速度计地面测试分辨率已经达到 10^{-10} m/s^2 水平。

鉴于重力卫星具有高精度确定地球重力场的能力，国际上许多著名的研究所，如德国地球科学中心（GFZ）、美国德克萨斯大学空间研究中心（UTCSR）和宇航局喷气实验室（JPL）等建立了重力卫星数据分析中心，发展了重力场反演方法和软件实现，并发布了一系列卫星重力场模型，最具代表性的是 EIGEN 系列、GGM 系列和 GO-CONS-GCF-2 系列重力场模型^{[12][51]}。

1.3 星星跟踪 Drag-free 编队控制技术发展现状与趋势

随着国外引力波与重力测量卫星项目的研究与实现，相应的星间距测量与卫星控制技术也得到了长足发展。卫星在空间飞行受很多空间干扰力的作用，要想精确测量出卫星受重力作用的运动特性，必须将外界干扰力予以“隔离”，提供一个超静平台，研究无拖曳（Drag-Free）控制技术就是为了解决这一问题。

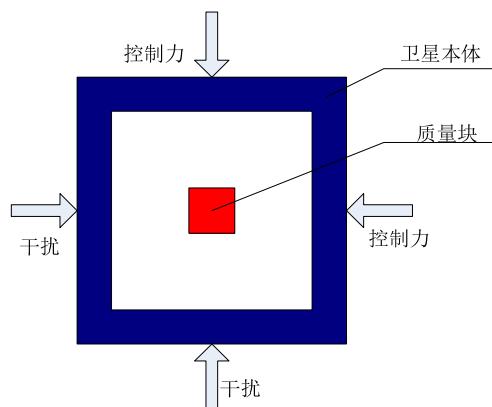
星星跟踪重力测量技术采用两颗卫星编队，每颗卫星中心包含了一个“检验质量（proof-mass）”，通过测量两颗卫星上的“检验质量”之间的相对距离变化，可以建立这种相对距离变化与重力场之间的关系，从而反演出对应的重力场模型。

重力场测量属于一种低干扰测量，寻求测量过程中的误差极限，其难度在于如何降低星间距的测量误差与降低非重力项的干扰，例如星间距测量误差要求达到 nm 量级，质量块线加速度控制需达到 m/s^2 量级，并且重力场模型的波长、阶数均与频谱相关联，因此对测量误差的频谱也有着严格的限制。

除测量方面的技术难度外，卫星的控制也有着特殊性，由于对系统误差的要求非常苛刻，常规的控制部件（如飞轮）所引起的干扰易造成测量结果的不确定性，必须采用特殊部件与特殊控制策略，如采用微推力器实施无拖曳控制。CHAMP、GRACE、GOCE 等项目带动了一批重力探测相关方向的研究，除直接从事卫星项目研究与研制机构外，许多大学实验室也基于卫星项目研究发展相关技术。

（1）无拖曳卫星的控制模式分类

Drag-Free 卫星控制的概念最早由 Pugh 提出^[52]，它是指在卫星本体中包含了一个质量块，质量块与卫星之间没有接触，处于悬浮状态，在卫星运行过程中，敏感器测量质量块的相对卫星本体位置，然后反馈给执行机构，使卫星本体跟踪质量块，并保证与质量块不发生碰撞。在这种情况下，所有非重力的干扰只作用在卫星的外壳上，卫星内部的质量块只受到重力的作用，质量块的运动轨迹如实反映了卫星所受重力的情况，就通过 Drag-Free 技术，能够有效地消除卫星上非重力阻力的干扰，创造出一个超静环境。



加速度计模式(AM)和位移模式(DM)是 Drag-Free 技术应用于卫星上两种主要方式，两者区别在于卫星本体和质量块之间的相互跟踪方式^[53]。

位移模式为卫星本体跟踪检验质量，直接实现无拖曳；而加速度计模式为检验质量跟踪卫星本体，再根据加速度计的输出控制卫星本体实现对外界干扰力与力矩的抵消。无论是加速度计模式还是位移模式，Drag-Free 控制的目标和效果都是抵消大气阻力等干扰对卫星的影响。

位移模式下，质量块敏感器测量卫星本体与质量块之间的相对距离，并将测量值反馈给控制卫星推进系统，使卫星本体跟踪质量块，抵消卫星所受到的非重力，以保持卫星—质量块间距不变，即可实现卫星的无拖曳控制。

加速度计模式下，加速度计本体对其内部的质量块施加伺服控制力，使质量块质心相对加速度计本体质心保持不变。

位移模式和加速度计模式的区别^[54]如表 1-2 所示。

表 1-2 Drag-Free 位移模式和加速度计模式的区别

	位移模式	加速度计模式
跟踪方式	卫星跟踪质量块	质量块跟踪卫星
精度	干扰小，精度较高	干扰大，精度较低
灵活度	灵活，运动不受限	不灵活，运动受限
工艺实现难易	较难	较易
质量块位置	处于卫星质心	不处于卫星质心

位移模式和加速度计模式虽然控制逻辑不一样，但两者之间的联系非常密切，不仅使用相同的惯性传感器结构和推进系统，实际在轨运行时，加速度计模式往往作为位移模式的准备阶段，而且有时候无拖曳卫星往往采用位移和加速度计混合模式。

对于重力场测量卫星而言，采用加速度计模式较为合理，GRACE、GOCE 卫星均是采用静电悬浮加速度计，将测得的非重力干扰加速度直接输出给卫星，一方面作为测量载荷，另一方面作为干扰补偿的测量输入。

(2) Drag-Free 卫星的建模及控制方法研究

无拖曳卫星动力学研究包括多个方面，如卫星本体与质量块之间的相对动力学、质量块及内部干扰动力学、卫星本体及外部干扰动力学等，国内外众多学者对无拖曳卫星动力学建模进行了研究。

B. Lange 在 1964 年其博士学位论文中第一次系统地分析了无拖曳卫星的动力学模型^[55]。他首先建立的卫星本体和质量块分别在惯性空间动力学方程，然后将两者相互比较得到卫星本体和单个质量块在平动方向相对运动的动力学方程。这里质量块采用的是球体，并未分析卫星本体和质量块在转动方向上的动力学模型。文中给出了球状质量块及近地环境下 Drag-Free 卫星本体受到的主要干扰，并分析了它们的影响。

E. Canuto 对 GOCE 卫星的动力学进行建模与分析^[56]。在 GOCE 中存在六个加速度计，所建立的是加速度计模式下的动力学模型，其复杂度低于位移模式下相对运动动力学模型。文中指出加速度计模式下质量块的动力学与卫星本体的动力学可以相互解耦，而 Drag-Free 卫星本体动力学与传统卫星的动力学类似。Da Lio M 和 Bortoluzzi 对 LISA 计划实验卫星 LTP 的动力学进行建模^[57]。LTP 中质量块采用的是立方体，需要在相对的六个自由度同时进行 Drag-Free 控制，所以文中同时对卫星本体和质量块之间相对平动和相对转动动力学进行建模。由于在 LTP 中存在两个质量块，因此在动力学建模中分析了质量块受到其他质量块的耦合影响，并建立卫星本体与多个质量块的相互运动动力学方程。

W. Fichter 分析了 LTP 卫星姿态动力学模型^[58]。文中指出位移模式下卫星姿态动

力学由 Drag-Free 控制回路动力学和质量块悬浮控制回路动力学组合而成。C. Grimani 利用蒙特卡罗方法分析了 LISA 卫星中质量块在干扰作用下充电的过程^[59]。文中指出能量大于 100MeV 的宇宙射线和电子会引起质量块进行充电。M. Hueller 利用扭矩实验分析了 LISA 卫星质量块的磁特性^[60]。S. M. Merkowitz 利用有限元法对 LISA 卫星本体自身重力场的静态模型和动态模型进行了分析^[61]。M. Armano 对 LTP 卫星的自身重力场的影响进行分析^[62]，并给出通过增加补偿质量块的方式对自身重力场引起干扰进行补偿的方法。M. Wiegand 对 STEP 内部质量块的动力学模型进行建模^[63]。文中同时利用马厄特方程以及牛顿-欧拉方程两种形式对质量块的动力学进行建模与分析。

B. L. Schumaker 系统地给出了无拖曳卫星的内外干扰^[64]。文中指出质量块受到的干扰分为与卫星本体无关的直接力干扰以及与卫星本体耦合力的干扰两种。引起直接力干扰的因素有：磁场干扰、宇宙射线、剩余气体、激光光子、温度变化和质量块上充放电过程；引起耦合力干扰的因素有：卫星本体与质量块之间的万有引力以及静电敏感器测量过程中静电场引起的库仑力。在太阳同步轨道上卫星本体受到的干扰主要包括：太阳辐射、空间粒子和太阳风。其中太阳辐射的干扰最大，其他两种干扰相比于太阳辐射要低几个量级。国内一些学者也建立了卫星之间的相对运动动力学模型^[65]，以及 Drag-Free 卫星相对运动动力学方程，研究 Drag-Free 卫星动力学的基础。

就控制方法而言，B. Lange 利用开关控制实现对卫星本体对质量块相对距离跟踪的控制^[5]。开关控制律的设计分析了卫星本体多种姿态控制的情况，并分析燃料消耗最省情况的要求。W. J. Bence 研究了 GP-B 卫星中悬浮控制系统的设计方法^[66]。文中采用自适应 LQG 算法实现质量块与卫星本体之间相对位置的保持，并采用 PD 控制作为备份算法。E. Canuto 利用内嵌模型设计方法对 GOCE 卫星的控制器进行了设计^{[67]~[69]}。该方法的主要思想是首先对动力学模型进行适当的简化，在控制过程中利用该简化模型估计出 GOCE 卫星各状态参数，并得出控制器参数和推进器分配指令，然后与 GOCE 卫星实际输出的真实值进行比较，并对简化模型下得出的控制器参数和推进器分配指令进行修正，并完成控制过程。该设计方法的优点有两个：一是该方法支持基于仿真的设计方法，因此会加快工程设计的进度；二是该设计得出的结果具有较好的鲁棒性。E. Canuto 还利用内嵌模型设计方法对 GOCE 的轨道坐标系转换矩阵进行了高精度估计^[70]。

D. Prieto 研究了利用模型预测技术实现 Drag-Free 卫星的控制的方法^[71]。该方法能够充分满足执行机构的实际能力。R. Haines 将 Drag-Free 卫星多输入多输出解耦为多个单输入单输出系统，并用传统的 PID 控制器实现对 Drag-Free 卫星的控制^[72]。该设计方法简单稳定，且具有较高的鲁棒性，但是控制的精度相对较低。P. Chapman 利用 PID 控制器实现对 STEP 卫星的控制^[73]，在设计中详细分析推进器的安装位置和分配对方案性能的影响。

LISA Pathfinder 工作在 L1 点，其主要扰动是太阳的辐射，整个控制系统中，姿

态和无拖曳环路共 18 路，可以很好的近似为多个线性的 SISO(Single Input Single Output 环路)。Gath^[74]和 Fichter^[75]利用 H_∞ 方法对 LTP 卫星的卫星姿态控制器、质量块悬浮控制器和 Drag-Free 控制器进行设计，以优化控制器的敏感性谱密度。Shu-Fan Wu^[76]利用定量反馈理论(QFT)对 LTP 的 Drag-Free 姿态控制系统(DFACS)进行了设计，该方法对每个回路进行边界约束，通过对 S/T 函数的频率特性进行整定，使其满足性能指标与稳定性指标。

(3) 无拖曳卫星编队控制研究现状

Jeongrae Kim^[77]在其博士论文中基于 Grace 卫星的配置，分析了基于微波手段的星间距测量误差体系，分析了加速度计测量误差体系，并在系统层进行了轨道高度、星间距离、地面轨迹分布、轨道倾角对重力场反演模型的影响分析。Bryant Loomis^[78]在博士论文中基于 GRACE 卫星的配置开展了系统仿真，对测量误差源以及误差对重力场测量结果的影响进行了仿真。Michael KIRSCHNER^[79]论述了 GRACE 卫星的编队飞行动力学模型，描述了相对指向估计与仿真。M. Stephens^[80]论证了在下一代 GRACE 卫星中采用激光测距的技术方案，并描述了地面验证试验。Fowler,W^[81]描述了 GRACE 编队飞行的任务规划.D.N.Wies^[82]基于 GRACE 卫星任务设计了多种编队结构，卫星数目分别为 2、3、4、5、6 颗。S. Theil^[84]从频域的角度分析了 Drag-free 单星控制带宽与编队控制带宽之间的关系 Cesare S.^[85]介绍了卫星编队实现重力场测量的系统概念。E. Canuto 在双星编队动力学建模与编队控制方面开展了大量研究^{[86]~[89]}，文献^[87]中针对建立的含 J2 项干扰的编队动力学模型，采用观测器的方法在考虑最坏的情况下确定 PD 参数，使控制量对 J2 项干扰的响应小于 10^{-3} 。文献^[88]中对动力学模型进行了更新，将轨道维持、相对位置的控制进行了合并，验证了线加速度无拖曳回路与编队回路共同运行的控制结果。文献^[89]中对两星之间的姿态控制与角加速度无拖曳控制回路进行了设计，Canuto 在编队系统的研究中主要还是采用嵌入式模型的方法。国内相关学者在 Drag-free 卫星编队协同控制研究方面也开展了一定的工作，曹喜滨等^[90]对近地环境下的 Drag-free 卫星干扰特性进行了分析，建立了带有干扰的卫星动力学增广系统模型，设计了混合 H_2/H_∞ 最优控制器；姜卫平^[91]等探讨了新一代探测地球重力场的卫星编队。

1.4 存在问题及本论文研究内容

通过国内外相关研究情况，以及针对工程项目的应用分析可以看出，无论是在无拖曳卫星建模还是在控制方法的研究方面，都已经有了丰硕的成果，结合未来引力波及重力场测量任务的发展需求，依然存在以下问题，这也构成了本论文要深入研究并力求解决的问题，主要体现在：

- (1) 对单星 drag-free 回路研究较多，而对于整星的姿轨耦合，双星编队问题研究不足。已存在的研究缺少对整个编队系统全回路的构建，对回路间

动力学耦合、带宽的分配及兼容性考虑较少。

- (2) 对时域内的系统设计方法研究较多,而面向频域的分析与设计方法研究较少。频域特性、误差的功率谱密度约束贯穿于星星跟踪系统从顶层指标到单机噪声的各个环节,研究基于频率约束的系统回路构建具有重要意义。
- (3) 理论、方法较多,但与工程实际结合不足,由于缺少对复杂任务中工程约束的全面考虑,部分研究成果过于优化而导致适用性、可实现性降低。

本文针对上述几个问题开展了深入研究,研究内容主要为下一代星星跟踪重力场测量系统的建模与控制回路构建,从任务的顶层指标要求触发,考虑了工程实际中的若干约束,开展了卫星全回路的设计与仿真,主要包括:

- (1) 介绍了星星跟踪系统的测量与控制原理,包括星星跟踪系统的观测量的定义,与重力场参数之间的关系,观测量的测量方法等,对理解采用星星跟踪系统开展引力波、重力场测量有一定帮助。梳理了低轨星星跟踪无拖曳航天器编队系统的控制目标与约束条件,包括系统误差的分解、对无拖曳卫星的线加速度、角加速度残差的指标要求,分析了指向控制要求等,相关内容见论文第二章。
- (2) 建立了无拖曳控制编队卫星系统的数学模型,包含两星编队相对轨道动力学模型,单星无拖曳力学模型,单星姿态动力学模型。分析了无拖曳卫星所受的外部、内部干扰及相应的噪声模型,相关内容见论文第三章。
- (3) 研究了基于功率谱密度约束的轨道动力学估计方法,以提高坐标系转换的精度,研究了基于定量反馈理论(QFT)的控制系统回路成形方法,解决了多输入多输出(MIMO)编队系统动力学在低频段的强耦合问题。为了提高编队系统初始状态的收敛,探讨了基于有限时间的滑模控制器设计方法。相关内容见论文第四章。
- (4) 研究了单星线加速度无拖曳、角加速度无拖曳控制方法,采用了动力学干扰观测器的方法,将外界干扰进行精确估计,分析了外干扰、模型不确定性、测量误差等信号的功率谱对估计器回路频谱特性的约束,确定了估计器增益矩阵的取值边界,估计器的设计使得控制过程得以简化,具有工程应用价值。相关内容见论文第五章。
- (5) 基于定量反馈理论,设计了姿态控制回路控制器,分析了敏感器噪声功率谱对控制回路的影响,建立了QFT控制器的边界函数,并进行了仿真。相关内容见论文第六章。
- (6) 基于本论文控制器的设计,开展了全回路的仿真分析,全面验证了回路之间的兼容性,证明了本论文提出的方法是有效的,相关内容见第七章。

论文的结构框图与研究内容之间的相互关系如图 1-14 所示。

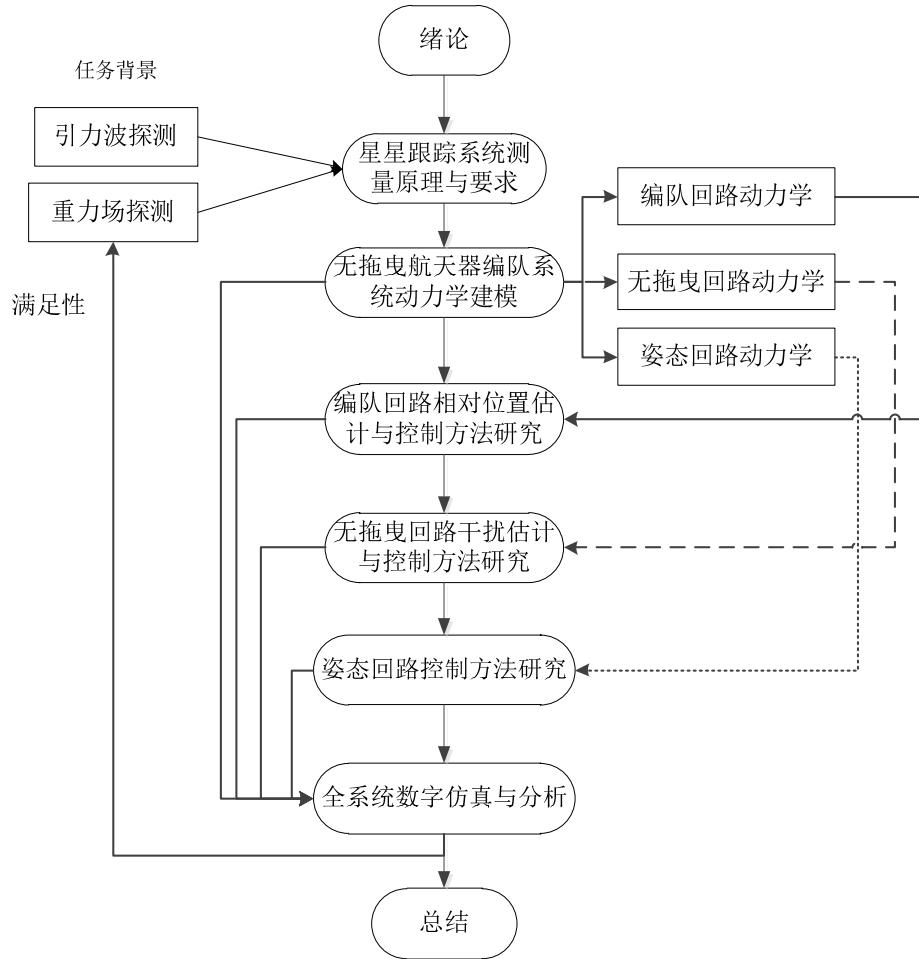


图 1-14 论文结构框图与相互关系

第2章 星星跟踪系统测量原理与要求

2.1 引言

星星跟踪系统可以作为空间引力波、重力场通用的测量手段，观测量为两个检验质量之间的微弱扰动，星间距离基线、星间测距精度、加速度测量精度决定了整个测量系统的灵敏度，而所需的无拖曳控制精度则跟系统灵敏度密切相关，这些误差及噪声，均以功率谱密度（Power Spectral Density, PSD）的方式在频域中描述，对于测量频段与非测量频段其指标要求不同，需要建立 PSD 误差与航天器研究所经常采用的标准差、RMS 误差等方式之间的转换关系。

星星跟踪测量系统涉及星间激光测距、非保守力加速度测量，基于微推力器的干扰补偿等基本原理与手段。受空间干扰、航天器内部噪声、轨道精度等因素影响，为了在这些噪声中分离出只与重力场、引力波有关的微弱信号，这些手段均需达到的相应的指标极限。

本章的目的在于阐述了星星跟踪系统的组成及相关的测量、控制原理，并且结合下一代重力场测量任务，分析工程任务中所需的测量及控制误差，建立模型、算法研究与仿真的约束条件，是系统理解星星跟踪测量手段的基础，也是后续章节研究内容的输入。

2.2 星星跟踪无拖曳航天器系统组成

无论是引力波还是重力场产生的异常，都会引起空间间隔一定距离的两个检验质量的扰动，原理上通过观测检验质量之间的相对位置变化，可以检测出这种信号，但是由于这种扰动极其微弱，而且与检验质量所受的其它干扰混叠在一起，一般的测量方法和测量精度很难将其检测出来。

星星跟踪无拖曳航天器系统由 2 到 3 个航天器组成，如图 2-1 所示，每个航天器质心处放置一检验质量，假设能够抵消所有非保守力的干扰，则两个检验质量处于只受保守力的作用状态，之间的距离 ρ 的变化就体现了这种扰动。

航天器通过微推力器作用，可抵消航天器所受外界干扰，使检验质量和航天器均只受保守力作用，使检验质量“悬浮”于航天器内。由于测量精度的关系，也必须对航天器的内干扰产生的噪声进行抑制。

检验质量与其外罩集成为惯性传感装置，工作方式有两种：一种是控制检验质量跟踪卫星，如静电悬浮加速度计，所施加的控制力反映了航天器所受非保守力的大小；另一种是输出相对位置，需要航天器根据相对误差跟踪检验质量。这两种方式也对应了无拖曳控制的两种方式。

综上，星星跟踪系统由被测检验质量、航天器无拖曳控制系统、星间测距系统、惯性传感系统（含检验质量）组成，星间相对距离、星间测距精度、加速度测量精度

是星星跟踪系统的任务层主要参数，无拖曳干扰补偿能力、星间相对位置保持、相对姿态控制则为航天器控制系统要实现的主要指标。

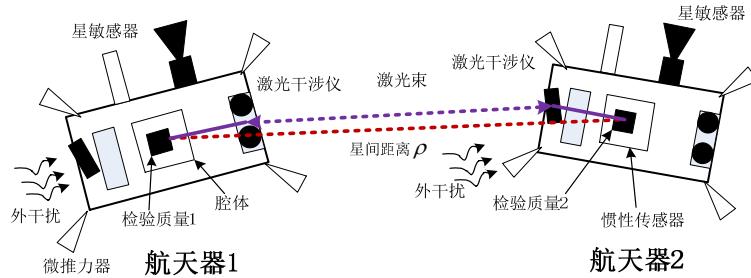


图 2-1 星星跟踪系统组成

重力场，引力波相关空间项目的参数及测量精度要求如表 2-1 所示，重力场测量星间距离在百公里量级，引力波探测星间距离在百万公里量级。就测距精度与加速度测量精度而言，引力波测距精度在皮米量级，加速度测量在 10^{-15} m/s^2 量级，比重力场测量精度高 3-4 个数量级。航天器无拖曳控制后会形成残差加速度，通常比加速度测量精度低 2 个数量级，即在科学测量频带内，重力场测量任务要求无拖曳控制精度为 10^{-8} m/s^2 量级，引力波探测任务要求为 10^{-13} m/s^2 。

表 2-1 星星跟踪测量系统参数表

空间任务	轨道	航天器数目、高度	星间距	测距精度	加速度测量精度
GRACE(1)	近地	2颗, 300-500km	220 km	$10\mu\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$	$10^{-9} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$
GRACE-FO(1)	近地	2颗, 250km	220 km	$80\text{nm}/\sqrt{\text{Hz}}$	$10^{-9} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$
NGGM-D(1)	近地	2颗, 350-450km	100km	$40-200\text{nm}/\sqrt{\text{Hz}}$	$4\times10^{-11} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$ $\sim2\times10^{-10} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$
eLISA(2)	太阳轨道	3颗	$1\times10^6 \text{ km}$	11pm	$3\times10^{-15} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$
天琴(2)	地球轨道	3颗, 高度 10^5 km	$\sqrt{3}\times10^5 \text{ km}$	1pm	$3\times10^{-15} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$
先导预研(2)	太阳轨道	3颗	$3\times10^6 \text{ km}$	5~10pm	$3\times10^{-15} \text{ m/s}^2\sqrt{\text{Hz}}$

注：(1) 重力场探测任务；(2) 引力波探测任务

2.3 基于功率谱密度的无拖曳航天器误差定义

航天器的指向误差、稳定度、加速度、外干扰、敏感器噪声、推力器噪声等指标通常用 3σ 误差，标准方差、RMS (Root Mean Square) 误差等时域统计方式描述。无拖曳航天器所实现的任务性能指标是以误差的 PSD 描述的，因而在无拖曳航天器控制系统的分析与设计过程中，均需以 PSD 来描述噪声与误差的属性，需建立误差时域与频域描述之间的转换关系。

2.3.1 傅立叶变换及信号频谱

描述随机信号通常采用相关函数和功率谱密度等概念，功率谱密度的计算往往需要利用傅立叶变换的方式，常用的为离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)。

信号分析常用的是数学工具是傅立叶级数，而控制系统分析中经常遇到的非周期函数，分析时可以看作是周期区域无穷的周期函数。

对于一个周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 可用傅立叶级数展开为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) \quad (2-1)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned} \quad (2-2)$$

将连续函数的傅立叶级数展开式(2-1)离散化，在周期区间 $(0, 2l)$ 上等间隔的取N个点，取样间隔为 Δt ，那么 $l = \frac{N\Delta t}{2}$ ，这里要注意 $dx \rightarrow \Delta t$ 。则 $f(x)$ 的离散化序列为 $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ ，且 $\frac{n\pi x}{l} \rightarrow \frac{2\pi ki}{N}$ ，由此式(2-1)的离散化形式为

$$x_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos \frac{2\pi ki}{N} + b_k \sin \frac{2\pi ki}{N}) \quad (2-3)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos \frac{2\pi ki}{N} \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin \frac{2\pi ki}{N} \end{aligned} \quad (2-4)$$

在这里对 $\frac{2\pi ki}{N}$ 做一个变换，对其分子分母同乘以 Δt 后变为： $2\pi \frac{k}{N\Delta t}(i\Delta t)$ ，由此可得出第 x_k 项为一个正弦和一个余弦周期函数之和，其频率同为： $f_k = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{k}{T}$ ，其中 T 为所取序列总的时间长度。随着 k 的增大，三角函数的频率逐渐增加，周期逐渐减小，其周期为：

$$T_k = \frac{1}{f_k} = \frac{N\Delta t}{k} = \frac{T}{k} \quad (2-5)$$

当 $k = N/2$ 时，谐波的频率最大为： $f_{N/2} = \frac{1}{2\Delta t}$ ，该频率称为Nyquist频率，当 k 从

$\frac{N}{2}$ 取到 N 时, 其结果与 k 从 0 取到 $\frac{N}{2}$ 是镜像对称的。现在将式 (2-3) 的各次谐波写成如下形式

$$x_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [c_k \cos(\frac{2\pi ki}{N} + \varphi_k)] \quad (2-6)$$

其中: $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, 为 k 次谐波的振幅; $\varphi_k = \arctan(-\frac{b_k}{a_k})$, 为 k 次谐波的初相。

在这里如果将 a_k 和 b_k 分别表示为一个虚数的实部和虚部, 结合欧拉公式, 则可直接得到离散傅里叶变换(DFT)的复数形式:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2-7)$$

其中 $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}ki}$, 称为旋转因子。 $X(k)$ 是一个虚数, 与 c_k 的关系为:
 $c_k = |X(k)| \cdot N/2$ 。

2.3.2 信号的功率谱密度

功率谱是随机信号的一种重要表征形式, 随机信号的功率谱密度用来描述平稳随机信号能量特征随频率的变化关系。功率谱密度简称为功率谱, 是自相关函数的傅里叶变换。对功率谱密度的估计又称功率谱估计。

(1) 功率信号与能量信号

如果一个信号在整个时间域($-\infty, +\infty$)内都存在, 因此它具有无限大的能量, 但其平均功率是有限的, 我们称这种信号为功率信号。

一般地, 平均功率(在整个时间轴上平均)等于 0, 但其能量有限的信号我们称为能量信号。

(2) 能量谱密度

定义单位频带内信号的能量为能量谱密度(简称能量谱), 单位: J/Hz, 用 $E_f(\omega)$ 来表示。

$$E_f(f) = |F(f)|^2 \quad (2-8)$$

能量信号在整个频率范围内的全部能量与能量谱之间的关系可表示为:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_f(f) df \quad (2-9)$$

可以证明: 能量信号 $f(t)$ 的自相关函数和能量谱密度是一对傅立叶变换, 即:

$$R_f(\tau) \Leftrightarrow E_f(f) \quad (2-10)$$

(3) 功率谱密度

上面能量谱密度的定义要求信号的傅里叶变换必须存在，也就是说信号平方可积或者平方可加。一个经常更加有用的替换表示是功率谱密度(PSD)，它定义了信号或者时间序列的功率如何随频率分布。这里功率可能是实际物理上的功率，或者更经常便于表示抽象的信号被定义为信号数值的平方。

由于平均值不为零的信号不是平方可积的，所以在这种情况下就没有傅里叶变换。幸运的是维纳-辛钦定理(Wiener-Khinchin theorem)提供了一个简单的替换方法，如果信号可以看作是平稳随机过程，那么功率谱密度就是信号自相关函数的傅立叶变换。

单位频带内信号的平均功率定义为功率谱密度（简称功率谱），单位： $\text{unit}^2 / \text{Hz}$ ，用 $P_f(f)$ 来表示

$$P_f(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(f)|^2}{T} \quad (2-11)$$

在本文中，功率谱密度的开方称为幅值谱密度 (ASD)，单位为 $\text{unit} / \sqrt{\text{Hz}}$ 。

整个频率范围内信号的总功率与功率谱之间的关系可表示为

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_f(f) df \quad (2-12)$$

可以证明：功率信号 $f(t)$ 的自相关函数和功率谱密度是一对傅立叶变换，即

$$R_f(\tau) \Leftrightarrow P_f(f) \quad (2-13)$$

2.3.3 误差转换关系

(1) 功率谱和方差之间关系^[98]

离散系统的傅里叶变换(DFT)表示如式 (2-7) 所示。

计算其双边功率谱，可表示为：

$$P(k \cdot \Delta f) = X(k \cdot \Delta f)^2 \cdot \frac{\Delta t}{SF}, k = [-N/2, N/2] \quad (2-14)$$

若是单边功率谱，可表示为：

$$P(k \cdot \Delta f) = X(k \cdot \Delta f)^2 \cdot \frac{2\Delta t}{SF}, k = [0, N/2] \quad (2-15)$$

Δt 为取样间隔， Δf 为频率采样间隔，SF 为依赖于加窗的放大系数，如使用矩形窗，长度为 $N \cdot \Delta t$ ：

$$SF = \sum_{n=0}^{N-1} |window[n \cdot \Delta t]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |RECT[n \cdot \Delta t]|^2 = N \quad (2-16)$$

测量与控制系统中的噪声、误差均相当于一个离散信号，常用信号的均值 μ_e 和标准方差来表示它的特性，对于白噪声 μ_e 为 0，标准方差可表示为：

$$\sigma_{bw}^2 = \sum_{k=a}^{k=b} P(k \cdot \Delta f) \cdot \Delta f \quad (2-17)$$

在研究过程中，对于敏感器或执行器的噪声描述，常涉及白噪声功率谱与方差之间的转换，若给定白噪声功率谱的幅值为 $A \left(\frac{\text{unit}^2}{\text{Hz}} \right)$ ，则对应的方差为：

$$\sigma_A^2 = \sum_{k=0}^{N/2} A(k \cdot \Delta f) \cdot \Delta f = \frac{N}{2} \cdot A \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta t} = \frac{A}{2\Delta t} \quad (2-18)$$

即： $\sigma_A = \sqrt{\frac{A}{2\Delta t}}$ 。

若给定了一个噪声的方差为 σ_B ，则其功率谱表示为：

$$P_B(k \cdot \Delta f) = 2\sigma_B^2 \cdot \Delta t \quad (2-19)$$

与标准方差不同，RMS (Root Mean Square) 值 e_{rms} 表示在某个频段上的绝对误差，与标准方差，自相关函数的关系为：

$$e_{rms}^2 = \sigma_{bw}^2 + \mu_e^2 = R_f(\tau = 0) \quad (2-20)$$

方差相同的信号，其功率谱密度函数的曲线形状可以不同，即误差在不同功率上的分布不同，如图 2-2 所示，无拖曳航天器的性能指标均是以误差的功率谱密度来定义的，不仅要求总误差在一定范围内，还对误差的频率分布有着严格的规定。

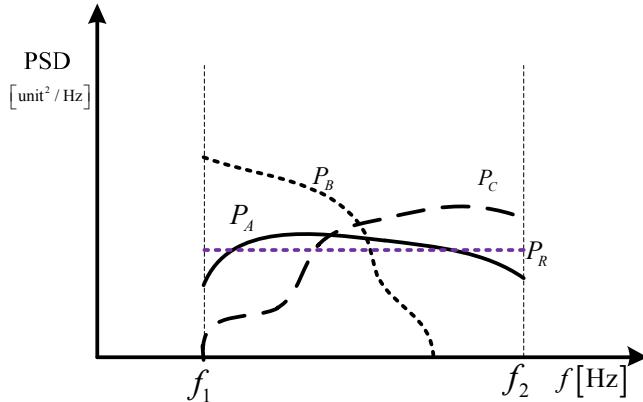


图 2-2 相同方差对应的不同功率谱密度曲线

(2) 控制系统传递函数与输入输出的功率谱关系^[99]

控制系统常用输出与输入之间的传递函数来描述，连续系统用 S 变换函数表示，离散系统用 Z 变换函数来表示，通过对传递函数的幅值与频率相关，通过对传递函数参数的配置，可以使其具有高通、低通等滤波特性，传递函数的幅频特性与输入输出信号的功率谱密度可建立相关联系，对输入信号频谱形状进行整定。

假设传递函数为 $G_{wn}(s)$ ，输入为白噪声 $w(t)$ ，则可调节参数，输出具有某种频谱特性的有色噪声 $n(t)$ ，令白噪声与有色噪声的 S 变换函数为 $w(s)$ ， $n(s)$ ，则：

$$\frac{w(s)}{n(s)} = G_{wn}(s), \quad s = j\omega = j2\pi f, \quad (2-21)$$

$$S_{ww}^2(\omega) = G_{wn}(j\omega) \cdot S_{nn}^2 \cdot G_{wn}(j\omega)^H \quad (2-22)$$

$S_{ww}(\omega)$ 为有色噪声的功率谱，随频率变化， S_{nn} 为白噪声的功率谱， $G_{wn}(j\omega)^H$ 为 $G_{wn}(j\omega)$ 的共轭。

一个低通滤波器如下式表示：

$$G_{wd}(s) = \frac{\omega_{RO}}{s + \omega_{RO}}, \quad (2-23)$$

$$S_{ww}^2(2\pi f) = \frac{\omega_{RO}^2 S_{nn}^2}{\omega^2 + \omega_{RO}^2} = \frac{f_{RO}^2 S_{nn}^2}{f^2 + f_{RO}^2}, \quad (2-24)$$

f_{RO} 为转折频率。

一个区间滤波器如下式表示：

$$G_{wd}(s) = \frac{\omega_{RO}s}{(s + \omega_{RU})(s + \omega_{RO})} \quad (2-25)$$

$$S_{ww}^2(2\pi f) = \frac{f^2 f_{RO}^2 S_{nn}^2}{(f^2 + f_{RO}^2)(f^2 + f_{RU}^2)} \quad (2-26)$$

实际上，对于一个控制系统，任何输入输出之间都可相当于一个滤波器函数，其分析方法相同。

2.4 基于激光干涉实现星间测距、测角原理

在已经发射的 GRACE 编队卫星中，星间距的测量采用 K/Ka 波段的微波测距系统，其测距精度优于 10 微米，测速精度优于 1 微米/秒。为了提高测量精度，而未来的引力波、重力场科学任务拟采用激光干涉的方法达到纳米级到皮米级的测距精度。激光的波长短，仅是 K 波段微波的万分之一，可以获得更精确的卫星相对距离与姿态信息。

当光发生干涉时，如果在光程上有微小位移 Δx ，则光场的相位也将随之发生变化：

$$\Delta\varphi = \Delta x \bullet \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2-27)$$

反之利用相位变化也可以计算出位移变化。

由于 $f \bullet \lambda = c$ ，激光的波长在微米量级，波长为 $1 \mu m$ 的激光其频率为 298 THz ，如此高频在任何探测器上探测到的只有平均能量谱。直接测量激光频率变化不可行，而利用激光干涉可以获得频率变化，可以采用一束已知频率且频率能保持稳定的激光作为参考光与待探测光形成干涉，利用光电探测器来获取频率。目前有两种技术应用最为广泛^[29]：

(1) 零差干涉 (homodyne interferometry)

振荡器产生的参考光场频率与测量光束频率一样, 可知光电探测器探测到的电流变化为:

$$I_C = A + B \cdot \sin(\Delta\phi) \quad (2-28)$$

在进行探测时一般会通过控制回路将光电探测器的电流控制在一个稳定的工作点, 利用探测到的信号来推断光场相位和距离信息

(2) 外差干涉 (heterodyne interferometry)

振荡器产生的参考光场频率相对于测量光束频率有个微小的偏移, 将在光电探测器上产生一个拍频信号, 光电探测器探测到的电流为:

$$I_C = A + B \cdot \sin(2\pi f_b t + \Delta\phi) \quad (2-29)$$

其中, f_b 为拍频频率, 通过相位计可以测得相位变化。

在星间测距上, 外差干涉是一种较优的测量方案, 其允许较高的动态范围, 也可降低低频噪声的影响。在 GRACE follow on 计划中, 两颗卫星距离上百公里, 要求测量精度在 nm 量级, 如果只采用被动接收反射镜系统很难达到这种精度。该计划中选择动态激光器和转镜系统来保证入射光和反射光之间的平行性。采用补偿锁相激光器 (offset locking phase transopnder) 能保证入射光和反射光之间实现外差干涉, 而使用转镜能保证入射光和反射光之间的平行性。

如果激光器产生的激光相位稳定, 通过接收器接收到的激光相位能推算出光程, 如果发射器与接收器之间有着相对速度 $v_d(t)$, 则它们在频域上将产生多普勒频移。

$f_d(t) = \lambda \cdot v_d(t)$, 通过光电探测器件可记录多普勒频移, 计算相对速度。

微分波前探测 (DWS, differential wavefront sensing) 是目前一种常用的具有很高精度的测量两束光之间相对角度测量方法, 下图是 DWS 的工作原理, 具有一定的偏置和频率差异的两束光照射到光电探测器上, 利用分离的光电探测器 (1/4 光电二极管) 可以获得测量光束的倾斜信息。这种探测器接收到光后能产生 4 种位相的电流, 每种电流的相位是由每个二极管的平均波前倾斜所决定的。

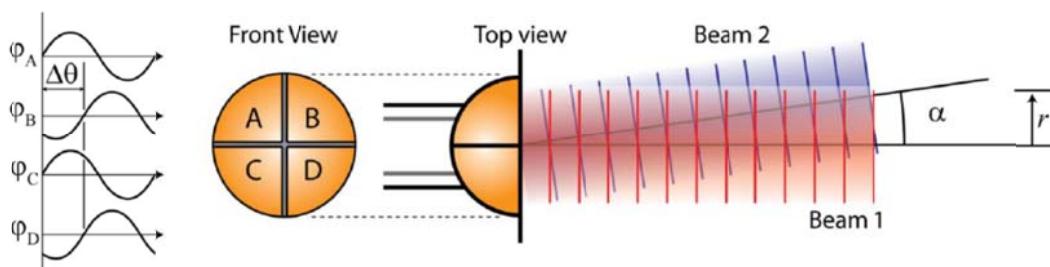


图 2-3 DWS 工作原理

在图中, 探测器左侧的平均相位与右侧数量级上一致, 符号相反。两束光有小的倾角时, 相对相位的变化量与两束光波前倾斜角成正比。通过数值推导, 可以得到近似的关系:

$$\Delta\theta \approx \frac{16r}{3\lambda}\alpha \quad (2-30)$$

其中 r 是光束半径, λ 是光束波长, α 是波前倾角, 这里 $\Delta\theta$ 是 A、C 与 B、D 的相位差。

对于常见的高斯形激光或者平顶形激光来说, $16r/3\lambda$ 是一个很大的量。例如常见的近红外激光, 半径 4mm, 波长 1064nm, 则系数约为 20000。因此 DWS 可以获得较低的噪声和相对高精度的波前倾角。在卫星星间距离测量中, 相对波前倾角代表着接收光和发射光之间的倾斜程度, 为了实现测距, 需要保持发射光接收光的平行, 这样才能实现光干涉程度最大化。

每个二极管的相位不同, 可以对四个二极管光场相位进行线性叠加, 横向:

$$DWS_{tilt} = \frac{\varphi_B + \varphi_D - \varphi_A - \varphi_C}{2} \quad (2-31)$$

纵向:

$$DWS_{tip} = \frac{\varphi_A + \varphi_B - \varphi_C - \varphi_D}{2} \quad (2-32)$$

然后利用光电探测器测量出的 DWS 来计算出波前倾角。

2.5 基于加速度计实现非保守力加速度测量原理

为了建立观测量与地球引力场之间的关系, 我们希望观测到的相对距离, 速度以及加速度, 仅是由于地球引力场作用的结果。事实上, 任何物体在太空中同时受到重力与非重力(如气动力, 太阳光压力, 磁场力, 热冲击力等)的作用, 这就需要对非重力产生的加速度进行测量。

卫星完整的摄动受力模型如下式所示:

$$\mathbf{a}_v = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_l \quad (2-33)$$

\mathbf{a}_g 表示卫星所受的引力摄动加速度, \mathbf{a}_l 表示由非引力引起的摄动加速度, 而者的区别在于, 引力不会使卫星的能量发生变化, 大多数摄动引可比较精确的予以描述, 而非引力具有随机性, 难以用准确的模型描述。

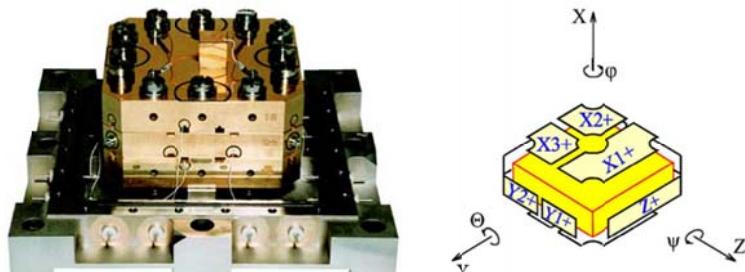


图 2-4 静电悬浮加速度计

对非重力加速度的测量通常由静电悬浮加速度计实现, 静电悬浮加速度计由一检

验质量块与外部笼体组成，每个面上有电极对，极板间产生静电力使中心质量块在笼体内静电悬浮，假设只有重力存在，则质量块与外部笼体相对间距不变，加速度计无输出^[40]。

当某个方向存在一个微弱的加速度输入时，检验质量将微偏离其原来位置，造成检验质量与相应方向电极间的电容变化。通过差分电容检测电路检测到这一微弱的电容变化，经伺服控制产生反馈电压，施加到相应的电极上，与电容中原有的固定偏压相向叠加，由此产生的静电力使检验质量达到新的平衡位置，反馈电压的大小正好反映了外界在该方向上所施加的微小加速度的大小。由于悬浮着的检验质量块与包容它的电极结构没有任何机械连接，全靠静电力支撑，机械刚度非常小，因此可以感应极其细微的加速度变化，实现很高的分辨率。加速度计的指标由噪声、偏置、放大系数表征，加速度计的控制框图 2-5 所示。

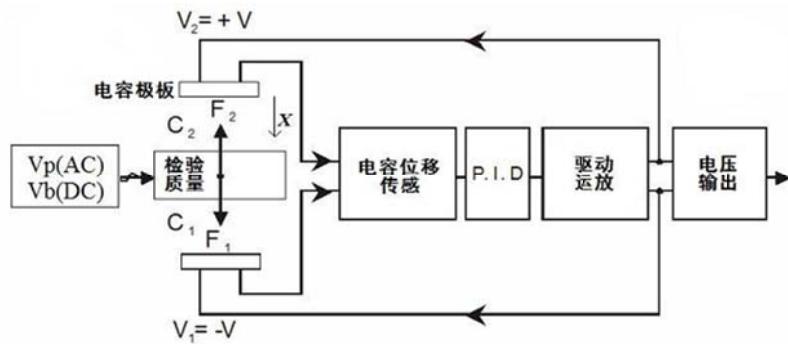


图 2-5 静电悬浮加速度计控制系统框图

2.6 基于微推力器实现 drag-free 控制原理

无拖曳控制的需求来源于加速度计的饱和问题，分为线加速度无拖曳和角加速度无拖曳，都是使期望加速度为 0，加速度计的最大测量范围约 10^{-6} m/s^2 ，但当非重力线加速度在 10^{-8} m/s^2 以下，加速度计的灵敏度才能得到保证。对于 300~400km 的低轨卫星，大气阻力是产生非重力加速度的主导因素，其中大气密度受太阳活动的影响，卫星所受大气阻力还与卫星迎风面的面积有关，在沿飞行方向的加速度大小通常在 $10^{-6} \sim 10^{-5} \text{ m/s}^2$ 量级，因此需要将非重力加速度进行补偿，对于 500kg 的卫星，所需的补偿推力为 $0.5 \sim 5 \text{ mN}$ ，侧向的非重力加速度较小，通常为 $50 \mu\text{N} \sim 2 \text{ mN}$ 。这种消除非重力加速度的方式称之为无拖曳控制，从推力的量级分析，需采用微推力器装置，具有较高精度与分辨率，能够产生可变推力。对于两颗卫星的编队，其编队距离维持也需要微推力器装置。

对于常规卫星，姿态控制通常选用飞轮、磁力矩器作为控制部件，而在无拖曳控制卫星中，飞轮作为转动部件会引起干扰，产生非重力加速度，从而导致科学仪器重力测量结果的不确定性，从而降低测量精度，因此，也必须采用微推力器作为姿态控制的部件。星敏感器作为常规的姿态测量敏感器，其测量噪声不能满足要求，必须配

合加速度计使用。为了满足三维方向的位置与姿态控制，几类微推力器指标特性如表2-2所示^{[92]~[97]}。

表 2-2 微推力器指标

推力器类型	比冲 ($I_{sp}[s]$)	最小推力	最大推力	效率 [%]	功耗
冷气推力器	60-120	1 μN	5mN	NA	1.5-3
FEEP	6000-12000	0.1 μN	5 mN	50-95	10-150
胶体推力器	500-1500	0.5 μN	1 mN	70-80	5-50
离子推进器 (μNRIT2)	1000-3000	20 μN	1 mN	50-75	15-50
离子推进器 (μNRIT4)	2000-3500	500 μN	3 mN	50-75	150
霍尔推进器	800-3000	5 μN	200 mN	50	400-5000

重力场测量卫星采用2类推力器，分别为冷气推力器和离子推力器。冷气推力器提供的推力范围为500 μN ~8mN，用于沿迹方向线加速度无拖曳控制，编队控制控制。离子推力器(Radio-frequency Ion, RIT)的推力范围为100 μN ~2mN，用于卫星矢量径向与法向的线加速度无拖曳控制、姿态控制、编队控制。

2.7 基于低轨星星跟踪重力场测量任务要求

2.7.1 星星跟踪观测量与重力场参数的关系

地球重力场通常用球谐级数来表示：

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R_e} \left[\sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^{n+1} P_{nm}(\sin \theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right] \quad (2-34)$$

式中，(r, θ, λ)是重力势计算点的球坐标；

GM为引力常数与地球质量的乘积；

R_e 为地球赤道的平均半径，取6378.137 km；

n_{\max} 为级数式的最高阶数；

C_{nm}, S_{nm} 为地球扰动场位系数。

通常将 $\mu = GM / R_e$ 称之为正常重力位，取 $3.986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ，剩余部分称之为扰动位，正常重力场表示一个形状和质量分布都很均匀的匀速旋转物体所产生的重力场，正常重力场中的等位面称之为正常水准面，正常重力场与实际重力场之间的

差值成为扰动重力场，重力场恢复研究的内容就是用不同的方法确定 C_{nm} , S_{nm} 。

假设空间两颗卫星，在惯性坐标系下，所受到的重力加速度差分可表示为：

$$\Delta \mathbf{a}_g(t) = (\Delta V(\mathbf{r}_1(t)) - \Delta V(\mathbf{r}_2(t))) \cdot \boldsymbol{\rho}(t) \quad (2-35)$$

$\boldsymbol{\rho}(t)$ 为参考点连线方向，称之为视轴 (LOS, light of sight)， $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)$ 分别为两颗卫星在惯性坐标系中的位置矢量。地球重力场在视轴上可以写成以下傅里叶级数的形式 [77]：

$$\Delta a_g(t) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{+n} \sum_{q=0}^{q_{nmq}} C_{nm} \cdot c_{nmq} \cdot \sin(2\pi \cdot f_{nmq} \cdot t + \alpha_{nmq}) + S_{nm} \cdot s_{nmq} \cdot \sin(2\pi \cdot g_{nmq} \cdot t + \beta_{nmq}) \quad (2-36)$$

这表示每一个球谐系数 C_{nm} , S_{nm} 在差分加速度表达式中都产生一个正弦信号值，其幅值为 c_{nmq} , s_{nmq} ，频率为 f_{nmq} , g_{nmq} ，相位为 α_{nmq} , β_{nmq} ，这些数值由卫星的轨道参数确定。

如果观测的时间足够长，则地球扰动场位系数 C_{nm} , S_{nm} 可被分离，每个系数的幅值可以被估计出来。为实现空间重力场的观测，需要测量相距约 100 km 的两颗卫星本体内两个参考点之间的重力加速度差值。

2.7.2 重力场系统误差分解

由系统观测量组成可知，两颗卫星质心参考点处沿视轴 (LOS) 的重力加速度 $\Delta \mathbf{a}_{g,x}(t)$ 的差值由激光测距的二阶导数 $\ddot{\rho}_x(t)$ 、两颗卫星各自的非重力加速度测量值 $\mathbf{a}_{lx,1}(t), \mathbf{a}_{lx,2}(t)$ 组成， $\ddot{\rho}_x(t)$ 包含了重力加速度与非重力加速度的综合测量值，需要从中移除两颗卫星各自的非重力加速度的测量值，关系如下式所示。

$$\Delta \mathbf{a}_{g,x}(t) = \ddot{\rho}_x(t) - \mathbf{a}_{lx,1}(t) - \mathbf{a}_{lx,2}(t) \quad (2-37)$$

科学测量频带为： $F_1 = \{f_1 = 1\text{mHz} \leq f \leq f_2 = 10\text{mHz}\}$ 。

为了获得观测灵敏度，要求 $\Delta \mathbf{a}_{g,x}$ 的测量噪声达到 $10^{-10} \sim 10^{-9} \text{m/s}^2$ 的量级，激光测距的观测量为 $\rho(t)$ ，噪声指标由 PSD 函数 $S_{n_\rho}^2(f)$ 描述， $S_{n_\rho}(f)$ 为功率谱密度函数的开方，也称为幅值谱密度 (ASD, amplitude spectral density)。非重力加速度 $\mathbf{a}_{lx,1}(t), \mathbf{a}_{lx,2}(t)$ 由静电悬浮加速度计测得，其噪声指标由功率谱密度函数 $S_{n_l}^2(f)$ 描述。根据顶层指标需求，分解到测距噪声与非重力加速度测量噪声的幅值谱密度为^[102]：

$$S_{n_\rho}(f) = \begin{cases} 25 \times 10^{-9} \cdot \left(\frac{0.01\text{Hz}}{f} \right) \frac{m}{\sqrt{\text{Hz}}} & , f \leq 0.01\text{Hz} \\ 25 \times 10^{-9} \frac{m}{\sqrt{\text{Hz}}} & , f > 0.01\text{Hz} \end{cases} \quad (2-38)$$

$$S_{n_i}(f) = \begin{cases} 4 \times 10^{-11} \left(\frac{0.001 \text{Hz}}{f} \right) \frac{m}{s^2 \sqrt{\text{Hz}}} & f \leq 0.001 \text{Hz} \\ 4 \times 10^{-11} \frac{m}{s^2 \sqrt{\text{Hz}}} & 0.001 \text{Hz} < f \leq 0.01 \text{Hz} \\ 4 \times 10^{-11} \left(\frac{f}{0.01 \text{Hz}} \right) \frac{m}{s^2 \sqrt{\text{Hz}}} & f > 0.01 \text{Hz} \end{cases} \quad (2-39)$$

由于 $S_{n_i}(f)$ 的单位为 $m/s^2\sqrt{\text{Hz}}$, $S_{n_p}(f)$ 的单位为 $m/\sqrt{\text{Hz}}$, 为了表示二者融合后的总误差, 加速度为距离的二阶导数, 考虑的频率因素, 可通过 $(2\pi f)^2$ 统一到相同单位。融合后的总误差以加速度表示为:

$$S_{\Delta a_g}(f) = \sqrt{2S_{n_i}^2(f) + (2\pi f)^2 S_{n_p}^2(f)} \frac{m}{s^2 \sqrt{\text{Hz}}} \quad (2-40)$$

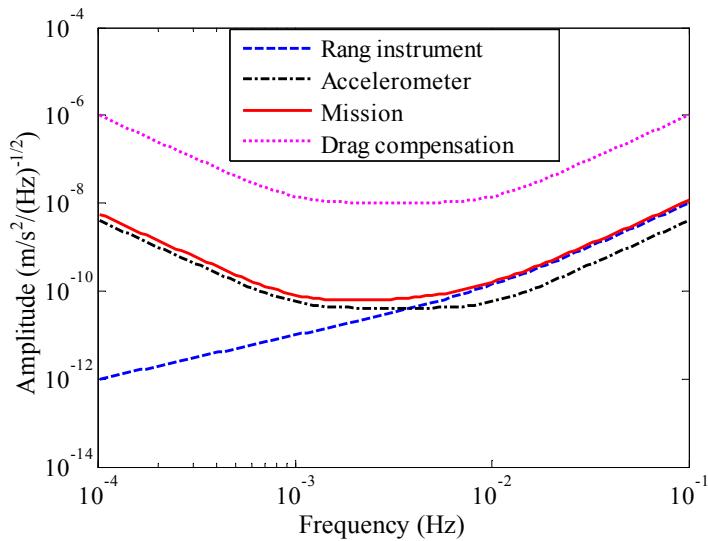


图 2-6 系统加速度噪声融合后功率谱密度

融合后的噪声总误差以距离的功率谱表示为:

$$S_\rho(f) = \sqrt{2 \frac{S_{n_i}^2(f)}{(2\pi f)^2} + S_{n_p}^2(f)} \frac{m}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (2-41)$$

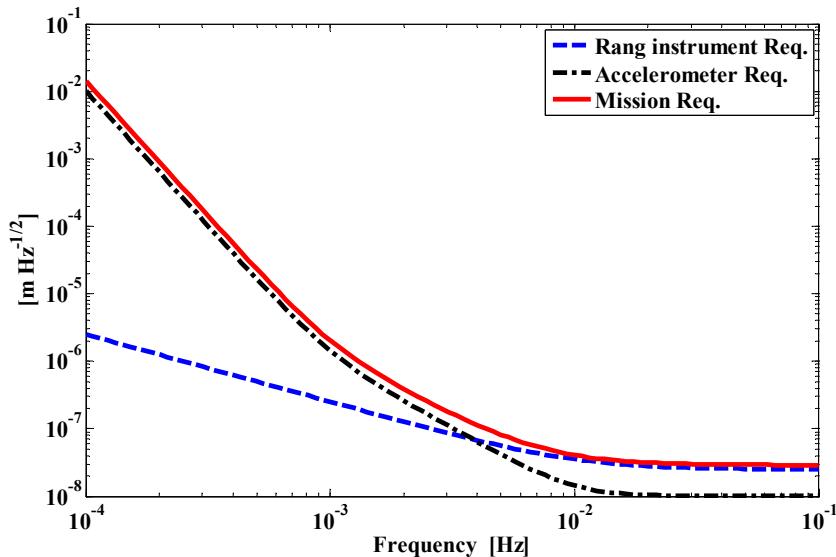


图 2-7 系统距离噪声融合后功率谱密度

2.7.2.1 单星无拖曳控制误差要求

(1) 线加速度无拖曳控制

单星无拖曳的控制需求来自于加速度计的饱和与信号放大系数限制，通过对 GRACE 加速度计长期测量数据的分析，可以确定加速度计的动态范围可以满足 $4 \times 10^{-6} m/s^2$ 的最大测量值。相当于对于 500kg 卫星，其外干扰力为 2mN，这确定了非重力加速度的测量上限。根据主要干扰力矩大气阻力的估算，在太阳高年其干扰力最大值小于 0.65mN，因此若只从饱和角度考虑，仅大气阻力并不能引起加速度计的饱和问题。

放大系数指被测信号相对于噪声的倍数，该倍数下加速度计的测量分辨率高，根据加速度计特性，要求被测信号与噪声幅值比小于 500:1，由于噪声幅值与频域有关，则允许的最大测量值也与频域有关，可用功率谱密度表示。

$$S_{al_max}(f) = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot S_n(f) = 1 \cdot 10^{-8} \sqrt{\left(\frac{1mHz}{f}\right)^4 + 1 + \left(\frac{f}{0.01Hz}\right)^4} \frac{m}{s^2\sqrt{Hz}} \quad (2-42)$$

式 (2-42) 表示了对外干扰补偿后的残差加速度功率谱密度约束，在科学测量频段内要求低于 $10^{-8} m/s^2\sqrt{Hz}$ ，如图 2-6 中的曲线所示。

由此，确定了单颗卫星上非重力残差加速度的最大值约束，功率谱密度约束。

(2) 角加速度无拖曳控制

类似于线加速度无拖曳控制，在测量频段，卫星的角加速度也需要控制至 $10^{-8} rad/s^2\sqrt{Hz}$ ，以减少对科学测量的干扰^[89]。

加速度计输出的角加速度测量噪声为：

$$S_{n_a}(f) = 1 \cdot 10^{-10} \sqrt{\left(\frac{0.5\text{mHz}}{f}\right)^4 + 1 + \left(\frac{f}{0.3\text{Hz}}\right)^4} \cdot S_{BF}(f) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2 \sqrt{\text{Hz}}} \quad (2-43)$$

式中, $BF(f_c)$ 为3阶butterworth滤波器的幅值随频率变化函数, 滤波器用S函数表示为:

$$BF(s) = \frac{1}{\omega_c^3 s^3 + \omega_c^2 s^2 + \omega_c s + 1} \quad (2-44)$$

角加速度的控制误差功率谱密度为:

$$S_{aa_max}(f) = 1 \cdot 10^{-8} \sqrt{\left(\frac{0.5\text{mHz}}{f}\right)^4 + 1 + \left(\frac{f}{0.1\text{Hz}}\right)^4} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2 \sqrt{\text{Hz}}} \quad (2-45)$$

角加速度测量噪声及drag-free控制要求如图2-8所示。

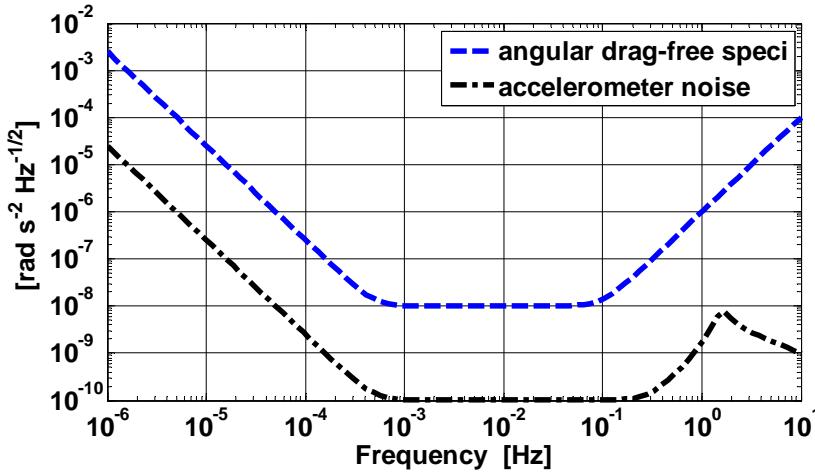


图2-8 角加速度测量噪声及drag-free控制要求

2.7.2.2 卫星编队相对距离误差要求

不同任务选择的编队卫星星间基准间距有所不同, 一般为100~200km, 本文考虑100km基准间距, 设基准星间矢量在编队坐标系中投影为 $[\Delta r_x \Delta r_z \Delta r_y] = [\rho_0 0 0]$ 。由于无拖曳编队系统的观测量为星间距的测量值, 测量精度影响系统顶层的指标, 而对于星间距本身的变化要求并不高, 定义星间距允许距离变化为5%, 与星间连线相垂直方向上允许的变化为1%, 则编队卫星相对位置允许误差为:

$$e_x = |\Delta r_x - \rho_0| \leq 500m \quad (2-46)$$

$$e_y = |\Delta r_y| \leq 100m \quad (2-47)$$

$$e_z = |\Delta r_z| \leq 100m \quad (2-48)$$

同常规的编队系统不同, 无拖曳卫星编队本质上为“松散式”编队^[87], 由于编队控制由微推力器实现, 控制本身就产生了非重力加速度, 控制加速度在完成编队保持的目标同时, 不应在测量频段上产生高于 $10^{-8} \text{m/s}^2 \sqrt{\text{Hz}}$ 的功率谱密度幅值, 因此, 对编

队控制的平滑性要求高于编队位置的精度要求,或者说无拖曳卫星的编队控制是控制指令功率谱密度约束下的编队控制。

2.7.2.3 姿态控制误差要求

卫星的指向控制需要完成以下任务:

- 1) 初始指向对准,建立激光链路;
- 2) 指向跟踪保持,维持激光测距测相。

卫星绝对指向测量由星敏感器获得,普通星敏感器可将绝对姿态测量到3角秒($15\mu\text{rad}$,俯仰、偏航方向),20角秒($100\mu\text{rad}$,滚动方向)的噪声范围内,两颗卫星之间的相对偏置角度(偏航方向、俯仰方向)可由激光干涉系统获得,测量精度可达到0.2角秒($1\mu\text{rad}$)。因此在建立了激光链路后,可通过激光干涉系统与星敏感器系统共同获得相对误差角信息。

激光干涉仪要求激光束具有高指向精度以执行相位(距离)测量并保持激光链路锁定。瞄准轴的激光束指向需求与高斯光束的光束偏差和有效的激光功率有关,在 $100\mu\text{rad}$ (半锥角)量级。激光波长通常假设为 1064nm ,当指向误差大于 $100\mu\text{rad}$ 时,易噪声链路丢失。因此,仅从最大指向控制误差考虑,指标为:

- 1) 偏航和俯仰: $100\mu\text{rad}$;
- 2) 滚动: 2mrad 。

除了激光束指向误差,还要考虑卫星姿态稳定度要求。由于激光测距干涉仪旋转-长度(rotation-to-length)耦合在 $100\mu\text{m}/\text{rad}$ 量级(偏航和俯仰旋转),因此 $0.1\text{mrad}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的卫星姿态扰动噪声可直接产生 $10\text{nm}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的测距噪声,这一条件限制了测量灵敏度。仪器灵敏度在低频段是可以放宽的,可通过噪声形态函数(noise shape function, NSF)来约束,干涉仪对于滚动旋转不敏感,因此激光束指向和姿态稳定度在滚动轴上均可以放宽^[102]。

最终,姿态指向控制稳定度以功率谱密度来表示:

$$S_\theta = S_\psi \leq 100 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{10\text{mHz}}{f}\right)^2} \frac{\mu\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (2-49)$$

$$S_\phi \leq 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{10\text{mHz}}{f}\right)^2} \frac{\text{mrad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (2-50)$$

式中 $\sqrt{1 + \left(\frac{10\text{mHz}}{f}\right)^2}$ 为噪声形态函数。指向误差的功率谱密度如下图所示。

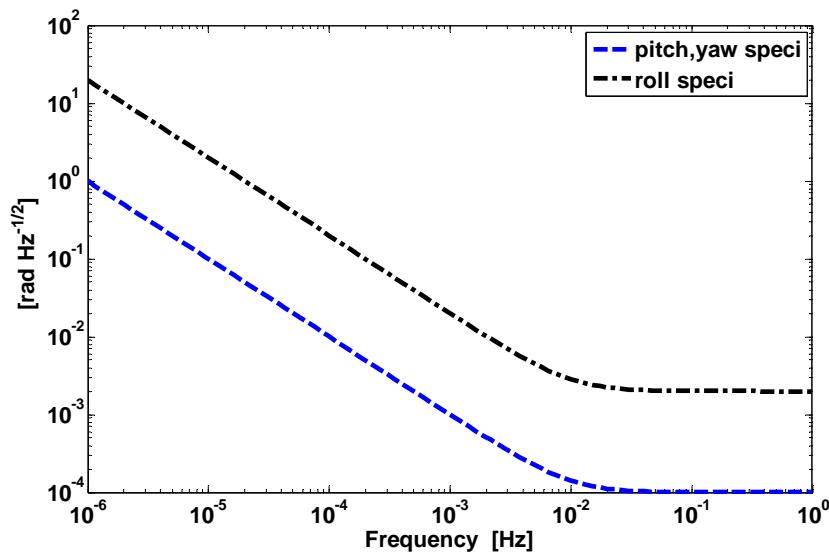


图 2-9 指向误差的功率谱密度

2.8 本章小结

本章介绍了与星星跟踪测量系统的组成与测量原理，对其涉及的功率谱密度定义、星间激光干涉测距、非保守力加速度测量、基于微推力器的 drag-free 控制进行了阐述，分析了无拖曳控制所需的微推力器基本情况。针对重力场测量任务，阐述了系统观测量与重力场反演参数之间的联系，结合下一代重力场测量卫星系统要求，对无拖曳编队卫星系统的控制目标与约束条件进行了分析，确定了线加速度、角加速度、角速度、相对姿态角、相对位置的允许误差，并分析了推力器饱和约束条件，为控制方法与数字仿真分析提供了输入与限定条件。

第3章 无拖曳航天器编队系统动力学建模

3.1 引言

星星跟踪的无拖曳编队卫星系统的测量与控制回路包括了三轴加速度无拖曳控制回路，三轴相对位置编队控制回路，三轴角加速度无拖曳控制回路，三轴高精度指向控制回路，系统组成如图 3-1 所示。可见，相比较于一般卫星，重力场卫星系统回路多、层级复杂，且对每一种回路均需进行指标定义与功率谱密度约束，考虑到不同回路间存在耦合影响，需对编队卫星系统各个回路的数学模型进行构建与分析。

重力场卫星的无拖曳、编队及指向控制需要解决的问题包括：确保加速度计不出现饱和，确保非重力引起的线加速度、角加速度残差满足科学测量需求，卫星之间相对位置保持，两颗星之间的相互精确指向，均需要借助对数字模型的控制与仿真进行验证。

本章基于全系统回路，对系统参考坐标系进行定义，对各回路的动力学、运动学进行建模，确定动力学模块的输入输出关系，分析卫星所受的空间内、外干扰特性。

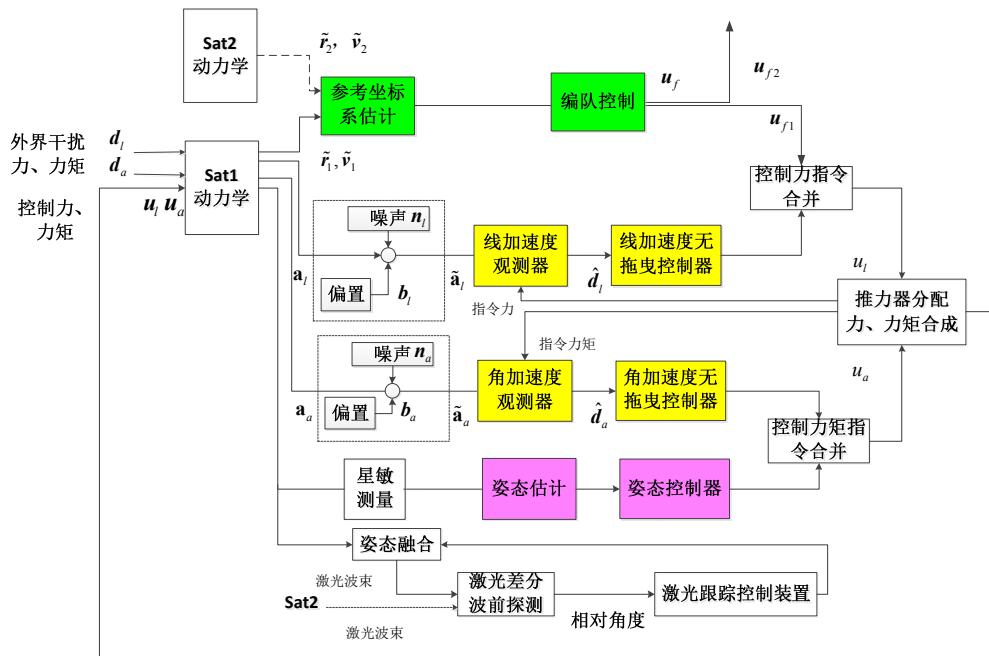


图 3-1 卫星编队系统框图

3.2 坐标系定义

本系统即包含编队飞行控制又包含单颗卫星的无拖曳控制，所使用的坐标系也较为复杂，分别定义为：

(1) 地心惯性坐标系 $\mathcal{R}_I = \{O_I, \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I, \mathbf{z}_I\}$

本文采用 J2000 坐标系，以地心为坐标原点，其中 \mathbf{x}_I 轴沿赤道面与黄道面的交线，

指向春分点； \mathbf{z}_I 垂直于赤道平面并指向北极； \mathbf{y}_I 与 \mathbf{x}_I ， \mathbf{z}_I 组成右手坐标系，如图 3-2 所示。

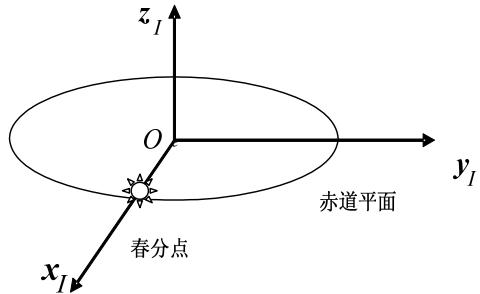


图 3-2 J2000 地心惯性坐标系

(2) 地球固连坐标系

坐标原点在地心上， $\mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E$ 在地球赤道 $\mathcal{R}_E = \{O_E, \mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E, \mathbf{z}_E\}$ 平面内， \mathbf{x}_E 指向零子午线， \mathbf{y}_E 指向东经 90° 方向， \mathbf{z}_E 沿地球自转轴且指向北极（与 \mathbf{z}_I 重合）。该坐标系相对于地心惯性坐标系以地球自转角速度旋转，如图 3-3 所示。

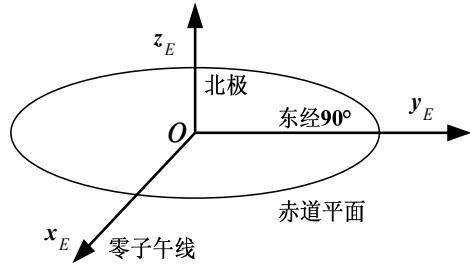


图 3-3 地球固连坐标系

(3) 卫星轨道坐标系 $\mathcal{R}_o = \{C_o, \mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o\}$

坐标原点在质量块中心上，设在惯性坐标系中质量块质心的位移为 \mathbf{r} ，则有相应速度为 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ，则定义轨道坐标系的三轴如下

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{v} / \| \mathbf{v} \|, \mathbf{y}_o = \mathbf{v} \times \mathbf{r} / \| \mathbf{v} \times \mathbf{r} \|, \mathbf{z}_o = \mathbf{x}_o \times \mathbf{y}_o \quad (3-1)$$

\mathbf{x}_o 指向质心速度前进方向， \mathbf{y}_o 沿着轨道角动量的方向， \mathbf{z}_o 与 \mathbf{x}_o ， \mathbf{y}_o 满足右手坐标系。由于较低轨道偏心率的存在， \mathbf{z}_o 与位移 \mathbf{r} 的方向有个微小的偏差。如图 3-4 所示。

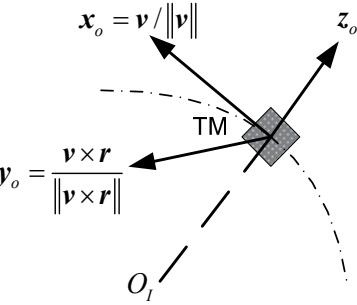


图 3-4 轨道坐标系

(4) 编队质心轨道坐标系 $\mathcal{R}_{FORF} = \{C_f, \mathbf{x}_f, \mathbf{y}_f, \mathbf{z}_f\}$

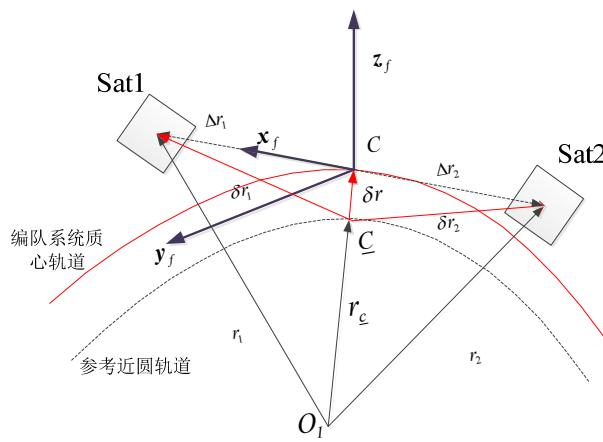


图 3-5 编队轨道坐标系

坐标原点在质量块连线的中心上，在惯性坐标系中该点的位移为 \mathbf{r}_f ，则有相应速度为 $\mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{r}}_f$ ，轨道坐标系三轴的关系与卫星轨道坐标系相同。

$$\mathbf{x}_f = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad \mathbf{y}_f = \frac{\mathbf{r}_f \times \mathbf{x}_f}{|\mathbf{r}_f \times \mathbf{x}_f|}, \quad \mathbf{z}_f = \mathbf{x}_f \times \mathbf{y}_f \quad (3-2)$$

(5) 卫星本体坐标系 $\mathcal{R}_S = \{C_s, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s\}$

卫星本体坐标系由卫星本体的外形和质量分布决定。以卫星本体质心处为原点，三轴固连于卫星本体上，其中 \mathbf{x}_s 轴平行于卫星本体体轴并指向运动方向， \mathbf{y}_s 轴平行于星体太阳帆板平面法线的方向，飞行时沿轨道系 \mathbf{y}_o 轴， \mathbf{z}_s 轴与前两轴成右手法则。

(6) 轨道极坐标系 $\mathcal{R}_\theta = \{O_I, r, i, \theta\}$

坐标原点在地心上， r 表示卫星的位置矢量， i 表示轨道面倾角， θ 表示卫星相对于升交点节线的幅角。

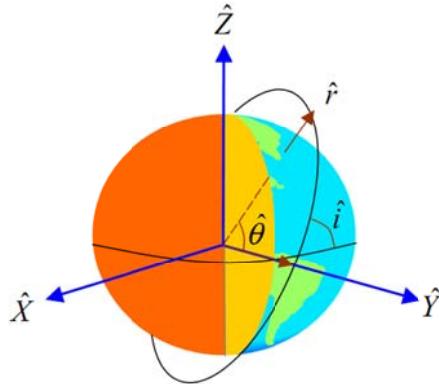


图 3-6 轨道极坐标系

3.3 两星编队飞行轨道动力学模型

3.3.1 无拖曳单星轨道动力学模型

假设卫星在惯性坐标系下的位置、速度向量分别为 \mathbf{r} , \mathbf{v} , 用 r 表示标量。卫星的角速度向量为:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3-3)$$

将 J2 项的扰动影响在重力势函数中表示出来, 函数在惯性坐标系下可表示为:

$$V(r, z) = \frac{\mu}{r} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right) \right) + \delta V \quad (3-4)$$

式中, δV 为 J2 以上阶数构成的扰动项, 相对于 J_2 阶的影响较小, 系数 $J_2 \approx 1.08 \times 10^{-3}$, 对重力势函数微分 $\mathbf{g}(r, z) = \nabla V$ 得到线加速度的表示形式^[100]。

$$\mathbf{a}_g = \mathbf{g}(r, z) = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu}{r^3} \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \begin{bmatrix} x(1 - 5z^2/r^2) \\ y(1 - 5z^2/r^2) \\ z(3 - 5z^2/r^2) \end{bmatrix} + \delta \mathbf{g} \quad (3-5)$$

$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_l$, \mathbf{a}_l 表示非保守力的加速度。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu}{r^3} \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \begin{bmatrix} x(1 - 5z^2/r^2) \\ y(1 - 5z^2/r^2) \\ z(3 - 5z^2/r^2) \end{bmatrix} + \mathbf{a}_l + \delta \mathbf{g} \end{cases} \quad (3-6)$$

为了写成状态方程的形式, 改写第二个方程的形式:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r} - \frac{\mu}{r^3} \frac{3J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \mathbf{r} + \mathbf{a}_l + \delta \mathbf{g} \\ &= -\frac{\mu}{r^3} \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \frac{3J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right) \mathbf{r} + \mathbf{a}_l + \delta \mathbf{g}\end{aligned}\quad (3-7)$$

假设 $\underline{r} = R_e + h$ 为轨道的半长轴, 对上式中的 $\frac{\mu}{r^3}$ 在 $\underline{r} = R_e + h$ 处一阶展开, 得到:

$$\frac{\mu}{r^3} \approx \frac{\mu}{\underline{r}^3} - 3 \frac{\mu}{\underline{r}^4} (r - \underline{r}) \quad (3-8)$$

对式 (3-7) 中 J2 项 0 阶展开, 可得到:

$$\begin{aligned}& -\frac{\mu}{r^3} \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \frac{3J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right) \mathbf{r} \\ &= -\left(\frac{\mu}{\underline{r}^3} - \frac{3\mu}{\underline{r}^4} (r - \underline{r}) \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \frac{3J_2}{2} \left(\frac{R_e}{\underline{r}} \right)^2 \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} 5 \frac{\underline{r}^2}{r^2} \right) \right) \mathbf{r} \\ &= -\frac{\mu}{\underline{r}^3} \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \frac{3(r - \underline{r})}{\underline{r}} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \frac{15J_2}{2} \left(\frac{R_e}{\underline{r}} \right)^2 \frac{z^2}{\underline{r}^2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \frac{3J_2}{2} \left(\frac{R_e}{\underline{r}} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \right) \mathbf{r} \\ &= -\underline{\omega}_0^2 (I_3 + \partial \Omega(t)) \mathbf{r}\end{aligned}\quad (3-9)$$

式中:

$$\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = 3(1 - \underline{r}^T \mathbf{r} / \underline{r}^2) \mathbf{I}_3 + \gamma_0 (z / \underline{r})^2 \mathbf{I}_3 - \Gamma_1 \quad (3-10)$$

$$\gamma_0 = \frac{15}{2} J_2 (R_e / \underline{r})^2, \quad \Gamma_1 = \frac{3}{2} J_2 (R_e / \underline{r})^2 \Gamma \quad (3-11)$$

由此, 建立了含 J2 项的状态递推方程为:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\omega_o^2 (I + \partial \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r})) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \mathbf{a}_d(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_d(t) = \mathbf{a}_l(t) + \delta \mathbf{g}(t)\end{aligned}\quad (3-12)$$

上式是惯性系中的位置、速度微分方程。为了研究的需要, 还需建立位置、速度微分方程与轨道角速度、轨道倾角、卫星幅角之间的关系。

卫星的轨道运动为绕法线的圆周运动, 瞬时角速度为 ω , 受偏心率 e , J2 的影响, ω 在卫星运动过程中并非常值, 研究中需要建立 ω 与 r , g 的联系。定义 ω 为 $\boldsymbol{\omega}$ 的标量, 在卫星轨道坐标系中, $\boldsymbol{\omega} = [0 \ \omega \ 0]^T$, $\mathbf{r} = [0 \ 0 \ r]^T$ 。

根据轨道运动规律: $\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

根据重力势微分: $\ddot{r} = g_0(r) + g_2(r) + \delta g(r)$, $g_0(r)$ 表示无扰动下的重力加速度, 表示由 J2 项扰动决定的重力加速度, $\delta g(r)$ 表示高阶项扰动决定的重力加速度, 式中:

$$g_0(r) = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = -\omega_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

类似的, $\omega_0^2 = \mu / r^3$ 表示未受 J2 扰动的轨道角速度, 在轨道坐标系中, 通过轨道倾角 i , 幅角 θ 进行坐标转换, 微分, 求得 J2 项引起的瞬时加速度为:

$$J_2(t) = -\frac{3}{2} \frac{J_2 \mu R_e^2}{r^4} \begin{bmatrix} 2 \sin^2 i \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin i \cos i \sin \theta \\ 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

式中, θ 是周期变化的, 对 θ 求积分, 可获得平均扰动加速度:

$$g_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{J}_2(r, \theta) d\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu}{r^3} r \frac{3J_2 R_e^2}{8r^2} (1 + 3 \cos 2i) \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

上式也说明了重力加速度沿-Z 方向, 标量形式为:

$$g_2(r) = -\frac{\mu}{r^3} r \frac{3J_2 R_e^2}{8r^2} (1 + 3 \cos 2i) = -\omega_0^2 \frac{3J_2 R_e^2}{8r^2} (1 + 3 \cos 2i) r \quad (3-16)$$

式中, r, ω_0 均是随时间变化的变量。另外由:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^2 r \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

综合可得

$$\omega^2 = (1 + \frac{3J_2 R_e^2}{8r^2} (1 + 3 \cos 2i)) \omega_0^2 \quad (3-18)$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_e^2}{8r^2} (1 + 3 \cos 2i)} \quad (3-19)$$

上式表示了受 J2 项影响的瞬时角速度的形式, 上式中, $\omega_0 = \sqrt{\mu / r^3}$ 也是随 r 变化的, 可根据轨道极坐标方程, 确定 ω_0 的变化与卫星初始矢量 r_0 、偏心率 e , 幅角 θ 的关系。

$r = r_0 / f(e, \theta)$, 令 $r_0 = R_e + h$, 表示 $\theta = 0$ 时的 r 值, 则 $f(e, \theta) = (1 + e \cos \theta) / (1 - e^2)$, $\omega = \dot{\theta}^\circ$

将 $r = r_0 / f(e, \theta)$ 代入 ω_0 的表达式, 可得:

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3} = \frac{\mu}{r_0^3} f^3(e, \theta) = \omega_0^2(r_0) f^3(e, \theta) \quad (3-20)$$

式中 $\omega_0^2(r_0)$ 为常数， ω_0^2 则随 e, θ 而变化。通常对于圆轨道， $e < 0.003$ ，引起 $\omega_0(r_0)$ 的最大变化约为 1.64E-4 倍。

将 ω_0 表达式代入 ω 表达式，可得：

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 \left(1 + \frac{3J_2 R_e^2}{8r^2} (1 + 3\cos 2i)\right) \\ &= \omega_0^2(r_0) f^3(e, \theta) \left(1 + \frac{3J_2 R_e^2}{8r_0^2} (1 + 3\cos 2i) f^2(e, \theta)\right) \\ &= \omega_0^2(r_0) f^3(e, \theta) (1 - \varepsilon_2(i) f^2(e, \theta)) \end{aligned} \quad (3-21)$$

式中： $\varepsilon_2(i) = -\frac{3J_2 R_e^2}{8r_0^2} (1 + 3\cos 2i)$ ，对于太阳同步轨道， $i = \frac{\pi}{2}$ ，轨道高度 $h = 400\text{km}$ ，

$r_0 = 6728\text{km}$ ，代入得 $\varepsilon_2(i) \approx 7.28 \times 10^{-4}$ ，这表示了由 J2 干扰带来的轨道角速度变化量级。当轨道高度、倾角确定时， ε_2 为常数，通过上述推导，可将 $\omega, \omega_0, \omega_0(r_0)$ 关系简单表示为：

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - \varepsilon_2) = \omega_0^2(r_0) f^3(e, \theta) (1 - \varepsilon_2 f^2(e, \theta)) \quad (3-22)$$

3.3.2 卫星编队系统相对动力学模型

常规研究编队的动力学模型是以其中一颗卫星作为参考星 (leader)，另外一颗卫星作为跟踪星 (follower) 建立相对动力学方程。Drag-free 双星编队本质上为松散式编队，两颗卫星本身都在实施 drag-free 控制，通过自身的无阻力控制抵消太空环境中的大气阻力等干扰，卫星之间并不要求非常精确的相对距离保持。编队控制本身产生了非重力加速度，本质上是对科学测量的干扰，因此对对其幅值与功率谱密度要求非常苛刻，可考虑将控制量平均分配到两颗卫星上，可以使控制更为平滑。为此，本文以两颗卫星连线的中点建立编队轨道坐标系的飞行动力学方程，称该中点为编队系统质心 FCoM (Formation Center of Mass)。卫星在轨运动的位置和速度信息由 GPS 实时测量得到，该质心点对应的矢量为：

$$\mathbf{r}_f = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \quad (3-23)$$

$$\mathbf{v}_f = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \quad (3-24)$$

在该坐标系下，卫星之间的相对矢量定义为：

$$\Delta \mathbf{r}^T = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^T = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z]^T \quad (3-25)$$

$$\Delta \mathbf{v}^T = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^T = [\Delta v_x \quad \Delta v_y \quad \Delta v_z]^T \quad (3-26)$$

为了构建编队飞行动力学方程，需要在编队质心轨道坐标系下建立 $\Delta\mathbf{r}$ 、 $\Delta\mathbf{v}$ 的微分方程。先考虑一参考轨道轨迹 C ， C 点考虑了J2项扰动，未考虑高阶扰动和环境干扰，基于参考轨道建立两颗卫星实际轨道的扰动方程，然后再建立它们之间的相对动力学方程。 $\underline{\omega}$ 为 C 点的轨道角速度标量，其向量形式为 $\underline{\omega}=[0 \ \underline{\omega} \ 0]^T$ 。

考虑 $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{\underline{c}} + \delta\mathbf{r}_k$ ， $\delta\mathbf{r}_k$ 为扰动项，卫星 k 相对于 C 点的相对运动方程^[101]：

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \ddot{\mathbf{r}}_{\underline{c}} + \delta\ddot{\mathbf{r}}_k + 2\underline{\omega} \times \delta\dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\underline{\omega}} \times \delta\mathbf{r}_k + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \delta\mathbf{r}_k) \quad (3-27)$$

其中， $k \in \{1, 2\}$ 。

考虑二体运动和J2项平均扰动，参考轨道 C 点的加速度为

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\underline{c}} = g_0(r_{\underline{c}}) + g_2(r_{\underline{c}}) = g_0(r_{\underline{c}}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_2(r_{\underline{c}}) d\theta \quad (3-28)$$

其中， $g_0(r_{\underline{c}})$ 表示无扰动下 C 点的加速度， $J_2(r_{\underline{c}})$ 表示由J2项干扰引起的 C 点加速度， $J_2(r_{\underline{c}})$ 由平均值 $g_2(r_{\underline{c}})$ 和周期项 $\delta g_2(r_{\underline{c}}, \theta)$ 组成，周期项 $\delta g_2(r_{\underline{c}}, \theta)$ 是时变有界的，满足：

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta g_2(r_{\underline{c}}, \theta) d\theta = 0 \quad (3-29)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_2(r_{\underline{c}}) d\theta = g_2(r_{\underline{c}}) \quad (3-30)$$

对于卫星 k ，有：

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = g_0(r_k) + g_2(r_k) + \delta g_2(r_k, \theta) + \delta g(r_k) + a_{l,k} \quad (3-31)$$

式中， $\delta g(r_k)$ 为J2项外的其他高阶摄动力， $a_{l,k}$ 为非重力加速度，将上式 C 点展开，可以得到：

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_k &= g_0(r_{\underline{c}}) + g_2(r_{\underline{c}}) + \delta g_2(r_{\underline{c}}, \theta) + \nabla g_0(r_{\underline{c}}) \delta r_k + \nabla J_2(r_{\underline{c}}) \delta r_k + \delta g(r_k) + a_{l,k} \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_{\underline{c}} + \delta g_2(r_{\underline{c}}, \theta) + \nabla g_0(r_{\underline{c}}) \delta r_k + \nabla J_2(r_{\underline{c}}) \delta r_k + \delta g(r_k) + a_{l,k} \end{aligned} \quad (3-32)$$

当 $K=1$ 时，上式与式(3-31)右侧相等，代入可得：

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \nabla g_0(r_{\underline{c}}) \delta r_1 + \nabla J_2(r_{\underline{c}}) \delta r_1 + \delta g(r_1) + a_{l,1} \\ &\quad - 2\underline{\omega} \times \dot{\delta r}_1 - \dot{\underline{\omega}} \times \delta r_1 - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \delta r_1) \end{aligned} \quad (3-33)$$

当 $K=2$ 时，可得：

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \nabla g_0(r_{\underline{c}}) \delta r_2 + \nabla J_2(r_{\underline{c}}) \delta r_2 + \delta g(r_2) + a_{l,2} \\ &\quad - 2\underline{\omega} \times \dot{\delta r}_2 - \dot{\underline{\omega}} \times \delta r_2 - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \delta r_2) \end{aligned} \quad (3-34)$$

由图3-5可知： $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2$ ， $\Delta\dot{\mathbf{r}} = \dot{\delta\mathbf{r}}_1 - \dot{\delta\mathbf{r}}_2$ ， $\Delta\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\delta\mathbf{r}}_1 - \ddot{\delta\mathbf{r}}_2$ 。

根据两星相对位置，整理得两星相对位置 $\Delta\mathbf{r}$ 加速度方程，对上两式进行差分，得到编队系统的相对运动学方程：

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{r}} = & \nabla \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_c) \Delta \mathbf{r} + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_c) \Delta \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega}_c \times \Delta \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \times \Delta \mathbf{r} \\ & - \boldsymbol{\omega}_c \times (\boldsymbol{\omega}_c \times \Delta \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{g} + \Delta \mathbf{a}_l\end{aligned}\quad (3-35)$$

式中, $\Delta \mathbf{g} = \delta \mathbf{g}(\mathbf{r}_1) - \delta \mathbf{g}(\mathbf{r}_2)$, 为作用于双星系统上的除 J2 项外的其他高阶摄动力之差, 比 J2 项小 3 个数量级, 影响可以忽略不计。同时 $\Delta \mathbf{a}_l = \Delta \mathbf{a}_{l,1} - \Delta \mathbf{a}_{l,2}$ 为非重力加速度之差。

我们基于假设的参考轨道 C 推导出线性化相对运动方程, 在实际工程中, C 是未知的, 而 M 点是两颗星的中点, 可以通过两颗卫星的 GPS 测量值获得, $C\bar{M} = \Delta \mathbf{r}$, 令 $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c$, $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_1 - \Delta \mathbf{r}_2$, 考虑到两颗卫星均处于无阻力模式下, 环境外干扰力已被抵消, 基于 M 点的相对运动学方程与式 (3-35) 形式相同, 因此用两颗星的中点 M 点来代替 C 点, 其方程为:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{r}} = & \nabla \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_f) \Delta \mathbf{r} + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_f) \Delta \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega}_f \times \Delta \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_f \times \Delta \mathbf{r} \\ & - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \Delta \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{g} + \Delta \mathbf{a}_l\end{aligned}\quad (3-36)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_f$ 为 M 点对应的角速度, $\nabla \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_f)$ 和 $\nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_f)$ 分别表示重力加速度和 J2 摄动项在 M 点的梯度函数, 具体形式如下^[10]:

$$\nabla \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_f) = -\frac{\mu}{r_f^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \omega_{f0}^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

$$\nabla \mathbf{J}_2(r_f, i, \theta) = \frac{6\mu J_2 R_e^2}{r_f^5} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \sin^2 i \left(\frac{7}{4} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) & -\frac{\sin 2i \cos \theta}{4} & \sin^2(i) \sin(2\theta) \\ -\frac{\sin 2i \cos \theta}{4} & -\frac{3}{4} + \sin^2 i \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sin^2 \theta \right) & \sin(2i) \sin(\theta) \\ \sin^2 i \sin 2\theta & \sin(2i) \sin(\theta) & 1 - 3\sin^2(i) \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\approx \frac{6\mu J_2 R_e^2}{r_f^5} \begin{bmatrix} \frac{-3 + 7\sin^2 \theta}{4} & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & -\frac{1 - 5\sin^2 \theta}{4} & 0 \\ \sin 2\theta & 0 & 1 - 3\sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{6\mu J_2 R_e^2}{r_f^5} \times \frac{1}{8} \times \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \cos 2\theta & 0 & 8 \sin 2\theta \\ 0 & -5 \cos 2\theta & 0 \\ 8 \sin 2\theta & 0 & 12 \cos 2\theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{3J_2 R_e^2}{4r_f^2} \cdot \frac{\mu}{r_f^3} \times \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \cos 2\theta & 0 & 8 \sin 2\theta \\ 0 & -5 \cos 2\theta & 0 \\ 8 \sin 2\theta & 0 & 12 \cos 2\theta \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon_2 \omega_{f0}^2 \times \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \cos 2\theta & 0 & 8 \sin 2\theta \\ 0 & -5 \cos 2\theta & 0 \\ 8 \sin 2\theta & 0 & 12 \cos 2\theta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

上式推导过程中, $i = \frac{\pi}{2}$, $\sin 2i = 0$, 将 (3-36) 右边第一、二项合并:

$$\begin{aligned} \nabla g_0(\mathbf{r}_f)\Delta\mathbf{r} + \nabla J_2(\mathbf{r}_f)\Delta\mathbf{r} &= \omega_{m0}^2 \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7\cos 2\theta & 0 & 8\sin 2\theta \\ 0 & -5\cos 2\theta & 0 \\ 8\sin 2\theta & 0 & 12\cos 2\theta \end{bmatrix} \right) \right) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\ &= \omega_{f0}^2 \begin{bmatrix} (-1+\varepsilon_2)\Delta x \\ (-1+3\varepsilon_2)\Delta y \\ (2-4\varepsilon_2)\Delta z \end{bmatrix} + \omega_{f0}^2 \varepsilon_2 \begin{bmatrix} -7\cos 2\theta & 0 & 8\sin 2\theta \\ 0 & -5\cos 2\theta & 0 \\ 8\sin 2\theta & 0 & 12\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_x & \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G_{xx} & 0 & G_{xz} \\ 0 & G_{yy} & 0 \\ G_{zx} & 0 & G_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\ U_y & & \\ U_z & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-39)$$

(3-36) 右边第三项:

$$-2\omega_f \times \Delta\mathbf{r} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\omega_f \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\omega_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

(3-36) 右边第四项:

$$-\omega_f \times \Delta\mathbf{r} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\omega}_f \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\omega}_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

(3-36) 右边第五项:

$$-\omega_f \times (\omega_f \times \Delta\mathbf{r}) = -\begin{bmatrix} -\omega_f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (3-42)$$

根据上面的式子综合, 将方程式展开:

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{x} &= -2\omega_f \Delta\dot{z} - \dot{\omega}_f \Delta z + \omega_f^2 \Delta x + \omega_{f0}^2 (-1 + \varepsilon_2) \Delta x \\ &\quad - 7\omega_{f0}^2 \cos 2\theta \Delta x + 8\omega_{f0}^2 \sin 2\theta \Delta z + \Delta g_x + \Delta a_{lx} \end{aligned} \quad (3-43)$$

$$\Delta\ddot{y} = \omega_{f0}^2 (-1 + 3\varepsilon_2) \Delta y - 5\omega_{f0}^2 \cos 2\theta \Delta y + \Delta g_y + \Delta a_{ly} \quad (3-44)$$

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{z} &= 2\omega_f \Delta\dot{x} + \dot{\omega}_f \Delta x + \omega_f^2 \Delta z + \omega_{f0}^2 (2 - 4\varepsilon_2) \Delta z \\ &\quad + 8\omega_{f0}^2 \sin 2\theta \Delta x + 12\omega_{f0}^2 \cos 2\theta \Delta z + \Delta g_z + \Delta a_{lz} \end{aligned} \quad (3-45)$$

可以看出, 第一个方程式与第三个方程式存在耦合, 第二个方程式独立。采取降低方程式中的耦合效应的措施^[87], 可令 $\Delta v_x = \Delta\dot{x} + 2\omega_f \Delta z$, 则 $\Delta\dot{v}_x = \Delta\ddot{x} + 2\dot{\omega}_f \Delta z + 2\omega_f \Delta\dot{z}$ 。

将 Δv_x 它代入第一个式子, 得到:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{v}_x - 2\omega_f \Delta\dot{z} - 2\dot{\omega}_f \Delta z &= -2\omega_f \Delta\dot{z} - \dot{\omega}_f \Delta z + \omega_f^2 \Delta x + \omega_{f0}^2 (-1 + \varepsilon_2) \Delta x \\ &\quad + G_{xx} \Delta x + G_{xz} \Delta z + \Delta g_x + \Delta a_{lx} \end{aligned} \quad (3-46)$$

两边均有 $2\omega_f \Delta\dot{z}$ 项, 可消去, 另外根据已推导的式子:

$$\omega^2 = \omega_0^2(1-\varepsilon_2) = \omega_0^2(r_0)f^3(e,\theta)\left(1-\varepsilon_2f^2(e,\theta)\right) \quad (3-47)$$

可化为:

$$\omega_f^2\Delta x + \omega_{f0}^2(-1+\varepsilon_2)\Delta x = 0 \quad (3-48)$$

代入方程 (3-46), (3-46) 化简为:

$$\Delta\dot{v}_x = \dot{\omega}_f\Delta z - \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \cdot 7\cos 2\theta \cdot \Delta x + \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \cdot 8\sin 2\theta \cdot \Delta z + \Delta g_x + \Delta a_{lx} \quad (3-49)$$

对于 Z 轴方程式, 将 $\Delta\dot{x} = \Delta v_x - 2\omega\Delta z$ 代入式 (3-45):

$$\begin{aligned} \Delta\dot{v}_z &= 2\omega_f(\Delta v_x - 2\omega_f\Delta z) + \dot{\omega}_f\Delta x + \omega_f^2\Delta z + \omega_{f0}^2(2-4\varepsilon_2)\Delta z \\ &\quad + \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \cdot 8\sin 2\theta \cdot \Delta x + \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \cdot 12\cos 2\theta \cdot \Delta z + \Delta g_x + \Delta a_{lx} \end{aligned} \quad (3-50)$$

合并后:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{v}_z &= 2\omega_f\Delta v_x + \dot{\omega}_f\Delta x - \omega_{f0}^2(1+\varepsilon_2)\Delta z + \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \cdot 8\sin 2\theta \cdot \Delta x \\ &\quad + \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \cdot 12\cos 2\theta \cdot \Delta z + \Delta g_x + \Delta a_{lx} \end{aligned} \quad (3-51)$$

对于第二个方程:

$$\Delta\dot{v}_y = -\omega_0^2(1-3\varepsilon_2)\Delta y - \omega_0^2\varepsilon_2 \cdot 5\cos 2\theta \cdot \Delta y + \Delta g_y + \Delta a_{ly} \quad (3-52)$$

定义: $\omega_z^2 = \omega_{f0}^2(1+\varepsilon_2)$ $\omega_y^2 = \omega_{f0}^2(1-3\varepsilon_2)$, 考虑到 Δy 的方程独立, 将变量的顺序交换, $X = [\Delta x \quad \Delta z \quad \Delta y \quad \Delta v_x \quad \Delta v_z \quad \Delta v_y]^T$, 并将 $\omega_f^2 = \omega_{f0}^2(1-\varepsilon_2)$ 代入, 得到了编队动力学方程的线性化形式:

$$\Delta\dot{x} = \Delta v_x - 2\omega\Delta z \quad (3-53)$$

$$\Delta\dot{z} = \Delta v_z \quad (3-54)$$

$$\Delta\dot{y} = \Delta v_y \quad (3-55)$$

$$\Delta\dot{v}_x = -\omega_0^2\varepsilon_2 \cdot 7\cos 2\theta \cdot \Delta x + (\dot{\omega} + \omega_0^2\varepsilon_2 \cdot 8\sin 2\theta)\Delta z + \Delta g_x + \Delta a_{ngx} \quad (3-56)$$

$$\Delta\dot{v}_z = 2\omega\Delta v_x - \omega_z^2\Delta z + (\dot{\omega} + \omega_0^2\varepsilon_2 \cdot 8\sin 2\theta)\Delta x + \omega_0^2\varepsilon_2 \cdot 12\cos 2\theta \cdot \Delta z + \Delta g_x + \Delta a_{ngx} \quad (3-57)$$

$$\Delta\dot{v}_y = -\omega_y^2\Delta y - \omega_0^2\varepsilon_2 \cdot 5\cos 2\theta \cdot \Delta y + \Delta g_y + \Delta a_{ngy} \quad (3-58)$$

写成状态矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{r} \\ \Delta\dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{I} \\ -\mathbf{Q}^2 & -\Xi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\Delta u_f + d_f(t) + g(\theta)) \quad (3-59)$$

其中 $\Xi = \begin{bmatrix} 0 & -2\omega_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_y^2 \end{bmatrix}$,

$$g(\theta) = \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \begin{bmatrix} -7\cos 2\theta & 8\sin 2\theta & 0 \\ 8\sin 2\theta & 12\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -5\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta y \end{bmatrix} \approx \rho_r \omega_{f0}^2\varepsilon_2 \begin{bmatrix} -7\cos 2\theta \\ 8\sin 2\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

式中: $\Delta x \approx \rho_r \in [10 \sim 100] km$, $\Delta y, \Delta z \leq 50 m$, $\Delta x \approx \rho_r \gg \Delta y, \Delta z$; ρ_r 为两颗卫星之间的期望距离。 $\Delta \mathbf{u}_f$ 为编队控制指令加速度, $\mathbf{d}_f(t) = \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{w}_a(t)$ 为作用在编队系统上的干扰, 其中 $\mathbf{x}_d(t)$ 为单星 drag-free 控制后的残余线加速度, 其满足 $\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{w}_d(t)$, $\mathbf{w}_d(t)$ 为白噪声; $\mathbf{w}_a(t)$ 则为由微推力器产生的噪声。

从(3-60)可以看出, $\mathbf{g}(\theta)$ 为含 J2 项扰动的周期项, 有 $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) d\theta = 0$, 在方程中, $g(\theta)$ 引起星间距周期变化部分反映了地球重力场的作用, 编队控制不应去消除 $g(\theta)$ 的影响。

3.4 单星 drag-free 动力学模型

完整的 drag-free 的动力学应包含检验质量与卫星星体之间的耦合动力学, 然而在实际工程实现中, 根据跟踪方式的不同, 可分为位移模式与加速度计模式, 对于重力场测量卫星, 前期的研究表明采用加速度计模式可以满足要求, 而且工程可实现性更强。加速度计模式下, 加速度计本身带有控制系统, 如静电悬浮加速度计, 可将检验质量控制在腔体中心。通过施加的控制力可计算出卫星所受的干扰, 测出间接测量出非保守力引起的加速度。由于加速度计自身控制系统带宽与控制频率都非常高, 可认为与卫星的无拖曳控制系统相隔离, 在重力场测量卫星任务中, GOCE, GRACE follow on 都采用了加速度计测量。在本论文的无拖曳控制研究中, 采用加速度计跟踪模式, 通过非保守力加速度的测量来补偿干扰。卫星的动力学模型中, 假设质量块的运动与卫星的运动是解耦的, 控制是独立的, 因而在卫星级的动力学模型可考虑线加速度动力学、角加速度动力学的简化模型。

1) 线加速度动力学方程

卫星在空间受力主要包括 3 部分: 卫星受到的重力作用、作用在卫星上的控制力、卫星受到的所有干扰力之和。线加速度动力学方程描述从微推力器控制至非重力线加速度测量的过程。

定义 \mathbf{a}_l 为卫星非重力线性加速度, 由外干扰力与推力器产生的力共同作用而成, 另为控制力, \mathbf{f}_c 为 \mathbf{f}_d 干扰力, 则:

$$m \mathbf{a}_l = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_d \quad (3-61)$$

对 \mathbf{a}_l 的测量表示为: $\tilde{\mathbf{a}}_l(t) = \mathbf{a}_l(t) + \mathbf{b}_l(t) + \mathbf{n}_l$, \mathbf{b}_l 为偏置/飘移误差, \mathbf{n}_l 为噪声。

动力学考虑从推力器产生的推力至加速度的测量, 用 z 变化的形式为:

$$\tilde{\mathbf{a}}_l(z) = \mathbf{P}_l(z) \mathbf{a}_l(z) + \mathbf{b}_l(z) \quad (3-62)$$

\mathbf{P}_l 应由推力器动力学 $\mathbf{P}_t(z)$ 和加速度计动力学 $\mathbf{P}_g(z)$ 两个环节组成。

(1) 推力器动力学

推力器动力学通常可以视为二阶函数, 考虑时间常数与阻尼, 表达为^[103]:

$$\mathbf{P}_t(f) = \frac{e^{-s\tau_t}}{(s/\omega_t)^2 + 2\xi_t s/\omega_t + 1}, \tau_t = 0.01s, \omega_t(2\pi)^{-1} = 10Hz, \xi_t = 0.7 \quad (3-63)$$

(2) 加速度计

加速度计读出数据通常需要滤波，假设采用了4阶滤波函数，表达为^[103]：

$$\mathbf{P}_g(f) = \frac{e^{-s\tau_g}}{(s/\omega_g)^4 + \alpha_3(s/\omega_g)^3 + \alpha_2(s/\omega_g)^2 + \alpha_1 s/\omega_g + 1} \quad (3-64)$$

其中， $\tau_g = 0.01s$ ， $\omega_g(2\pi)^{-1} = 10Hz$ 。

$$\mathbf{P}_l(f) = (1 + \partial b) \mathbf{P}_t \mathbf{P}_g, \partial b < 0.09 \quad (3-65)$$

已经发射的 GRACE 卫星数据处理结果显示， \mathbf{P}_l 可由一阶延迟环节近似，被忽略的动力学存在以下关系。

$$\partial \mathbf{P}_l(z) = \mathbf{M}_l^{-1}(z) \mathbf{P}_l(z) - I_3 \quad (3-66)$$

$$\mathbf{M}_l(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & & \\ & z^{-1} & \\ & & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

即：

$$\mathbf{M}_l(z) = e^{-sT}, T = 0.1s$$

$$\mathbf{P}_l(z) \approx \mathbf{M}_l(z) + \mathbf{M}_l(z) \partial \mathbf{P}_l(z) \quad (3-68)$$

对 \mathbf{P}_l 进行反变换，可得到被忽略的动力学模型幅值随频率的变化为：

$$\partial P_l(f) \approx \frac{y_l(f) - y_m(f)}{y_m(f)} \cong 0.5 \frac{(e^{j2\pi f} - 0.55)^2}{(e^{j2\pi f} + 0.5)^2}, |f| \leq 0.5/T = f_{\max} = 5Hz \quad (3-69)$$

2) 角加速度 drag-free 动力学方程

角加速度 drag-free 动力学与线加速度类似，卫星角加速度由控制力矩与外界干扰力矩决定。

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_d(t) \quad (3-70)$$

式中 $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{a}_a(t)$ ，控制后的角加速度， $\dot{\boldsymbol{\omega}}_c(t) = \boldsymbol{u}_a(t)$ ，表示控制角加速度， $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d(t) = \boldsymbol{d}_a(t)$ ，表示外干扰角加速度。

角加速度的测量模型为：

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_a(t) = \boldsymbol{a}_a(t) + \boldsymbol{b}_a(t) + \boldsymbol{n}_a \quad (3-71)$$

式中 $\boldsymbol{d}_a(z)$ 表示偏置/漂移角加速度， $\boldsymbol{n}_a(z)$ 表示噪声项。

类似的从微推力器的输入至角加速度测量输出，用传递函数 \mathbf{P}_a 表示，其 Z 变化形式为：

$$\tilde{\mathbf{a}}_a(z) = \mathbf{P}_a(z)\mathbf{a}_a(z) + \mathbf{b}_a(z) \quad (3-72)$$

$$\mathbf{P}_a(z) \approx \mathbf{M}_a(z) + \mathbf{M}_a(z)\partial\mathbf{P}_a(z)$$

$\mathbf{M}_a(z)$ 与 $\partial\mathbf{P}_a(z)$ 的表示与线加速度动力学方程中 $\mathbf{M}_l(z)$ 与 $\partial\mathbf{P}_l(z)$ 的方式相同。

3.5 姿态动力学方程

3.5.1 编队姿态参考坐标系的动力学方程

编队姿态参考坐标系相对于惯性坐标系的转换矩阵为 \mathbf{R}_{fi} ，对应的姿态四元数为 \mathbf{q}_{fi} ，表示从惯性坐标系到编队坐标系的转换。卫星本体坐标系 \mathcal{R}_s 的原点位于质心处，姿态为 0 时， $\mathbf{x}_{sk(k=1,2)}$ 轴与 \mathbf{x}_f 重合，卫星本体相对于编队参考坐标系的转换矩阵为 $\mathbf{R}_{sf}^k = X(\varphi_k)Y(\theta_k)Z(\psi_k)$ (321 转换顺序，偏航角-俯仰角-滚动， $k=1, 2$ ，表示从 \mathcal{R}_f 系转动到 \mathcal{R}_s 系)。论文中，在不特指那一颗卫星的情况下， \mathbf{R}_{sf}^k 写为 \mathbf{R}_{sf} ，对应姿态四元数为 \mathbf{q}_{sf} 。卫星在惯性坐标系中的姿态 $\mathbf{q}_{si} = \mathbf{q}_{fi} \otimes \mathbf{q}_{sf}$ ， \otimes 为四元数乘法，对应 $R_{si} = R_{sf}R_{fi}$ 。对四元数 \mathbf{q}_{sf} 的估计值列为 $\hat{\mathbf{q}}_{sf}$ ，估计与真值之间的误差写为 $\hat{\mathbf{e}}_{q_{sf}} = \hat{\mathbf{q}}_{sf}^{-1} \otimes \mathbf{q}_{sf}$ 。

考虑欧拉角为小角度的情况，卫星本体相对于编队参考系的四元数向量可表示为：

$$\mathbf{q}_{sf} = \begin{bmatrix} q_v \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.5\varphi \\ 0.5\theta \\ 0.5\psi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

$$q_v \cong \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3-74)$$

四元数乘法表示为：

$$q \otimes p = [q]p = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (3-75)$$

编队姿态参考坐标系的原点受两颗卫星具体位置的影响，在编队飞行时需要实时计算得到，参考姿态的运动学方程为：

$$\dot{\mathbf{q}}_{fi} = \frac{1}{2}\Omega(\omega_f(t))\mathbf{q}_{fi} = \frac{1}{2}\Xi(q_{fi}(t))\omega_f(t), q_{fi}(0) = q_{fi0} \quad (3-76)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{fi}(j) = q_{fi}(j) \otimes e_{q_{fi}}(j) \quad (3-77)$$

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} [-\boldsymbol{\omega}_f \times] & \boldsymbol{\omega}_f \\ -\boldsymbol{\omega}_f^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3-78)$$

$$\Xi(q) = \begin{bmatrix} q_4 I_{3 \times 3} + [q_v \times] \\ -q_v^T \end{bmatrix} \quad (3-79)$$

$$[q \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-80)$$

$$\Xi(\bar{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \quad (3-81)$$

$\tilde{\mathbf{q}}_f(j)$ 为参考姿态的测量值, 由两颗卫星 GPS 的输出经计算获得, 采样周期为 1s。

$\omega_f(t)$ 为 \mathbf{r}_f 矢量的瞬时角速度, $\dot{\omega}_f(t)$ 瞬时角加速度, 二者均无法直接测量, 需要根据位置信息进行估计, 对于 400km 的轨道高度。

$$|\boldsymbol{\omega}_f(t)| \approx 0.00115 \text{ rad/s} \quad (3-82)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_f(t) = \mathbf{a}_{f1} \sin(\omega_{nom} t + \phi_1) + \dots, |\mathbf{a}_{f1}| \leq 10^{-3} \mu\text{rad/s}^2 \quad (3-83)$$

3.5.2 单星姿态动力学方程

建立单颗卫星相对于编队参考坐标系的动力学方程。

$$\dot{\mathbf{q}}_{sf} = \frac{1}{2} \Omega(\boldsymbol{\omega}_{sf}(t)) \mathbf{q}_{sf} = \frac{1}{2} \Xi(\mathbf{q}_{sf}(t)) \boldsymbol{\omega}_{sf}(t), \mathbf{q}_{sf}(0) = \mathbf{q}_{sf0} \quad (3-84)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{si}(t) = \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{T}_c(t) + \mathbf{T}_d(t) - \boldsymbol{\omega}_{si}(t) \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}(t)) \quad (3-85)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{sf}(t) = \boldsymbol{\omega}_{si}(t) - \mathbf{R}_{sf} \boldsymbol{\omega}_f(t) \quad (3-86)$$

$$\mathbf{a}_a(t) = \mathbf{a}_c(t) + \mathbf{a}_d(t) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T}_c + (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{T}_d - \boldsymbol{\omega}_{si} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}) \quad (3-87)$$

式中: \mathbf{J} 为卫星的惯量矩阵, $\boldsymbol{\omega}_{sf}(t)$ 为卫星在编队参考系下的角速度在卫星本体上的分量, $\boldsymbol{\omega}_{si}(t)$ 为卫星在惯性系下的角速度在卫星本体上的分量, 二者存在转换关系, 加速度计测量值 $\tilde{\mathbf{a}}(t) \approx \dot{\boldsymbol{\omega}}_{si}$, 即惯性角加速度在卫星本体上的分量。 $\mathbf{a}_c(t)$ 为控制角加速度, $\mathbf{a}_d(t)$ 为干扰角加速度, 由于卫星已处于线加速度无阻力控制状态, 外界的大气阻力, 太阳压力等主要干扰力已由微推力装置抵消, $\mathbf{a}_d(t)$ 的来源主要包含重力梯度力矩, 陀螺效应力矩, 磁干扰力矩以及无阻力控制力残差产生的力矩等, $\mathbf{a}_d(t) = \mathbf{T}_d(t) - \boldsymbol{\omega}_{si} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}$ 是可以直接被角加速度计测量的, 在无拖曳回路中是要被消除的。

为了能够开展状态估计研究, 对上述动力学进行线性化、离散化, 卫星相对于编队姿态参考系的角度为小量, 希望直接写出 $\boldsymbol{\omega}_{sf}(t)$ 的动力学方程, $\boldsymbol{\omega}_{si}(t) \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}(t)$ 为 $\boldsymbol{\omega}_{si}(t)$ 的二阶项, 可表示为:

$$\boldsymbol{\omega}_{si}(t) \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}(t) = \begin{bmatrix} (J_y - J_z)\omega_y\omega_z \\ (J_z - J_x)\omega_x\omega_z \\ (J_x - J_y)\omega_x\omega_y \end{bmatrix} \quad (3-88)$$

且卫星惯量对称性使得 $J_z \approx J_y$, 因此可将陀螺力矩项合并到干扰力矩项中, 式(3-86)重新写为。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{sf}(t) &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{T}_c(t) + \mathbf{T}_d(t) - \boldsymbol{\omega}_{si} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}) - \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_{sf} \boldsymbol{\omega}_f) \\ &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{T}_c(t) + \mathbf{T}_d(t) - \boldsymbol{\omega}_{si} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}) - (\mathbf{R}_{sf} \dot{\boldsymbol{\omega}}_f + \boldsymbol{\omega}_{sf} \times \mathbf{R}_{sf} \boldsymbol{\omega}_f) \\ &\approx \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{T}_c(t) + \mathbf{T}_d(t) - \boldsymbol{\omega}_{si} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{si}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_f \\ &= \mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}_c(t) + \mathbf{a}_d(t) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_f \end{aligned} \quad (3-89)$$

$\mathbf{R}_{sf} \approx \mathbf{I}_3$ (小角度情况下), 角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_f$ 应当由编队姿态参考坐标系的估计得到。

3.6 无拖曳卫星干扰及噪声模型

3.6.1 卫星本体受到的外部干扰力

作用在卫星本体上的干扰包括大气阻力、太阳光压等外部环境干扰和推力器执行机构噪声。卫星与地球大气高层相互作用和卫星表面电磁辐射取决于卫星的轨道, 对于低轨卫星来说大气阻力是主要干扰; 另一方面, 与执行机构有关的干扰力大小取决于卫星的设计。

(1) 大气阻力

大气阻力的表达式为:

$$\mathbf{F}_p = -\frac{1}{2} C_D \cdot S_D \cdot \rho_a \cdot V_a \mathbf{V}_a \quad (3-90)$$

其中:

C_D : 大气阻力系数, 其值取为 $C_D = 2.2$;

S_D : 卫星迎流面面积, $S_D = 1\text{m}^2$;

ρ_a : 卫星所在高度的大气密度, 对于 350km 高度卫星, $\rho_a = 1\text{E-12 kg/m}^3$;

\mathbf{V}_a : 相对大气速度, $\mathbf{V}_a = \mathbf{v}_{eci} - \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{eci} - \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}$, \mathbf{v}_a 为大气运动速度, $\boldsymbol{\omega}_E$ 为地球自转角速度, \mathbf{v}_{eci} 为卫星在惯性系中的速度。

对于低轨卫星来说, 大气阻力是主要的干扰, 卫星受到的噪声和干扰都是随机信号, 利用功率谱密度等随机信号处理的基础知识来进行描述。图 3-8 给出了大气阻力加速度的功率谱密度曲线。

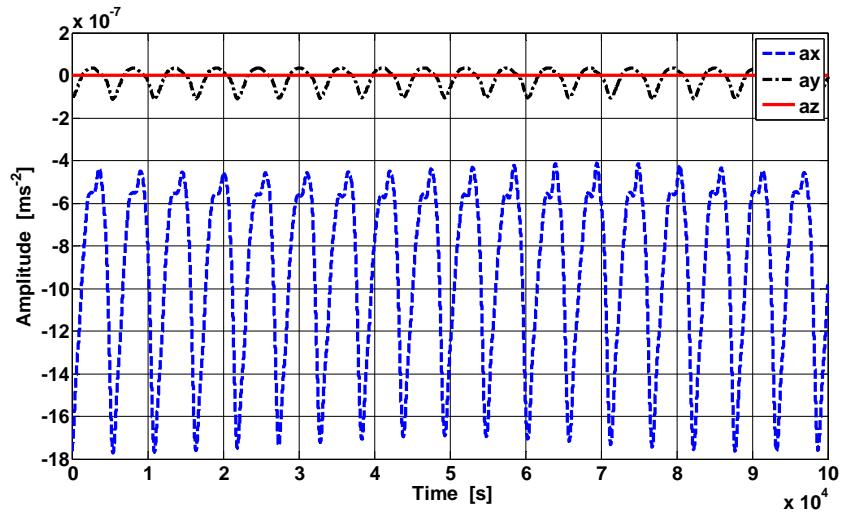


图 3-7 大气阻力产生的干扰加速度时域曲线

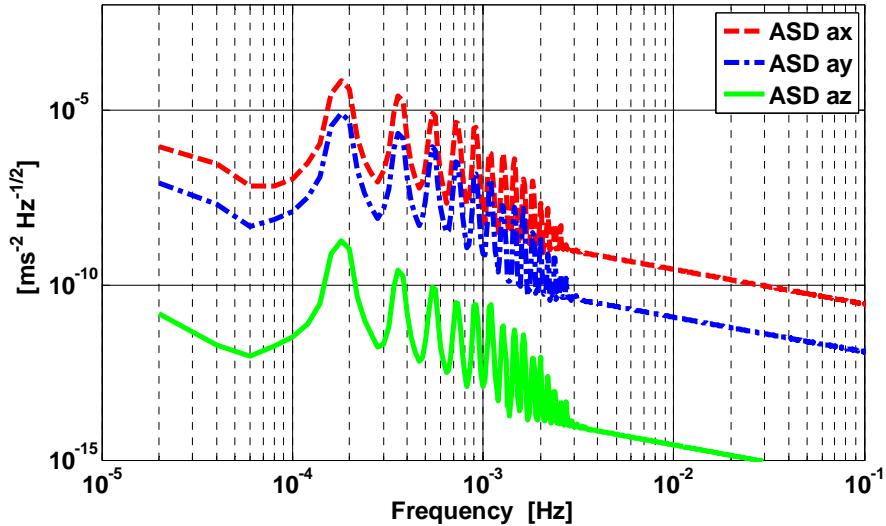


图 3-8 大气阻力加速度功率谱密度幅值变化(ASD)

(2) 太阳光压

光压作用对航天器轨道所产生的摄动力为:

$$\mathbf{F}_s = -k \cdot \rho_{SR} \cdot C_R \cdot S_R \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (3-91)$$

其中:

C_R ——航天器的表面反射系数, 一般取为 1~1.5 之间, 本文取 1.5;

ρ_{SR} ——太阳常数, 取值为 $4.56 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$;

S_R ——太阳光线照射面积, $S_R = 9.6128 \text{ m}^2$

$\hat{\mathbf{r}}$ ——地心到太阳的单位矢量;

k ——受晒因子;

$$\mathbf{F}_s = -k \cdot \rho_{SR} \cdot C_R \cdot S_R \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

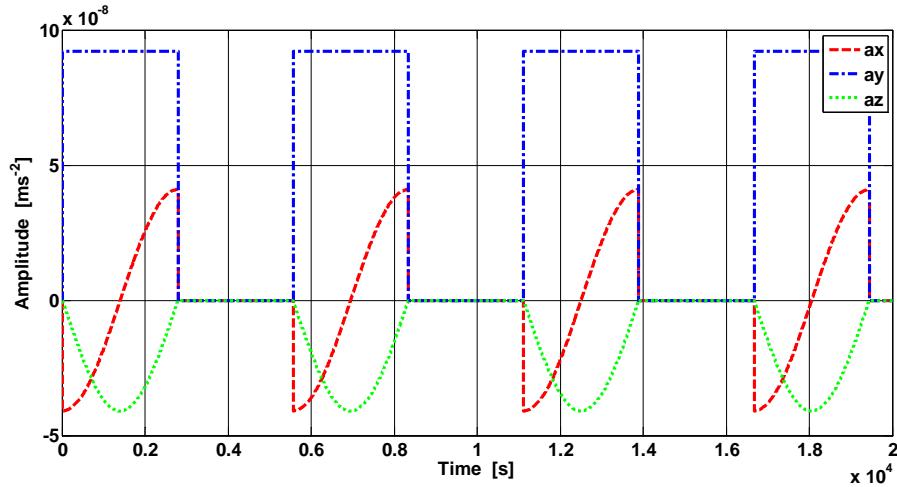


图 3-9 太阳光压时域曲线

3.6.2 卫星本体受到的干扰力矩

空间环境力矩主要包括重力梯度力矩、太阳光压力矩，气动力矩：

(1) 重力梯度力矩

星体受到的重力梯度力矩模型为：

$$\mathbf{T}_g = \frac{3\mu}{r^3} (\mathbf{r}_{be} \times \mathbf{I}\mathbf{r}_{be}) \quad (3-92)$$

其中， \mathbf{I} 为星体的惯量阵， \mathbf{r}_{be} 为卫星指向地心的单位矢量，其方向与星体在轨道坐标的姿态相对应，其方向余弦为姿态矩阵的三要素，即：

$$\mathbf{r}_{be} = [A_{xz} \quad A_{yz} \quad A_{zz}]^T = [-\cos\varphi\sin\theta \quad \sin\varphi \quad \cos\varphi\cos\theta]^T \quad (3-93)$$

对于圆轨道有 $\mu/r^3 = \omega_0^2$ ，其中 ω_0 为轨道角速度。

(2) 太阳光压力矩

当太阳光压力中心与卫星质心不重合时，产生光压力矩，光压力矩表示为：

$$\mathbf{T}_{ds} = \mathbf{L}_s \times \mathbf{R}_{bi} \mathbf{F}_s \quad (3-94)$$

其中：

\mathbf{L}_s ——太阳光压中心到卫星质心的距离

\mathbf{R}_{bi} ——地心惯性坐标系到卫星本体坐标系的转换矩阵。

(3) 气动力矩

卫星质心与气动力作用中心不重合将产生气动力矩，气动力矩计算如下：

$$\mathbf{T}_{dp} = \mathbf{L}_p \times \mathbf{R}_{bi} \mathbf{F}_p \quad (3-95)$$

其中 \mathbf{L}_p 为太阳帆板迎风面压力中心至卫星质心的距离。

3.6.3 加速度计测量噪声模型

考虑加速度计测量噪声为有色噪声，加速度计三个轴中的 Z 轴精度较高，另外两个轴精度相对较低，用于卫星非重力加速度测量时，通常将精度较低的轴沿 Y 轴安装。在加速度计测量表达式： $\tilde{a}_l(t) = a_l(t) + b_l(t) + n_l$ ， b_l 为偏置误差， n_l 为噪声。

参照欧洲 NGGM 对加速度计的噪声功率谱定义^[102]，取值为：

对于 X 轴，Z 轴：

$$S_{n_l,xz}(f) = 4 \cdot 10^{-11} \sqrt{\left(\frac{0.001\text{Hz}}{f}\right)^4 + 1 + \left(\frac{f}{0.01\text{Hz}}\right)^4} \left[\frac{m}{s^2\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad (3-96)$$

对于 Y 轴：

$$S_{n_l,y}(f) = 4 \cdot 10^{-10} \sqrt{\left(\frac{0.001\text{Hz}}{f}\right)^4 + 1 + \left(\frac{f}{0.01\text{Hz}}\right)^4} \left[\frac{m}{s^2\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad (3-97)$$

由于确定了噪声的功率谱，利用 Matlab 的工具 LTPDA 产生时域上的噪声模拟如下图所示。

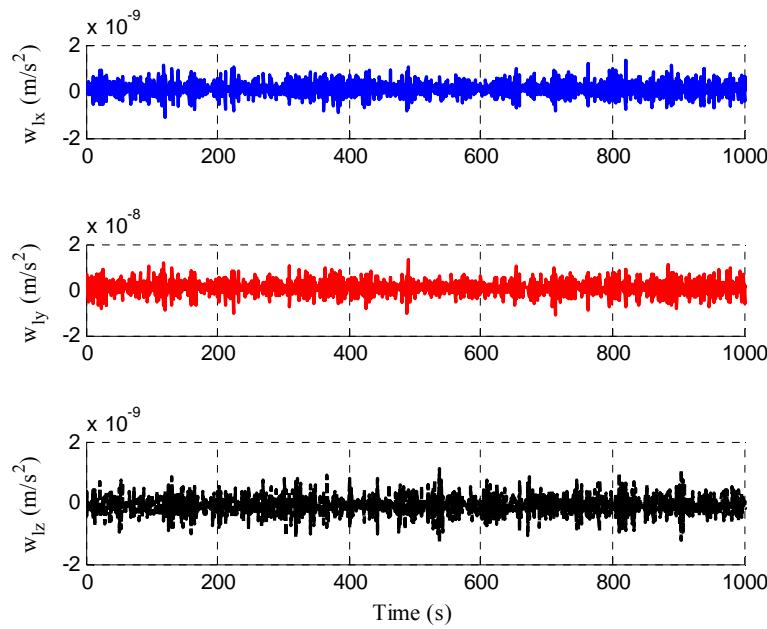


图 3-10 时域上的加速度计测量噪声模拟

根据时域噪声计算噪声功率谱密度，与理论功率谱密度曲线比较如下图所示，可以看出数字模拟符合功率谱密度约束。

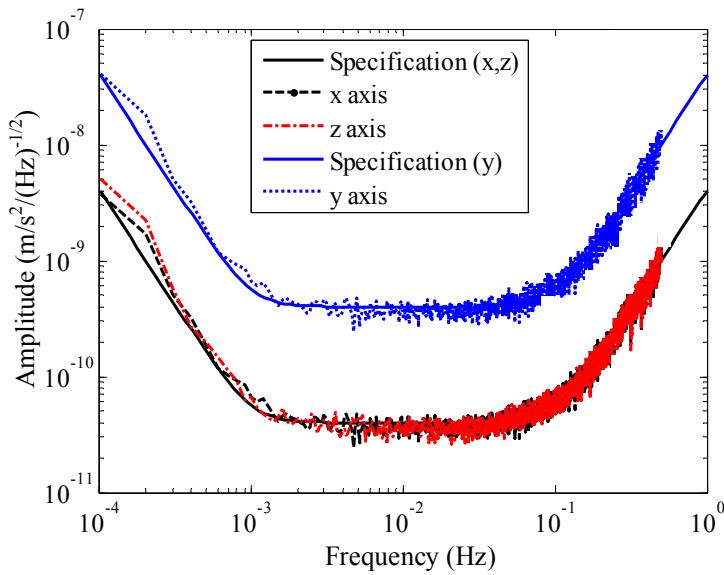


图 3-11 模拟噪声的功率谱密度

3.6.4 推力器噪声模型

推力器是卫星控制的主要执行机构，参照下一代重力场卫星的方案论证情况^[102]，选取了2类推力器，冷气微推进系统和RIT微推进系统，参数如下表所示。

表 3-1 推力器参数

	毫牛级推力器	微牛级推力器
类型	Cold gas	RITRadio-frequency Ion
推力范围	500μN~8mN	100μN~2mN
应用	沿迹 drag-free 编队 姿态	径向、法向 drag-free 编队 姿态
噪声功率谱	30μN/√Hz	1μN/√Hz
数量	1+1(备份)	8

模拟产生微推力器的有色噪声，使白噪声通过传递函数后获得。设定的功率谱密度函数为：

$$S_{th,micro}(f) = 24 \cdot \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{f}{0.08}\right)^2}{\left(1 + \frac{f}{0.002}\right)\left(1 + \frac{f}{0.05}\right)}} \left[\frac{\mu N}{\sqrt{Hz}} \right] \quad (3-98)$$

$$S_{th,min_i}(f) = 5 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{f}{0.1}\right)^2}{\left(1 + \frac{f}{0.006}\right)\left(1 + \frac{f}{0.008}\right)}} \left[\frac{\mu N}{\sqrt{Hz}} \right] \quad (3-99)$$

产生的有色噪声时间序列如图3-12，图3-13所示。

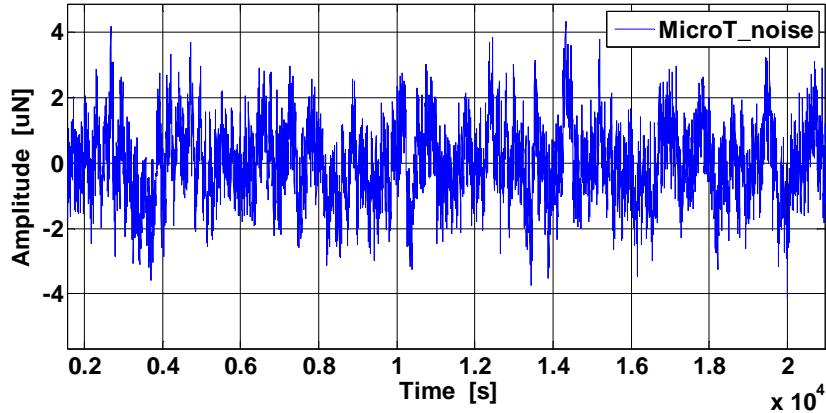


图 3-12 时域上的微牛推力器噪声模拟

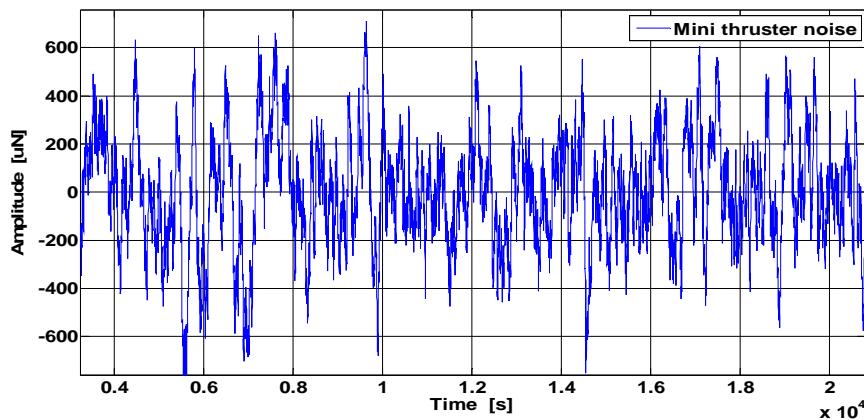


图 3-13 时域上的推力器噪声模拟

根据时域噪声计算噪声功率谱密度，与理论功率谱密度曲线的符合性如下图所示，可以看出毫牛推力器在 0.5Hz 以上频带内的噪声为 $30\mu\text{N}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，微牛推力器在 0.1Hz 以上频带内的噪声约 $1\mu\text{N}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，符合指标定义。

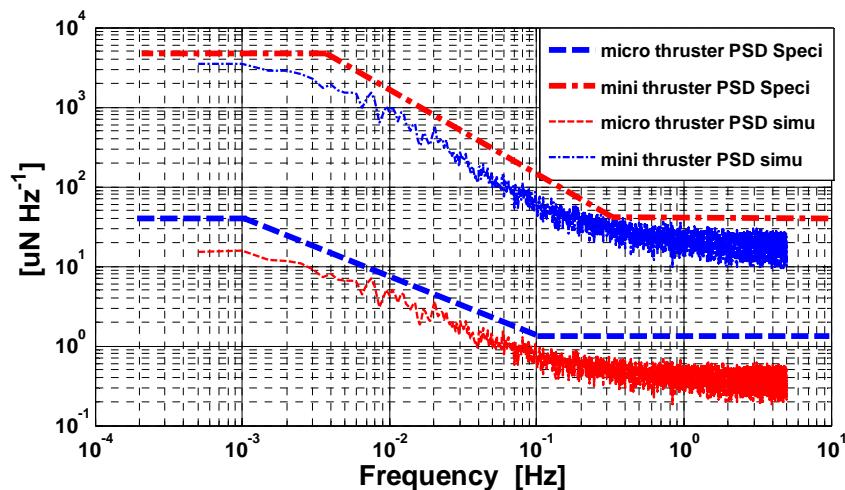


图 3-14 推力器噪声功率谱要求及数字模拟

3.7 本章小结

与传统的“主-从”式编队动力学不同，本章针对重力场测量编队卫星推导了以两颗卫星中点为参考的相对动力学方程，建立了参考坐标系，可以将控制指令平均分配到两颗卫星上，有利于控制过程的平滑，减少控制加速度引起的干扰。分析了由地球引力模型 J2 项引起的动力学自身干扰 $\mathbf{g}(\theta)$ 的表达式，在编队相对位置控制过程中应减少对 $\mathbf{g}(\theta)$ 引起位置变化的响应。建立了姿态参考坐标系、卫星姿态动力学模型，建立了从推力器指令到加速度计输出的 drag-free 动力学模型，分析了模型的简化表示以及不确定度随频率的变化。分析了无拖曳卫星受到的大气干扰、光压干扰力以及空间干扰力矩幅值随频率变化关系。结合工程项目中的加速度计、推力器相关指标定义，给出了典型噪声功率谱密度的数字模型与时域、频域响应曲线。本章参考坐标系、动力学模型、噪声模型的建立为后续章节的分析与设计奠定了基础。

第4章 编队回路相对位置估计与控制方法研究

4.1 引言

对于无拖曳编队卫星，由于存在加速度计测量偏置误差、推力器噪声等干扰，单星无拖曳控制也会产生一定的残差，难免引起星间距的漂移，有必要施加编队控制。然而，重力场测量任务的核心是实现编队卫星腔体内检验质量块相对距离的高精度测量，使精度达到纳米量级，而对星间距的控制维持误差则允许在几十米内，因此无阻力卫星编队本质上是一种“松散式”的编队。考虑到维持编队需要产生持续的推力，实现编队控制的同时又产生了影响重力场测量精度的单颗无拖曳卫星非保守力加速度干扰，所以二者之间是矛盾的，这也是无拖曳卫星编队控制的特殊性。针对地球重力场测量需求，无拖曳卫星编队的相对位置控制精度要求并不苛刻，但执行机构、敏感器等卫星重要部件需要满足严格的限制条件， 1mHz 到 10mHz 通常为星间测距和收集数据所关注的频带范围，要求检验质量的残余加速度应低于 10^{-8}m/s^2 ，这成为了限制控制系统输出的强约束条件。此外，卫星编队动力学模型在通道间的强耦合效应、轨道 J2 项摄动干扰等也会引起星间距周期性的变化，这些均增加了编队控制的难度。卫星的轨道测量获取的位置、速度信息用于编队及姿态参考坐标系的计算，提高轨道测量与估计的精度有利于降低系统的不确定性，本文研究轨道位置、速度及飞行坐标系的动力学估计方法。

由于卫星的控制要求中对误差存在功率谱密度约束，需要研究频域设计方法，本文选取了定量反馈理论（QFT， Quantitative Feedback Theory），研究无拖曳卫星编队控制中的回路整形与解耦方法，通过设计更具一般性的满系数矩阵反馈控制器，一方面解决了被控对象的解耦问题，另一方面解决了不同频段的约束差异。

4.2 功率谱密度约束下的飞行坐标系估计

4.2.1 参考坐标系转化矩阵误差分析

卫星的位置、速度用于计算参考坐标系及坐标系转换矩阵。卫星的轨道测量基于 GPS 接收机实现，测量中存在位置、速度噪声，从而影响参考坐标系计算及转换矩阵精度。对于常规精度卫星，将 GPS 的采集数据进行简单滤波后，可以提供给控制系统，而在重力场测量卫星系统中，这样的噪声量级是无法接受的，必须进行特殊手段处理。状态参数估计的任务是设计相应的观测器，将误差估计出来，从而在使用敏感器数据的时候可以消除这些误差，提高卫星状态参数的精度。

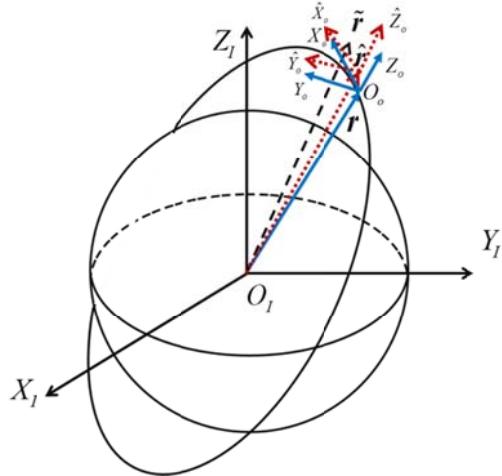


图 4-1 当地轨道坐标系的真实值与估计值

惯性坐标系与当地质心轨道坐标系 LORF 之间的转化矩阵由位置矢量 \mathbf{r} 与速度矢量 \mathbf{v} 得到。对于卫星位置与速度矢量，定义其测量值为 $\tilde{\mathbf{r}}$ ， $\tilde{\mathbf{v}}$ ，由 GPS 测得，估计值为 $\hat{\mathbf{r}}$ ， $\hat{\mathbf{v}}$ ，由轨道坐标系估计器获得。轨道坐标系 LORF 的计算如下式：

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|, \mathbf{y}_o = \mathbf{v} \times \mathbf{r} / \|\mathbf{v} \times \mathbf{r}\|, \mathbf{z}_o = \mathbf{x}_o \times \mathbf{y}_o \quad (4-1)$$

LORF 的测量误差可由真实坐标系 $\{O_o, X_o Y_o Z_o\}$ 与测量坐标系 $\{\hat{O}_o, \hat{X}_o \hat{Y}_o \hat{Z}_o\}$ 之间的转换矩阵表示。估计误差可由真实坐标系 $\{O_o, X_o Y_o Z_o\}$ 与估计坐标系 $\{\tilde{O}_o, \tilde{X}_o \tilde{Y}_o \tilde{Z}_o\}$ 之间的转换矩阵确定。定义 R_0 为真实 LORF 坐标系与惯性坐标系之间的转换矩阵，则 \tilde{R}_0 ， \hat{R}_0 为与之相对应的测量值与估计值，均可表示为：

$$R_0 \tilde{E}_0 = \tilde{R}_0, \tilde{E}_0 \cong I + \Delta \tilde{E}_0$$

$$R_0 \hat{E}_0 = \hat{R}_0, \hat{E}_0 \cong I + \Delta \hat{E}_0$$

设 $\tilde{\mathbf{e}}_o = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{ox} \\ \tilde{e}_{oy} \\ \tilde{e}_{oz} \end{bmatrix}$ ， $\hat{\mathbf{e}}_o = \begin{bmatrix} \hat{e}_{ox} \\ \hat{e}_{oy} \\ \hat{e}_{oz} \end{bmatrix}$ 分别为矩阵转换欧拉角矢量，则在小角度情况下，根据

转换矩阵计算公式可得：

$$\Delta \tilde{E}_o = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{e}_{oz} & \tilde{e}_{oy} \\ \tilde{e}_{oz} & 0 & -\tilde{e}_{ox} \\ -\tilde{e}_{oy} & \tilde{e}_{ox} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$$\Delta \hat{E}_o = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{e}_{oz} & \hat{e}_{oy} \\ \hat{e}_{oz} & 0 & -\hat{e}_{ox} \\ -\hat{e}_{oy} & \hat{e}_{ox} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

另外，对于近圆轨道，可建立 $\tilde{\mathbf{e}}_o$ 与惯性位置、速度的测量误差 $\Delta \tilde{\mathbf{r}}, \Delta \tilde{\mathbf{v}}$ 相关，则有：

$$\tilde{e}_o \equiv \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\Delta \tilde{r}_y \\ \Delta \tilde{r}_x - \Delta \tilde{v}_z / \omega_0 \\ \Delta \tilde{v}_y / \omega_0 \end{bmatrix}, \quad r = R + h, \quad v = \omega_0 r \quad (4-4)$$

根据轨道高度， $\omega_0 = \sqrt{\mu/r^3} \approx 1.2 \text{ mrad/s}$ 为轨道角速度，对应的频率为 $f_0 = (2\pi)^{-1} \omega_0 \approx 0.19 \text{ mHz}$ 。

将 GPS 误差作为高斯白噪声考虑，采样为 1Hz，目前 GPS 定轨输出数据的误差用标准差表示为： $\sigma_r = 30 \text{ m}$ （位置 1σ ）， $\sigma_v = 0.03 \text{ m/s}$ （速度 1σ ），根据公式，则可获得轨道坐标系转换矩阵的测量误差功率谱为：

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{ox} \\ \tilde{S}_{oy} \\ \tilde{S}_{oz} \end{bmatrix}(f) \equiv \frac{\sqrt{2T_g}}{r} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sqrt{\sigma_r^2 + (\sigma_v/\omega_0)^2} \\ \sigma_v/\omega_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6.5 \\ 8.5 \\ 5.5 \end{bmatrix} \text{ urad} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (4-5)$$

坐标系矩阵的误差是姿态误差中的一部分，为了减少参考坐标系带来的误差，需要实施在线估计，即提高 \hat{r} , \hat{v} 的精度。

4.2.2 基于轨道动力学的估计器模型

由于卫星的控制周期远小于卫星的轨道周期，因此，轨道动力学方程在控制时间间隔内变化缓慢，可以近似认为在此时间范围内状态方程不随时间变化，则轨道的角速度均为，

$$-\underline{\omega}_0^2(I + \partial\Omega(r_i)) = -\omega_i^2 \quad (4-6)$$

下面将推导状态变量 r_k , $k=1,2,3$, 和 v_k 的离散形式。轨道动力学的状态转移矩阵 Φ_k 为，

$$\Phi_k = e^{F_k \Delta t} \quad (4-7)$$

其中 Δt 为离散力学模型的递推时间步长，与卫星 drag-free 控制时间间隔一致， F_k 为式 (3-12) 的状态方程矩阵：

$$F_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{ki}^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

转移矩阵 Φ_k 展开式：

$$\Phi_k = I + F_k \Delta t + (F_k \Delta t)^2 / 2! + (F_k \Delta t)^3 / 3! + \dots \quad (4-9)$$

若取其三阶近似，考虑到 400m 圆轨道的 $\omega_{ki} \approx 0.00114 \text{ rad/s}$ ，略去 ω_{ki} 的四阶项，状态转移矩阵为，

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 - \omega_{ki}^2 \Delta t^2 / 2 & \Delta t - \omega_{ki}^2 \Delta t^3 / 6 \\ -\omega_{ki}^2 \Delta t & 1 - \omega_{ki}^2 \Delta t^2 / 2 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

将离散动力学方程中 \dot{r}_k 和 v_k 单位转换成[m]，即 $v_k = v_k \Delta t$ ，且以 Δt 时间内卫星轨道弧度 $\alpha_{ki} = \omega_{ki} \Delta t$ 代入式 (4-10)，则离散动力学方程可以写为

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{k,i+1} \\ \dot{v}_{k,i+1} \end{bmatrix} = A_{ck} \begin{bmatrix} r_{k,i} \\ v_{k,i} \end{bmatrix} + B_c d_k(i) \quad (4-11)$$

其中， $A_{ck} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_{ki}^2/2 & 1 - \alpha_{ki}^2/6 \\ -\alpha_{ki}^2 & 1 - \alpha_{ki}^2/2 \end{bmatrix}$ ， $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $d_k(i) = \Delta t \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{dk}(\tau) d\tau$ 。

以上离散动力学方程为精确动力学方程的简化形式，省略了 J_2 项扰动加速度展开式的高阶项、地球不规则引力。

本文设计两方面的噪声：drag-free 控制的残余加速度噪声、地球不规则引力场模型误差。文献[103]针对 GOCE 卫星噪声的 PSD 分析结果表明，非引力残余加速度可以近似为白噪声 w_{01} 。近地卫星所受非规则引力加速度主要来源于 J_2 项，其余不规则引力项可近似为随机漂移 $\mathbf{z}_k^T = [z_{1k} \ z_{2k}]$ ，由一对随机噪声 w_{02} 和 w_{03} 驱动。模型误差的离散动力学方程设计如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k(i+1) &= A_d \mathbf{z}_k(i) + G_d \mathbf{w}_k(i) \\ \mathbf{d}_k(i) &= B_c d_k(i) = H_c \mathbf{z}_k(i) + G_c \mathbf{w}_k(i) \end{aligned} \quad (4-12)$$

其中， $A_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $G_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $H_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $G_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{w}_k = [w_{01} \ w_{02} \ w_{03}]^T$

是三维的随机噪声项。

将式 (4-12) 带入式 (4-11)，得到完整的状态估计方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix}(i+1) &= F \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix}(i) + G \mathbf{w}_k(i) \\ \mathbf{Y}_k(i) &= C \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix}(i) \end{aligned} \quad (4-13)$$

其中， $F = \begin{bmatrix} A_{ck}(i) & H_c \\ 0 & A_d \end{bmatrix}$ ， $G = \begin{bmatrix} G_c \\ G_d \end{bmatrix}$ ， $C = [I \ 0]$ 。

记 GPS 测量值 $\mathbf{Y}(i)$ 与估计值 $\mathbf{Y}_k(i)$ 之差为模型误差 \mathbf{e} ， $\mathbf{e} = \mathbf{Y}(i) - \mathbf{Y}_k(i)$ 。若存在时变的增益矩阵 $\mathbf{L}(i)$ ，得到误差 $\mathbf{w}_k(i)$ 的估计值为 $\bar{\mathbf{w}}_k(i) = \mathbf{L}(i)\mathbf{e}(i)$ 。根据模型误差的递推方程 (4-12)，加速度噪声为三维矢量，为从二维模型误差估计三维的加速度噪声，反馈增益矩阵 $\mathbf{L}(i)$ 应该设计成 3×2 矩阵。在 GPS 测量误差中，位置误差远大于速度误差值，为了让所有误差都进入闭环状态估计，其增益矩阵 $\mathbf{L}(i)$ 设计成如下形式^[70]，

$$\mathbf{L}(i) = \begin{bmatrix} 0 & l_{0v} \\ 0 & l_{1v} \\ l_{2r} & l_{2v} \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

含有反馈增益矩阵的状态预测方程如下所示：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix}(i+1) &= A \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix}(i) + B \mathbf{Y}(i) \\ \hat{\mathbf{Y}}_k(i) &= C \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix}(i) \end{aligned} \quad (4-15)$$

其中, 状态预测矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_{ck}(i) - G_c L(i) & H_c \\ -G_d L(i) & A_d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} G_c \\ G_d \end{bmatrix} L(i)$ 。由于 A_{ck} 是时变矩阵,

为保证 A 定常, 需设计时变的增益矩阵 $\mathbf{L}(i)$ 。

4.2.3 功率谱密度约束条件下的最优估计方法

4.2.3.1 传递函数与功率谱密度

若设计时变的增益矩阵 $\mathbf{L}(i)$, 使得状态预测方程为定常线性系统, 则输入输出信号的功率谱密度由系统传递函数 $G(f)$ 连接^[104]:

$$S_e(f) = |G(f)|^2 S_m(f) \quad (4-16)$$

其中, $S_m(f)$ 为输入信号, 即测量值的功率谱密度, $S_e(f)$ 为输出信号, 即估计值的功率谱密度。离散系统的传递函数可以写为:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{C \text{adj}(zI - A)^{-1} B + D \det(zI - A)}{\det(zI - A)} \quad (4-17)$$

其中 $z = e^{j2\pi fT}$, T 为采样间隔。对于本文研究的 2 输入、2 输出系统, 传递函数为 2×2 维矩阵形式:

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) & G_2(z) \\ G_3(z) & G_4(z) \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

针对预测闭环方程 (4-14), 估计值 $\hat{\mathbf{Y}}_k(i) = [\hat{r}_k \ \hat{v}_k]$ 的功率谱密度为:

$$\begin{aligned} \hat{r}_k(z) &= G_1(z)r_k(z) + G_2(z)v_k(z) \\ \hat{v}_k(z) &= G_3(z)r_k(z) + G_4(z)v_k(z) \end{aligned} \quad (4-19)$$

一般情况下, Drag-free 卫星针对测量频带会有特殊的精度要求, 要求 LORF 估计与预测误差在整个时域上的均方根不大于 $200 \mu\text{rad}$, 测量带宽内的 PSD 不大于 $4.3 \mu\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$, 参照 GOCE 卫星的约束边界如图 4-2 所示。

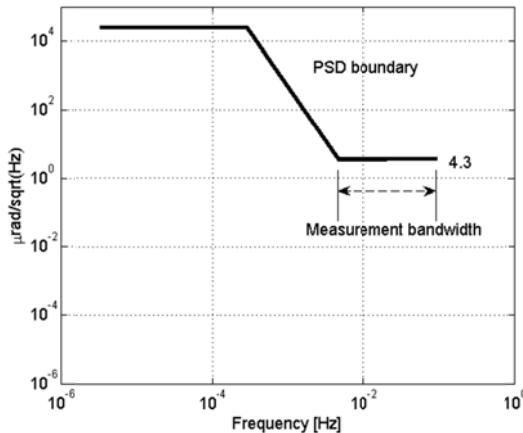


图 4-2 当地轨道坐标系估计的误差功率谱密度约束

在测量频段内，输入噪声需被抑制，而在低频范围，估计误差的约束较为宽松，因此，本文的状态估计器需兼具两项功能：低通滤波和最小方差估计。对于低通滤波器而言，其状态估计矩阵的极点需配置在复平面单位圆内的 $(1,0i)$ 附近，同时，离散系统传递函数的零点也决定了低通滤波器对高频信号的压制效果。

4.2.3.2 含有功率谱密度约束的最优估计器

对于离散动力系统，系统稳定的充要条件是状态转移矩阵的特征值位于复平面的单位圆内。因此，增益矩阵参数的设置需满足两个约束条件：1) 状态估计器矩阵定常；2) 预测器矩阵特征值的模小于 1。

增益矩阵 $\mathbf{L}(i)$ 可通过设定矩阵 \mathbf{A} 的四个特征值 $\lambda_{i,i=1,2,3,4}$ 来计算。首先，通过轨道状态估计值计算状态转移矩阵 \mathbf{A}_{ck} ，然后，通过设定特征值 λ_i 来求解线性代数方程 $|\mathbf{A}_{ck} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ 获得时变增益矩阵 $\mathbf{L}(i)$ 。对于状态估计而言， $\mathbf{L}(i)$ 决定了离散系统的收敛性及状态估计与预测效果，从传递函数角度看，不同的增益矩阵构建不同的传递函数 $G(z)$ ，也影响到了估计误差的功率谱密度。

对于一般的卫星状态估计算法，以估计误差均方差 σ 作为评价指标，drag-free 卫星还需考虑频域约束，在测量带宽内，要求轨道坐标系测量误差不大于 $4.3\mu\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。因此，需根据 GPS 获得的卫星状态信息，设计合理的状态观测器，使得输出噪声的功率谱密度满足测量条件。

本文状态观测器设计分为两个步骤：1) 通过特征值设置与传递函数对误差功率谱密度的放大、压制信息分析，结合卫星测量带宽，获得特征值的取值范围；2) 以特征值取值范围、状态估计误差 PSD 测量频带要求为约束条件，以状态估计误差均方根为目标函数，通过序列二次规划方法(SQP)获得满足约束条件的状态观测器。优化模型下所示，

$$\begin{aligned}
 & \min. \quad \sigma(\hat{\mathbf{e}}_0(\lambda)) \\
 \text{st.} \quad & 0.99 < \lambda_{i,i=1,\dots,4} < 1 \\
 & \text{PSD}(f)_{0.005 \leq f \leq 0.1 \text{Hz}} < 4.3 \mu\text{rad}
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

在优化计算过程中，轨道状态估计采用式 (4-14)，GPS 测量信号来源于轨道精确递推，并加入高斯白噪声。

含有功率谱密度约束的最优估计器设计流程如下图所示。

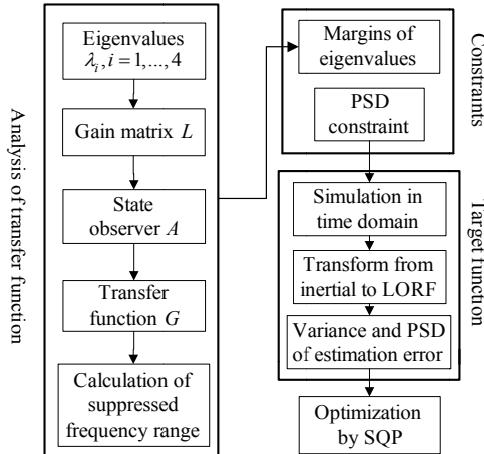


图 4-3 含有功率谱密度约束的最优状态估计器设计流程

4.2.4 轨道最优估计数值仿真

4.2.4.1 状态观测器特征值边界分析

为了直观的了解闭环观测方程极点配置与状态估计及频域压制效果，这里采用高斯白噪声作为输入噪声，研究极点配置对输出误差噪声的影响。假设 GPS 位置和速度噪声分别为 1σ 为 30 m 和 0.03 m/s(1σ)，其误差功率谱密度如下图所示。

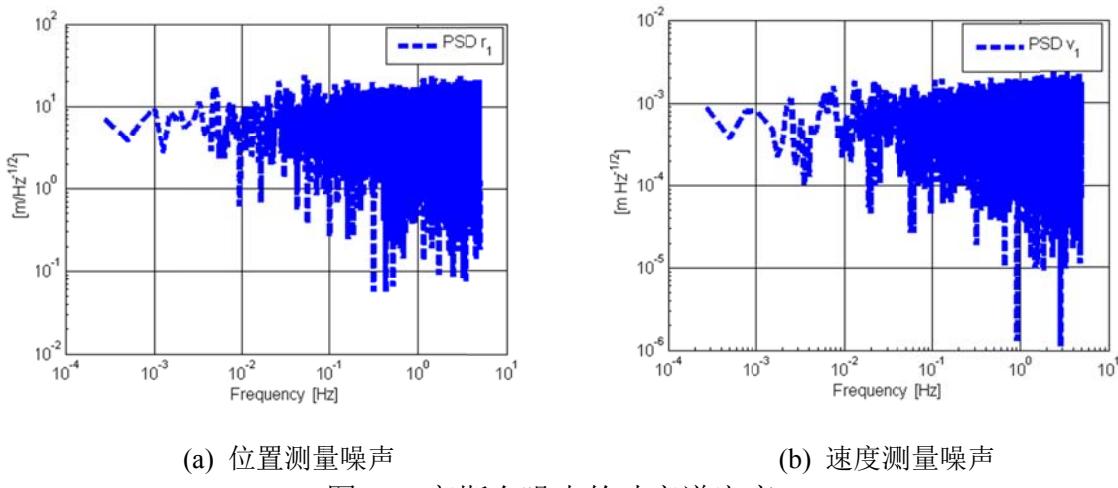


图 4-4 高斯白噪声的功率谱密度

白噪声功率谱几乎均匀分布，因此，在提高轨道估计精度的同时，压制测量频带

的噪声功率谱密度。若观测矩阵的极点配置在复平面单位圆(1, 0i)附近，则状态观测器可以对高频噪声压制。分别以极点 $\lambda_{i,i=1,\dots,4} = 0.99$ 和 0.999 为例，传递函数 $G(z)$ 的四个分量随频率变化如下图所示。

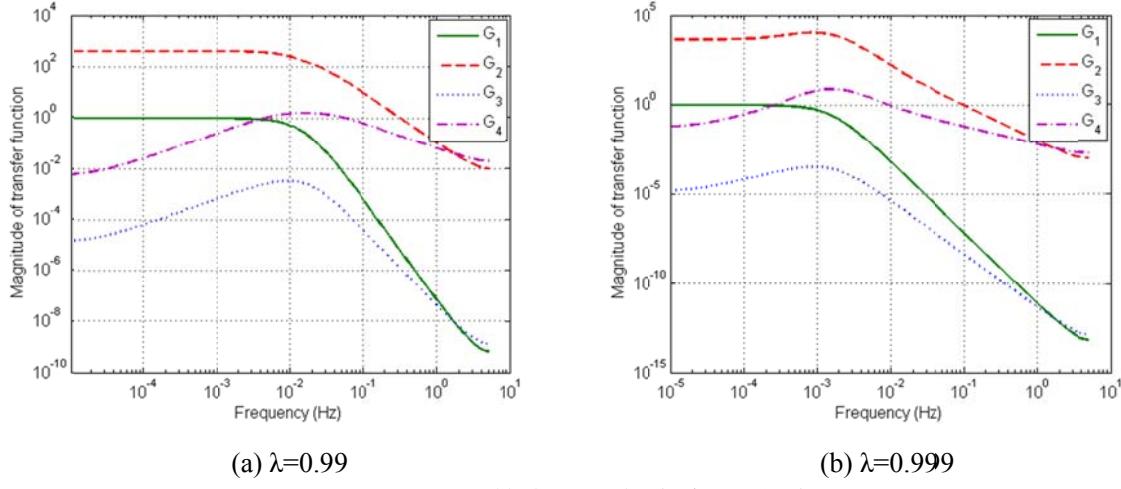


图 4-5 传递函数大小随频率变化关系

根据式 (4-18)， G_1 、 G_2 分别乘以测量值 r_i 和 v_i 功率谱密度后加和为估计状态 \hat{r}_k 的功率谱密度。可见，当 $\lambda=0.99$ 时，在高频范围， $f > 0.01 \text{ Hz}$ ，状态观测器对误差具有明显的压制效果。同时，应注意， G_4 在 0.01Hz 附近对输入信号存在放大效应，会使的输入信号在该频率的幅值增大。为满足测量频带 PSD 约束，传递函数对功率谱密度的压制范围须扩大。如图 4-5 (b) 所示，当 $\lambda=0.999$ 时，传递函数对输入信号的 PSD 压制范围扩大至 $f \approx 0.001 \text{ Hz}$ ，但是伴随而来的是 G_3 、 G_4 对速度估计误差在 $0.0002\sim0.006 \text{ Hz}$ 范围内更大的放大效应。

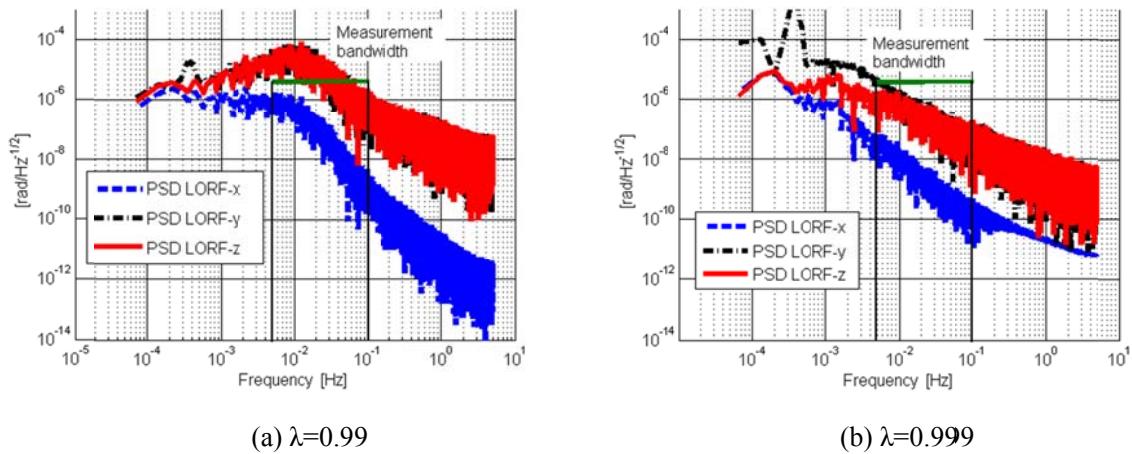


图 4-6 当 $\lambda=0.99$ 和 0.999 时的当地轨道坐标系估计误差功率谱密度

通过对状态观测器传递函数的仿真可见，1) λ 取值增大会促进状态观测器对信号 PSD 压制的频率范围扩大，有利于满足测量频带误差的约束条件；2) λ 增大的同

时，在中频会带来速度误差放大效应，应综合考虑高频压制和中频放大因素，并以整个时域上估计误差的均方根最小作为 λ 的取值准则。根据上述方法计算其 LORF 误差功率谱密度如图 4-6 所示，频率的压制效果与传递函数所体现的规律一致： $\lambda=0.99$ 时，会在 $f \approx 0.01$ Hz 处对速度误差产生放大效应，如图(a)所示， $f \approx 0.01$ Hz 附近，与速度相关的 LORF y 轴和 z 轴估计误差在 $f \approx 0.01$ Hz 附近为峰值；当 $\lambda=0.999$ 时，与传递函数所表现的规律一致，状态观测器最输入信号 PSD 压制频率范围扩大至 0.001 Hz，图(b)中 PSD 峰值前移至 0.001 Hz 附近，然而，由于传递函数对速度的放大效应，在 $f \approx 0.001$ Hz 附近，LORF y 轴误差被放大，不满足约束条件。

通过以上分析可见，大的特征值将会产生更大的频率压制范围，使得压制范围逐步向低频扩展，然而，大的特征值还会导致速度误差的放大，可能破坏功率谱密度约束条件。对于 250 km 高度的太阳同步轨道卫星，建议特征值取值大于 0.99。

4.2.4.2 最小方差估计

以估计误差均方根为优化目标，不考虑测量频带内的功率谱约束条件，状态估计矩阵的特征值优化结果如下： $J_1 = [0.995483 \ 0.996608 \ 0.991828 \ 0.999871 \ 0.999736 \ 0.992393 \ 0.998912 \ 0.994079 \ 0.997859 \ 0.999900 \ 0.990314 \ 0.990594]$ 。惯性系系， r_1 和 v_1 的测量与估计误差分别如下图所示，经状态观测器估计后的状态误差比 GPS 降低约一个数量级。

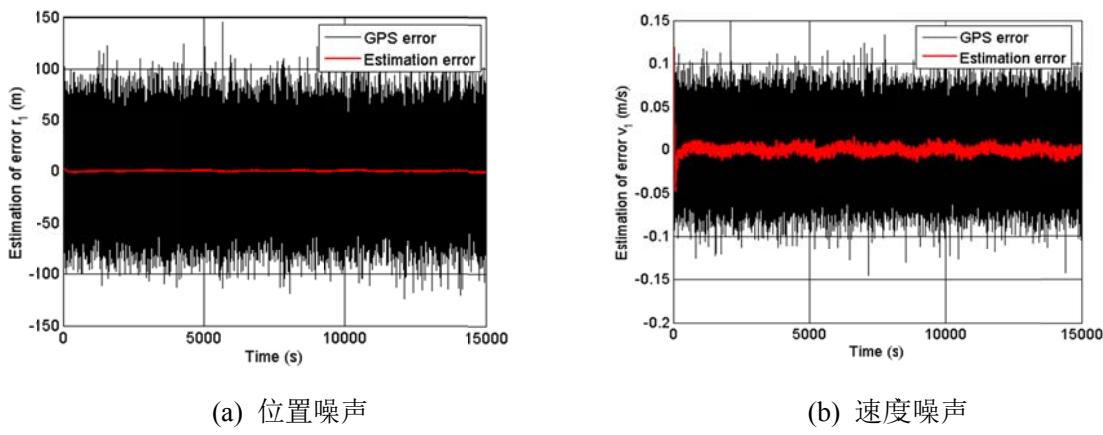


图 4-7 GPS 噪声和最优估计后的噪声

将计算结果转换成 LORF 误差矩阵 e ，计算 LORF 分量的误差功率谱密度，如下图所示。在测量频带，0.001~0.01Hz 范围内存在功率谱密度的幅值大于 $4.3\mu\text{rad}$ ，不满足测量约束条件。可见，估计误差最小均方根不一定满足功率谱密度约束条件。同时，从功率谱密度图可见，特征值需进一步增大以将输出噪声压制到更低的频率。

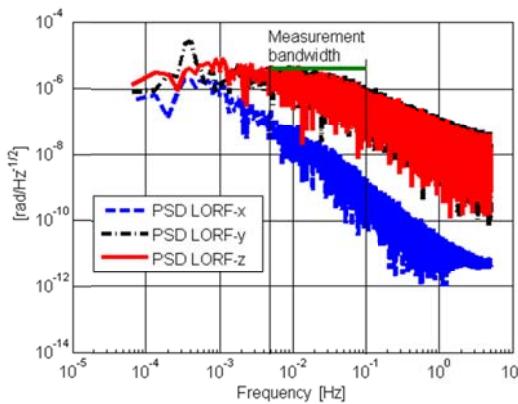


图 4-8 最小方差估计条件下的当地轨道坐标系误差功率谱密度

4.2.4.3 含有功率谱密度约束的最小方差估计

以均方根大小为优化目标函数,代入估计误差在测量频带的约束条件及特征值取值约束,经 SQP 优化,结果为: $J_1 = [0.998981 \ 0.999923 \ 0.996176 \ 0.997671 \ 0.996533 \ 0.999264 \ 0.997781 \ 0.997053 \ 0.997544 \ 0.999030 \ 0.996703 \ 0.999105]$ 。优化结果对应的传递函数如下图所示,与 r 估计误差相关的 G_1 和 G_2 对高频压制起点约为 1×10^{-3} Hz,有利于满足测量频带内约束条件。然而,与 v 估计误差有关的 G_3 和 G_4 尽管对高低频均存在压制效果,但是在 1×10^{-3} Hz 附近,对输入信号有放大效应,这意味着速度 v 的估计误差在该频率附近有超过输入误差的可能。

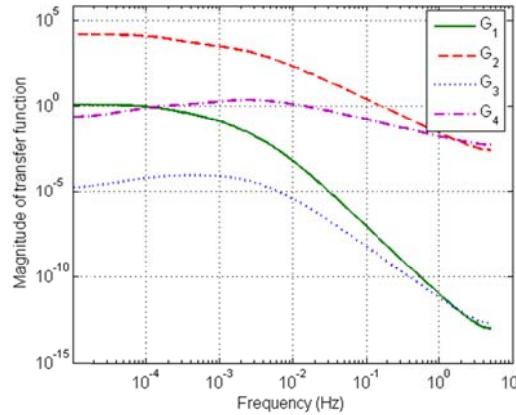


图 4-9 含有功率谱密度约束条件的最优估计器传递函数

LORF 估计误差功率谱密度如下图所示,在测量频带内,估计误差的最大幅值为 $3.7\mu\text{rad}$,满足约束条件。与 $\lambda_{i,i=1,\dots,4} = 0.999$ 相比(图 4-5(b)),传递函数对速度的放大效果在频率为 0.01Hz 附近大幅减小。

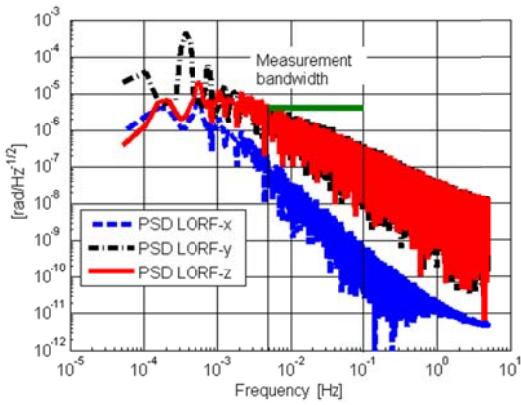


图 4-10 含有功率谱密度约束条件的当地轨道坐标系最优功率谱密度

从估计误差曲线，如下图所示，不难发现， r, v 估计值保留了低频误差，过滤了高频误差，这与之前的传递函数曲线分析结果一致。同时，对于 v 估计误差而言，由于传递函数对输入误差在 1×10^{-3} Hz 附近存在放大效应， v 估计误差曲线在该频率附近的估计值相比于 GPS 误差并没有明显下降。

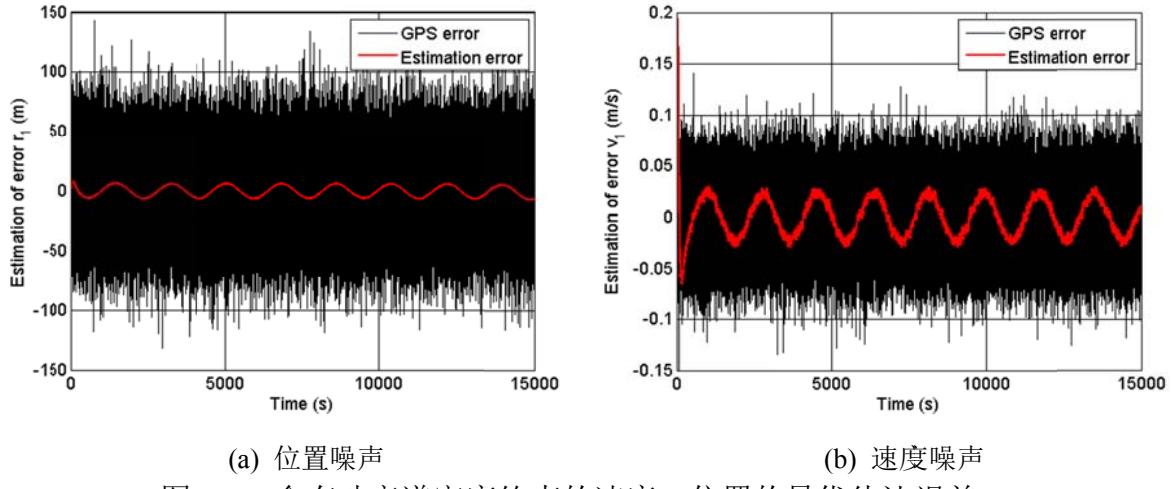


图 4-11 含有功率谱密度约束的速度、位置的最优估计误差

4.3 基于 QFT 的 MIMO 编队控制器设计方法

4.3.1 基于 QFT 的控制理论与设计方法

经典的 PID 控制与鲁棒控制，其本质均不是在频域中的设计方法，QFT 是一种基于频域的鲁棒控制理论，在设计控制器之前把系统的各种不确定性和需要达到的性能指标以定量的形式描述出来，然后根据这些限定，设计可以容忍这些不确定性并且满足性能指标的控制器^{[104]-[110]}。运用 QFT 设计时，用作图的方法把设计指标和系统的不确定性用定量的方法在 Nichols 图上形成边界，然后基于这些边界设计满足要求的控制器，QFT 可应用于各种控制系统，可面向多输入多输出（MIMO）的非线性时变系统，处理方法是将 MIMO 系统转化为单输入单输出系统 SISO 来处理，将耦合项

作为干扰处理，控制器只能为对角线形式。Wu.S.F.^[111]将 QFT 应用于航空器的 MIMO 系统，研究了对角线 QFT 控制器的设置。Wu.S.F.^[76]还利用 QFT 的多边界约束特点，研究了 Lisa Pathfinder 中的航天器-检验质量的无拖曳控制问题，也是均化为 SISO 来进行设计。近几年国外发展出更具一般性的 MIMO 耦合控制器处理方法，可以设计非对角线上的控制器^{[112]~[117]}，也成为全系数控制器矩阵。Boje,E^{[113], [114]}讨论了全系数矩阵控制器下的定量反馈系统设计方法。Garcia-Sanz,M.^[115]提出了更具一般性的全系数矩阵设计方法，给出了两种不同的控制器矩阵构造形式，并将这种方法在大型挠性航天器控制上进行应用^[116]，也对编队系统进行了设计与仿真，用以解决参数不确定问题^[117]。本论文研究基于 QFT 的控制器，主要解决无拖曳卫星编队相对动力学在低频段强耦合与控制输出受限的问题，这是无拖曳系统所特有的问题，已有的研究还未涉及这方面的问题。Drag-free 编队的控制在频域上有着严格的约束，而 X 轴与 Z 轴的输入输出存在强耦合，研究基于 QFT 的控制算法预期可获得良好的控制效果。基于 QFT 控制的系统如下图所示。

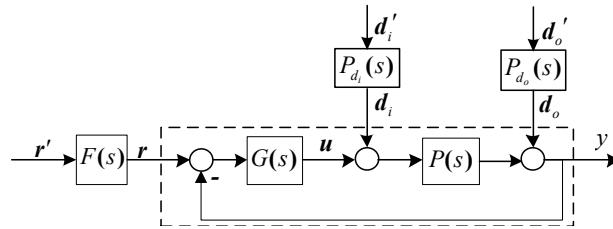


图 4-12 基于 QFT 的控制系统框图

考虑一个 $n \times n$ 的线性多变量系统， P 为被控对象， G 为全矩阵， F 为前置滤波器， P_{di} 为输入干扰的传递函数， P_{do} 为输出干扰的传递函数，对象 $P \in \mathfrak{P}$ ， \mathfrak{P} 为参数在不确定性范围内的对象集合。

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & \cdots & p_{1n}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) & \cdots & p_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}(s) & p_{n2}(s) & \cdots & p_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}(s) & g_{n2}(s) & \cdots & g_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

$$F(s) = \begin{bmatrix} f_{11}(s) & f_{12}(s) & \cdots & f_{1n}(s) \\ f_{21}(s) & f_{22}(s) & \cdots & f_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(s) & f_{n2}(s) & \cdots & f_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

期望矢量 r' ， d_i' ， d_o' 为系统的输入，输出 y 则为被控制变量，用 P^* 表示 P 矩

阵的逆，可分解为主对角线和非对角线矩阵：

$$\begin{aligned} P(s)^{-1} &= P^*(s) = \begin{bmatrix} p_{ij}^*(s) \end{bmatrix} = \Lambda(s) + B(s) \\ &= \begin{bmatrix} p_{11}^*(s) & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_{nn}^*(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & P_{1n}^*(s) \\ \cdots & 0 & \cdots \\ P_{n1}^*(s) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-24)$$

控制器矩阵按照对角线与非对角线变量，也可分为 2 部分。

$$G(s) = G_d(s) + G_b(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_{nn}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & g_{1n}(s) \\ \cdots & 0 & \cdots \\ g_{n1}(s) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

Λ 为对象矩阵的对角部分， B 为非对角部分， G_d 为控制矩阵的对角部分， G_b 为非对角部分，

基于 QFT 的控制系统可将控制期望主要分为系统跟踪性能、输入干扰抑制性能、输出干扰抑制性能^[115]。

(1) 系统的跟踪性能

考虑从 r' 到 y 的传递函数，其表征了系统的跟踪能力。

$$y = (I + PG)^{-1} PGr - T_{y/r} Fr' \quad (4-26)$$

考虑对 P ， G 矩阵的分解，

$$P^{-1} = P^* = \begin{bmatrix} p_{ij}^* \end{bmatrix} = \Lambda + B = \begin{bmatrix} p_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_{nn}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_{1n}^* \\ 0 & \cdots & 0 \\ p_{n1}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

$$G = G_d + G_b = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & 0 & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

则将 P ， G 分解矩阵代入，可表示为：

$$T_{y/r} r = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} G_d r + (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} (G_b r - (B + G_b) T_{y/r} r) \quad (4-29)$$

在闭环系统的传递函数表达式中，可以分为对角项与非对角项两部分：

1) 对角项

$$T_{y/r_d} = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} G_d \quad (4-30)$$

由于不含非对角项，则控制器本身相当于对 n 个 SISO 系统的控制。

2) 非对角项

$$T_{y/r_b} = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} (G_b - (B + G_b) T_{y/r} r) = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} C_1 \quad (4-31)$$

在上式中，只有 C_1 非对角项相关，则 C_1 代表了系统跟踪问题中的耦合项效应。

$$C_1 = (G_b - (B + G_b)T_{y/r}r) \quad (4-32)$$

C_1 中的每一项:

$$C_{1ij} = g_{ij} (1 - \delta_{ij}) - \sum_{k=1}^n (p_{ik}^* + g_{ik}) t_{kj} (1 - \delta_{ik}) \quad (4-33)$$

其中 δ_{ki} 定义为:

$$\delta_{ki} = \begin{cases} \delta_{ki} = 1 \Leftrightarrow k = i \\ \delta_{ki} = 0 \Leftrightarrow k \neq i \end{cases} \quad (4-34)$$

则第 i 路的等效 SISO, MISO 系统如下图所示。

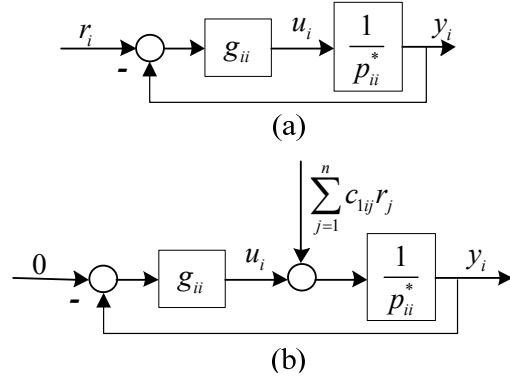


图 4-13 第 i 路的等效 SISO 和 MISO

可见, 对于 MISO 系统, 对于回路 i , 是将其它回路等效为输入干扰来考虑。

(2) 系统的输入干扰抑制特性

考虑从系统的输入干扰 d_i' 到输出的闭环传递函数:

$$y = (I + PG)^{-1} P d_i = T_{y/di} d_i = T_{y/di} P d_i' \quad (4-35)$$

$$T_{y/di} d_i = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} d_i + (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} ((B + G_b) T_{y/di}) d_i \quad (4-36)$$

闭环传递函数可分为对角项和非对角项 2 部分, 分别推导传递函数:

1) 对角项传递函数

$$T_{y/di_d} = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} \quad (4-37)$$

2) 非对角项传递函数

$$T_{y/di_b} = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} (B + G_b) T_{y/di} = I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} C_2 \quad (4-38)$$

C_2 与非对角项相关, 代表了系统输入干扰问题中的耦合项效应。

$C_2 = (B + G_b) T_{y/di}$, C_2 中的每一项:

$$C_{2ij} = \sum_{k=1}^n (p_{ik}^* + g_{ik}) t_{kj} (1 - \delta_{ik}) \quad (4-39)$$

输入干扰抑制等效框图如下图所示。

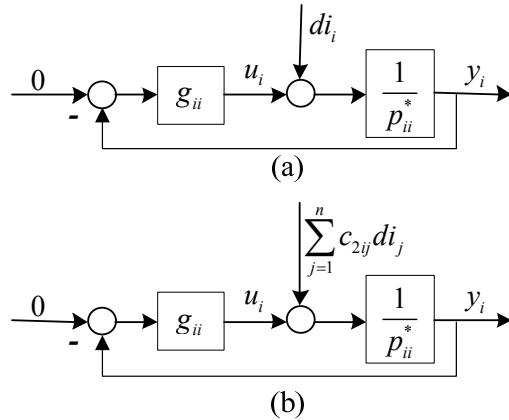


图 4-14 输入干扰抑制的系统框图

(3) 系统的输出干扰抑制特性

考虑从输出干扰 d_o 到系统输出的闭环传递函数为:

$$y = (I + PG)^{-1} d_o = T_{y/do} d_o = T_{y/do} P_{do} d_o' \quad (4-40)$$

根据矩阵分解, 传递函数可转化为:

$$T_{y/do} d_o = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} d_o + (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} (B - (B + G_b) T_{y/do}) d_o \quad (4-41)$$

闭环传递函数可分为对角项和非对角项 2 部分:

1) 对角项

$$T_{y/do_d} = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \quad (4-42)$$

2) 非对角项

$$T_{y/do_b} = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} (B - (B + G_b) T_{y/do}) = (I + \Lambda^{-1} G_d)^{-1} \Lambda^{-1} C_3 \quad (4-43)$$

其中 C_3 只与非对角项相关, $C_3 = B - (B + G_b) T_{y/do}$, 耦合矩阵的元素 C_{3ij} 有:

$$C_{3ij} = p_{ij}^* (1 - \delta_{ij}) - \sum_{k=1}^n (p_{ik}^* + g_{ik}) t_{kj} (1 - \delta_{ik}) \quad (4-44)$$

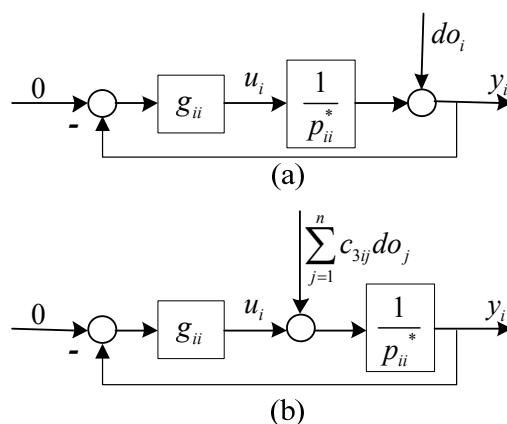


图 4-15 输出干扰抑制系统框图

为了设计具有低耦合效应的 MIMO 控制器, 需要分析耦合项 C_{1ij} , C_{2ij} , C_{3ij} 中的非对角项 g_{ij} 的影响, 用以评估耦合效应。首先假设在式 (4-33), (4-39), (4-44) 中, 在所关注的频带中:

$$|t_{jj}(p_{ij} + g_{ij})| \gg |t_{kj}(p_{ik} + g_{ik})|, \quad k \neq j.$$

这可以通过对相对增益矩阵 (RGA, Relative Gain Analysis) 的计算, 对输入输出矩阵进行排列, 使得对角线上的数值大于非对角线的数值, 即在所关注的频带中, $|t_{jj}| \gg |t_{kj}|$, $k \neq j$ 。

由此, 可通过以下两步化简来评估耦合项 C_{1ij} , C_{2ij} , C_{3ij} :

- 1) 利用假设, 对 (4-33)、(4-39)、(4-44) 中表示的耦合项可重新写为:

$$C_{1ij} = g_{ij} - t_{jj} (p_{ij}^* + g_{ij}), \quad i \neq j \quad (4-45)$$

$$C_{2ij} = t_{jj} (p_{ij}^* + g_{ij}), \quad i \neq j \quad (4-46)$$

$$C_{3ij} = p_{ij}^* - t_{jj} (p_{ij}^* + g_{ij}), \quad i \neq j \quad (4-47)$$

- 2) 对由 (4-45)、(4-46)、(4-47) 所推导的等效系统, 分别计算 t_{jj} :

对应式 (4-45) :

$$t_{jj} = \frac{g_{jj} p_{jj}^{*-1}}{1 + g_{jj} p_{jj}^{*-1}} \quad (4-48)$$

对应式 (4-46) :

$$t_{jj} = \frac{p_{jj}^{*-1}}{1 + g_{jj} p_{jj}^{*-1}} \quad (4-49)$$

对应式 (4-47) :

$$t_{jj} = \frac{1}{1 + g_{jj} p_{jj}^{*-1}} \quad (4-50)$$

将 t_{jj} 分别代入 (4-45) (4-46) (4-47), 可得到化简后的耦合项分别为:

$$C_{1ij} = g_{ij} - \frac{g_{jj} (p_{ij}^* + g_{ij})}{(p_{jj}^* + g_{jj})}, \quad i \neq j \quad (4-51)$$

$$C_{2ij} = \frac{(p_{ij}^* + g_{ij})}{(p_{jj}^* + g_{jj})}, \quad i \neq j \quad (4-52)$$

$$C_{3ij} = p_{ij}^* - \frac{p_{jj}^* (p_{ij}^* + g_{ij})}{(p_{jj}^* + g_{jj})}, \quad i \neq j \quad (4-53)$$

对于具有耦合效应的控制对象, 仅采用对角线控制器矩阵, 难以有效消除或降低耦合项的干扰, 而全系数控制器矩阵, 通过对非对角线项的设计, 使耦合项 C_{1ij} , C_{2ij} ,

C_{3j} 趋近于零。基于 QFT 的全系数矩阵控制器设计分为以下几个步骤^[115]:

1) 控制器结构确定

首先确定控制器结构，通过相对增益矩阵的计算，获得不同频率下的相对增益幅值，将输入与输出对应配置。然后，将 $P^*(s)$ 矩阵重新配置，使得 $[p_{11}^*(s)]^{-1}$ 相位裕度最小， $[p_{22}^*(s)]^{-1}$ 的相位裕度次之，然后对控制器开展 n 步设计，每步设计一个回路，每个回路先设计对角线上的控制项 $g_{nn}(s)$ ，再根据 $g_{nn}(s)$ 设计所在列非对角线上的控制项。

$$\begin{aligned}
 G = & \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{k1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{n1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{k1} & g_{k2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \dots \Rightarrow & \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1k} & \dots & g_{1n} \\ g_{11} & g_{22} & \dots & g_{2k} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{11} & g_{k2} & \dots & g_{kk} & \dots & g_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{11} & g_{n2} & \dots & g_{nk} & \dots & g_m \end{bmatrix} \quad (4-54)
 \end{aligned}$$

2) 设计对角阵控制器

由标准 QFT 回路整形方法使等效设计回路 $[p_{kk}^{*e}(s)]^{-1}$ 的控制器 $g_{kk}(s)$ ，使其满足系统鲁棒稳定和鲁棒性能。等效设计回路的被控对象满足下式的递归关系，该递归关系可延伸到非对角项的变化。

$$\begin{aligned}
 [p_{ij}^{*e}(s)]_k = & [p_{ij}^{*e}(s)]_{k-1} \\
 - & \frac{([p_{i(k-1)}^{*e}(s)]_{k-1} + [g_{i(k-1)}(s)]_{k-1})([p_{(k-1)j}^{*e}]_{k-1} + [g_{(k-1)j}(s)]_{k-1})}{[p_{(k-1)(k-1)}^{*e}]_{k-1} + [g_{(k-1)(k-1)}(s)]_{k-1}} \quad (4-55)
 \end{aligned}$$

其中 $i, j \geq k$ ， $[p^{*e}(s)]_{k-1} = p^*(s)$

3) 设计非对角项控制器

对于控制器矩阵的每一列，设计 $(n-1)$ 个非对角线位置上的控制器 $g_{ik}(s)$ ($i \neq k, i=1, 2, \dots, n$)，设计目的是使得系统内部耦合度 c_{ik} 最小，此外，还可以用来自达到其它补偿目的，如移除系统右半平面的零点等，提高系统的稳定性增益，优

化控制量等。

4) 设计前置滤波器

经过非对角控制器的作用，系统内部耦合作用已经降到了一个很低水平，在此基础上，如需要，可设计前置滤波器 F ，对参考输入信号进行整形。

基于包含非对角控制器的闭环系统稳定性由以下条件保证：

- 1) 每一阶等效回路 $L_i(s) = g_{ii}(s) \left[p_{ii}^{*e}(s) \right]_i^{-1}, i=1,\dots,n$ 均满足奈奎斯特稳定性条件；
- 2) 对于 $g_{ii}(s)$ 和 $p_{ii}^{*e}(s)$ ，之间无右半平面零极点抵消情况出现；
- 3) 对于 $P(s)$ 和 $G(s)$ ，之间无 Smith-McMillan 零极点抵消情况出现；
- 4) 在 $|P^*(s) + G(s)|$ 中，无 Smith-McMillan 零极点抵消情况出现。

4.3.2 基于 QFT 的编队全系数控制器设计

针对重力场测量的无阻力双星编队，其动力学在 X、Z 轴彼此耦合，并且约束条件也在频域上描述，首先将相对动力学方程（3-59）式化为 QFT 控制对象形式，如图 4-16 所示， $d_i(t)$ 、 $g(\theta)$ 均为控制输入端的干扰， $d_o(t)$ 为输出干扰， Δr_{ref} 为期望输入， $F(s)$ 为前置滤波器， $G(s)$ 为控制矩阵， $P(s)$ 为被控对象。

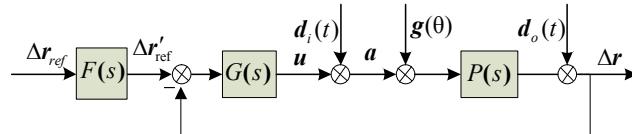


图 4-16 QFT 控制系统结构图

(1) 控制对象转化

将方程（3-59）展开得到：

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{z} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{v}_x \\ \Delta\dot{v}_z \\ \Delta\dot{v}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\underline{\omega} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{\omega}_z^2 & 0 & 2\underline{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{\omega}_y^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta y \\ \Delta v_x \\ \Delta v_z \\ \Delta v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Delta u_{fx} \\ \Delta u_{fz} \\ \Delta u_{fy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{fx}(t) \\ d_{fz}(t) \\ d_{fy}(t) \end{bmatrix} + g(\theta) \right) \quad (4-56)$$

将系统方程写成传递函数的形式:

$$\Delta x(s) = \frac{s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \Delta u_x(s) + \frac{-2\underline{\omega}}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \Delta u_z(s) \quad (4-57)$$

$$\Delta z(s) = \frac{2\underline{\omega}}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \Delta u_x(s) + \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \Delta u_z(s) \quad (4-58)$$

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u_y(s)} = \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_y^2} \quad (4-59)$$

设 $M(s)$ 为系统传递函数, 则

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} & \frac{-2\underline{\omega}}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} & 0 \\ \frac{2\underline{\omega}}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} & \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_y^2} \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

编队模型的 X, Z 轴存在耦合, Y 轴与 X 轴, Z 轴解耦, 故可取非对角形式的控制矩阵为:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xz} & 0 \\ G_{zx} & G_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & G_{yy} \end{bmatrix} \quad (4-61)$$

X, Z 轴耦合被控对象为:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} & \frac{-2\underline{\omega}}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \\ \frac{2\underline{\omega}}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} & \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \end{bmatrix} \quad (4-62)$$

$$\begin{aligned} \Delta r(s) = & [I + M(s)G(s)]^{-1} M(s)(d_i(s) + g(s)) \\ & + [I + M(s)G(s)]^{-1} M(s)G(s)F(s)\Delta r_{\text{ref}}(s) \\ & + [I + M(s)G(s)]^{-1} d_o(s) \end{aligned} \quad (4-63)$$

$$u(s) = [I + M(s)G(s)]^{-1} P(s)G(s)(d(s) + g(s)) \quad (4-64)$$

(2) 控制目标及约束条件转化

QFT 控制设计方法的基本原则为对反映被控对象鲁棒稳定性、灵敏度、干扰抑制的传递函数进行频域约束, 使控制系统的闭环传递函数满足综合性能指标, 也应对被控对象的参数不确定性问题, 本文涉及的指标可定义如下:

1) 鲁棒稳定性:

$$\left| \frac{g_{ii}^{\beta}(j\omega) [p_{ii}^x(s)^{*e}]^{-1}}{1 + g_{ii}^{\beta}(j\omega) [p_{ii}^x(s)^{*e}]^{-1}} \right| < \mu_1 = 1.1 \quad (i=1,2,3) \quad (4-65)$$

确保闭环系统的稳定，相当于控制系统中的幅值裕度 K_M 与相角裕度 Φ_M ：

$$K_M = 1 + \mu_1^{-1} = 5.62 \text{dB} \quad (4-66)$$

$$\Phi_M = 180^\circ - \arccos(0.5\mu_1^{-2} - 1) = 54.07^\circ \quad (4-67)$$

2) 输入干扰抑制及跟踪性能约束

同传统的 QFT 输入干扰抑制定义不同，本文考核的是 u 对输入干扰的响应抑制而非系统输出 Δr 对输入干扰的抑制。而实际上，从输入干扰至控制量的传递函数见式 (4-64)，其形式与跟踪响应函数和鲁棒稳定裕度相同，进而可联合设计。

QFT 控制指标可通过对 (4-63) 式进行闭环响应曲线回路成形来实现，文献[12] 中提出了在全频段压低响应 (10-3) 的方法，虽然控制器阶数较低，但系统闭环响应很慢。本文采用更为复杂的传递函数形式定义边界，形式如 (4-68)，其在 [1, 10] mHz 频段上压低至 10^{-4} ，而在更低的频段则提高响应幅值，进而提高系统响应速度。同时，为了获得期望的跟踪性能，也对闭环传递函数的上下界进行约束，设计上边界和过阻尼下边界传递函数，建立主对角线控制器回路的上下边界，如 (4-69) 式所示。单个闭环传递函数需满足边界函数的合集，满足输入干扰控制量响应抑制和跟踪性能的要求。

$$\delta(\omega) = \frac{1.2 \left(\frac{j\omega}{0.003} + 1 \right)^2}{\left(\frac{j\omega}{10^{-4}} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{6 \times 10^{-4}} + 1 \right)^2} \quad (4-68)$$

$$\delta_{\inf}(\omega) \leq \left| \frac{c_{ii}^{\beta}(j\omega) [p_{ii}^x(s)^{*e}]^{-1}}{1 + c_{ii}^{\beta}(j\omega) [p_{ii}^x(s)^{*e}]^{-1}} \right| \leq \delta_{\sup}(\omega) \quad (4-69)$$

对于 X/Z 回路，式 (4-69) 中边界函数设计为：

$$\delta_{\inf}(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{6 \times 10^{-5}} + 1 \right)^2 \left(\frac{j\omega}{5.5 \times 10^{-4}} + 1 \right)^2} \quad (4-70)$$

$$\delta_{\sup}(\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{2.8 \times 10^{-5}} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{6 \times 10^{-3}} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{7 \times 10^{-3}} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{1 \times 10^{-4}} + 1 \right)^2 \left(\frac{j\omega}{8 \times 10^{-4}} + 1 \right)^2} \quad (4-71)$$

对于 Y 回路，边界函数设计为：

$$\delta_{\inf}(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{7 \times 10^{-5}} + 1 \right)^2 \left(\frac{j\omega}{5 \times 10^{-4}} + 1 \right)^2} \quad (4-72)$$

$$\delta_{\text{sup}}(\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{3 \times 10^{-5}} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{5 \times 10^{-3}} + 1\right)^2}{\left(\frac{j\omega}{5 \times 10^{-5}} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{1 \times 10^{-4}} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{8 \times 10^{-4}} + 1\right)^2} \quad (4-73)$$

(3) 设计 X/Z 轴回路控制器

基于 QFT 可设计满系数鲁棒控制矩阵，具体有以下两种形式：

1) 控制器分为对角矩阵和非对角矩阵线性相加两部分，

$$G_{x/z} = G_d + G_b, \quad G_d = \begin{bmatrix} c_{11}^d & 0 \\ 0 & c_{22}^d \end{bmatrix}, \quad G_b = \begin{bmatrix} 0 & c_{12}^b \\ c_{21}^b & 0 \end{bmatrix} \quad (4-74)$$

适用于考核系统输出对控制输入端干扰的抑制情况，非对角线的控制项主要用来补偿输入端的干扰。

2) 控制器分为对角矩阵和非对角矩阵相乘两部分，

$$G_{x/z} = G_\alpha G_\beta, \quad G_\alpha = \begin{bmatrix} g_{11}^\alpha & g_{12}^\alpha \\ g_{21}^\alpha & g_{22}^\alpha \end{bmatrix}, \quad G_\beta = \begin{bmatrix} g_{11}^\beta & 0 \\ 0 & g_{22}^\beta \end{bmatrix} \quad (4-75)$$

其中 G_α 为预先计算的解耦补偿矩阵，主要目的是使被控对象尽可能的对角化， G_β 为设计得到的符合指标性能的对角阵，用以设计满足跟踪性能约束或输出干扰抑制约束的控制器。本文考虑输入干扰到控制量的响应约束，其传递函数与跟踪性能形式相同，故采用如 (4-75) 的分解方法。

X/Z 轴的动力学方程为双输入双输出系统，通过在频域上计算被控对象的相对增益矩阵 (Relative Gain Array, RGA)，确定系统中输入输出的关联耦合关系，实施控制矩阵的元素配对，将其分解为多个相对独立的矩阵元，其中每个独立矩阵代表存在较强耦合的相应输入输出通道上的控制器结构，其具体计算方法为：

$$RGA(j\omega) = P(j\omega) \otimes (P(j\omega))^T \quad (4-76)$$

式中： \otimes 表示 Kronecker 乘积。

$$RGA(\omega = 10^{-4} \text{ rad/s}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad (4-77)$$

$$RGA(\omega = 10^{-1} \text{ rad/s}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-78)$$

相对增益矩阵幅值、相位随频率变化如图 4-17 所示，在近轨道运动频率处， $\omega = 10^{-4} \text{ rad/s}$ ，对角线元素 $\lambda_{11}, \lambda_{22}$ 数值为 -3，而非对角线元素 $\lambda_{12}, \lambda_{21}$ 的数值为 4，说明被控对象为强耦合输入输出系统。而当频率增加， $\omega = 10^{-1} \text{ rad/s}$ ，对角线数值为 1，非对角线数值为 0，表示被控对象是解耦的。由于 P_{11} 存在一右半平面零点，在 1.8E-4Hz 处，导致了矩阵元素的符号改变。本文所关注的频率为接近轨道频率的低频段，需解决被控对象的解耦问题。

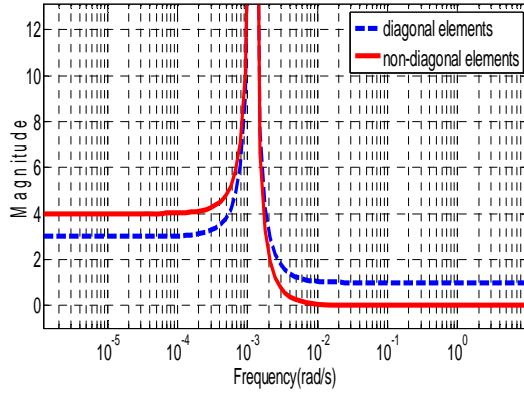


图 4-17 相对增益矩阵幅值、相位随频率变化曲线

为了使被控对象对角化，初始定义：

$$G_\alpha = [g_{ij}^\alpha] = \mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{P}_{\text{diag}} = \left[\frac{p_{ji}\Delta_{ji}}{\Delta} \right]_{ij} \quad (4-79)$$

式中： Δ 为矩阵 \mathbf{P} 的行列式， Δ_{ji} 为矩阵 \mathbf{P} 的第 ji 个余子式， \mathbf{P}_{diag} 为矩阵 \mathbf{P} 的对角部分。

对于 2×2 的 MIMO 系统， G_α 计算为：

$$\begin{aligned} G_\alpha &= P^{-1}(s) * \mathbf{P}_{\text{diag}} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11}p_{22} & -p_{22}p_{12} \\ p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} & p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \\ -p_{11}p_{21} & p_{11}p_{22} \\ p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} & p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \cdot s^2 & \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} (2\omega s) \\ \frac{s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \cdot (-2\omega s) & \frac{1}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} (s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-80)$$

为了简化形式，由于 $\underline{\omega}_z \approx \underline{\omega} = \omega$ ，则得到：

$$G_\alpha(s) = \frac{s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2}{s^2 + \underline{\omega}_z^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\omega s}{s^2 + \underline{\omega}_z^2 - 4\underline{\omega}^2} \\ -2\omega & 1 \end{bmatrix} \approx \frac{s^2 - 3\omega^2}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\omega s}{s^2 - 3\omega^2} \\ -2\omega & 1 \end{bmatrix} \quad (4-81)$$

由于解耦补偿阵 G_α 引入了右半平面零点，为了避免与被控对象中可能出现的右半平面零极点相抵消，对 G_α 进行修正，用 $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ 代替 $s^2 + \omega^2$ ，用 $(s + \sqrt{3}\omega)^2$ 代替 $s^2 - 3\omega^2$ ，其频率响应与原 G_α 相近，但零极点稍有不同，最后可得解耦补偿矩阵的形式为：

$$G'_\alpha(s) = \frac{(s+\sqrt{3}\omega)^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\omega s}{(s+\sqrt{3}\omega)^2} \\ -2\omega & \frac{s}{s} \end{bmatrix} \quad (4-82)$$

$P^x = PG'_\alpha$, 接近于对角阵, 矩阵中的项计算为:

$$\begin{aligned} P^x &= PG_\alpha \\ &= \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} \begin{bmatrix} s^2-3\omega^2 & -2\omega s \\ 2\omega s & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{(s+\sqrt{3}\omega)^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\omega s}{(s+\sqrt{3}\omega)^2} \\ -2\omega & \frac{s}{s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-83)$$

$$P^x(1,1) = \frac{(s+\sqrt{3}\omega)^2}{s^2(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} \quad (4-84)$$

$$P^x(1,2) = \frac{-4\sqrt{3}\omega^2(s+\sqrt{3}\omega)}{s(s^2+\omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} = \frac{-12\omega^3-4\sqrt{3}\omega^2 s}{s(s^2+\omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} \quad (4-85)$$

$$P^x(2,1) = 0 \quad (4-86)$$

$$P^x(2,2) = \frac{s^2+2\sqrt{3}\omega s+7\omega^2}{(s^2+\omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} \quad (4-87)$$

$$P^x = \begin{bmatrix} \frac{(s+\sqrt{3}\omega)^2}{s^2(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} & \frac{-12\omega^3-4\sqrt{3}\omega^2 s}{s(s^2+\omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} \\ 0 & \frac{s^2+2\sqrt{3}\omega s+7\omega^2}{(s^2+\omega^2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} \end{bmatrix} \quad (4-88)$$

$$= \frac{1}{(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} \begin{bmatrix} \frac{(s+\sqrt{3}\omega)^2}{s^2} & \frac{-12\omega^3-4\sqrt{3}\omega^2 s}{s(s^2+\omega^2)} \\ 0 & \frac{s^2+2\sqrt{3}\omega s+7\omega^2}{(s^2+\omega^2)} \end{bmatrix}$$

$$P^x(2,1) = 0 \quad (4-89)$$

对 PG'_α 计算相对增益矩阵, 得到主对角线元素与非主对角元素的值如下图所示, 可见解耦补偿矩阵使得被控对象输入输出解耦, 便于主对角控制器的设计。

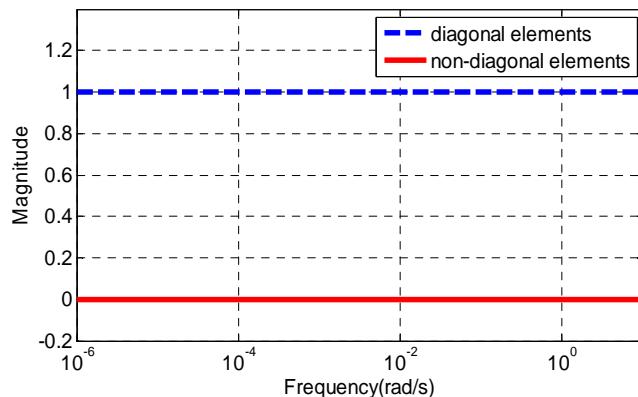


图 4-18 解耦处理后对角元素值与非对角元素值

获得了 P^x ，可以开展第一个回路的控制器 g_{11}^β 的设计，需要先进行以下变换。

$$(P^{x*}) = (P^x)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p_{22}^x}{\det P^x} & -\frac{p_{12}^x}{\det P^x} \\ -\frac{p_{21}^x}{\det P^x} & \frac{p_{11}^x}{\det P^x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_{11}^x} & -\frac{p_{12}^x}{p_{11}^x p_{22}^x} \\ 0 & \frac{1}{p_{22}^x} \end{bmatrix} \quad (4-90)$$

$$[P^{x*}(1,1)]_1 = P^{x*}(1,1) = \frac{1}{P^x(1,1)} \quad (4-91)$$

$$[P^{x*}(1,1)]_1^{-1} = P^x(1,1) = \frac{(s + \sqrt{3}\omega)^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \quad (4-92)$$

利用 QFT 单回路设计方法进行频域上的控制器设计，在 Nichols 图上画出每个频率点所对应的边界 $B_{11}(j\omega)$ ，其中 ω 选取 $[10^{-8}, 1]$ rad/s 范围内的 11 个离散值为 $\{10^{-8}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 1.5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}, 0.1, 1\}$ 。

在 Nichols 图上对含控制器的开环传递函数 $L_{11}(j\omega) = g_{11}^\beta(j\omega)[p_{11}^{x*e}(j\omega)]^{-1}$ 进行回路整定，相应频率点的幅值需要在对应频率的实线边界以上，虚线边界以下，最终为 $g_{11}^\beta(j\omega)$ 配置了 2 个极低频零点和 4 个极点，控制器如式 (4-93) 所示，边界 $B_{11}(j\omega)$ 与 $L_{11}(j\omega)$ 的幅值在 Nichols 图上对应关系如图 4-19 所示，其对应的阶跃响应如图 4-20 所示。

$$g_{11}^\beta = \frac{1.4 \times 10^{-10} (s + 3.45 \times 10^{-6})(s + 8.7 \times 10^{-6})}{(s + 6.6 \times 10^{-6})(s + 3.2 \times 10^{-4})(s + 0.1)} \quad (4-93)$$

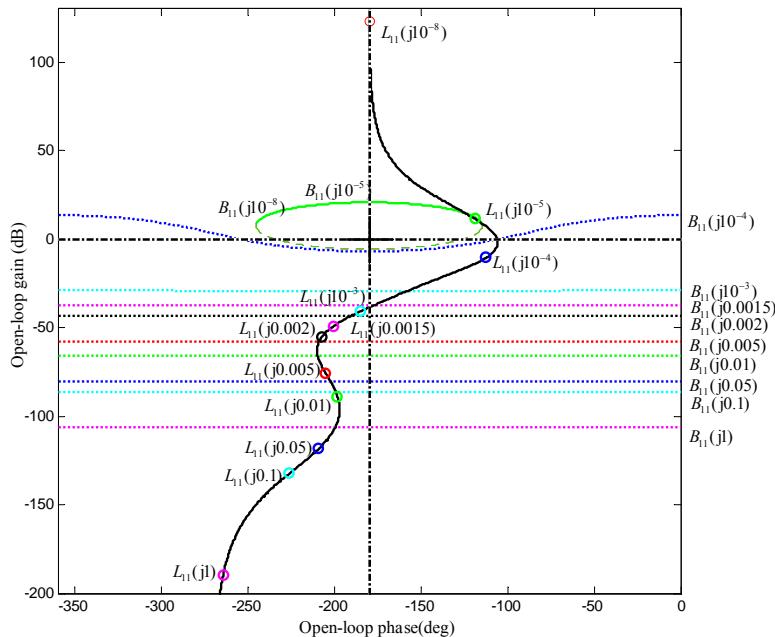


图 4-19 X 轴回路 L11 的 Nichols 图

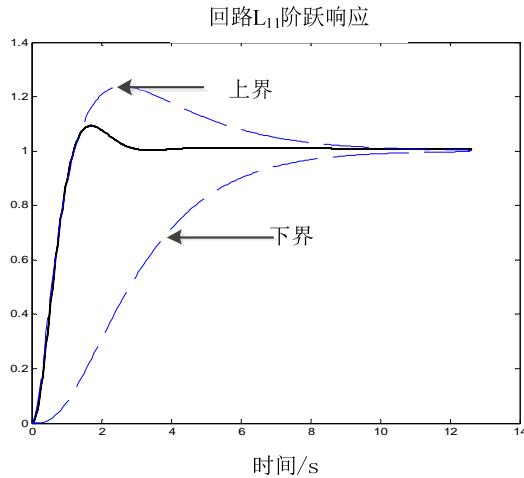


图 4-20 X 轴回路 L11 开环与上下界约束的阶跃响应

对于 Z 回路，根据递推关系式 (4-55)，确定其扩展被控对象 $[P^{x^*e}(2,2)]_2^{-1}$ ，得到其形式如式 (4-94) 所示，然后对应设计控制传递函数，其表达式形式如式 (4-95)，综合设计的边界 $B_{22}(j\omega)$ 与 $L_{22}(j\omega)$ 的幅值在 Nichols 图上的对应关系如图 4-21 所示，相应的阶跃响应如图 4-22 所示。

$$\left[P^{x^*e}(2,2) \right]_2^{-1} = \frac{s^2 + 2\sqrt{3}\omega s + 7\omega^2}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \quad (4-94)$$

$$g_{22}^{\beta} = \frac{1.44 \times 10^{-14} (s + 2.67 \times 10^{-7})(s + 0.01)^2}{s(s + 6.03 \times 10^{-7})(s + 3 \times 10^{-4})^2} \quad (4-95)$$

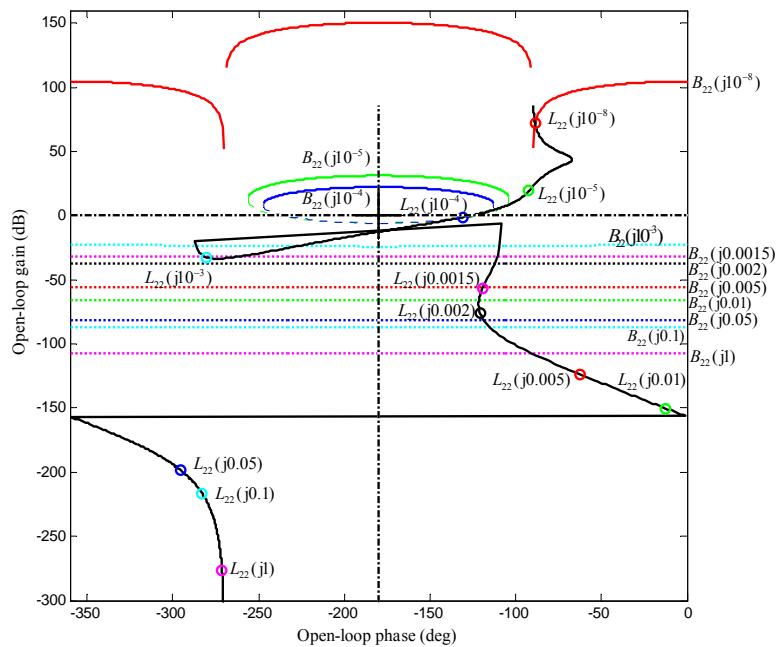


图 4-21 Z 轴回路 L22 的 Nichols 图

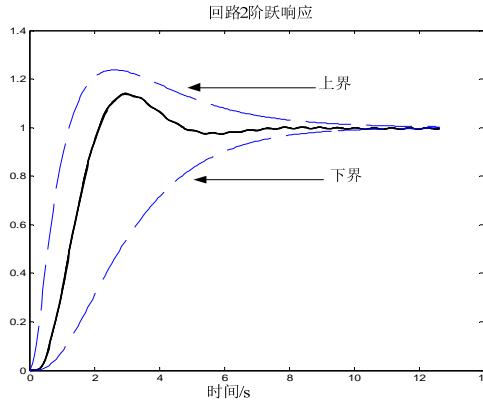


图 4-22 Z 轴回路 L22 开环与上下界约束的阶跃响应

因此，基于频域设计的 X/Z 轴的综合满系数控制器矩阵为：

$$G_{x/z} = \frac{(s + \sqrt{3}\omega)^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \begin{bmatrix} g_{11}^\beta & \frac{2\omega s}{(s + \sqrt{3}\omega)^2} g_{22}^\beta \\ \frac{-2\omega}{s} \cdot g_{11}^\beta & g_{22}^\beta \end{bmatrix} \quad (4-96)$$

(4) Y 轴回路控制器设计

考虑到 Y 轴与 X/Z 轴解耦，为 SISO 系统，可直接基于标准 QFT 方法对被控对象进行设计。Y 轴的传递函数形式如式 (4-97) 所示，采用标准的回路成形方法，得到控制器传递函数如式 (4-98) 所示，其边界 $B_{33}(j\omega)$ 与 $L_{33}(j\omega)$ 的幅值在 Nichols 图上的对应关系如图 4-23 所示，对应的阶跃响应如图 4-24 所示。

$$P(3,3) = \frac{1}{s^2 + \omega_y^2} \quad (4-97)$$

$$c_{33}^\beta = \frac{2.655 \times 10^{-13} (s + 2.37 \times 10^{-7})(s + 1.28 \times 10^{-3})(s + 0.01)}{s(s + 2 \times 10^{-4})^2(s + 8.22 \times 10^{-7})} \quad (4-98)$$

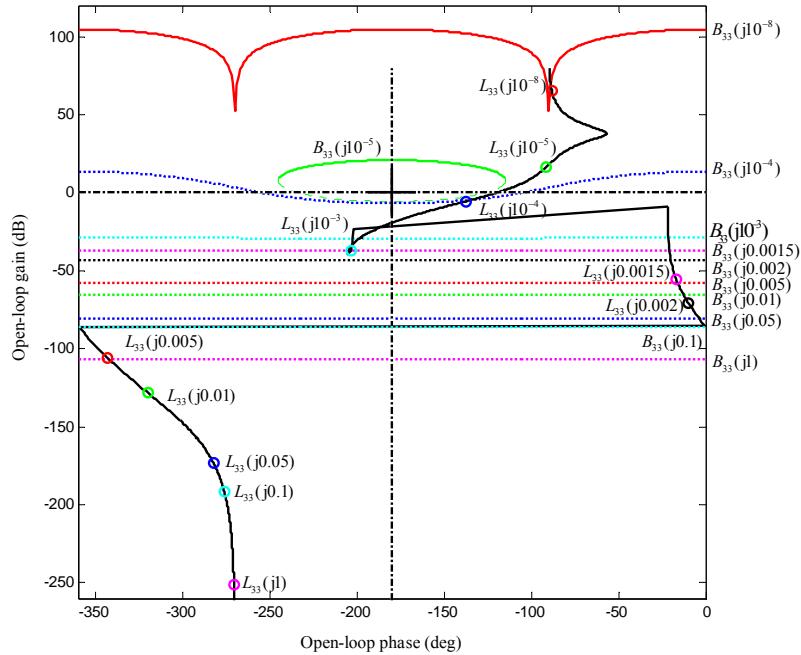


图 4-23 Y 轴回路 L33 的 Nichols 图

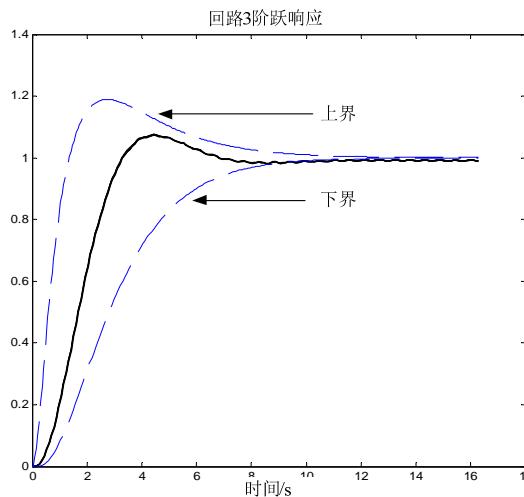


图 4-24 Y 轴回路 L22 开环与上下界约束的阶跃响应

针对无阻力双星编队动力学模型，利用序列 QFT 满系数矩阵控制设计方法经过回路成形得到的控制器形式如式 (4-99) 所示，根据三通道实际闭环 Bode 图与给定的闭环回路传递函数上下边界的关系如图 4-25 所示，三轴闭环传递函数的幅值曲线处于预先设定的边界之内，且在测量频段[1,10] mHz 范围内，闭环响应小于 10^{-4} ，满足要求，而在 <1 mHz 的低频段，闭环响应幅值有所增加。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_x = \frac{(s + \sqrt{3}\omega)^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \cdot c_{11}^\beta \cdot \Delta x + \frac{2\omega}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \cdot c_{22}^\beta \cdot \Delta z \\ \Delta u_z = \frac{-2\omega}{s} \cdot \frac{-2\omega(s + \sqrt{3}\omega)^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \cdot c_{11}^\beta \cdot \Delta x + \frac{(s + \sqrt{3}\omega)^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \cdot c_{22}^\beta \cdot \Delta z \\ \Delta u_y = \frac{2.655 \times 10^{-13} (s + 2.37 \times 10^{-7})(s + 1.28 \times 10^{-3})(s + 0.01)}{s(s + 2 \times 10^{-4})^2 (s + 8.22 \times 10^{-7})} \cdot \Delta y \end{array} \right. \quad (4-99)$$

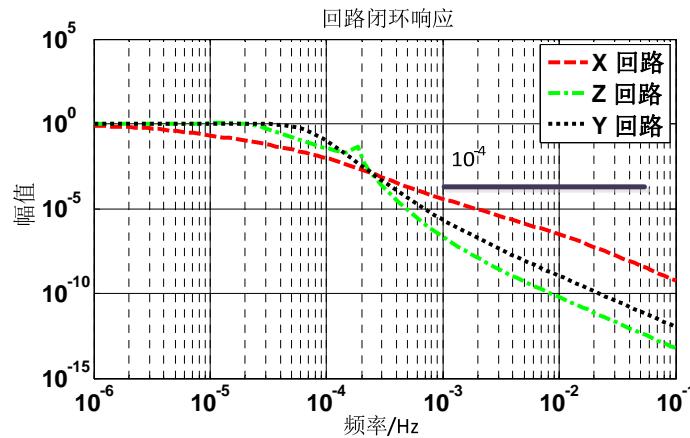


图 4-25 三个回路的闭环传函响应图

(5) 陷波器设计

尽管基于 QFT 的 MIMO 控制器通过闭环回路响应形状整定，降低了对 J2 干扰项的响应，避免了因为 J2 项干扰而导致的推力饱和，但是设计一个针对 $g(\theta)$ 的陷波器可以将特定周期的重力扰动项隔离，可以降低控制量，节省燃料。因此，本文针对轨道频率 f_0 及 2 倍频 $2f_0$ 设计了 4 阶陷波器，陷波器的伯德图如下图所示。

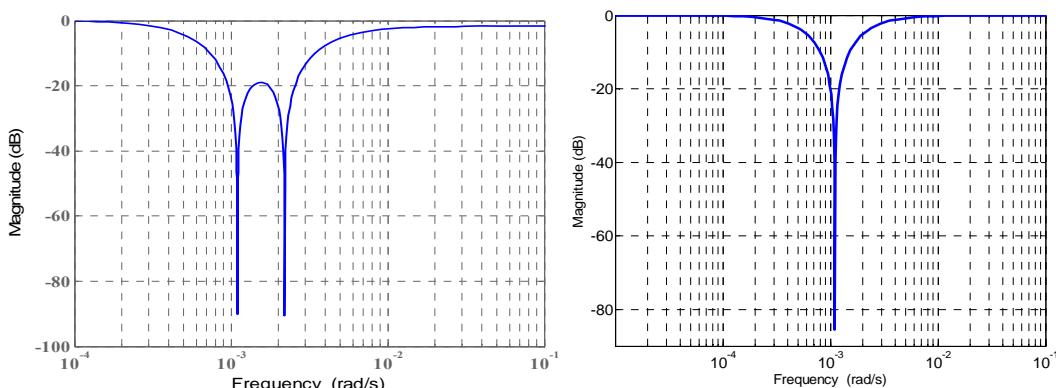
a) 用于 X 轴、Z 轴的陷波器 ($f_0, 2f_0$)b) 用于 Y 轴的陷波器 (f_0)

图 4-26 陷波器的伯德图

在控制过程中，陷波器用于对两颗卫星的相对位置信息进行预处理，隔离 $g(\theta)$ 引起的干扰。

4.3.3 仿真验证与分析

为验证 QFT 控制器的有效性,选取仿真参数如下: 卫星轨道为 400km 的低轨, 轨道倾角 $i=89.5^\circ$, 偏心率为 0.001, 单颗的 Drag-free 卫星质量为 $m=500\text{kg}$, 两星初始相对位置 $\Delta\mathbf{R}_0 = 10^5 \times [1.003 \quad 0.001 \quad -0]^T \text{m}$, 期望相对位置为 $\Delta\mathbf{R}_d = 10^5 \times [1 \quad 0 \quad 0]^T \text{m}$, 为了比较, 前半段未加入陷波器, 在 10^6 秒时, 两星相对距离较期望距离 $\pm 100\text{m}$ 以内, 引入陷波器。

两星瞬时相对位置的偏差位移变化曲线如图 4-27、图 4-29 与图 4-31 所示, 即 $\delta\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R} - \Delta\mathbf{R}_d$, 由于限定了推力器的最大推力 2mN , 最大控制加速度的约束为 10^{-5}m/s^2 , 两星相对位置在 10^6 秒左右收敛到期望值。遍地控制所施加的控制加速度指令曲线图 4-28、图 4-30、图 4-32 所示, 在未引入陷波器以前, 控制加速度指令随轨道周期而变化, 均未超出加速度的最大值, 控制加速度的幅值在 $|\mathbf{u}_f| = 10^{-5}\text{m/s}^2$ 范围内, 满足微推力的执行机构饱和约束。图 4-33 是相对距离的功率谱密度曲线, 可以看出波动的周期在轨道周期的倍数上, 图 4-34 是加入陷波器以后控制指令的功率谱密度, 在所关注的频段 $[1\text{mHz} \sim 10\text{mHz}]$ 内, 加速度频谱小于 10^{-8}m/s^2 , 符合控制约束, 不会对科学测量产生影响。

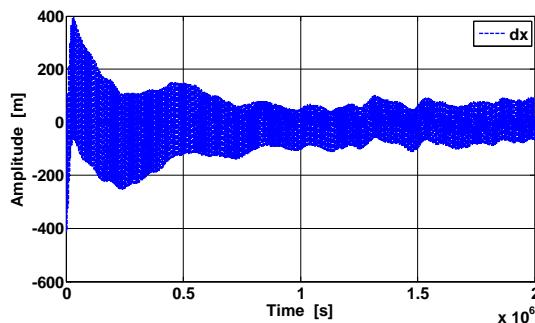


图 4-27 X 轴相对位置变化仿真曲线

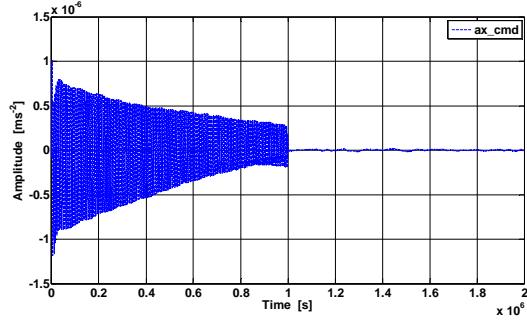


图 4-28 X 轴加速度控制指令

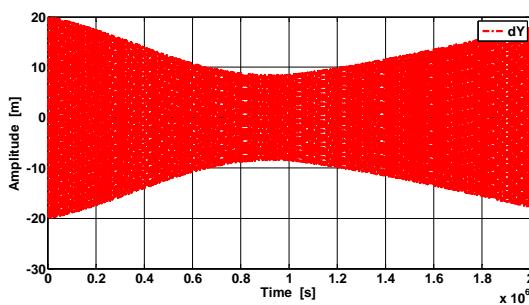


图 4-29 Y 轴相对位置变化仿真曲线

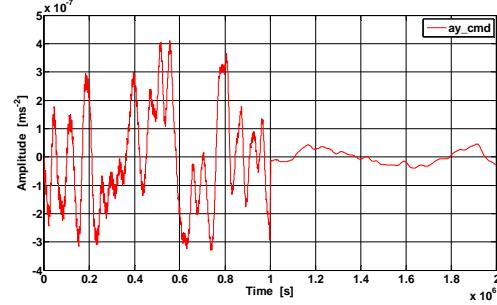


图 4-30 Y 轴加速度控制指令

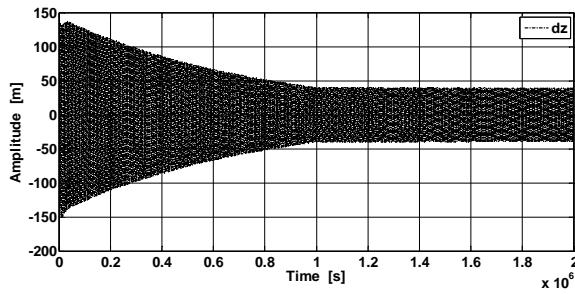


图 4-31 Z 轴相对位置变化仿真曲线

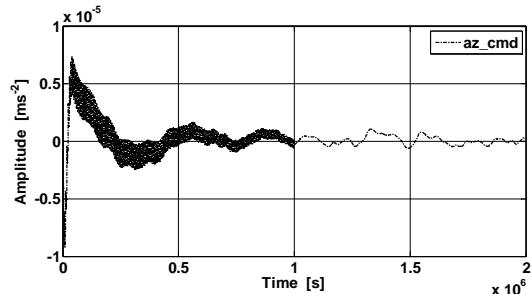


图 4-32 Z 轴加速度控制指令

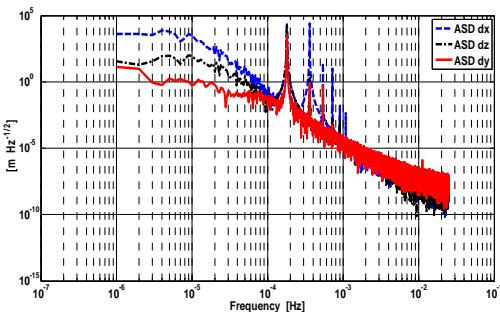


图 4-33 相对距离误差功率谱密度曲线

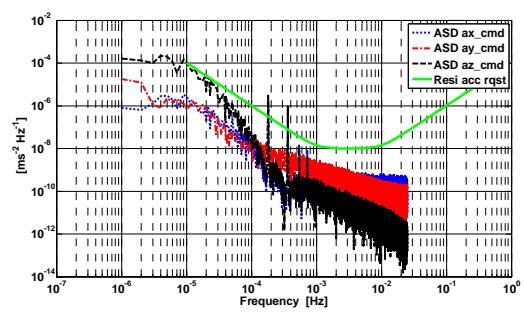


图 4-34 编队控制指令功率谱密度曲线

在完全不引入陷波器的情况下进行了仿真，得到的相对距离曲线如下图所示，可以看出相对距离持续减少，在功率谱密度图 4-36 中，X、Z 轴控制量在 f_0 、 $2f_0$ 处的幅值达到 10^{-4} m/s^2 ，而图 4-34 幅值仅为 10^{-6} m/s^2 ，说明陷波器降低了系统的响应，有利于减小推力消耗。图 4-36 中 Y 轴在 f_0 处的控制量幅值也高于图 4-34 中的对应幅值。

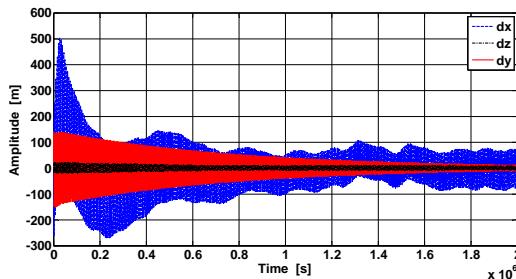


图 4-35 相对距离误差功率谱密度曲线

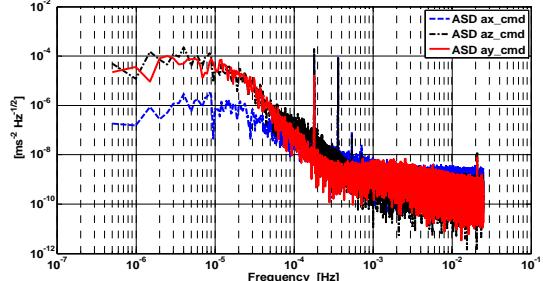


图 4-36 编队控制指令功率谱密度曲线

4.4 编队相对位置有限时间滑模控制器设计

4.4.1 有限时间定义及控制器设计

基于 QFT 的控制算法从频域约束出发对闭环回路进行调整，具有一定的鲁棒性能，但是带来了闭环系统收敛速度慢的问题，不利于建立观测模式的初始状态。为了处理模型的不确定性和各种干扰，同时增加算法的收敛速度，本论文针对 Drag-free 双星编队控制系统设计了带有自适应参数辨识的有限时间控制算法，使得系统在有限

时间内收敛到期望状态。

近年来，随着控制理论的发展和软硬件水平的提高，有限时间控制算法受到了关注，并在提高系统的响应速度和抗干扰能力方面体现出优势。针对系统运动控制问题研究来讲，系统的稳定性是一个重要的基本特性。稳定性针对的是其对扰动的恢复能力，而对恢复稳定的时间并不要求，通常都是无限时间区间上的状态行为。有限时间稳定（Finite Time Stable, FTS）在通常意义上增加了对时间的考虑，更加注重系统的暂态性能，也即在某个有限时间范围内，系统的状态能够保持在预先给定的界限^{[120]~[122]}。FTS 要求系统当其初始条件满足已知的界限时，其状态轨迹在指定的时间区间运动到待定的界限内。

(1) 有限时间稳定相关引理

引理 1^[122]: 考虑下面的系统:

$$\dot{x} = f(x, t), f(0, t) = 0, x \in U_0 \subset \Re^p \quad (4-100)$$

其中， $f : U_0 \times \Re^+ \mapsto \Re^n$ 在原点 $x=0$ 的开邻域 U_0 上是连续的。如果有一个正定函数 $\bar{V}(x)$ (定义在 $\bar{U} \times \Re^+$ 上，其中 $\bar{U} \subset U_0 \subset \Re^p$ 是原点的一个邻域)，实数 $c > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$ ，使得 $\dot{\bar{V}}(x) + c\bar{V}^\alpha(x)$ 在 \bar{U} 上半负定，则 $\bar{V}(x)$ 在有限时间内逼近于 0。并且，该有限时间 T 满足 $T \leq \frac{\bar{V}(x_0)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}$ 。

引理 2^[123]: 考虑系统 $\dot{x} = f(x, u)$ ，假设存在连续函数 $\bar{V}(x)$ ，标量 $\phi > 0$ ， $0 < \varphi < 1$ 和 $0 < \vartheta < \infty$ ，则：

$$\dot{\bar{V}}(x) \leq -\phi\bar{V}^\varphi(x) + \vartheta \quad (4-101)$$

则系统是实际有限时间稳定的。

引理 3^[124]: 对于 $\forall x \in \Re$ 和 $\forall y \in \Re$ ，若 p_1 和 p_2 为正奇数， $0 < p = p_1/p_2 < 1$ ，则

$$|x^p - y^p| \leq 2^{1-p} |x - y|^p \quad (4-102)$$

引理 4^[124]: 对于 $\forall x \in \Re$ 和 $\forall y \in \Re$ ，若 $c > 0$ 和 $d > 0$ ，则

$$|x|^c |y|^d \leq c|x|^{c+d}/(c+d) + d|y|^{c+d}/(c+d) \quad (4-103)$$

引理 5^[125]: $\forall x \in \Re$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，有实数 $p \in (0, 1]$ ，以下不等式成立，

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (4-104)$$

(2) 编队控制问题描述

为了降低 Drag-free 卫星编队收敛到期望相对状态的时间，本节采用自适应参数更新律和加幂积分技术设计控制律，实现闭环系统的实际有限时间稳定。为了设计算法的简便，用 Δr 表示相对位置矢量，并将 Drag-free 双星编队的动力学模型转化为如

下形式：

将无拖曳双星编队的相对位置动力学模型表示如式(4-105)：

$$\Delta\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\Delta\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \mathbf{d}_f + \mathbf{u}_f \quad (4-105)$$

其中， i 为轨道倾角，在考虑J2摄动的情况下其轨道平均角速度为 $\omega = \omega_0\sqrt{1+\varepsilon_2}$ ，其中 $\varepsilon_2 = \frac{3J_2R_e^2}{8r_c^2}(1+3\cos 2i)$ ， $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}}$ ，经整理，矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 具体形式为：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-106)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \omega_0^2\varepsilon_2 & 0 & -\dot{\omega} \\ 0 & \omega_0^2 & 0 \\ \dot{\omega} & 0 & \omega_0^2(3+\varepsilon_2) \end{bmatrix}$$

$$-8\varepsilon_2\omega_0^2 \begin{bmatrix} -1/4-\sin^2 i(1/2-7/4\sin^2\theta) & -\sin 2i\cos\theta/4 & \sin^2 i\sin 2\theta \\ -\sin 2i\cos\theta/4 & -\frac{3}{4}+\sin^2 i(1/2+5/4\sin^2\theta) & \sin 2i\sin\theta \\ \sin^2 i\sin 2\theta & \sin 2i\sin\theta & 1-3\sin^2 i\sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (4-107)$$

并定义 $\varepsilon = (\Delta\dot{\mathbf{r}} - \Delta\dot{\rho}_d)^p + (\mathbf{k}_1(\Delta\mathbf{r} - \Delta\rho_d)^{1/p})^p$ ，其中 $\mathbf{k}_1 > 0$ 为正定常值矩阵， p 满足 $1 < p = p_1/p_2 < 2$ ，且 p_1 和 p_2 为正奇数，算法设计的控制目标是在有限时间 T 内保证 $\lim_{t \rightarrow T} |\varepsilon| = 0$ 。

(3) 有限时间控制器设计及收敛证明

定理5-1：考虑drag-free双星编队相对运动模型式(4-105)，设计有限时间控制器及参数自适应更新律。

$$\mathbf{u}_f = -\hat{k}\mathbf{v}(t) - \mathbf{k}_2\xi^{2/p-1} \quad (4-108)$$

式中， $\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}\Delta\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{r}$ ， p 满足 $1 < p = p_1/p_2 < 2$ ，且 p_1 和 p_2 为正奇数。

\hat{k} 为自适应增益，由下式确定：

$$\dot{\hat{k}} = -a\hat{k} + \boldsymbol{\varepsilon}^{2-1/p}\mathbf{k}_3\mathbf{v}(t) \quad (4-109)$$

其中 $\mathbf{k}_2 > 0, \mathbf{k}_3 > 0$ 均为正定增益矩阵，且

$$\mathbf{k}_3 = \frac{1}{(2-1/p)2^{1-1/p}}\mathbf{k}_1^{-(1+p)} \quad (4-110)$$

其中 $\lambda_i = \max \sigma(\mathbf{k}_i), i=1,2,3$ ，有编队闭环控制系统满足实际有限时间稳定，即两颗Drag-free卫星之间的相对位置 $\Delta\mathbf{r}$ 在有限时间 T 内收敛到期望位置 $\Delta\mathbf{r}_d$ 的有界邻域 D 内，其中 T 和 D 由下式确定：

$$D = (\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \delta r \in (V^{q/2} \leq \frac{\chi_1^{q/2} \theta_1}{(1 - \sigma_0) \chi_2}), \quad T \leq \frac{\chi_1^{q/2} V^{1-q/2}(x_0)}{\chi_2 \sigma_0 (1 - q/2)}) \quad (4-111)$$

其中的参数 $0 < \sigma_0 < 1$, θ_1 , χ_1 , χ_2 , q 和 V 见证明过程。

定理 5-1 的证明:

期望相对位置 $\Delta \rho_d$ 为常数, 相对位置误差为 $\Delta r_e = \Delta r - \Delta \rho_d$, 则 $\Delta \dot{r}_e = \Delta \dot{r}_e = v_e$ 。为使相对位置误差收敛到 0, 先定义 $v_e^* = -k_1 \Delta r_e^{1/p}$, 则 $v_e^{*p} = -k_1^p \Delta r_e$, 并取 Lyapunov 函数 V 如下:

$$V = \frac{1}{2} \Delta r_e^T \Delta r_e + \frac{1}{2} (k - \hat{k})^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(2 - 1/p) 2^{1-1/p}} \lambda_i^{-(1+p)} \int_{v_{ei}^*}^{v_{ei}} (s_{ei}^p - v_{ei}^{*p})^{2-1/p} ds \quad (4-112)$$

为了证明算法的实际有限时间收敛特性, 先根据虚拟变量 v_e^* , 对 $\Delta r_e^T \Delta r_e$ 进行放大, 根据引理[3]和引理[4]可知:

$$|v_{ei} - v_{ei}^*| = |(v_{ei}^p)^{1/p} - (v_{ei}^{*p})^{1/p}| \leq 2^{1-1/p} |v_{ei}^p - v_{ei}^{*p}|^{1/p} = 2^{1-1/p} |\mathcal{E}_i|^{1/p} \quad (4-113)$$

从而得:

$$\Delta r_e^T (v_e - v_e^*) \leq \sum_{i=1}^3 |\Delta r_{ei}| \cdot 2^{1-1/p} |\mathcal{E}_i|^{1/p} \leq \sum_{i=1}^3 2^{1-1/p} \left(\frac{p |\Delta r_{ei}|^q}{1+p} + \frac{|\mathcal{E}_i|^q}{1+p} \right) \quad (4-114)$$

$$\Delta r_e^T \cdot k_1 \Delta r_e^{1/p} = k_1 \cdot \Delta r_e^T \Delta r_e^{1/p} \geq \lambda_1 \Delta r_{ei}^q \quad (4-115)$$

其中 $1 < q = 1 + 1/p = (p_1 + p_2)/p_2 < 2$ 。

进一步根据 $\Delta r_e^T \Delta \dot{r}_e$ 的拆分, 并将 (4-114) 和 (4-115) 代入, 可得:

$$\begin{aligned} \Delta r_e^T \Delta \dot{r}_e &= \Delta r_e^T (v_e - v_e^* + v_e^*) = \Delta r_e^T (v_e - v_e^*) + \Delta r_e^T v_e^* \\ &\leq \sum_{i=1}^3 2^{1-1/p} \left(\frac{p |\Delta r_{ei}|^q}{1+p} + \frac{|\mathcal{E}_i|^q}{1+p} \right) - \lambda_1 \sum_{i=1}^3 \Delta r_{ei}^q \end{aligned} \quad (4-116)$$

记:

$$V_i = \frac{1}{(2 - 1/p) 2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} \int_{v_{ei}^*}^{v_{ei}} (s_{ei}^p - v_{ei}^{*p})^{2-1/p} ds \quad (4-117)$$

可知 V_i 为正定函数, 有:

$$\begin{aligned} |v_{ei}| |v_{ei} - v_{ei}^*| |\mathcal{E}_i|^{1-1/p} &\leq 2^{1-1/p} |v_{ei}| |\mathcal{E}_i|^{1/p} |\mathcal{E}_i|^{1-1/p} \leq 2^{1-1/p} |\mathcal{E}_i| (|v_{ei} - v_{ei}^*| + |v_{ei}^*|) \\ &\leq 2^{1-1/p} \left(\frac{2^{1-1/p} (1+p) + k_1 p}{1+p} |\mathcal{E}_i|^q + \frac{\lambda_1}{1+p} |\delta r_i|^q \right) \end{aligned} \quad (4-118)$$

对式 (4-117) 求导, 然后代入式 (4-118) 可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i &= -\frac{1}{2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} \frac{\partial(v_{ei}^{*p})}{\partial t} \int_{v_{ei}^*}^{v_{ei}} (s_{ei}^p - v_{ei}^{*p})^{1-1/p} ds + \frac{1}{(2-1/p) 2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} \varepsilon_i^{2-1/p} \frac{dv_{ei}}{dt} \\
&\leq \frac{k_1^p}{2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} |\Delta r_{ei}| |v_{ei} - v_{ei}^*| |\varepsilon_i|^{1-1/p} + \frac{1}{(2-1/p) 2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} \varepsilon_i^{2-1/p} \frac{dv_{ei}}{dt} \\
&\leq \frac{1}{1+p} |\Delta r_{ei}|^q + \frac{2^{1-1/p} (1+p) + \lambda_1 p}{(1+p)} |\varepsilon_i|^q + \frac{1}{(2-1/p) 2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} \varepsilon_i^{2-1/p} \frac{dv_{ei}}{dt}
\end{aligned} \tag{4-119}$$

为了证明方便, 假设干扰 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, 将相对运动模型 (4-105) 代入式 (4-119) 中, 有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_I &\leq \frac{1}{1+p} \sum_{i=1}^3 |\Delta r_{ei}|^q + \frac{2^{1-1/p} (1+p) + \lambda_1 p}{(1+p) \lambda_1^p} \sum_{i=1}^3 |\varepsilon_i|^q \\
&\quad + \frac{1}{(2-1/p) 2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} \varepsilon^{2-1/p} (\mathbf{v}(t) - \hat{k}\mathbf{v}(t) - \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^{2/p-1})
\end{aligned} \tag{4-120}$$

将控制器 (4-108) 及自适应律 (4-109) 代入式 (4-120), 整理得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq \frac{1}{1+p} \sum_{i=1}^3 |\Delta r_{ei}|^q + \frac{2^{1-1/p} (1+p) + \lambda_1 p}{(1+p) \lambda_1^p} \sum_{i=1}^3 |\varepsilon_i|^q \\
&\quad + \frac{1}{(2-1/p) 2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}} \varepsilon^{2-1/p} (\mathbf{v}(t) - \hat{k}\mathbf{v}(t) - \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^{2/p-1}) \\
&\leq \frac{1}{1+p} \sum_{i=1}^3 |\Delta r_{ei}|^q + \frac{2^{1-1/p} (1+p) + \lambda_1 p}{(1+p) \lambda_1^p} \sum_{i=1}^3 |\varepsilon_i|^q \\
&\quad + k_3 \varepsilon^{2-1/p} (\mathbf{v}(t) - \hat{k}\mathbf{v}(t) - \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^{2/p-1})
\end{aligned} \tag{4-121}$$

其中 $k_3 = \frac{1}{(2-1/p) 2^{1-1/p} k_1^{1+p}}$, 则显然有 $\lambda_3 \geq \frac{1}{(2-1/p) 2^{1-1/p} \lambda_1^{1+p}}$ 。

考虑参数自适应律 (4-109) 的估计误差 $(k - \hat{k})$, 定义 $V_e = \frac{1}{2}(k - \hat{k})^2$, 对其求导可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_e &= (k - \hat{k})(-\dot{\hat{k}}) = -(k - \hat{k}) \boldsymbol{\varepsilon}^{2-1/p} \mathbf{k}_3 \boldsymbol{\varphi}(t) + (k - \hat{k})(a\hat{k}) \\
&\leq -(k - \hat{k}) \boldsymbol{\varepsilon}^{2-1/p} \mathbf{k}_3 \boldsymbol{\varphi}(t) - a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2 + \frac{\alpha}{2} a k^2 \\
&\leq -(k - \hat{k}) \boldsymbol{\varepsilon}^{2-1/p} \mathbf{k}_3 \boldsymbol{\varphi}(t) - [a(1 - \frac{1}{2\alpha})]^{q/2} |k - \hat{k}|^{q/2} + \frac{\alpha}{2} a k^2 \\
&\quad + [a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2]^{q/2} - a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2
\end{aligned} \tag{4-122}$$

其中 $\alpha > 0$, $q/2 \in (3/4, 1)$, 对 (4-122) 展开讨论:

1) 当 $a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2 \geq 1$ 时,

$$[a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2]^{q/2} - a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2 < 0 \tag{4-123}$$

2) 当 $a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2 < 1$ 时,

$$0 < [a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2]^{q/2} - a(1 - \frac{1}{2\alpha})(k - \hat{k})^2 < \beta_1 \quad (4-124)$$

其中, β_1 为正数, 令 $\theta_1 = \beta_1 + \frac{\alpha}{2}ak^2$, 于是,

$$\dot{V}_e \leq -(k - \hat{k})\varepsilon^{2-1/p}k_3\varphi(t) - [a(1 - \frac{1}{2\alpha})]^{q/2}|k - \hat{k}|^{q/2} + \theta_1 \quad (4-125)$$

于是针对闭环系统的 Lyapunov 函数 (4-112), 有,

$$\begin{aligned} V &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Delta r_{ei}^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(2-1/p)2^{1-1/p}\lambda_1^{1+p}} |v_{ei} - v_{ei}^*| |\varepsilon_i|^{2-1/p} + \frac{1}{2}(k - \hat{k})^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Delta r_{ei}^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(2-1/p)\lambda_1^{1+p}} \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2}(k - \hat{k})^2 \\ &\leq \chi_1 (\sum_{i=1}^3 \Delta r_{ei}^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2 + (k - \hat{k})^2) \end{aligned} \quad (4-126)$$

式中: $\chi_1 = \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{(2-1/p)\lambda_1^{1+p}})$, 由引理[5]得,

$$V^{q/2} \leq \chi_1^{q/2} (\sum_{i=1}^3 \Delta r_{ei}^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2 + (k - \hat{k})^2)^{q/2} \leq \chi_1^{q/2} (\sum_{i=1}^3 \delta r^q + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^q + (k - \hat{k})^q) \quad (4-127)$$

根据 p_1 、 p_2 为正奇数, 结合 (4-116)、(4-121) 和 (4-125) 可得 V 的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(k_1 - \frac{2^{1-1/p}p}{1+p} - \frac{1}{1+p})\Delta r_{ei}^q - (k_2 k_3 - \frac{2^{1-1/p}k_1^p + 2^{1-1/p}(1+p) + k_1 p}{(1+p)k_1^p})|\varepsilon_i|^q \\ &\quad - [a(1 - \frac{1}{2\alpha})]^{q/2}|k - \hat{k}|^{q/2} + \theta_1 \\ &\leq -\chi_2 (\Delta r_{ei}^q + |\varepsilon_i|^q + |k - \hat{k}|^{q/2}) + \theta_1 \end{aligned} \quad (4-128)$$

其中 $\chi_2 = \min(k_1 - \frac{2^{1-1/p}p}{1+p} - \frac{1}{1+p}, k_2 k_3 - \frac{2^{1-1/p}k_1^p + 2^{1-1/p}(1+p) + k_1 p}{(1+p)k_1^p}, [a(1 - \frac{1}{2\alpha})]^{q/2}) > 0$ 。

可得 $\dot{V} \leq -\frac{\chi_2}{\chi_1^{q/2}} V^{q/2} + \theta_1$, 由引理 (2) 可知, 闭环系统为实际有限时间稳定, 且卫

星间相对位置 Δr_e 在有限时间 T 内收敛到平衡点的有邻域 D 内, 其中 T 和 D 的表达式见 (4-111) 所示。

在解决有限时间控制问题中, 较多的采用到终端滑模设计的有限时间控制器, 不可避免的含有符号函数项, 造成系统存在抖振, 虽然在仿真中可以采用饱和函数或带有边界层的方法减弱系统抖振, 但都不能从根本上避免抖振对系统的影响。本文设计

的有限时间自适应控制器是一种连续反馈的控制算法，避免了系统抖振。

4.4.2 仿真验证与分析

为了验证算法的有效性，选取仿真参数如下：卫星轨道高度为400km太阳同步轨道，轨道倾角 $i=89.5^\circ$ ，偏心率为0.001，两星初始相对位置 $\Delta\mathbf{r}_0=10^4\times[9.954 \quad 0.043 \quad -0.05]^T\text{m}$ ，期望相对位置为 $\Delta\mathbf{r}_d=10^4\times[10 \quad 0 \quad 0]^T\text{m}$ ，选取的控制参数为 $\hat{k}_0=0.8$ ， $p=15/13$ ， $\lambda_1=0.004$ ， $\lambda_2=0.005$ ， $\mathbf{k}_1=\lambda_1\cdot\mathbf{I}_3$ ， $\mathbf{k}_2=\lambda_2$ ，最后仿真结果如图4-37，图4-38，图4-39所示。

图4-37为两星相对位置误差曲线($\delta\mathbf{r}=\Delta\mathbf{r}_0-\Delta\mathbf{r}_d$)，两星相对位置在4000s左右收敛到期望值，图4-38为相对速度变化曲线，速度大小保持在0.02m/s以内。图4-39为控制加速度变化曲线。由于加速度的幅值限定在 $|u_i|=2\cdot10^{-3}\text{m/s}^2$, ($i=1,2,3$)范围内，收敛后维持在 10^{-4}m/s^2 的量级范围内，说明这种方法虽然可以得到较快的收敛效果，但需要的控制力较大，并非毫牛级的微推力能实现，需要结合工程实际进一步优化研究。

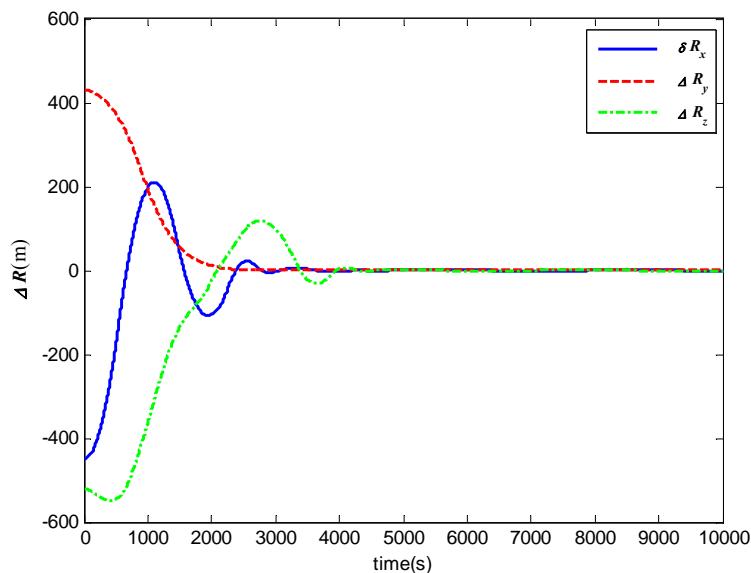
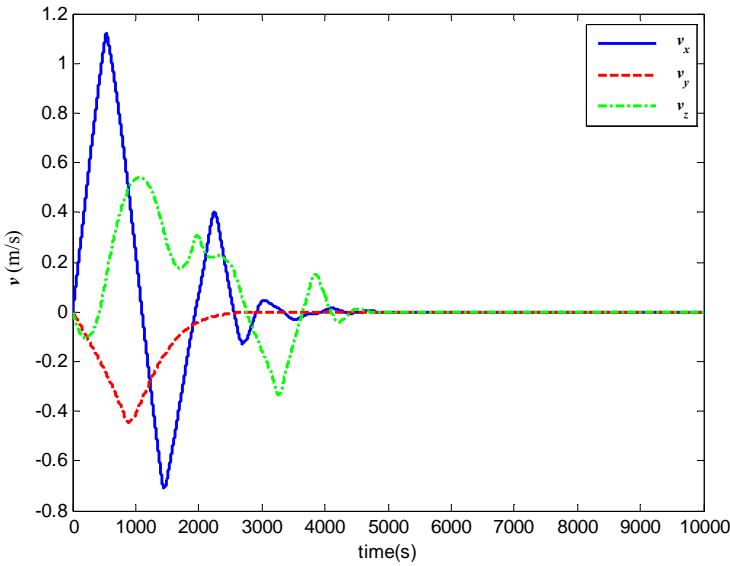
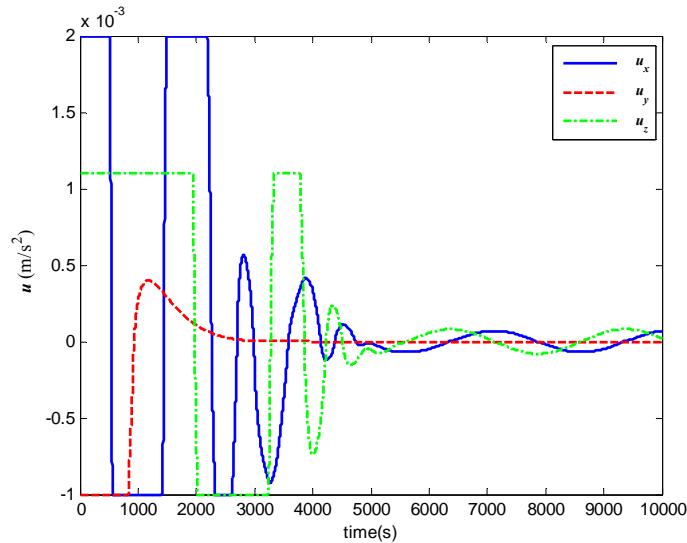


图4-37 两颗卫星相对位置 $\delta\mathbf{r}$ 变化曲线

图 4-38 相对速度 v 仿真变化曲线图 4-39 控制力 u 仿真曲线

4.5 本章小结

通过对无拖曳编队系统的研究，建立了包含 J2 项扰动的轨道动力学估计器，分析了特征值与含估计器的闭环传递函数频谱关系，提出了功率谱密度约束条件下的最优估计方法，搜索出优化的特征值取值范围。针对编队卫星相对动力学在低频时 X 轴、Z 轴通道强耦合特点，提出了基于 QFT 的 MIMO 频域解耦控制方法，设计了满系数矩阵，同时解决了动力学 J2 项内干扰抑制与通道解耦的问题。针对初始收敛时间长的特点，探索了相对位置有限时间滑模控制方法，用于建立系统的初始状态。

第5章 无拖曳回路干扰估计与控制方法研究

5.1 引言

Drag-Free 控制从提出之初，一直致力于解决卫星本体与质量块之间的相对运动问题，从控制模式上分为了加速度模式控制与位移模式控制，位移模式控制较为复杂，加速度模式控制较为简单。结合下一代重力场测量卫星的具体任务要求，采用加速度计的控制模式依然是工程实施的主流，即加速度计的高带宽控制系统使检验质量保持在笼屉中心，施加的控制力转换为非重力加速度的输出。然而，从加速度计的模型中可以看出，加速度计的测量包含了外界干扰和控制力两部分引起的非重力加速度，为了使控制力与外界干扰相互抵消，系统必须能够实时估计卫星所受外界干扰的大小和特性，作为控制器的输入。由于加速度计测量会引入偏置误差和噪声，其中偏置误差在无拖曳控制回路本身无法消除，会导致系统产生额外的控制指令，这需要在重力场测量数据的处理方法上予以识别与消除。加速度计产生的噪声为有色噪声，干扰观测器的带宽对估计误差会产生一定的影响，需要进行分析与评估。

线加速度 drag-free 和角加速度 drag-free 控制后的残差在科学测量频段 ($[1, 10]\text{mHz}$) 内要求不超过 $10^{-8} \text{m/s}^2 \sqrt{\text{Hz}}$, $10^{-8} \text{rad/s}^2 \sqrt{\text{Hz}}$ ，在测量带宽之外也需满足其功率谱密度约束。

5.2 线加速度 drag-free 回路动力学观测器设计

Drag-free 控制回路观测器分为线性加速度噪声观测器和角加速度噪声观测器两部分，动力学方程的构建思路相同，将线加速度、角加速度控制指令输入给观测器，通过测量值与估计值之间的误差，驱动动力学状态估计方程。估计器在回路中的作用如图 5-1 所示。

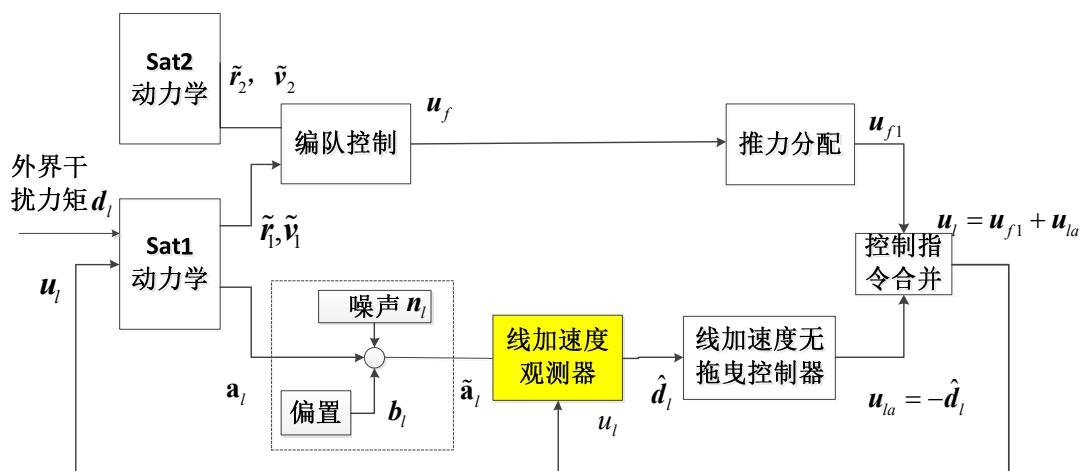


图 5-1 线性干扰加速度观测器

结合 3.4 节中的动力学方程表述，并将被估计的干扰用二阶动力学模型模拟，建立下列标准状态估计方程。

$$\begin{aligned}\hat{x}_l(i+1) &= A_l \hat{x}_l(i) + B_l u_l(i) + \bar{w}_l(i) \\ \tilde{a}_l(i) &= C_l \hat{x}_l(i) + \bar{e}_l(i)\end{aligned}\quad (5-1)$$

展开后有：

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_l(i+1) \\ \hat{d}_l(i+1) \\ \hat{s}_l(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_l(i) \\ \hat{d}_l(i) \\ \hat{s}_l(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_l(i) + \bar{w}_l(i) \quad (5-2)$$

$$\hat{y}_l(i) = \hat{a}_l(i) = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \hat{a}_l(i) \\ \hat{d}_l(i) \\ \hat{s}_l(i) \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

$$\tilde{y}_l(i) = \hat{y}_l(i) + \bar{e}_l \quad (5-4)$$

式中 $A_l = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $B_l = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $C_l = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\bar{w}_l(i)$ 为误差校正项，由 \bar{e}_l 通过观测器增益矩阵 L_l 形成估计器的修正项。

$$\bar{w}_l(i) = L_l \bar{e}_l \quad (5-5)$$

代入方程 (5-1) 得到

$$\hat{x}_l(i+1) = A_l \hat{x}_l(i) + B_l u_l(i) + L_l (\tilde{a}_l(i) - C_l \hat{x}_l(i)) \quad (5-6)$$

其 Z 变换形式为：

$$(zI_9 - (A_l - L_l C_l)) \hat{x}_l(z) = B_l u_l(z) + L_l \tilde{a}_l(z) \quad (5-7)$$

可以证明，为了使闭环方程收敛，则 L_l 矩阵的取值应使 $A_l - L_l C_l$ 是渐进稳定的。

状态估计向量 $\hat{x}_l(i)$ 共 9 维，由于 X, Y, Z 三轴是相互解耦的，可对单轴的动力学估计器分别进行设计，以 X 轴为例，其估计器的结构形式如图 5-2 所示。

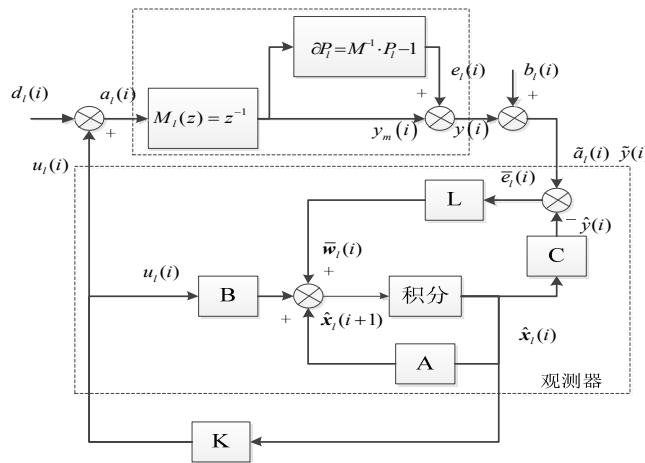


图 5-2 动力学估计器结构示意图

$$\text{令 } \mathbf{L}_{lx} = [l_{x1} \ l_{x2} \ l_{x3}], \quad \mathbf{A}_{lx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{lx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{lx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{K}_{lx} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

从图中可以看出，闭环系统中加速度残差 $a_l(i)$ 受无拖曳控制加速度 $\mathbf{u}_{la}(i)$ 、编队控制加速度 $\mathbf{u}_f(i)$ 、外干扰力 $d_l(i)$ 、模型不确定性误差 $e_l(i)$ ，测量误差 $b_l(i)$ 的影响，各个误差源的功率谱均通过闭环传递函数，成为 $a_l(i)$ 功率谱的影响因素，需要分析 $a_l(i)$ 与各误差因素的关系，通过 \mathbf{L}_{lx} 的取值，调节闭环传递函数。由于编队控制回路设计过程中，已将控制带宽与 drag-free 控制回路的带宽进行了隔离，因此在设计无拖曳回路的观测器增益时，可令 $u_f(i)=0$ ，即 $\mathbf{u}_l(i)=\mathbf{u}_{la}(i)$ ，则模型中的线加速度项：

$$a_{lx}(z) = u_{lx}(z) + d_{lx}(z) = -\hat{d}_{lx}(z) + d_{lx}(z) \quad (5-8)$$

根据闭环系统方程，可以求 $-\hat{d}_{lx}(z)$ 的表达式，首先：

$$u_{lx}(i) = \mathbf{K}_{lx}\hat{\mathbf{x}}_{lx}(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{lx}(i) \\ \hat{d}_{lx}(i) \\ \hat{s}_{lx}(i) \end{bmatrix} = -\hat{d}_{lx}(i) \quad (5-9)$$

由式 (3-62)，测量结果的表示为：

$$\tilde{a}_{lx}(z) = P_{lx}(z)a_{lx}(z) + b_{lx}(z) = M_{lx}(z)a_{lx}(z) + M_{lx}(z)\partial P_{lx}(z)a_{lx}(z) \quad (5-10)$$

针对单轴，式 (6-6) 可写为：

$$(\mathbf{zI}_3 - (\mathbf{A}_{lx} - \mathbf{L}_{lx}\mathbf{C}_{lx}))\hat{\mathbf{x}}_{lx}(z) = \mathbf{B}_{lx}u_{lx}(z) + L\tilde{a}_{lx}(z) \quad (5-11)$$

将式 (6-9), (6-10) 代入 (6-11)，可得到：

$$\hat{d}_{lx}(z) = V_{lx}(z)(d_{lx}(z) + b_{lx}(z) + z e_{lx}(z)) \quad (5-12)$$

其中 $z e_{lx}(z) = \partial P_{lx}(z)a_{lx}(z)$ ， $V_{lx}(z)$ 为 (6-11) 中闭环系统的传递函数，形式为：

$$V_{lx}(z) = \frac{l_{x2}z^{-1}}{(zI - (\mathbf{A}_{lx} - \mathbf{L}_{lx}\mathbf{C}_{lx}))} = \frac{(zI - \mathbf{A}_{lx})^{-1}l_{x2}z^{-1}}{(I + (zI - \mathbf{A}_{lx})^{-1}(\mathbf{L}_{lx}\mathbf{C}_{lx}))} \quad (5-13)$$

定义 $S_{lx}(z) = 1 - V_{lx}(z)$ 为闭环系统灵敏度函数，用于描述系统的闭环特性。状态观测器设计的目的是确定反馈增益向量 $\mathbf{L}_{lx} = [l_{x1} \ l_{x2} \ l_{x3}]$ ， \mathbf{L}_{lx} 被包含在式 (6-13) 中，难以直接求解，考虑到 \mathbf{L}_{lx} 与闭环系统的特征值 $\lambda_{lk} = [\lambda_{l1} \ \lambda_{l2} \ \lambda_{l3}]$ ，对应，可通过特征值的取值范围来确定反馈增益向量。这里取特征值形式为：

$|\lambda_{lk}| = 1 - \gamma_{lk}| < 1$, $k = 1, 2, 3$, γ_{lk} 为特征值的补偿形式，为了分析简单，特征值取相同的 γ_l ， γ_l 值与观测器的带宽对应，可表示为：

$$f_l = (2\pi T_l)^{-1} \gamma_l \quad (5-14)$$

式中， T_l 为采样时间。

以 $\Lambda_{lx} = \{1 - \gamma_l, 1 - \gamma_l, 1 - \gamma_l\}$ ，表示特征值向量，由于特征值决定了 $S_{lx}(z), V_{lx}(z)$ 的

幅值与频率特性，可在建立 $\mathbf{S}_{lx}(z), V_{lx}(z)$ 约束的基础上，限定 γ_l 的取值范围，再确定 $\mathbf{L}_{lx} = [l_{x1} \ l_{x2} \ l_{x3}]$ 的参考取值。

无拖曳控制系统的残差加速度为 $a_{lx}(z)$ ，其功率谱密度 $S_{ax}(f)$ 需要满足关系为：

$$S_{ax}(f) \leq \bar{S}_{a_l}(f) \quad (5-15)$$

$\bar{S}_{a_l}(f)$ 功率谱密度上边界，如图 2-6 所示。为了分析 $S_{ax}(f)$ ，需要建立 $a_{lx}(z)$ 与其影响因素之间的功率谱密度传递关系。

将 $\hat{d}_{lx}(z)$ 代入 $a_{lx}(z)$ 的表达式，可得：

$$\begin{aligned} a_{lx}(z) &= -\hat{d}_{lx}(z) + d_{lx}(z) = -V_{lx}(z)(d_{lx}(z) + b_{lx}(z) + \partial P_{lx}(z)a_{lx}(z)) + d_{lx}(z) \\ a_{lx}(z)(1+V_{lx}(z)\partial P_{lx}(z)) &= S_{lx}(z)d_{lx}(z) - V_{lx}b_{lx}(z) \\ a_{lx}(z) &= (1+V_{lx}(z)\partial P_{lx}(z))^{-1}(S_{lx}(z)d_{lx}(z) - V_{lx}b_{lx}(z)) \end{aligned} \quad (5-16)$$

由于 $|\partial P_{lx}(jf)| \leq \partial \bar{P}_{lx}(jf)$ ，称 $\partial \bar{P}_{lx}(jf)$ 为 $|\partial P_{lx}(jf)|$ 的上界。

根据小增益理论及推导^[126]，

$$|V_{lx}(jf)|\partial \bar{P}_{lx}(jf) \leq \eta_l < 1 \quad (5-17)$$

根据 (6-15)，应使：

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\eta_l)^2} \left(|S_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 S_{d_{lx}}^2(f) + |V_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 S_{b_{lx}}^2(f) \right) &\leq \bar{S}_{a_l}^2(f), \text{ 即:} \\ \left(|S_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 S_{d_{lx}}^2(f) + |V_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 S_{b_{lx}}^2(f) \right) &\leq \bar{S}_{a_l}^2(f)(1-\eta_l)^2 \end{aligned} \quad (5-18)$$

$S_{d_{lx}}^2(f), S_{b_{lx}}^2(f)$ 分别为外部干扰，加速度计测量噪声的功率谱密度，根据分析均可确定其上界 $\bar{S}_{d_l}^2(f)、\bar{S}_{b_l}^2(f)$ （对于不同轴取相同的界），因此若有：

$$\left(|S_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 \bar{S}_{d_l}^2(f) + |V_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 \bar{S}_{b_l}^2(f) \right) \leq \bar{S}_{a_l}^2(f)(1-\eta_l)^2 \quad (5-19)$$

成立，则可确保(6-18)成立。

由于式 (6-16) 代表了模型不确定性引起的误差功率谱密度，(6-19) 代表了系统输入干扰引起的误差功率谱密度，二者共同决定了的 $S_{ax}(f)$ 功率谱密度，则可定义^[88]：

$$W_{sl}(f) = \frac{1}{\bar{S}_{a_l}(f)} \sqrt{\left(|S_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 \bar{S}_{d_l}^2(f) + |V_{lx}(f, \Lambda_{lx})|^2 \bar{S}_{b_l}^2(f) \right)} < 1 - \eta_l \quad (5-20)$$

$$W_{vl}(f) = |V_{lx}(f, \Lambda_{lx})| \partial \bar{P}_{lx}(f) < \eta_l \quad (5-21)$$

则二者的加权组合形式满足下列关系：

$$W_{lx}(f, \eta_l, \Lambda_{lx}) = \eta_l W_{sl}(f, \Lambda_{lx}) + (1-\eta_l) W_{vl}(f, \Lambda_{lx}) \leq 2\eta_l < 2, f < f_{max} \quad (5-22)$$

公式 (6-22) 表示了系统取不同的 η_l 值和不同的特征值 Λ_{lx} 时，含有 L_{lx} 的项 V_{lx} 、 \mathbf{S}_{lx} 需要满足的不等式。

公式(6-20)中, $\bar{S}_{b_l}^2(f)$ 的幅值远远小于 $\bar{S}_{d_l}^2(f)$ 的幅值, 可先忽略 $\bar{S}_{b_l}^2(f)$ 的影响。

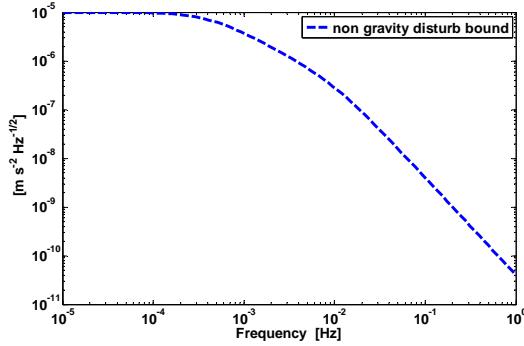


图 5-3 非重力线加速度干扰的上边界

根据数据分析结果, $\bar{S}_{d_l}^2(f)$ 的上边界如图 5-3 所示, 用下列功率谱密度函数进行模拟。

$$S_{d_l}^2(f) \leq S_{d_{l0}}^2 \left(1 + \left(\frac{f}{f_{d1}} \right)^2 \right)^{-1} \left(1 + \left(\frac{f}{f_{d2}} \right)^2 \right)^{-1} \quad (5-23)$$

式中, $S_{d_{l0}} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2 \sqrt{\text{Hz}}$, $f_{d1} = 0.4 \text{ mHz}$, $f_{d2} = 0.01 \text{ Hz}$ 。

将(6-23)代入(5-22)中, 取 $\eta_l=0.5$, γ_l 在0.02~0.9内取值, 计算 $W_{vl}(f)$, $W_{sl}(f)$, $W_{lx}(f)$ 的最大值, 则满足 $W_{lx}(f) < 1$ 的特征值范围如图所示。从图中可以看出, $W_{sl}(f)$ 确定了 γ_l 的最小值边界, 对应了观测器的低带宽极限值, $W_{vl}(f)$ 决定了 γ_l 最大值边界, 对应了观测器的高带宽极限。取其中间值最为程序调试的起点, $\gamma_l=0.3$, $T_l=0.1 \text{ s}$, 对应带宽 $f_l = (2\pi T_l)^{-1} \gamma_l = 0.48 \text{ Hz}$ 。

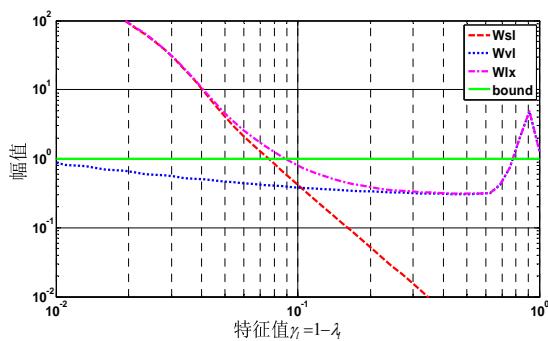


图 5-4 不同特征值对应的边界设计

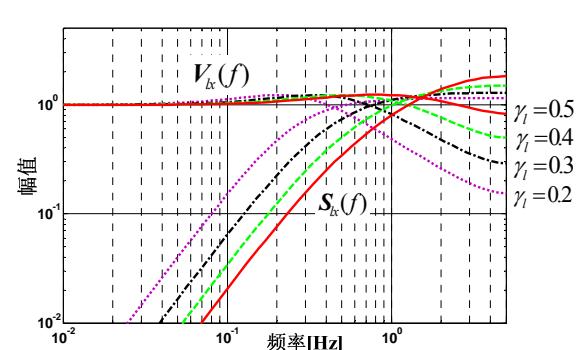


图 5-5 不同特征值对应的 V_{lx}, S_{lx}

5.3 角加速度 drag-free 回路动力学观测器设计

对于角加速度 drag-free 回路, 其干扰状态观测器的构建与线加速度回路形式相同。观测器在回路中的位置如下图所示。

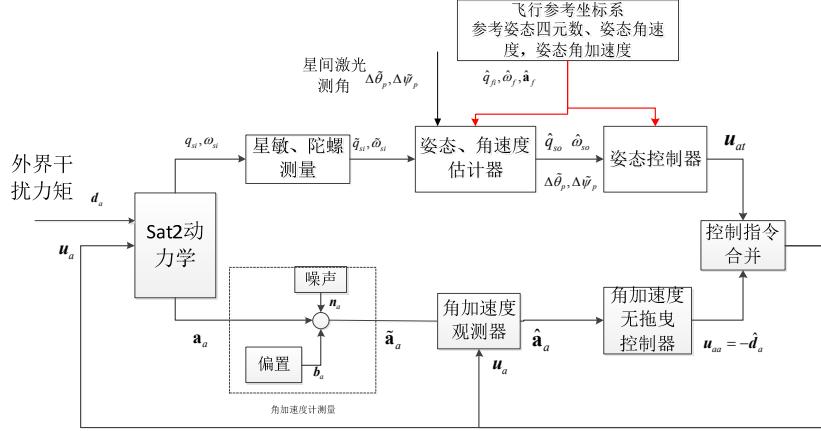


图 5-6 角加速度回路观测器的输入输出关系

方程及公式的推导过程与线加速度回路相同，变量中的“*l*”下标改为“*a*”下标，如对于单轴观测器方程， $\lambda_{ak}, \gamma_{ak}$ 分别为特征值及其补偿形式，相应的矩阵为：

$$A_{ax} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{ax} = \begin{bmatrix} 1^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{ax} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

线性加速度回路中的式 (6-19)，在角加速度回路中变为^[89]：

$$\left(|S_{ax}(f, \Lambda_{ax})|^2 \bar{S}_{d_a}^2(f) + |V_{ax}(f, \Lambda_{ax})|^2 \bar{S}_{b_a}^2(f) \right) \leq \bar{S}_{a_a}^2(f) (1 - \eta_a)^2 \quad (5-24)$$

同样地，由于姿态控制回路的带宽很低，在角加速度回路的带宽内幅值有较大衰减，在功率谱密度分析中，也忽略了姿态回路的控制加速度功率谱的 $\bar{S}_{a_{at}}^2(f)$ 影响。

定义：

$$W_{sa}(f) = \frac{1}{\bar{S}_{a_a}(f)} \sqrt{\left(|S_{ax}(f, \Lambda_{ax})|^2 \bar{S}_{d_a}^2(f) + |V_{ax}(f, \Lambda_{ax})|^2 \bar{S}_{b_a}^2(f) \right)} < 1 - \eta_a \quad (5-25)$$

$$W_{va}(f) = |V_{ax}(f, \Lambda_{ax})| \partial \bar{P}_{ax}(f) < \eta_a \quad (5-26)$$

则二者的加权组合形式满足下列关系：

$$W_{ax}(f, \eta_a, \Lambda_{ax}) = \eta_a W_{sa}(f, \Lambda_{ax}) + (1 - \eta_a) W_{va}(f, \Lambda_{ax}) \leq 2\eta_a < 2, f < f_{max} \quad (5-27)$$

由于线加速度回路中外界干扰力已基本被抵消，引起角加速度回路的外界干扰主要包括重力梯度力矩干扰、推力器噪声、偏心引起的耦合力矩干扰等，干扰角加速度的功率谱密度上边界函数形式为^[68]。

$$\bar{S}_{da}^2(f) = S_{d_0}^2 \left(1 + \left(\frac{f}{f_{a_0}} \right)^2 \right)^{-1} \left(1 + \left(\frac{f}{f_{a_1}} \right)^2 \right)^{-1} + S_{d_1}^2 \quad (5-28)$$

$$S_{d_0} = 5 \times 10^{-6} \text{ rad/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}, \quad f_{a_0} = 0.4 \text{ mHz}, \quad f_{a_1} = 0.03 \text{ Hz}, \quad S_{d_1} = 1 \times 10^{-9} \text{ rad/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$$

为推力器噪声边界。

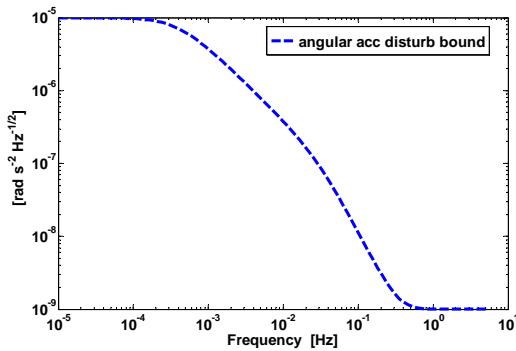


图 5-7 外部角加速度干扰功率谱密度幅值

取 $\eta_a = 0.5$, 将 (6-29) 代入 (6-28), $\bar{S}_{ba}(f)$ 的量级远小于 $\bar{S}_{da}(f)$ 的量级, 确定特征值过程可忽略影响, 经过计算, 选取合适的参考值 $\gamma_a = 0.25$ 作为程序调试的特征值起点, 对应带宽 $f_a = (2\pi T_a)^{-1} \gamma_a = 0.4 \text{Hz}$ 。

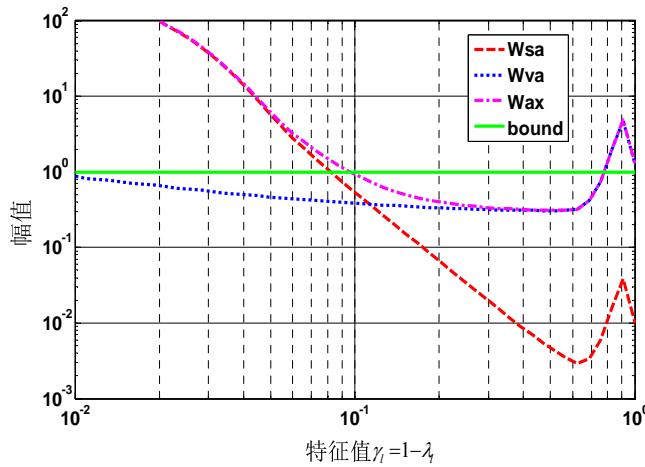


图 5-8 不同特征值对应的边界设计

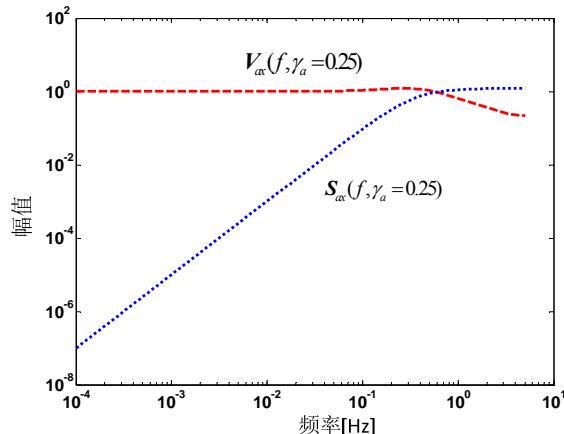


图 5-9 特征值 $\gamma_a = 0.25$ 时对应的 V_{ax}, S_{ax}

5.4 数字仿真

5.4.1 线性无拖曳估计器数字仿真

根据本章节中无拖曳估计器设计所确定的特征值参数, 对线加速度无拖曳回路开展数字仿真分析, 外干扰考虑气动干扰与太阳光压干扰, 先评估不施加控制情况下对外干扰的估计情况。所施加的外干扰产生的加速度及产生的频谱如图 5-10, 图 5-11 所示。

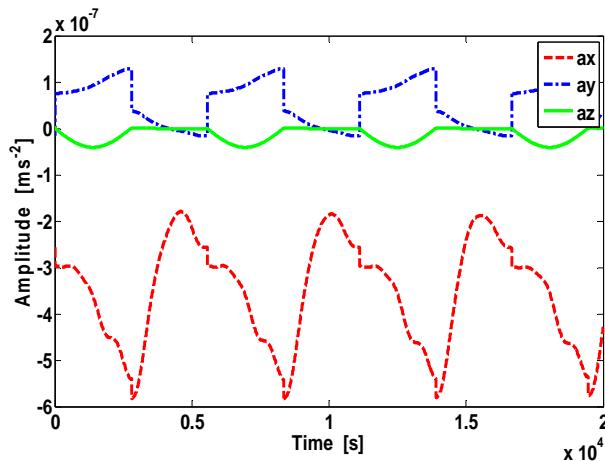


图 5-10 外干扰线加速度

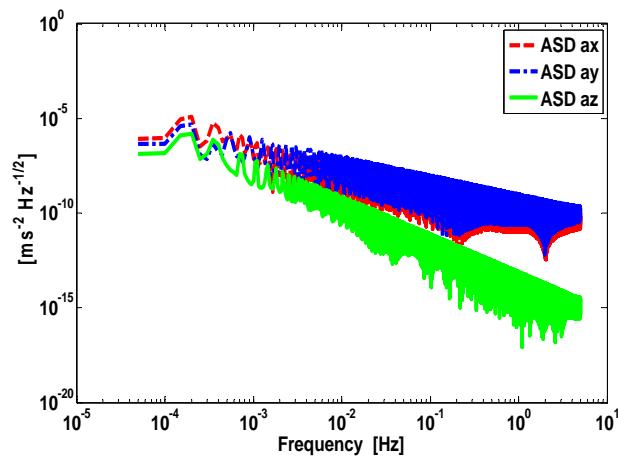


图 5-11 外干扰线加速度功率谱

估计器的输入为加速度计对非重力加速度的测量, 测量过程引入噪声, 引入时间序列噪声及其功率谱如图 3-10, 图 3-11 所示, 在 Y 轴引入的噪声大于在 X, Z 轴引入的噪声。根据设计结果, 对单轴的估计器取特征值向量为 $\lambda_x = [0.7 \ 0.7 \ 0.35]^T$, 经计算得到的增益矩阵为 $L_x = [0.25 \ 0.48 \ 0.0585]^T$ 。三个轴取相同的特征值向量与增益矩阵。经干扰估计器估计后, 输出的估计干扰加速度及其功率谱如图 5-12, 图 5-13 所示。

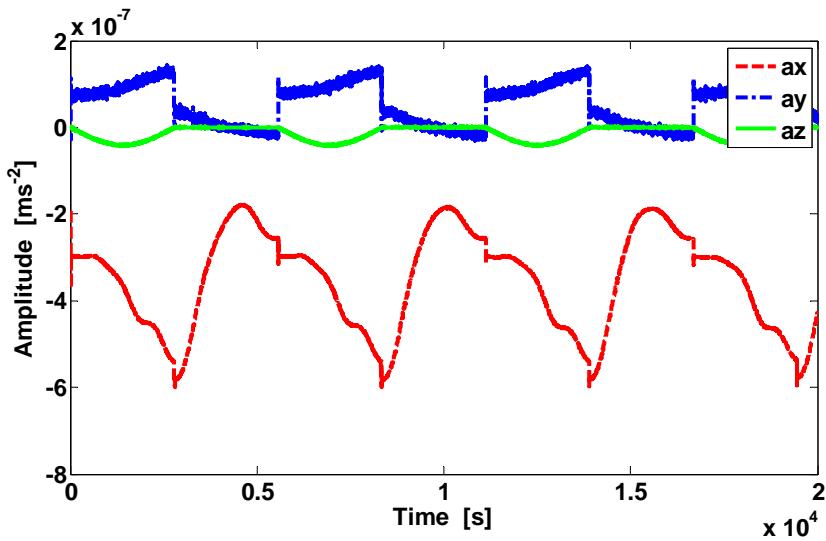


图 5-12 外干扰线加速度估计值

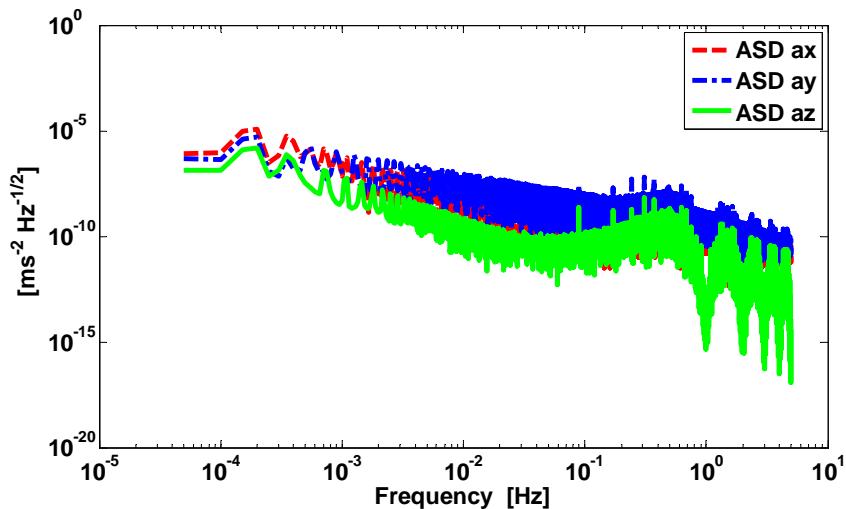


图 5-13 外干扰线加速度估计值的功率谱

分析估计器的收敛时间及其产生的稳态残差，并分别取相邻的特征值向量进行比较，特征值机器对应的增益矩阵分别为：

$$\lambda_{lx} = [0.5 \ 0.5 \ 0.25]^T, \quad L_{lx} = [0.75 \ 1 \ 0.1875]^T$$

$$\lambda_{lx} = [0.9 \ 0.9 \ 0.45]^T, \quad L_{lx} = [-0.25 \ 0.12 \ 0.0055]^T$$

估计器的收敛时间随特征值的变化如图 5-14，图 5-15，图 5-16 所示，

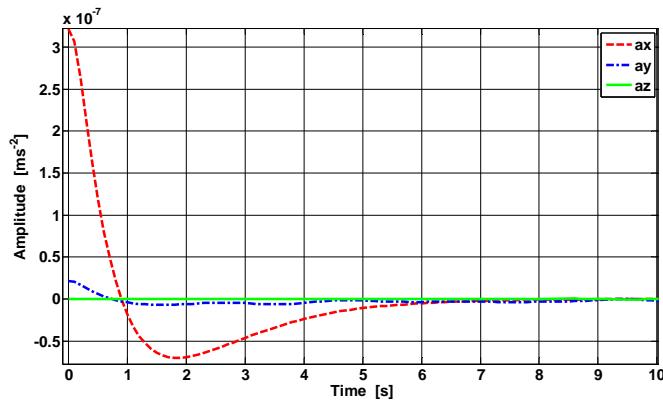


图 5-14 估计器收敛时间（特征值 0.9）

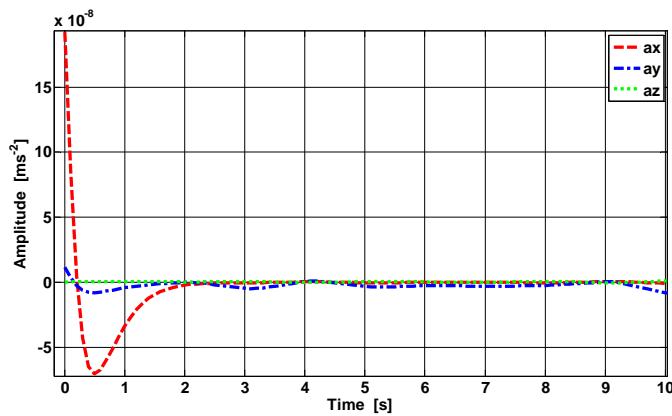


图 5-15 估计器收敛时间（特征值 0.7）

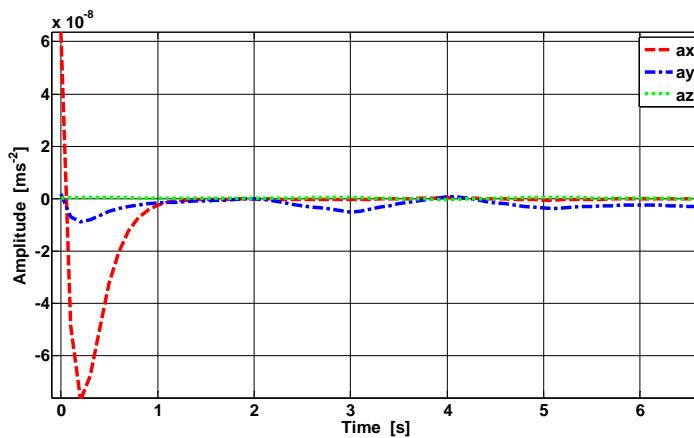


图 5-16 估计器收敛时间（特征值 0.5）

不同特征值下 Y 轴加速度引入的噪声较大，估计残差受加速度计噪声影响，结果如图 5-20，图 5-22，图 5-24 所示。X 轴，Z 轴估计残差如图 5-21，图 5-23，图 5-25 所示，估计残差功率谱密度图 5-17，图 5-18，图 5-19 所示。从图中可以看出，随着

特征值的减小，系统带宽增加，增益矩阵增大，估计残差的噪声增加，在时域曲线上并不明显，而功率谱密度曲线有所差别，数字仿真结果与理论分析一致。

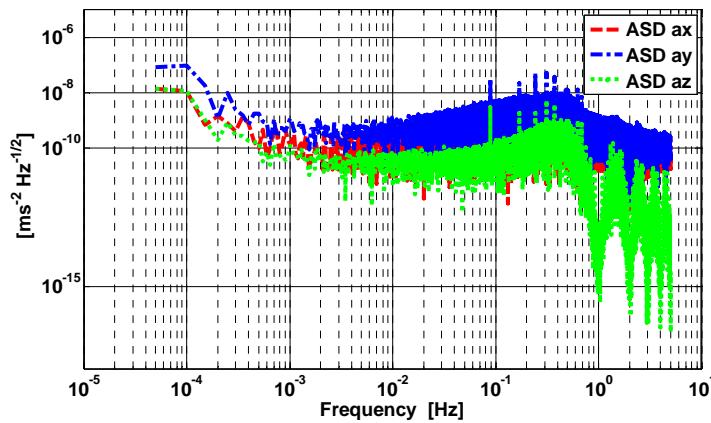


图 5-17 估计残差功率谱（特征值 0.9）

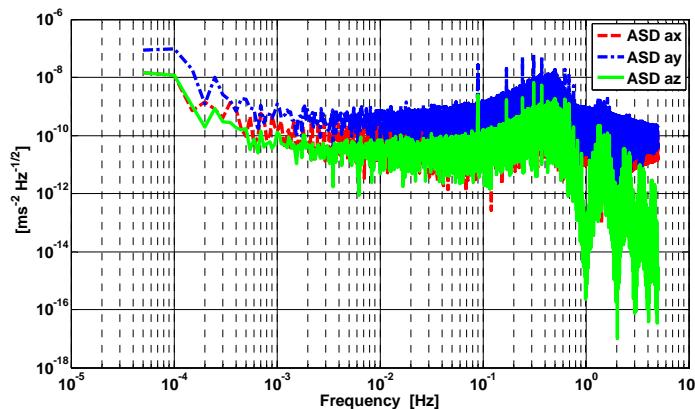


图 5-18 估计残差功率谱（特征值 0.7）

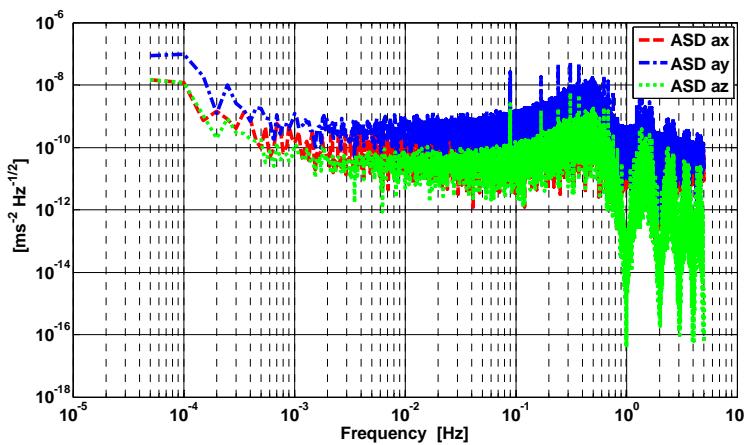


图 5-19 估计残差功率谱（特征值 0.5）

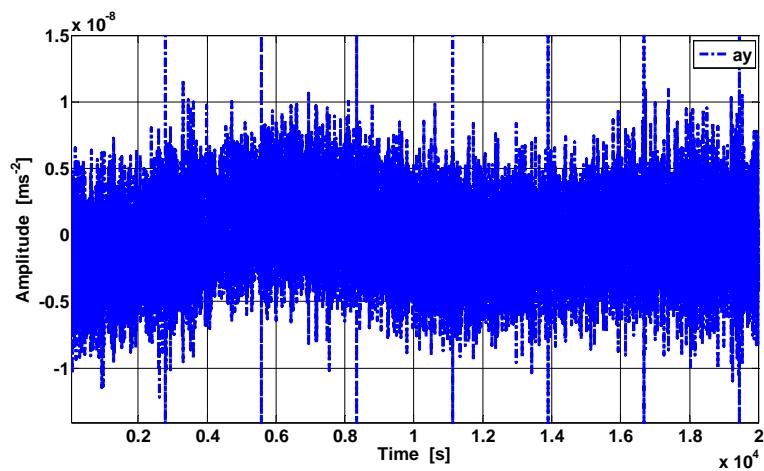


图 5-20 估计残差时间序列 (Y 轴, 特征值 0.9)

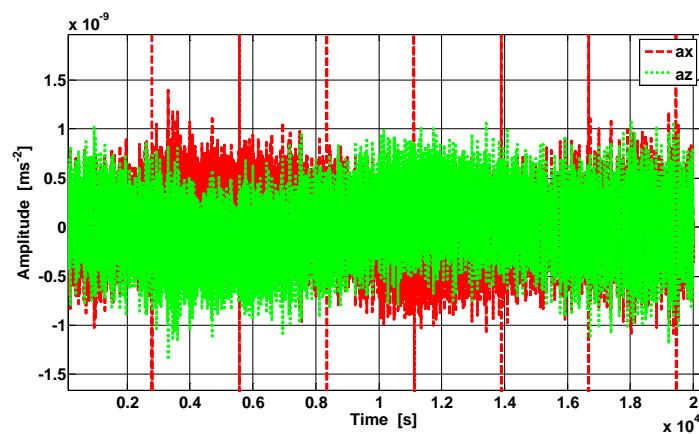


图 5-21 估计残差时间序列 (X,Z 轴, 特征值 0.9)

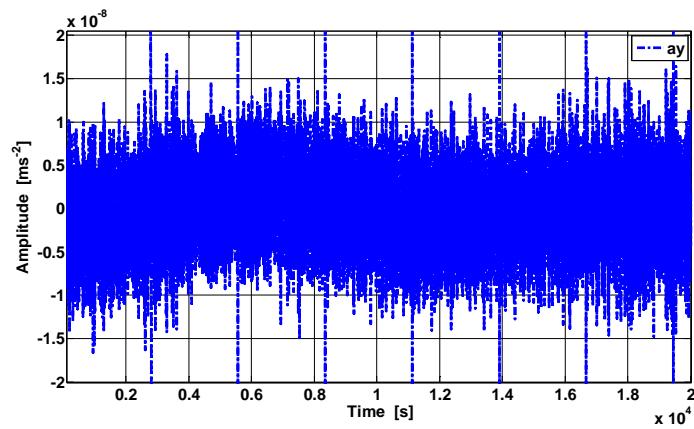


图 5-22 估计残差时间序列 (Y 轴, 特征值 0.7)

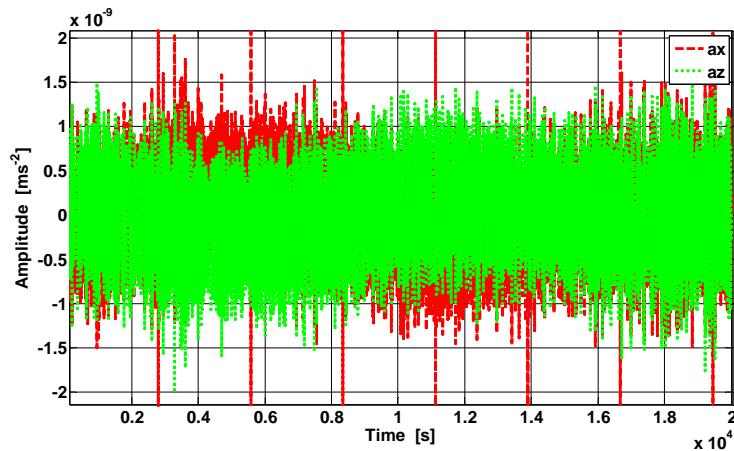


图 5-23 估计残差时间序列 (X、Z 轴, 特征值 0.7)

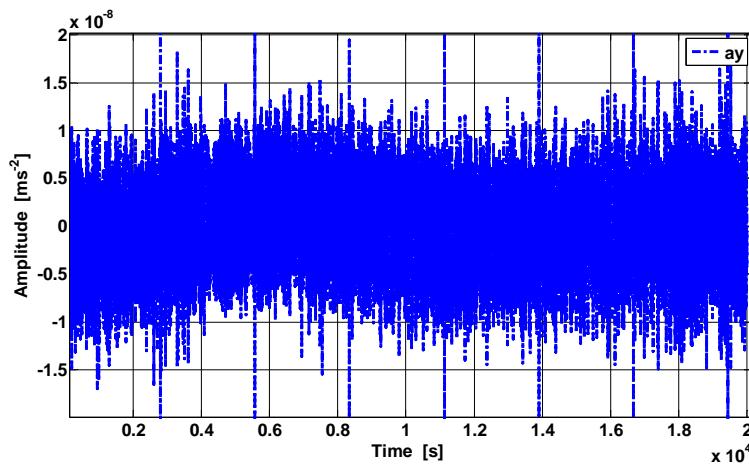


图 5-24 估计残差时间序列 (Y 轴, 特征值 0.5)

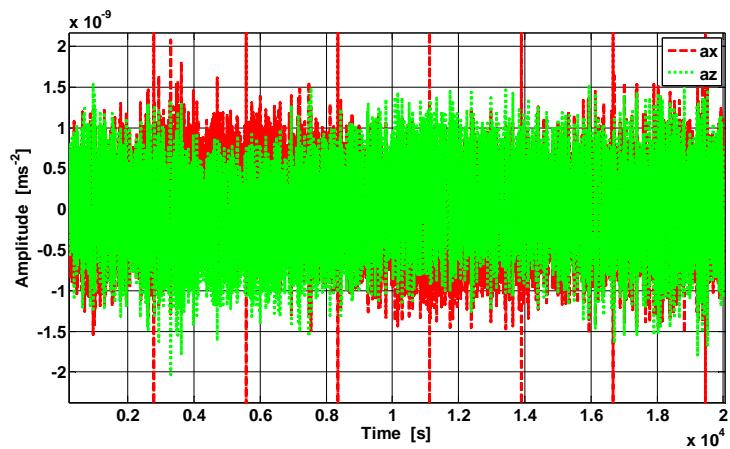


图 5-25 估计残差时间序列 (X, Z 轴, 特征值 0.5)

基于估计器估计的干扰加速度，施加无拖曳控制 $u_i(i+1) = -\hat{d}_i(i+1)$ 进行干扰补偿，在第 10s 施加控制，得到的收敛过程如图 5-26 所示，得到的加速度残差及其功率谱密度如图 5-27，图 5-28，图 5-29 所示，可以看出加速度残差满足约束条件。

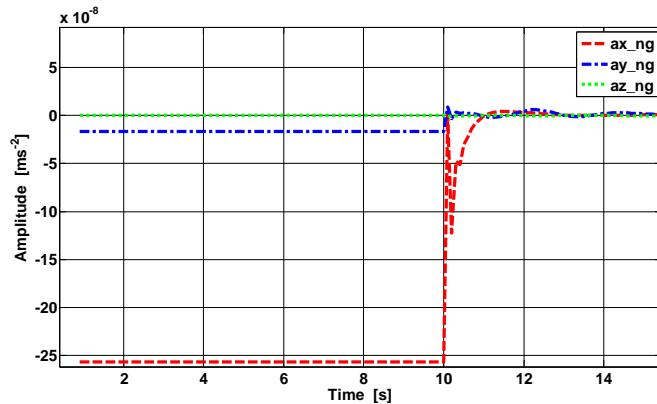


图 5-26 施加控制后的收敛过程（10s 时施加控制）

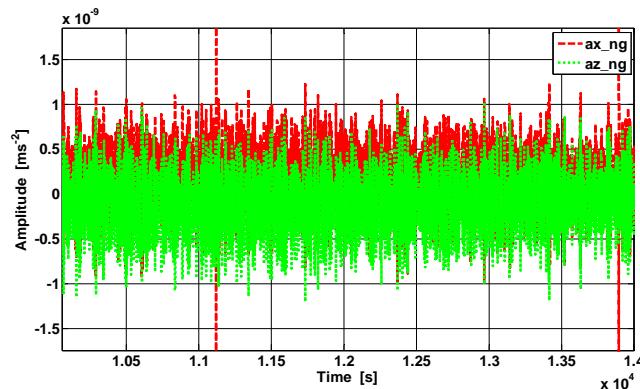


图 5-27 施加控制后的残差加速度时间序列（X, Z 轴，特征值 0.7）

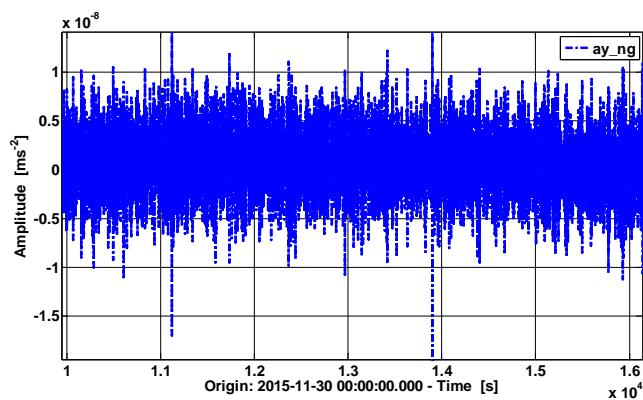


图 5-28 施加控制后的残差加速度时间序列（Y 轴）

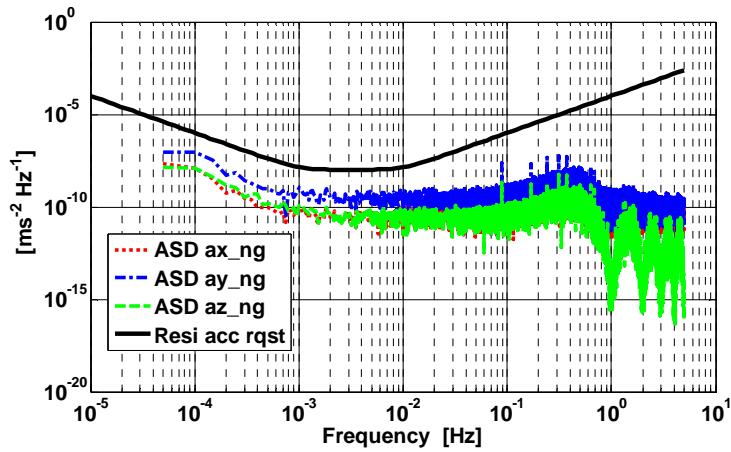


图 5-29 施加控制后的估计残差功率谱

5.4.2 角加速度无拖曳控制数字仿真

对角加速度无拖曳控制回路进行数字仿真评估，根据设计分析结果，对单轴选取特征值 $\lambda_{ax} = [0.75 \ 0.75 \ 0.37]$ ，则估计器的反馈增益矩阵向量为 $L_{ax} = [0.13 \ 0.3775 \ 0.04]$ ，评估卫星无控制状态下的干扰力矩估计效果。卫星无控制状态下的角加速度如图 5-30 所示，角加速度功率谱如图 5-31 所示。角加速度的测量引入测量噪声，经过估计器估计后，干扰角加速度如图 5-32，图 5-33 所示。估计器的收敛过程如图 5-34 所示，对干扰加速度的估计残差如图 5-35，图 5-36 所示，估计残差的功率谱如图 5-37 所示，可以干扰力矩估计残差小于约束条件，与理论分析结果一致，所设计的估计器可以用于干扰补偿的输入。

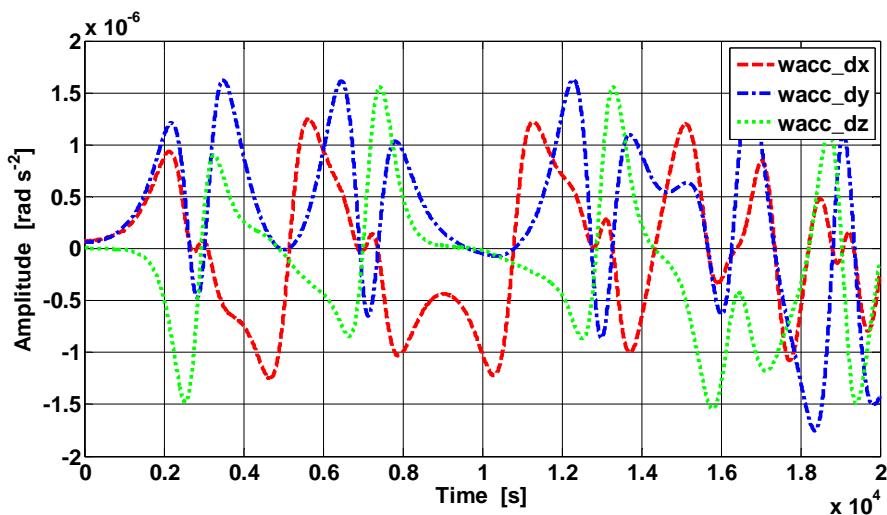


图 5-30 作用于卫星上的干扰角加速度

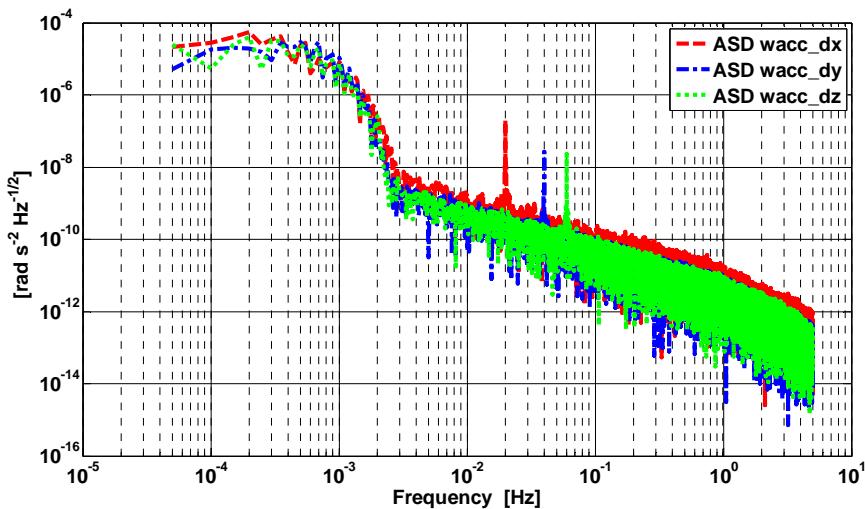


图 5-31 作用于卫星上的干扰角加速度功率谱

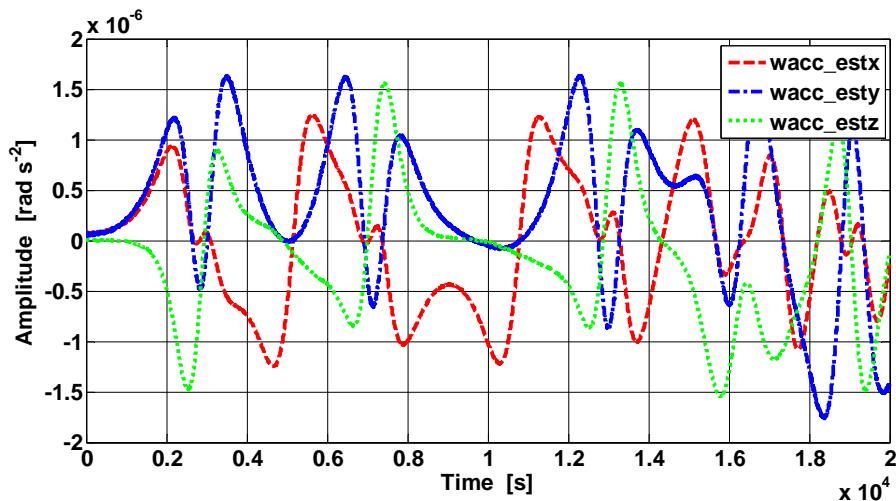


图 5-32 估计干扰加速度的时间序列曲线

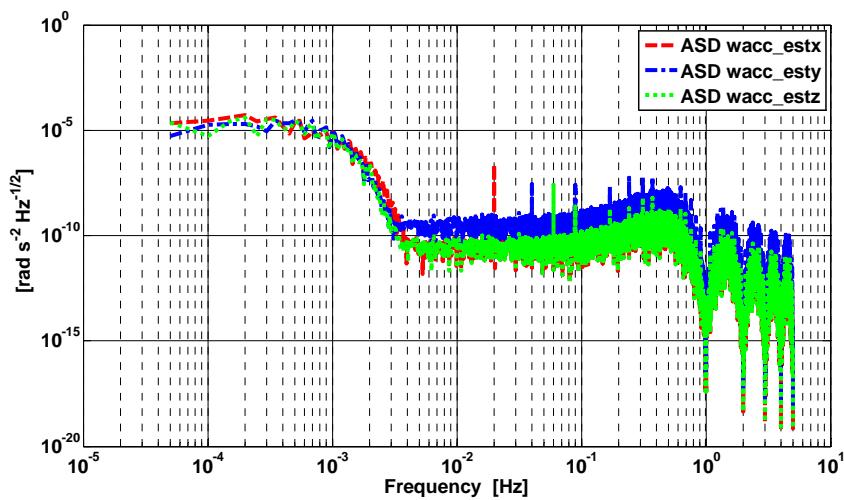


图 5-33 估计干扰加速度的功率谱密度曲线

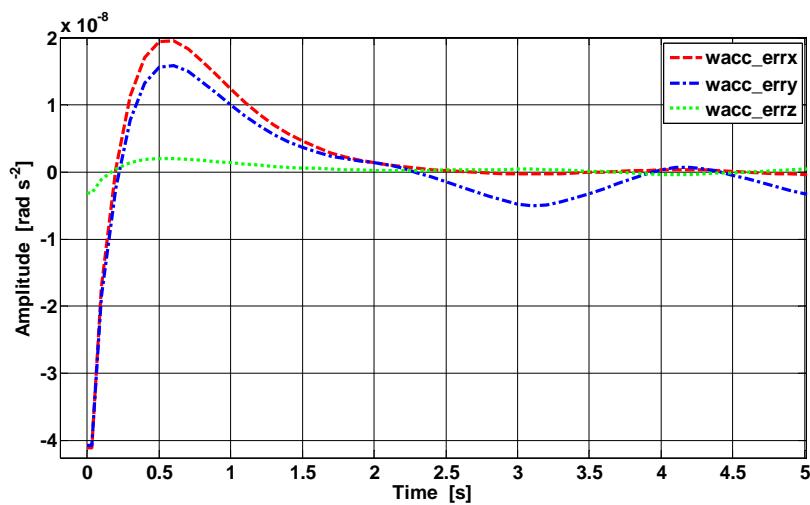


图 5-34 估计器收敛过程曲线

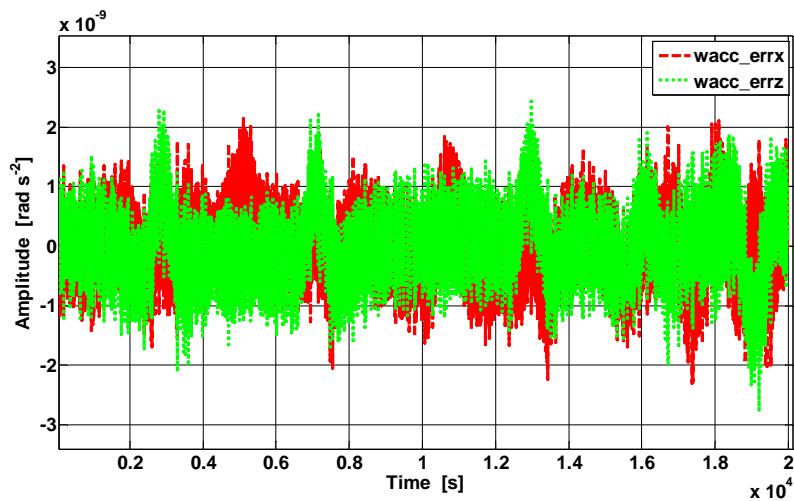


图 5-35 干扰角加速度估计残差曲线（X 轴、Z 轴）

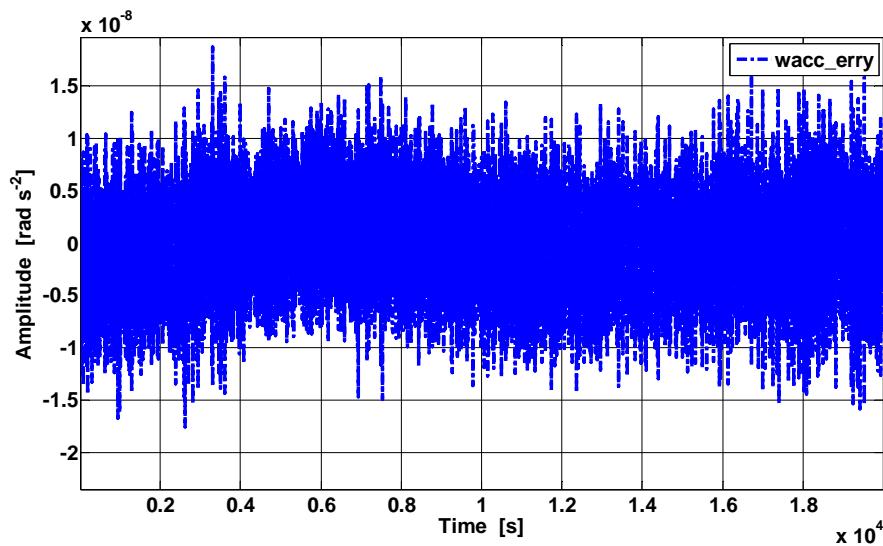


图 5-36 干扰角加速度估计残差曲线（Y 轴）

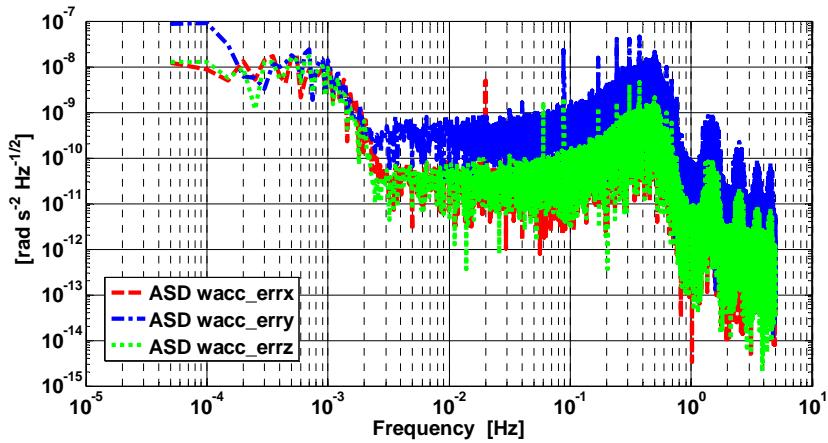


图 5-37 干扰角加速度估计残差功率谱

基于估计器估计的干扰加速度,施加无拖曳控制 $u_a(i+1) = -\hat{d}_a(i+1)$ 进行干扰补偿,收敛过程如图 5-38 所示,得到的加速度残差及其功率谱密度如图 5-39, 图 5-40, 图 5-41 所示。

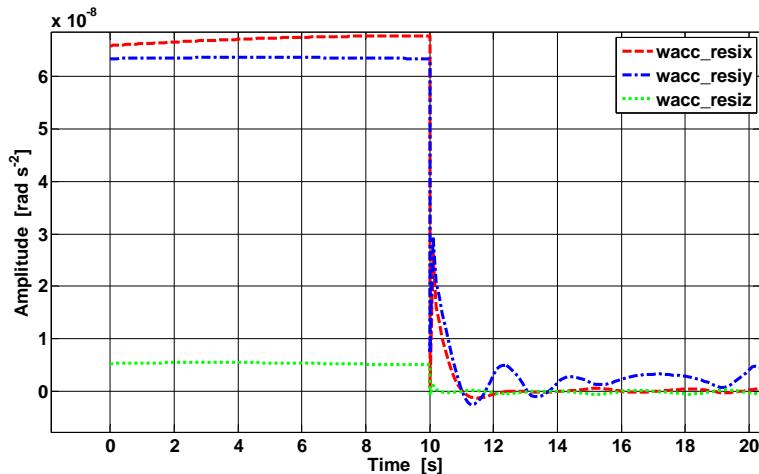


图 5-38 施加控制后的残差加速度时间序列 (Y 轴)

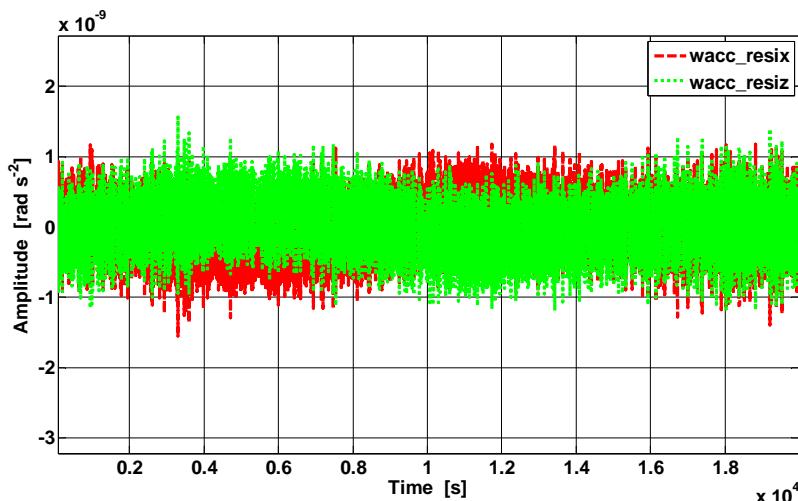


图 5-39 施加控制后的残差加速度时间序列 (Y 轴)

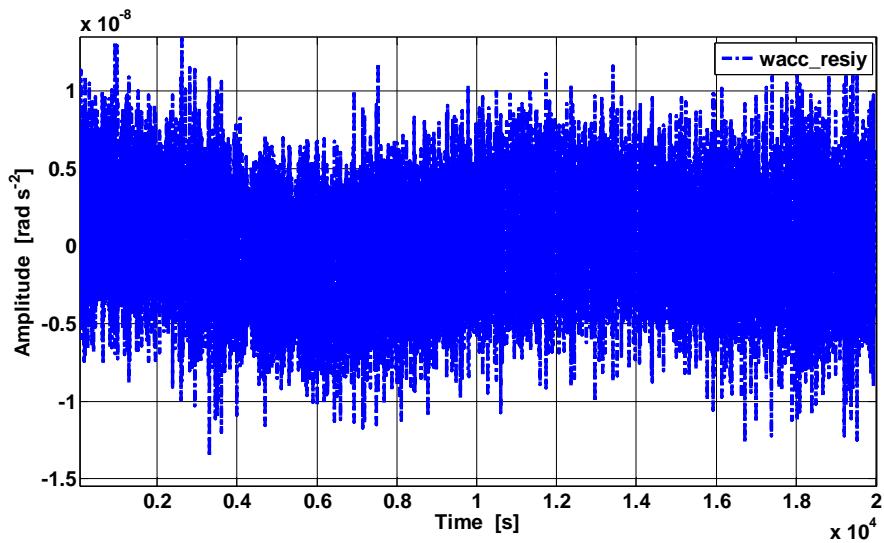


图 5-40 施加控制后的残差加速度时间序列（Y 轴）

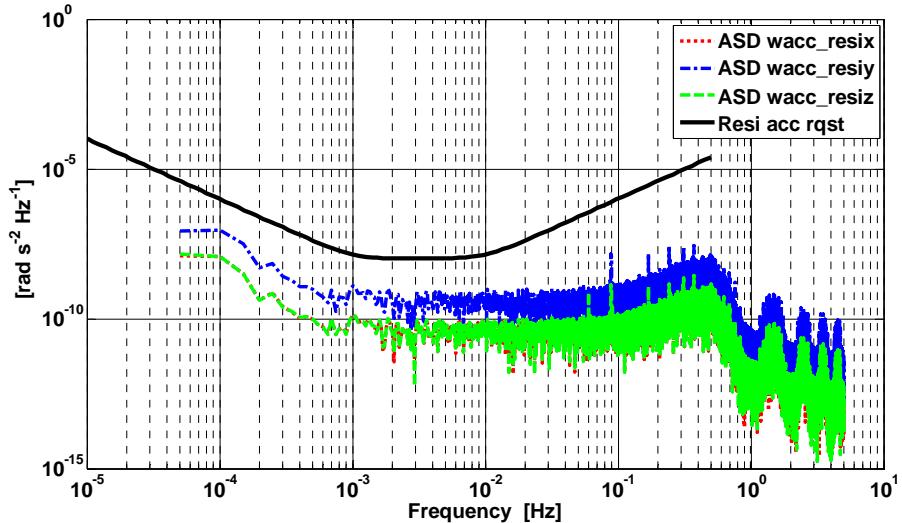


图 5-41 施加控制后的残差加速度时间序列（Y 轴）

5.5 本章小结

线加速度、角加速度的无拖曳控制的目的均是抵消外界干扰，满足残差加速度的功率谱密度约束。本节分析了通过动力学观测器估计外干扰的方法，建立了观测器增益矩阵与功率谱密度约束之间的关系，通过对闭环系统传递函数、外干扰功率谱的分析，确定了特征值的范围与系统带宽，进而确定了增益矩阵的参数范围。根据所设计的反馈增益阵进行了数字仿真，结果表明基于动力学估计器的方法可以完成对外干扰的高精度估计，在此基础上开展干扰补偿，实现卫星无拖曳飞行的目标。

第6章 姿态回路控制方法研究

6.1 引言

同常规的卫星姿态控制要求相比,两颗无拖曳编队卫星的姿态控制要求具有以下特点:

- 1) 由于卫星均实施了 drag-free 内回路控制,抵消了外界干扰,因此姿态控制基本上属于在无外界干扰情况下的控制,要求姿态控制在达到指向要求的基础上,不能产生破坏角加速度回路指标的干扰。
- 2) 角加速度性能指标的功率谱约束,也隐含了对姿态误差的功率谱约束,二者关系为 $\bar{S}_q^2(f) = \bar{S}_{a_a}^2(f)/(2\pi f)^2$, 该约束随频率的升高而变的苛刻。
- 3) 姿态控制需要实现两颗卫星激光链路的相互跟踪,有两种方法实现。一是由卫星姿态控制实现,二是在激光发生装置中,含自校正控制机构。在工程中实现中,后一种较为常用。
- 4) 两颗卫星的飞行姿态参考坐标系是位于两星中点的编队飞行坐标系,需跟踪其姿态、姿态角速度和姿态角加速度。
- 5) 相比于星敏感器 $15\mu\text{rad}$ 的测量噪声,激光干涉测距回路可提供更高精度的相对测角信息,达到 $1\mu\text{rad}$,但其为二维信息,相对仰角 $\Delta\tilde{\theta}_l$,相对方位角 $\Delta\tilde{\psi}_l$ 。

本章在分析姿态控制需求的基础上,仍基于频域设计方法 QFT 对姿态回路进行设计,将姿态频谱要求、噪声功率谱密度约束转化为对控制回路的约束,进而分析出控制参数的取值范围,对回路进行仿真。

6.2 基于 QFT 的姿态控制器设计方法

卫星姿态控制回路需实现的指标为:

$$S_\theta = S_\psi \leq 100 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{10\text{mHz}}{f}\right)^2} \frac{\mu\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (6-1)$$

$$S_\phi \leq 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{10\text{mHz}}{f}\right)^2} \frac{\text{mrad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (6-2)$$

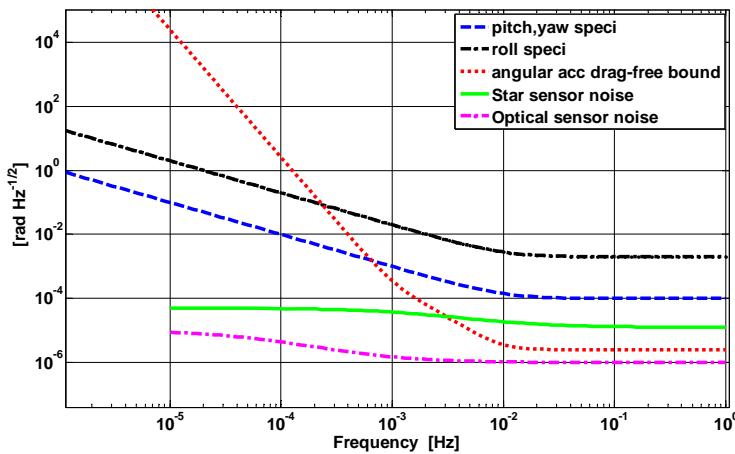


图 6-1 指向约束及敏感器噪声功率谱幅频特性

由于需要在频域内进行干扰分析与控制器设计,考虑 5.3 节中的定量反馈(QFT)鲁棒控制理论,与功率谱密度结合,建立系统的边界约束函数,对姿态控制回路进行设计, QFT 控制系统形式如下图所示。

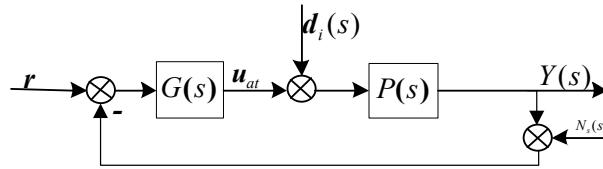


图 6-2 QFT 姿态控制系统结构图

图中, $Y(s) = [\varphi(s) \ \theta(s) \ \psi(s)]^T$, 为相对于编队坐标系的姿态欧拉角输出;

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z s^2} \end{bmatrix}$$

为被控对象的传递函数; J_{xx} 、 J_{yy} 、 J_{zz} 分别为卫星三轴的主惯量。

$G(s)$ 为控制器矩阵, $N_s(s)$ 为星敏感器测量噪声, $d_i(s)$ 为推力器噪声。

系统输出的传递函数为:

$$Y(s) = \frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)} r(s) - \frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)} N_s(s) + \frac{P(s)}{1+G(s)P(s)} d_i(s) \quad (6-3)$$

控制输出的传递函数为:

$$u_{at}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)P(s)} r(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)P(s)} N_s(s) - \frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)} d_i(s) \quad (6-4)$$

令 $S_\Phi(s) = \frac{I}{I + G(s)P(s)}$, $V_\Phi(s) = I - S_\Phi(s)$, 其中 $S_\Phi(s), V_\Phi(s)$ 均为主对角阵。

由于卫星内回路实施了 drag-free 控制, 相对于参考系的角加速度与角速度误差已经很小, 因此卫星三个姿态回路基本上为相互解耦的, 因此可分别对每个回路单独设计, 获取控制参数, 作为仿真调试的输入。以 X 回路为例, 设计过程如下:

1) 确定控制目标及约束条件

(1) 鲁棒稳定性约束

为确保闭环系统的稳定, 令:

$$\left| \frac{g_{xx}(j2\pi f)p_{xx}(j2\pi f)}{1+g_{xx}(j2\pi f)p_{xx}(j2\pi f)} \right| < 1.1, \quad (i=1,2,3) \quad (6-5)$$

相当于控制系统中的幅值裕度 K_M 与相角裕度 ϕ_M :

$$K_M = 1 + \mu_1^{-1} = 5.62 \text{dB}$$

$$\phi_M = 180^\circ - \arccos(0.5\mu_1^{-2} - 1) = 54.07^\circ$$

(2) 闭环带宽与跟踪性能

由于 Drag-free 内回路的带宽在 0.2~0.5Hz 范围内, 且已将外界干扰抵消, 姿态控制回路可保持低带宽, 带宽越低, 与 Drag-free 内回路的耦合效应越小, 约 < 0.01Hz 的情况下与 Drag-free 回路带宽闭环带宽能够隔离。在 QFT 控制器的设计过程中, 可通过零极点配置预先定义一传递函数作为上界, 用于控制器设计的参考。相比于 Y, Z 轴, X 轴星敏感器的测量误差较大, 应增加高频段对噪声的衰减能力。

$$\left| \frac{g_{xx}(j2\pi f)p_{xx}(j2\pi f)}{1+g_{xx}(j2\pi f)p_{xx}(j2\pi f)} \right| < \delta_{x1}(j2\pi f) \quad (6-6)$$

$$\delta_{x1}(j2\pi f) = \frac{\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.001}\right)}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.003}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.003}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.01}\right)} \quad (6-7)$$

(3) 控制输出功率谱边界

姿态控制本身产生了角加速度干扰, 因此控制指令对应角加速度的功率谱应满足边界约束, 定义姿态控制指令加速度的功率谱为 $S_{u_{at}}(f)$, 则:

$$S_{u_{at}}(f) < \bar{S}_{a_a}(f) \quad (6-8)$$

由式 (6-4) 可知, 达到稳态后, 指令加速度干扰受敏感器和推力器自身干扰影响, 则其功率谱密度:

$$S_{u_{at}}^2(f) = S_{\Phi x}^2(f) |g_{xx}(f)|^2 S_{N_s}^2(f) + V_{\Phi x}^2(f) S_{d_i}^2(f) \quad (6-9)$$

推力器噪声量级为1微牛的高频噪声，指标选取及使用方式保证了推力噪声占指令力矩很小部分，且闭环函数 $V_\Phi(s)$ 在高频段衰减起到抑制作用，这里主要分析星敏感器测量噪声对其影响。

$$W_{sp}(f) = \frac{1}{\bar{S}_{a_a}(f)} \sqrt{\left(|S_{\Phi x}(f) g_{xx}(f)|^2 \bar{S}_{N_s}^2(f) + |V_{\Phi x}(f)|^2 \bar{S}_{d_i}^2(f) \right)} \quad (6-10)$$

$W_{sp}(f)$ 幅值随频率的变化如式图6-3所示，由于该曲线是非解析的，可以用一传递函数进行逼近，作为边界。经过设计，可采用传递函数如式(6-11)所示，该传递函数幅值随频率变化如图6-3中实线所示，所设计的控制器使 $G(s)/(I+G(s)P(s))$ 的幅值应低于该边界。

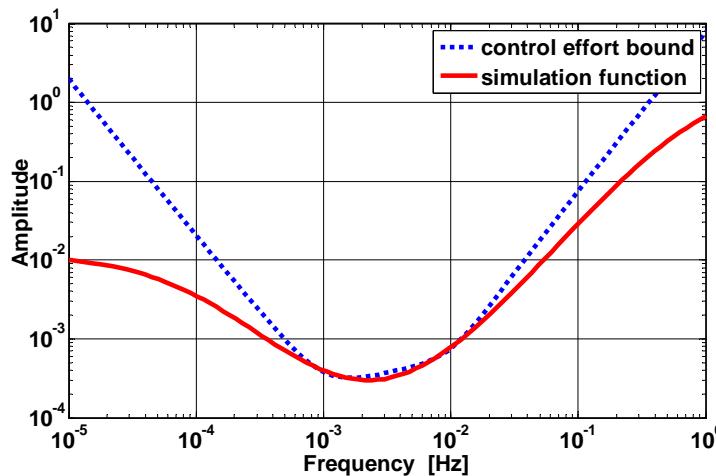


图6-3 控制量约束边界及传递函数模拟曲线关系

$$\delta_4(j2\pi f) = \frac{1.44 \times 10^{-2} \left(1 + \frac{j2\pi f}{0.0125}\right)^2 \left(1 + \frac{j2\pi f}{0.02}\right)^2}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{6.24 \times 10^{-4}}\right)^2 \left(1 + \frac{j2\pi f}{5}\right)^2} \quad (6-11)$$

2) 基于QFT的控制回路设计与调试

根据QFT单回路的设计与调试方法，将约束边界在Nichols图上画出，配置控制器的零、极点。由于X轴星敏感器的测量误差较大，需要提高在高频段噪声抑制能力，配置1个零点，3个极点，如式(6-12)所示。

频率向量为 $\omega_p = [1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 10] rad/s$ 。

(1) X回路控制器设计

开环函数幅值相位 $L_1(j\omega_k) = g_{xx}(j\omega_k) p_{xx}(j\omega_k)$ 在各频率的幅值、相位与边界 $B_1(j\omega_k)$ 的关系如图6-4所示，若边界 $B_1(j\omega_k)$ 为实线，则 $L_1(j\omega_k)$ 对应的幅值需要在实线约束的上

方，反之，应在虚线约束的下方。

$$g_{xx}(j2\pi f) = \frac{2.8 \times 10^{-6} \left(1 + \frac{j2\pi f}{5 \times 10^{-5}}\right)}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.013}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.016}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.085}\right)} \quad (6-12)$$

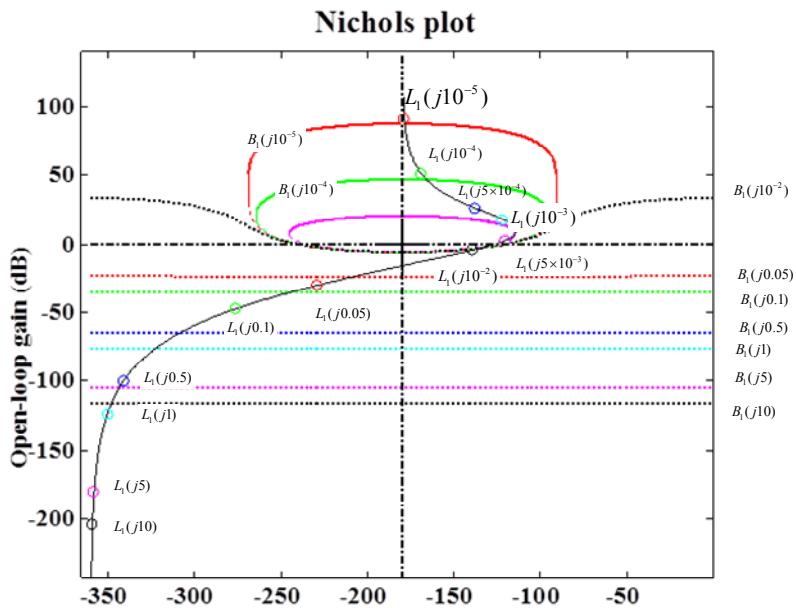


图 6-4 X 轴控制器对应 $L_1(j\omega_k)$ 与边界 $B_1(j\omega_k)$ 的关系

闭环函数 $\left| \frac{g_{xx}(j2\pi f)p_{xx}(j2\pi f)}{1+g_{xx}(j2\pi f)p_{xx}(j2\pi f)} \right|$ 幅值与 $\delta_{x1}(j2\pi f)$ 的关系如图 6-5 所示，闭环

带宽未超过预先设定的参考值。控制量输出功率谱约束的满足性如

图 6-6 所示，对星敏感器噪声的响应传函幅值低于边界，满足约束条件。

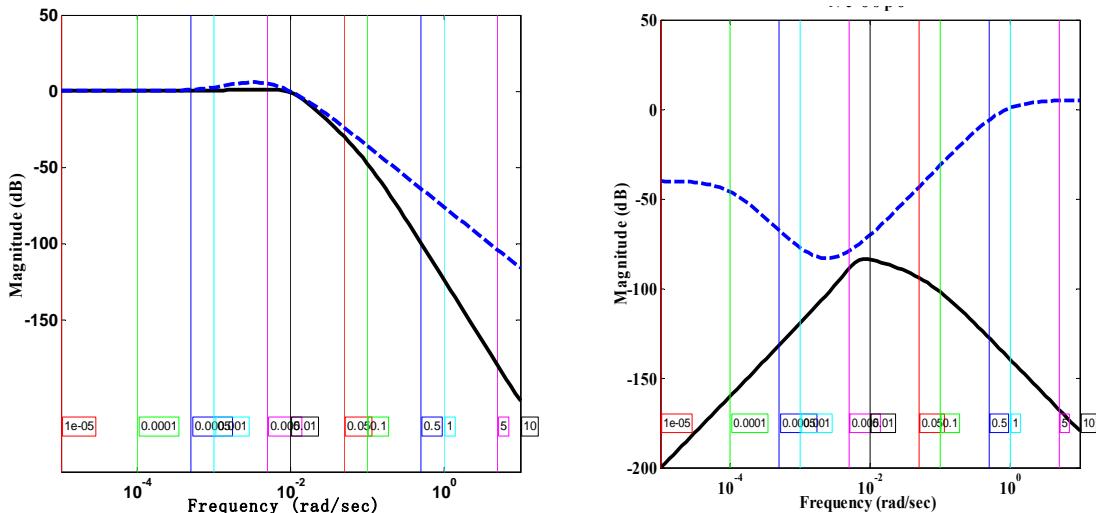


图 6-5X 轴闭环传函与边界约束伯德图 图 6-6 X 轴控制量传函与边界约束伯德图

闭环系统的阶跃响应、冲击响应如图 6-7, 图 6-8 所示, 可以看出所设计的回路是稳定的。

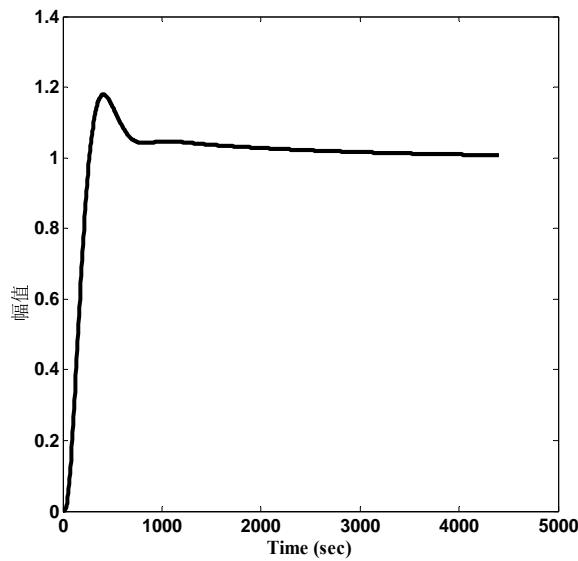


图 6-7 闭环系统阶跃响应

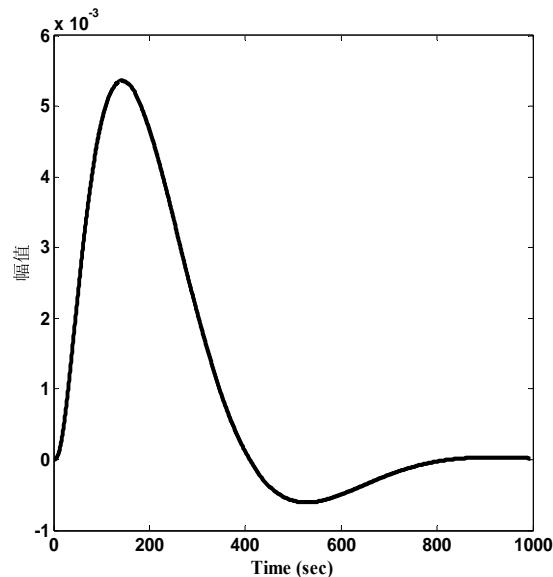


图 6-8 闭环系统冲击响应

(2) Y 轴回路控制器设计

Y 轴为俯仰轴, 姿态主要受重力梯度残差干扰, 并且与轨道角速度存在一定耦合, 对 Y 轴设计的跟踪边界函数如式 (6-13) 所示, 所设计的控制器配置 1 个零点, 2 个极点, 如式 (6-14) 所示, 边界约束及各频率采样点幅值、相位关系如图 6-9 所示, 闭环响应与边界函数的伯德图关系如图 6-10 所示, 控制量输出功率谱约束的满足性如图 6-11 所示, 可以看出闭环系统对星敏感器噪声的响应传函幅值低于边界, 满足约束条件。

$$\delta_{y1}(j2\pi f) = \frac{\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.005}\right)}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.01}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.015}\right)} \quad (6-13)$$

$$g_{yy}(j2\pi f) = \frac{2.4 \times 10^{-5} \left(1 + \frac{j2\pi f}{0.0012}\right)}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.031}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.26}\right)} \quad (6-14)$$

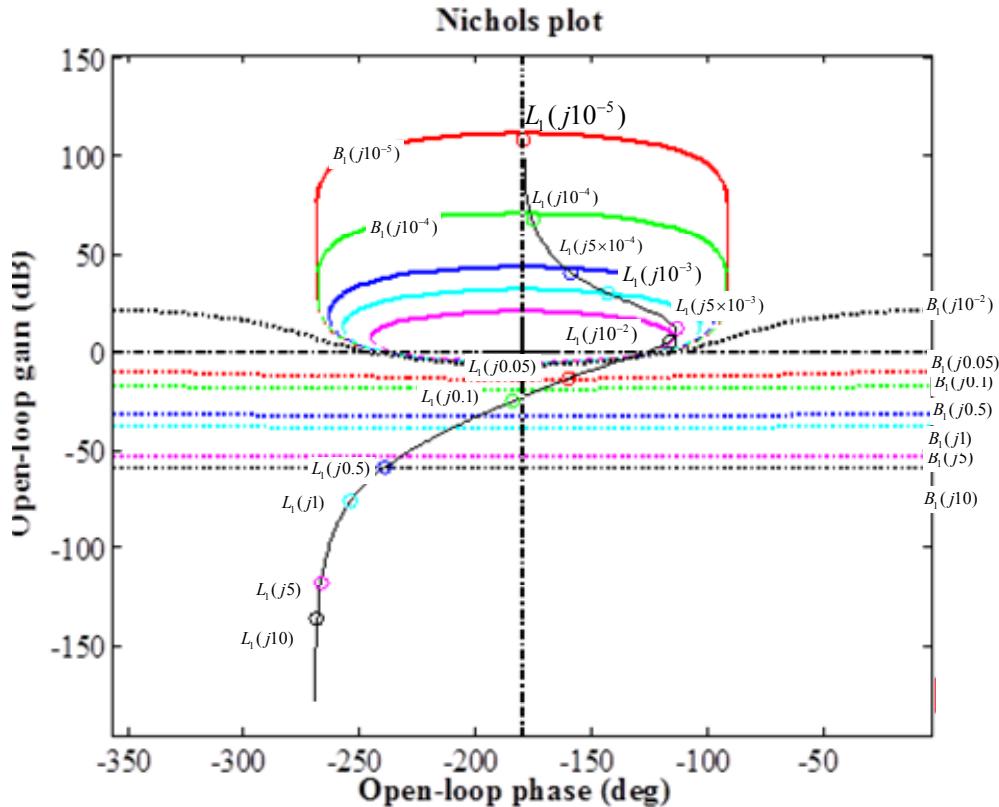
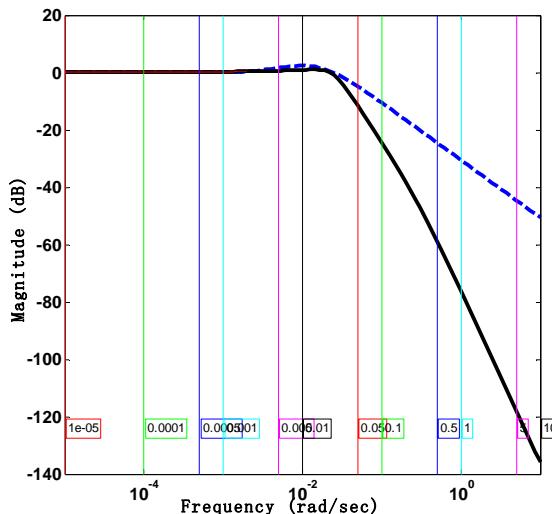
图 6-9 Y 轴控制器对应 $L_1(j\omega_k)$ 与边界 $B_1(j\omega_k)$ 的关系

图 6-10 Y 轴闭环传函与边界约束伯德图

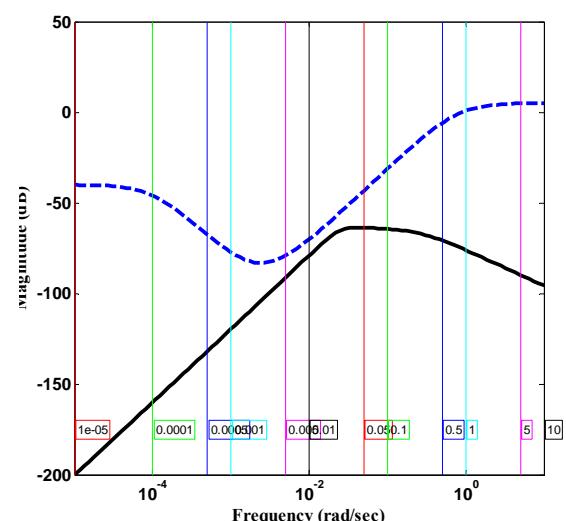


图 6-11 X 轴控制量传函与边界约束伯德图

(3) Z 轴回路控制器设计

Z 轴为偏航轴，采用与 Y 轴相同的边界函数，设计控制器如式 (6-15) 所示，所设计的控制器配置 1 个零点，2 个极点，边界约束及各频率采样点幅值、相位关系如图 6-12 所示，闭环响应与边界函数的伯德图关系如

图 6-13 所示，控制量输出功率谱约束的满足性如图 6-14 所示，可以看出闭环系

统对星敏感器噪声的响应传函幅值低于边界，满足约束条件。

$$g_{zz}(j2\pi f) = \frac{3.6 \times 10^{-5} \left(1 + \frac{j2\pi f}{5 \times 10^{-4}}\right)}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.01}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{0.25}\right)} \quad (6-15)$$

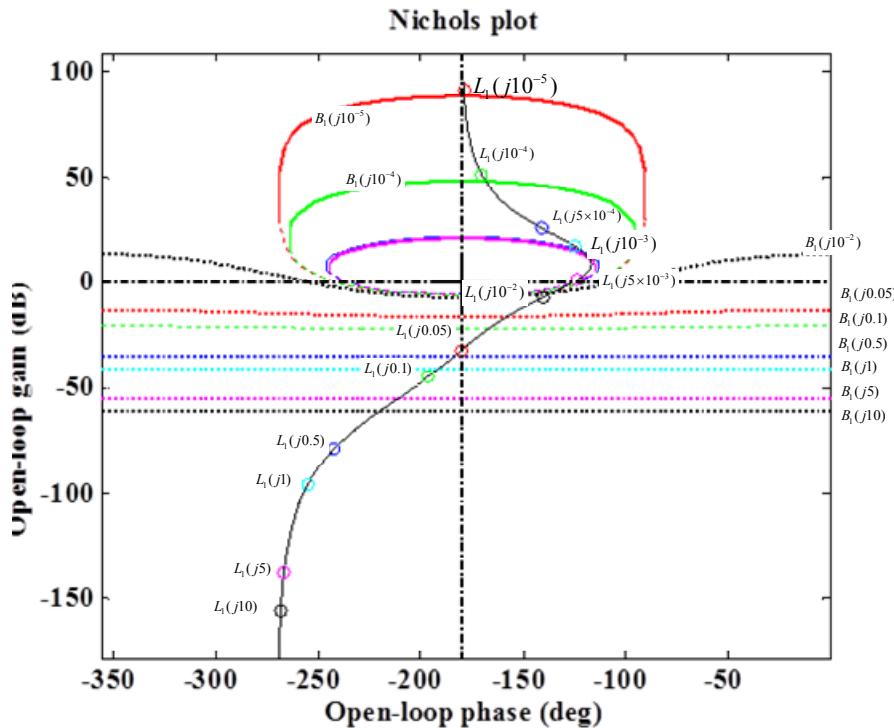


图 6-12 Z 轴控制器对应 $L_i(j\omega_k)$ 与边界 $B_i(j\omega_k)$ 的关系

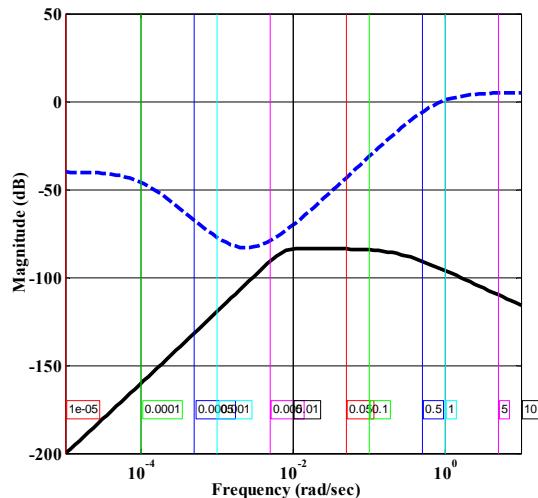
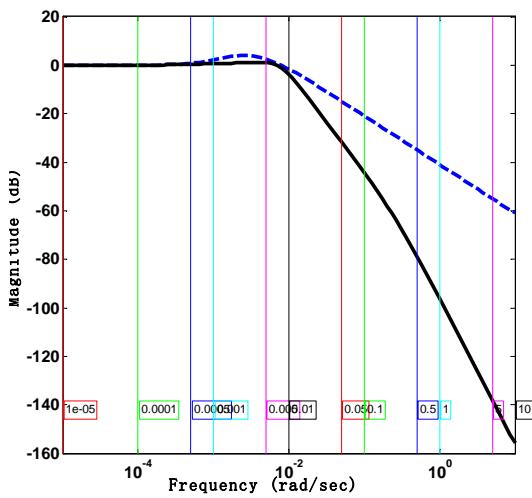


图 6-13 Z 轴闭环传函与边界约束伯德图 图 6-14 Z 轴控制量传函与边界约束伯德图

6.3 姿态控制回路数字仿真结果

采用本节设计的姿态控制器，对单颗卫星的姿态控制回路进行数字仿真，drag-free 内回路处于工作状态，引入的星敏感器的噪声功率谱如图 6-15 所示，在 Y, Z 轴为 $10 \mu\text{rad} / \sqrt{\text{Hz}}$ ，在 X 轴 $30 \mu\text{rad} / \sqrt{\text{Hz}}$ ， $f < 0.01 \text{Hz}$ 的低频段噪声幅值有所增加，时域上的模拟误差如图 6-16。初始姿态误差设定为 $[-0.01, 0.02, -0.02] \text{rad}$ ，为了压制控制量的输出，控制器的增益很小，经过约 6000s 的时间达到稳定，得到的误差角时间序列如图 6-17 所示，稳定状态误差角优于 10^{-4}rad ，误差角的功率谱如图 6-18 所示，低于姿态角的约束的复合边界最小值，均满足性能要求。

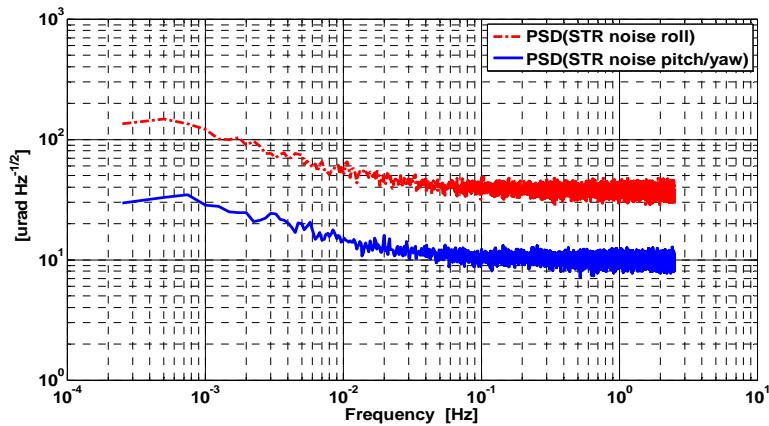


图 6-15 星敏感器噪声功率谱

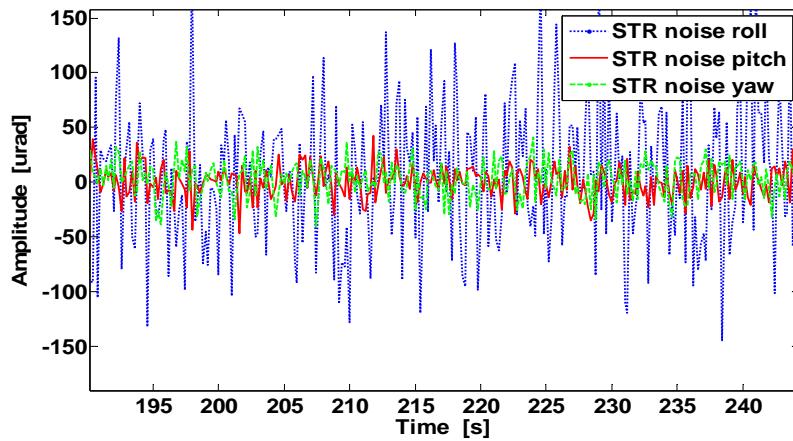


图 6-16 星敏感器噪声时间序列

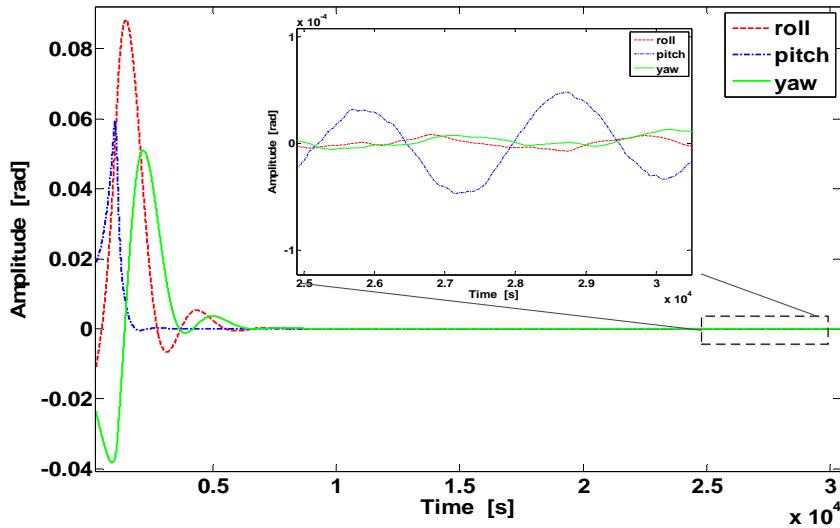


图 6-17 姿态误差角时间序列曲线

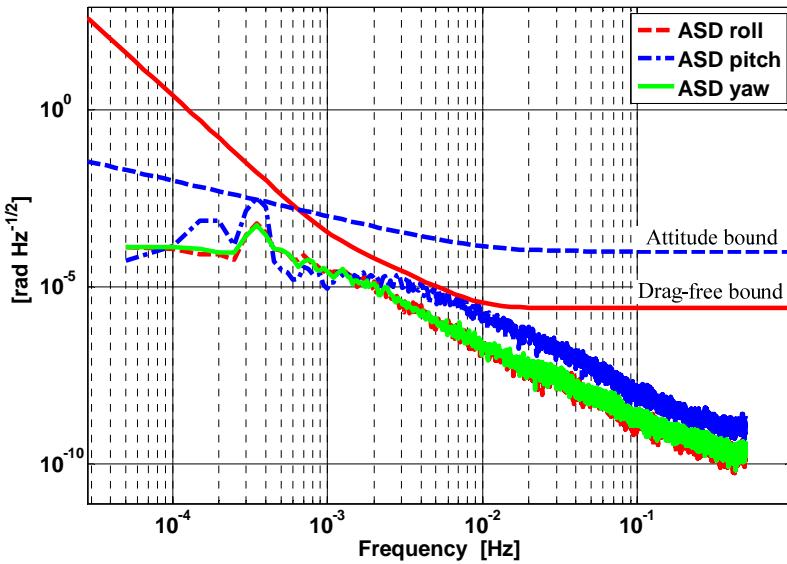


图 6-18 姿态误差角功率谱密度曲线

对于无拖曳卫星的姿态控制，达到姿态角误差指标只是目标之一，在姿态控制的过程中，产生的控制量不能破坏特定频段内的科学测量，即角加速度功率普边界，为此，对产生的控制量进行了频谱分析，如图 6-19 所示，Y 轴的控制量较大，接近边界，X 轴与 Z 轴均低于边界，满足无拖曳的要求。

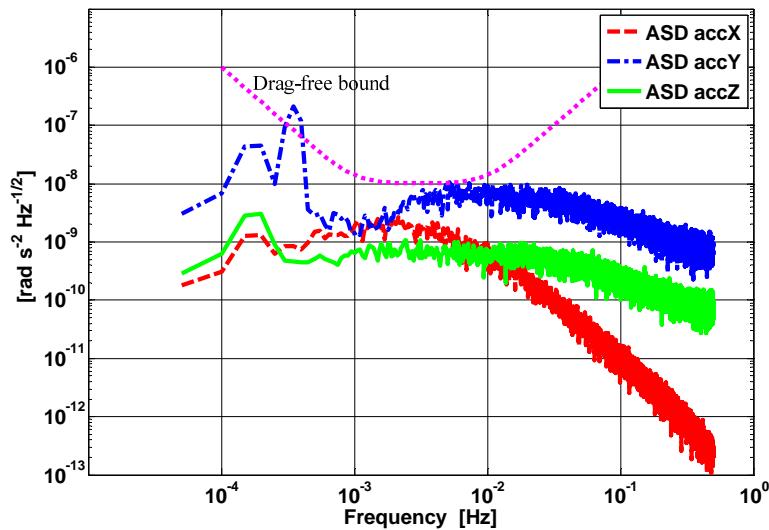


图 6-19 角加速度控制量功率谱

此外，考虑到激光测距回路可提供更高精度的相对姿态测量，产生的姿态噪声可提高到 $1\mu\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，将 Y 轴，Z 轴的星敏测量误差由激光测量误差替代，评估在该噪声下可提高的精度。引入的激光测角噪声功率谱及时间序列如图 6-20，图 6-21 所示，得到误差角与控制量的功率谱如图 6-22，图 6-23 所示，可大大提高姿态控制的精度，而所需的控制量可降低一个数量级。

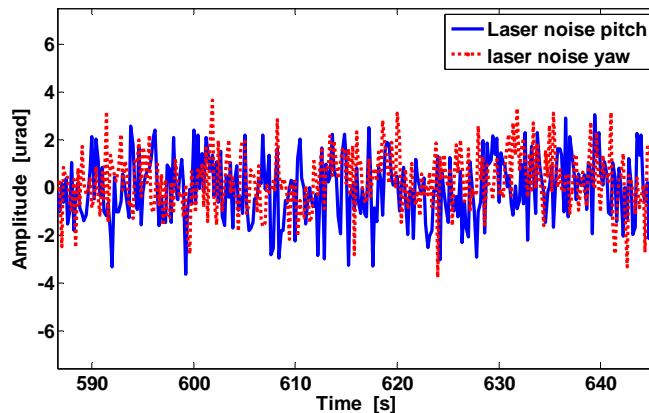


图 6-20 激光回路相对角度测量误差时间序列

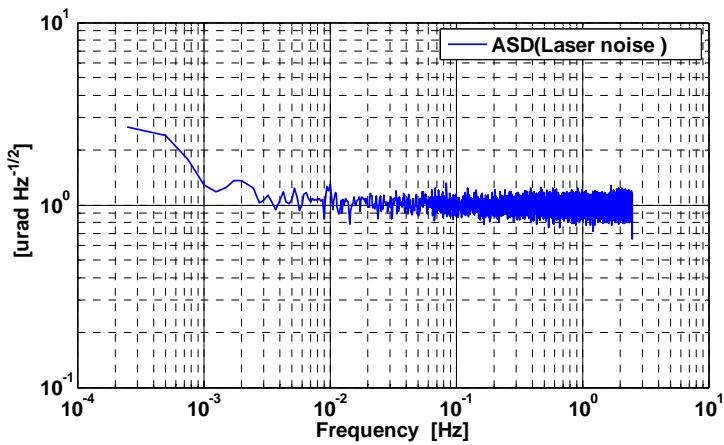


图 6-21 激光回路相对角度测量误差功率谱

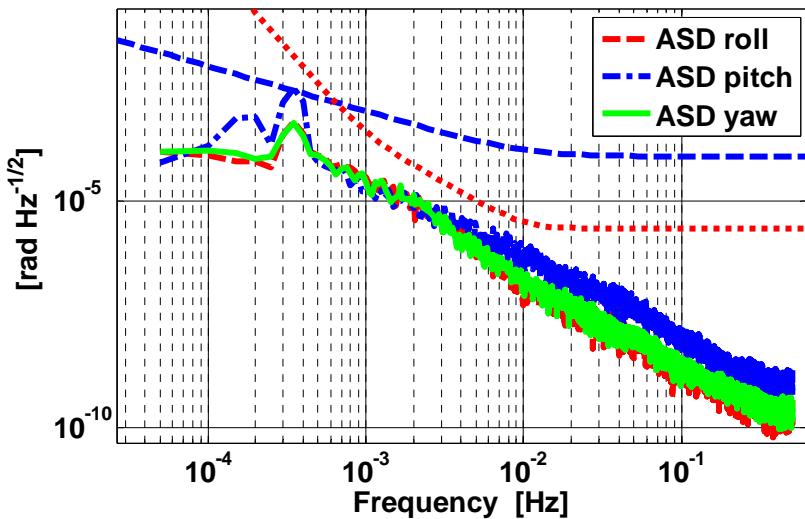


图 6-22 基于激光测量误差的姿态控制误差角功率谱

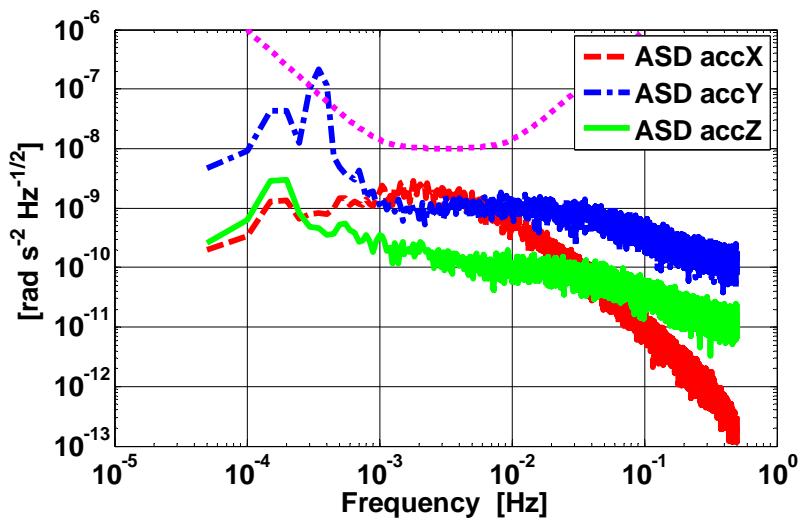


图 6-23 基于激光测量误差的角加速度控制功率谱

6.4 本章小结

本章节将不同方面对姿态的需求进行了分析与转化，基于频域设计方法 QFT 设计了姿态控制器，根据星敏感器噪声的功率谱建立了闭环系统频谱相应边界，确立了控制参数，分别将星敏感器噪声、激光相对测角噪声引入姿态控制系统，仿真结果显示卫星姿态能够满足指标，并且产生的角加速度功率谱密度满足无拖曳指标要求，证明了本论文所采用分析方法的有效性与可用性。

第7章 全系统数字仿真与分析

7.1 引言

在第5、6、7章节的控制器设计过程中，均对所设计回路自身进行了仿真分析，可以确定单个回路控制是满足设计要求，并且在内、外回路的设计过程中，已经预先考虑了频率隔离。但是，为了验证所有回路同时工作的兼容性，需要模拟两颗卫星在轨编队飞行的状态，综合考核无拖曳控制、姿态控制、编队控制的性能指标与误差功率谱。

重力场测量卫星的控制均由微推力器实现，在所有回路均工作的时候，需将无拖曳、姿态、位置控制指令分配至各推力器，并关注推力器的饱和约束。编队系统中的两颗卫星以编队飞行坐标系为参考，然而最终要实现的是两颗卫星激光系统的跟踪，需要将两颗卫星的相对位置与姿态作为重要考核内容。

本章研究内容的目的是建立无拖曳编队卫星的全回路数字仿真系统，仿真由初始状态过渡到稳态的模式，考虑工程中的实际约束，引入符合要求的功率谱密度噪声，获得仿真数据，对数据进行分析以评估稳态控制过程中的性能指标，确保整个系统回路正常运行，以验证本论文所提出的方法、所设计的控制器的合理性与可实施性。

7.2 仿真模型及输入输出

1) 主要仿真模型

表 7-1 无拖曳编队仿真模型列表

编号		输入	输出	实现方法
1	重力场模型	地固系下坐标	重力加速度	EGM2008, 120 阶, Simulink/toolbox/aerospace 模块
2	大气模型	时间、经度、 纬度、高度	大气密度	NRLMSISE-00 Simulink/toolbox/aerospace 模块
3	线加速度估计器	线加速度测量值 控制力指令	估计线加速度 估计外干扰力	Matlab S 函数
4	角加速度估计器	角加速度测量值	控制力矩指令	Matlab S 函数
5	编队控制器	相对位置测量估 计值	三轴控制力指 令	Simulink 模块
6	姿态控制器	姿态误差角 姿态角速度 参考姿态角加速 度	控制力矩指令	Simulink 模块

2) 仿真系统参数

表 7-2 无拖曳编队卫星参数列表

项目		卫星 A	卫星 B
仿真初始时间	T	2017年6月22日12时0分0秒 (UTC)	
初始轨道参数	半长轴 a	6778.137km	6778.137km
	偏心率 i	0.001	0.001
	倾角 e	89.5°	89.5°
	升交点赤经 (Ω)	0.16°	0.16°
	幅角 θ	0°	-0.846°
	初始位置 (惯性系下)	[X Y Z] [6777.973, 18.928, 0]km	[6777.238, 18.063,-100.043]km
初始速度 (惯性系下)	$[V_x \ V_y \ V_z]$	[-0.186, 66.920, 7668.344]m/s	[113.005, 67.229, 7667.508]m/s
初始姿态 (相对惯性系)	$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$	[0.010278179554768; -0.700843867637678; -0.003983003751797; -0.713229533811391]	[0.010278179554768 0.700843867637678 0.003983003751797 0.713229533811391]
初始角速度 (相对惯性系)	$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$	[0.00002,0.00113,-0.00001] Rad/s	[0.00002,0.00113,-0.00001] Rad/s
GPS 测量噪声	σ_r	30m	
	σ_v	0.03m/s	
星敏感器噪声	S_{Ns} (Y, Z 轴)	$10\mu rad/\sqrt{Hz}$, 功率谱幅值随 f 变化	
	S_{Ns} (绕光轴 X)	$30\mu rad/\sqrt{Hz}$, 功率谱幅值随 f 变化	
加速度计噪声	线加速度 S_{al}	$4 \times 10^{-11} m/s^2 \sqrt{Hz}$ (X, Z 轴), $4 \times 10^{-10} m/s^2 \sqrt{Hz}$ (Y 轴), 功率谱随 f 变化	
	角加速度 $S_{a\omega}$	$4 \times 10^{-11} rad/s^2 \sqrt{Hz}$ (X, Z 轴), $4 \times 10^{-10} rad/s^2 \sqrt{Hz}$ (Y 轴), 功率谱随 f 变化	
推力器噪声	S_{Ns} (微牛级)	$1\mu N/\sqrt{Hz}$, 功率谱幅值随 f 变化	
	S_{th} (毫牛级)	$30\mu N/\sqrt{Hz}$, 功率谱幅值随 f 变化	
激光测角噪声	S_{la}	$1\mu rad/\sqrt{Hz}$, 功率谱幅值随 f 变化	
卫星重量	m	500 kg	
卫星惯量	I	[178 0 0; 0 1504 0; 0 0 1620] kgm^2	

3) 推力器安装矩阵

表 7-3 推力器安装矢量列表

编号	推力矢量	推力器位置	类型
1	$[0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$	$[2 \ 0 \ -0.35]m$	射频离子微推力器
2	$[0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$	$[2 \ 0 \ 0.35]m$	同上
3	$[0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$	$[-2 \ 0 \ -0.35]m$	同上
4	$[0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$	$[-2 \ 0 \ 0.35]m$	同上
5	$[0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$	$[2 \ 0 \ -0.35]m$	同上
6	$[0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$	$[2 \ 0 \ 0.35]m$	同上
7	$[0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$	$[-2 \ 0 \ -0.35]m$	同上
8	$[0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$	$[-2 \ 0 \ 0.35]m$	同上
9	$[1, 0, 0]$	$[-2 \ 0 \ 0]m$	冷气微推力器
10	$[1, 0, 0]$	$[-2 \ 0 \ 0]m$	冷气微推力器(备份)

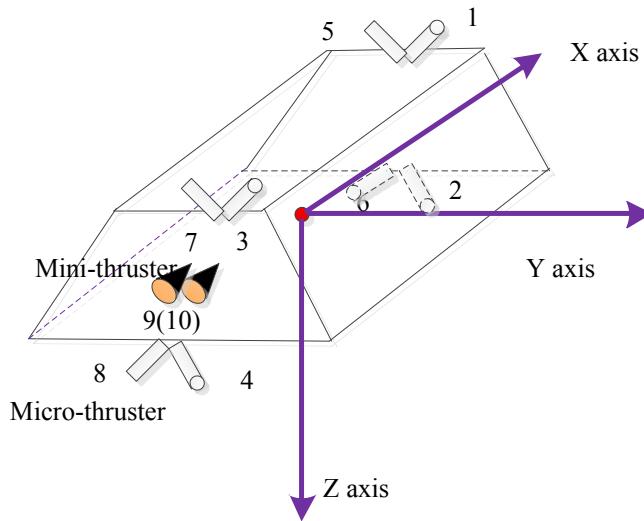


图 7-1 推力器安装矩阵

4) 推力器推力分配方法

(1) 推力矢量分配原则

对于无拖曳控制, +X 面为迎风面, 因此编号为 9 (10) 的微推力器实现沿+X 轴

的干扰补偿，产生沿+X 方向的控制加速度。编号为 1~8 的微推力器完成 Z 轴、Y 轴上的线加速度控制，分配原则为：

沿+Y 方向推力由编号为 5、6、7、8 的推力器平均分配；

沿-Y 方向推力由编号为 1、2、3、4 的推力器平均分配

沿+Z 方向推力由编号为 1、3、5、7 的推力器平均分配；

沿-Z 方向推力由编号为 2、4、6、8 的推力器平均分配。

对于两星编队控制也产生沿 X、Y、Z 方向的推力，其分配原则为：

对于沿 $\pm Y_f$ ， $\pm Z_f$ 方向上的控制加速度，由两颗卫星平均分配，A 星产生 $\Delta u_f / 2$ ，B 星产生 $-\Delta u_f / 2$

对于沿 $\pm X_f$ 方向上控制加速度， Δu_f 为正，则需产生使两星相对距离增加的控制量，推力分配给 A 星编号为 9（10）的推力器， Δu_f 为负，则推力分配给 B 星编号为 9（10）的推力器。

（2）力矩分配原则

姿态控制由编号为 1~8 的微推力器完成，分配原则为：

绕 X 轴正力矩：推力器 2、4 或 5、7；

绕 X 轴负力矩：推力器 1、3 或 6、8；

绕 Y 轴正力矩：推力器 3、7 或 2、6；

绕 Y 轴负力矩：推力器 1、5 或 4、8；

绕 Z 轴正力矩：推力器 3、4 或 5、6；

绕 Z 轴负力矩：推力器 1、2 或 7、8；

关于推力与力矩之间的关系，根据表 7-3 中的推力器位置，假设推力器产生的推力为 1mN，则计算出的力矩如下：

（1） 在 X 轴上，每对推力器可产生力矩为 0.495mN，两对可产生力矩为 0.99mN；

（2） 在 Y 轴上，每对推力器可产生力矩为 2.83mN，两对可产生力矩为 5.66mN；

（3） 在 Z 轴上，每对推力器可产生力矩为 2.83mN，两对可产生力矩为 5.66mN；

由于卫星为长方体，在 Y，Z 轴上的推力臂较长，单位推力产生的控制力矩较大，在 X 轴上产生的推力较小。

7.3 仿真流程

卫星编队控制仿真流程如

图 7-2 所示，采用 Matlab/Simulink 与 m 文件实现仿真软件，界面如图 7-3 所示。

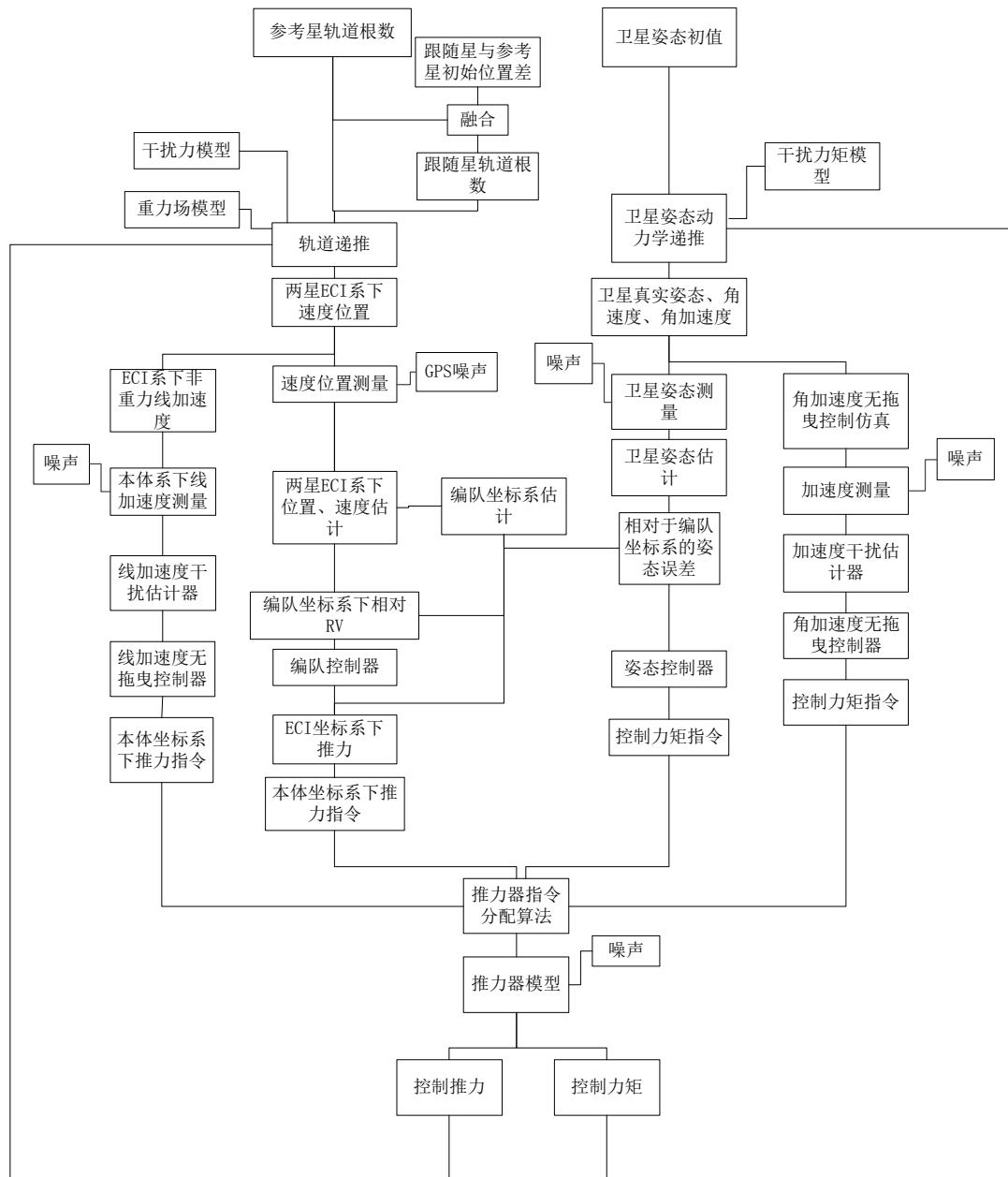


图 7-2 编队飞行仿真流程图

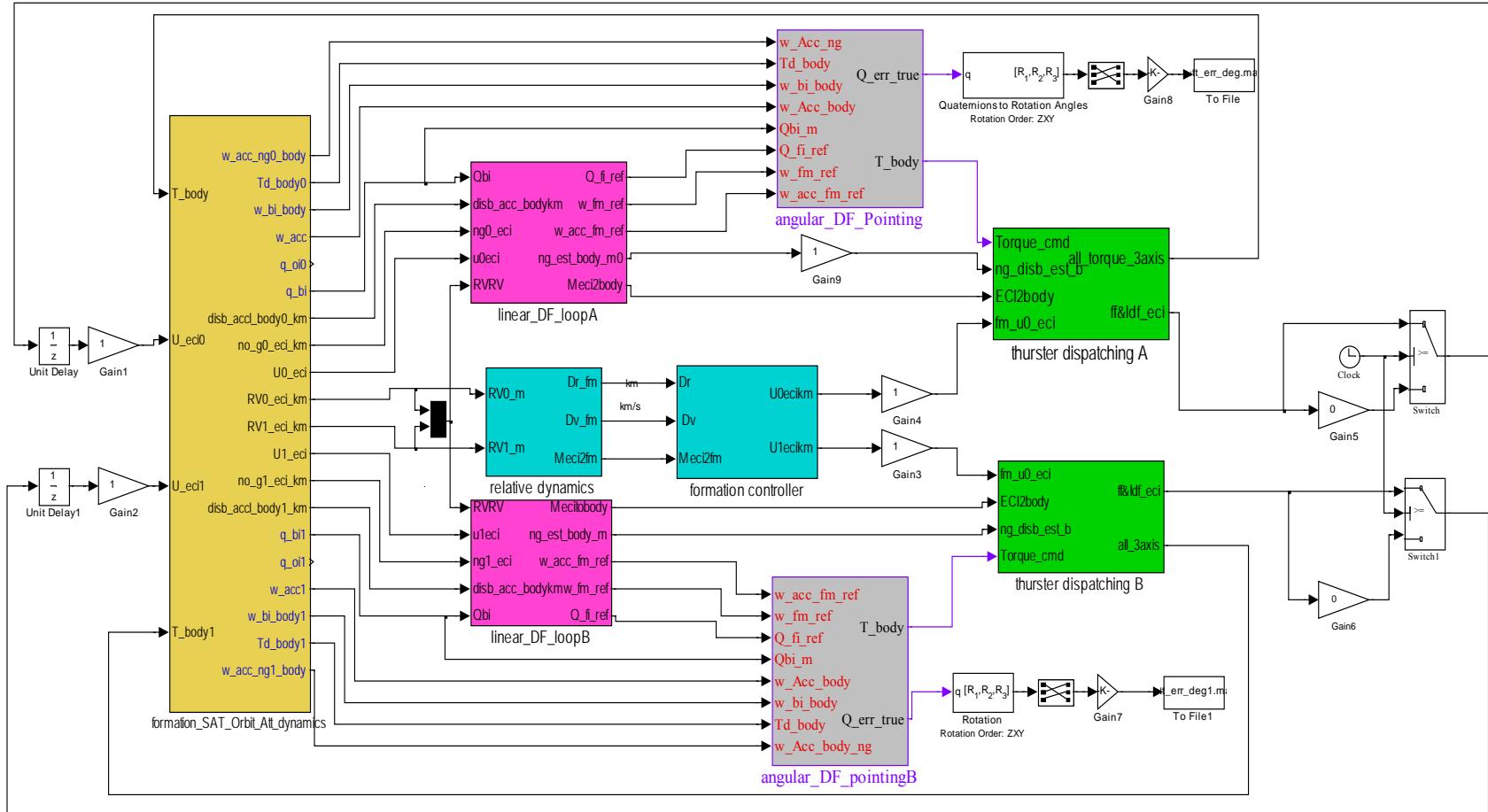


图 7-3 重力场测量无施曳卫星编队仿真软件界面

7.4 仿真结果

由于初始误差的作用，不引入编队控制情况下两星相对位置曲线如图 7-4 所示，X 方向上产生线性漂移和轨道周期振荡，全回路仿真后相对位置如图 7-5 所示，X 方向误差稳定在 $\pm 100m$ 范围内，满足要求。

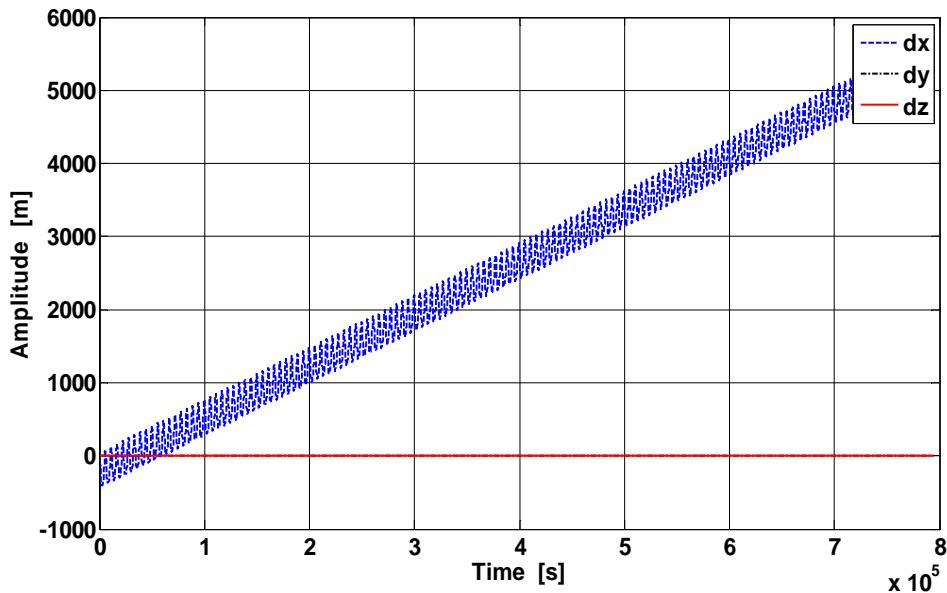


图 7-4 无控制下的两星相对距离变化

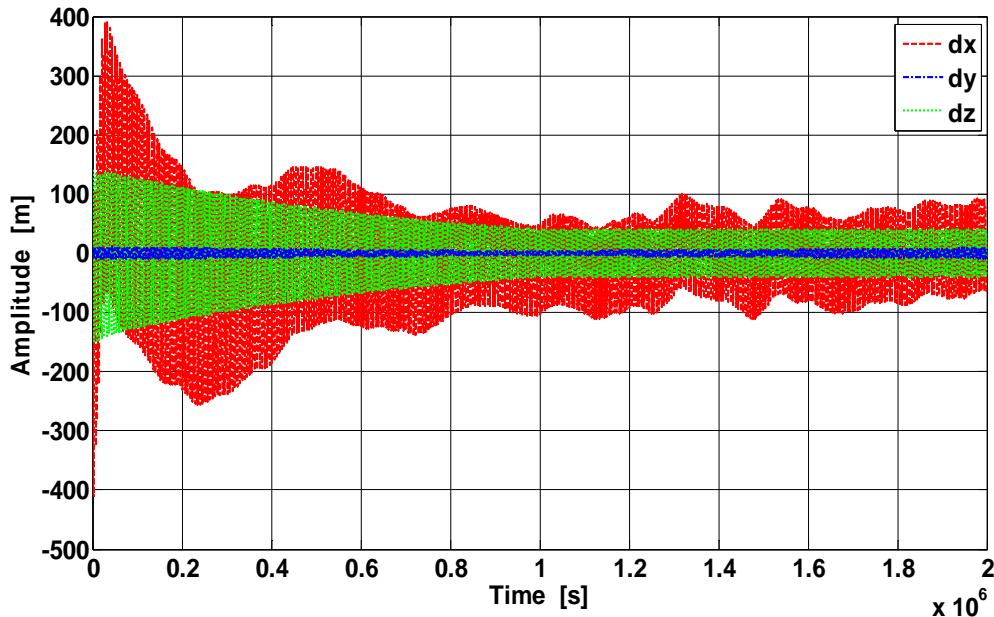


图 7-5 全回路仿真下的两星相对距离变化

编队控制指令平均分配到两颗卫星上，在 A 星上的指令分配时间序列及功率谱密度如图 7-6，图 7-7 所示，在 10^6 秒时引入陷波器，减少对轨道周期距离变化的响应，指令功率谱密度满足边界。

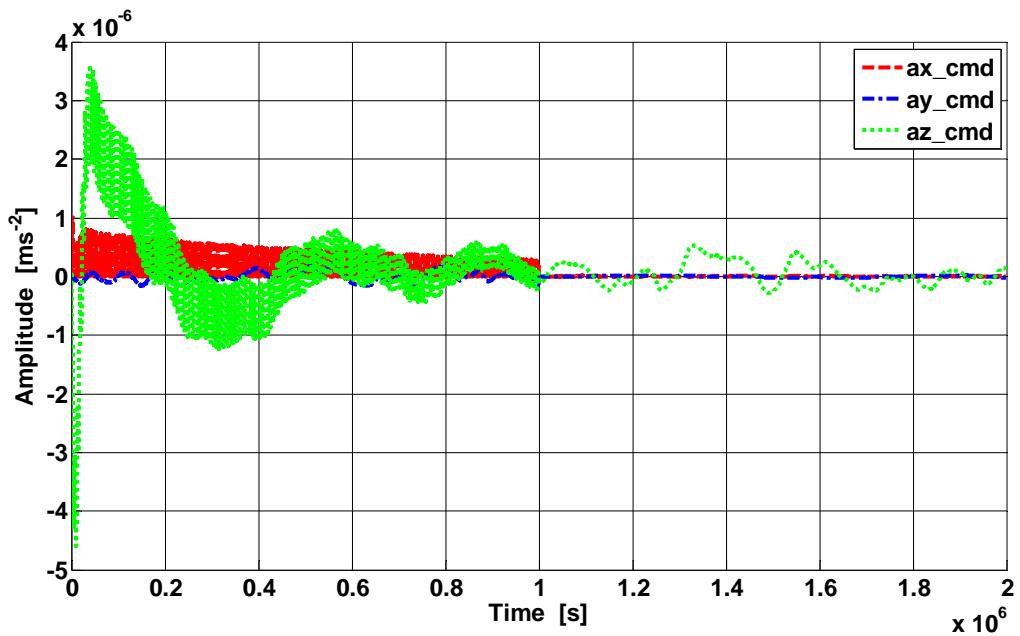


图 7-6 卫星 A 的编队控制指令时间序列

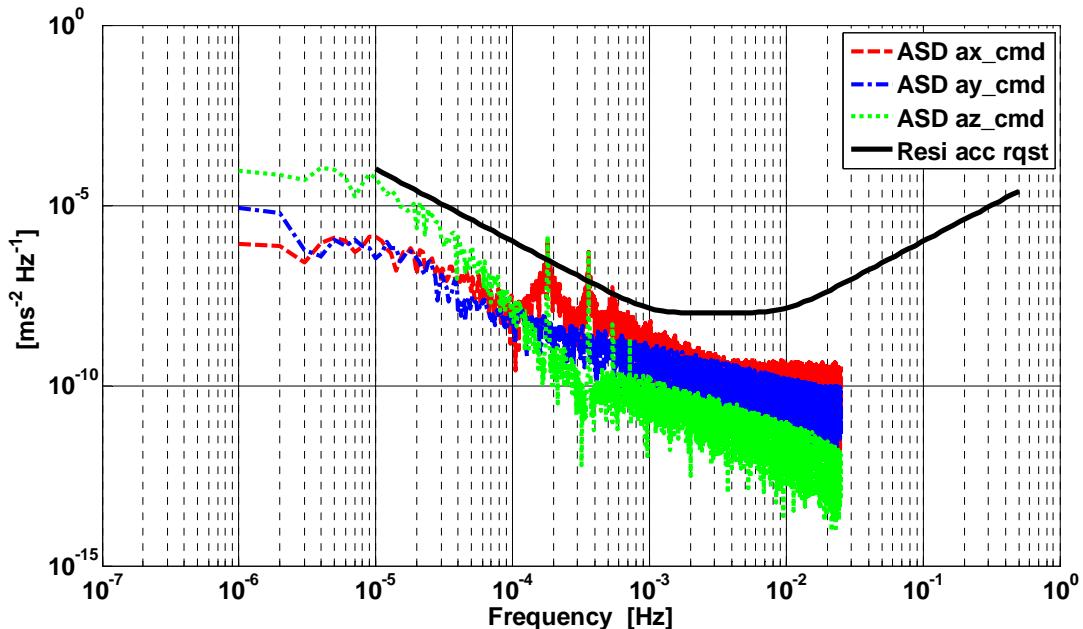


图 7-7 卫星 A 的编队控制指令功率谱 (稳态)

B 星上的指令分配时间序列及功率谱密度如图 7-8，图 7-9 所示，Y、Z 方向的指令与 A 星相反，满足功率谱密度满足边界。

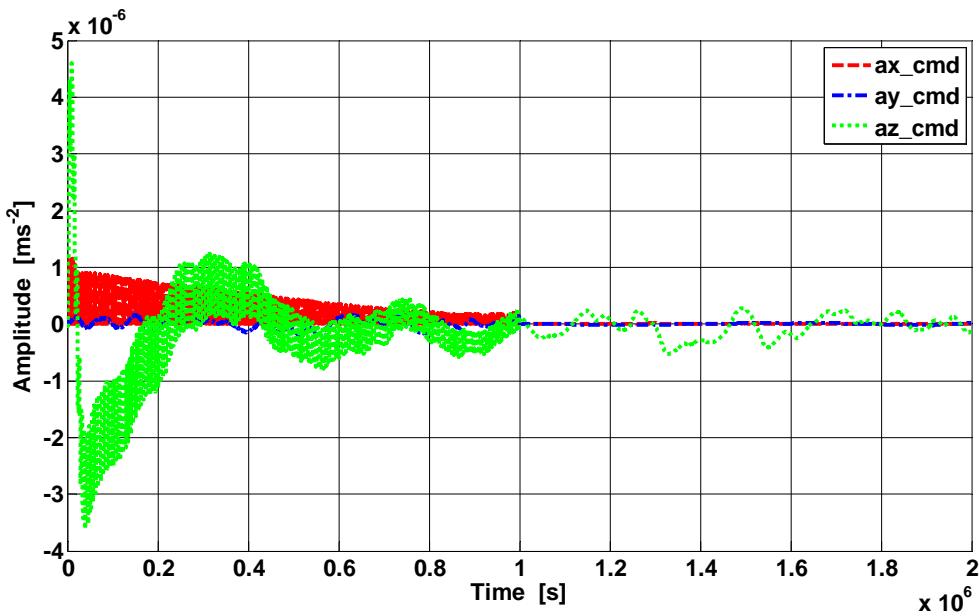


图 7-8 卫星 B 的编队控制指令时间序列

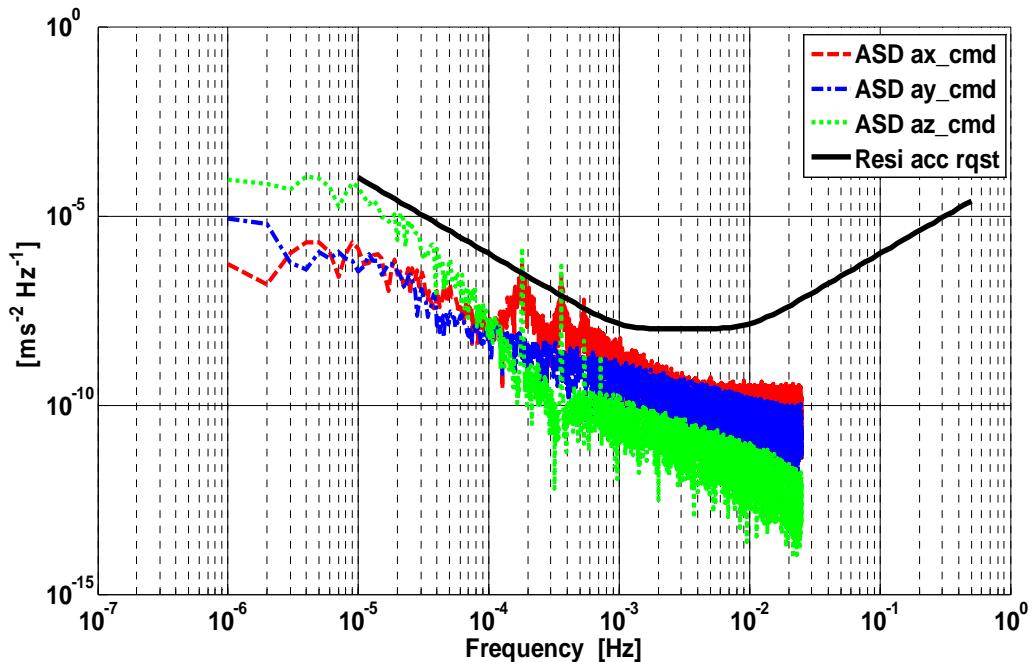


图 7-9 卫星 B 的编队控制指令功率谱（稳态）

经 drag-free, 姿态、编队回路控制后, A 星的线加速度残差功率谱如图 7-10 所示, 角加速度残差功率谱如图 7-11 所示, 基本满足边界约束, 由于在 Y 轴引入的噪声较 X、Z 轴大, 部分频段存在超出边界的情况, 在任务可接受的范围内。卫星 B 与 A 星采用相同控制参数, 残差特性与 A 星基本相同。

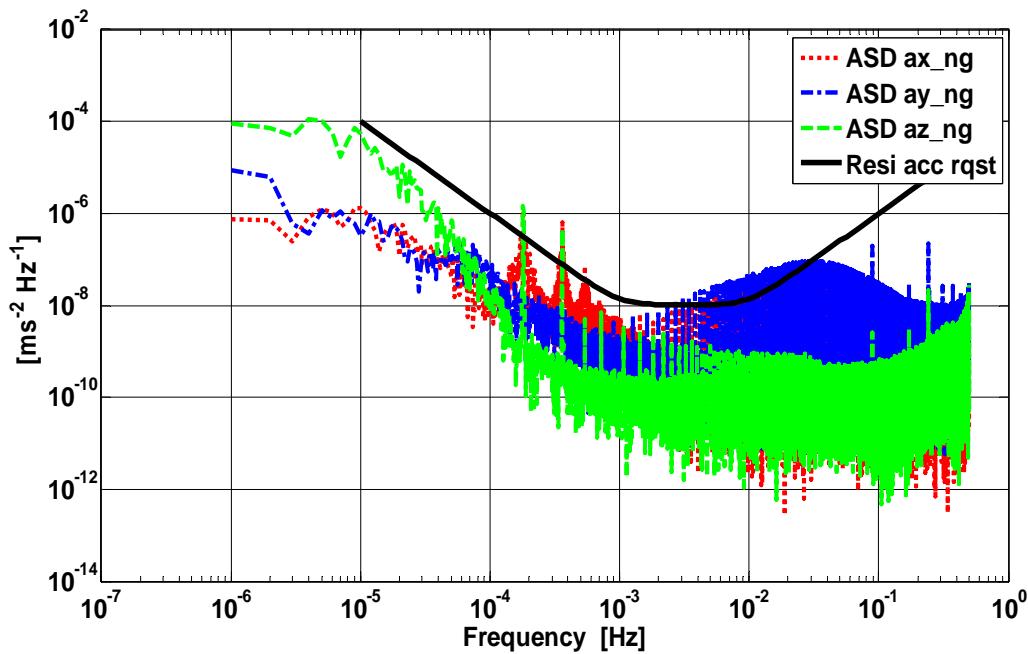


图 7-10 卫星 A 的非重力线加速度残差功率谱密度

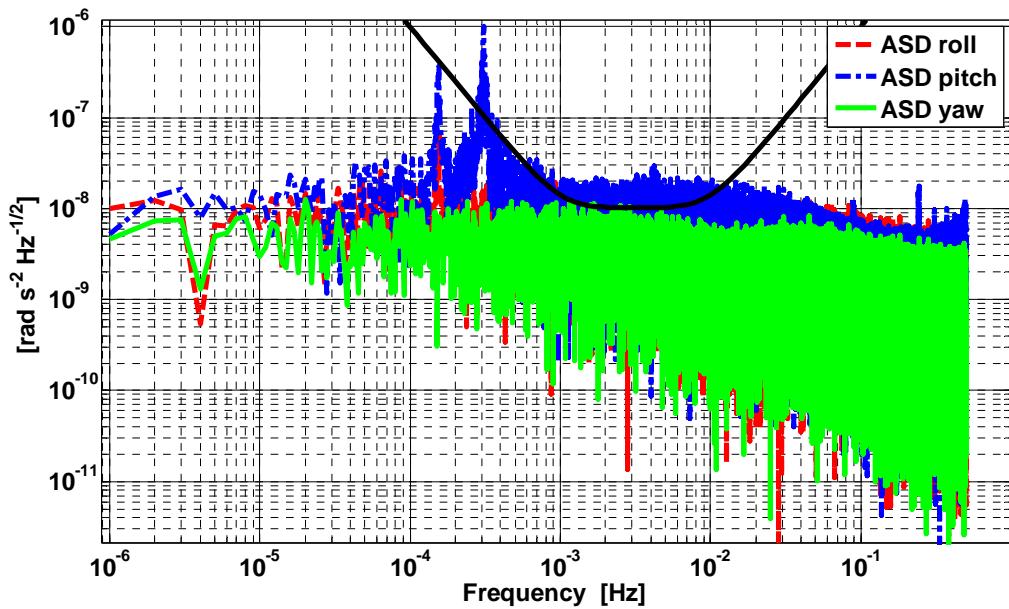


图 7-11 卫星 A 的角加速度残差功率谱密度

两颗卫星的飞行目标姿态为编队参考坐标系 FLORF，卫星 A 姿态与参考姿态的误差如图 7-12 所示，X 轴最大误差小于 $2 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ ，Y 轴最大误差 $0.5 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ ，Z 轴最大误差 $0.2 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ ，姿态误差的功率谱密度如图 7-13 所示，在轨道频率、2 倍轨道频率处有峰值超过边界，在测量频段内均满足边界约束。卫星 B 姿态误差及功率谱如图 7-14，图 7-15 所示，与卫星 A 误差特性相同。计算两颗卫星之间的相对姿态误差如图 7-16 所示，稳态情况下小于 $0.2 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ 。

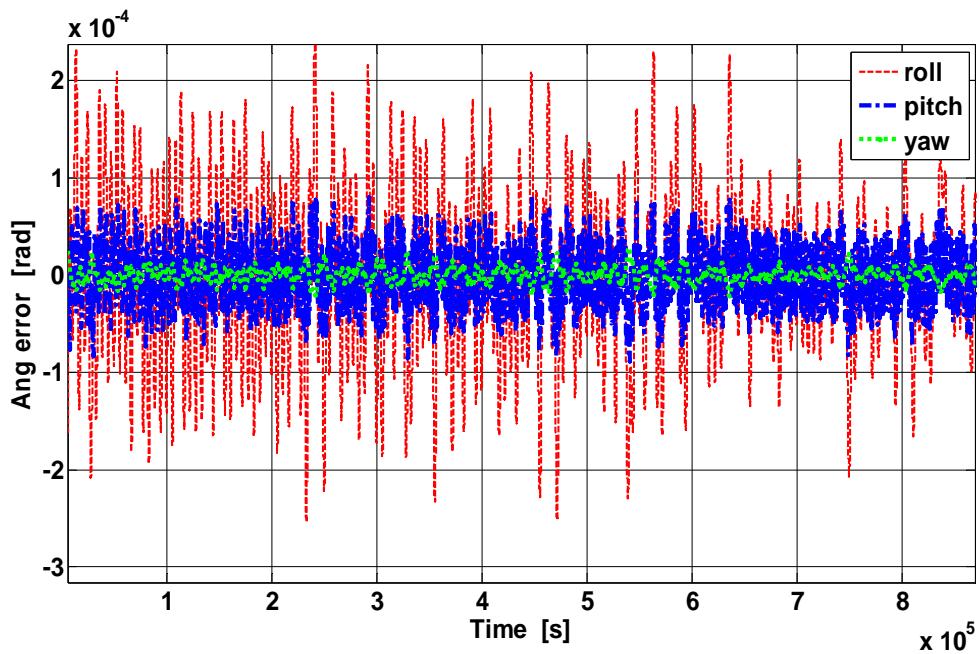


图 7-12 卫星 A 的姿态误差时间序列

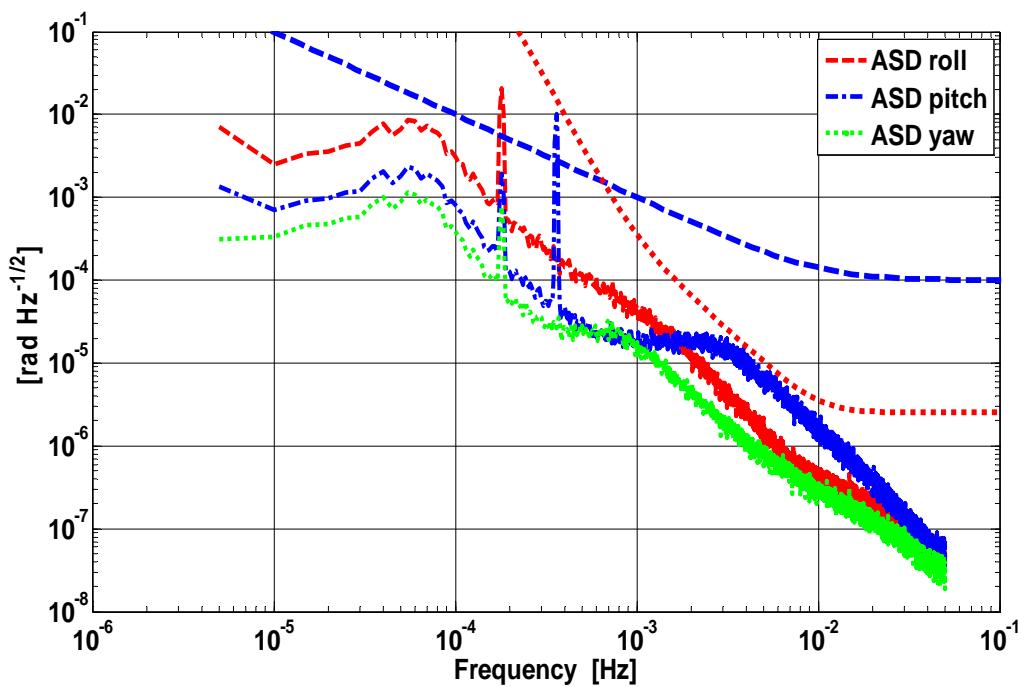


图 7-13 卫星 A 的姿态误差功率谱密度

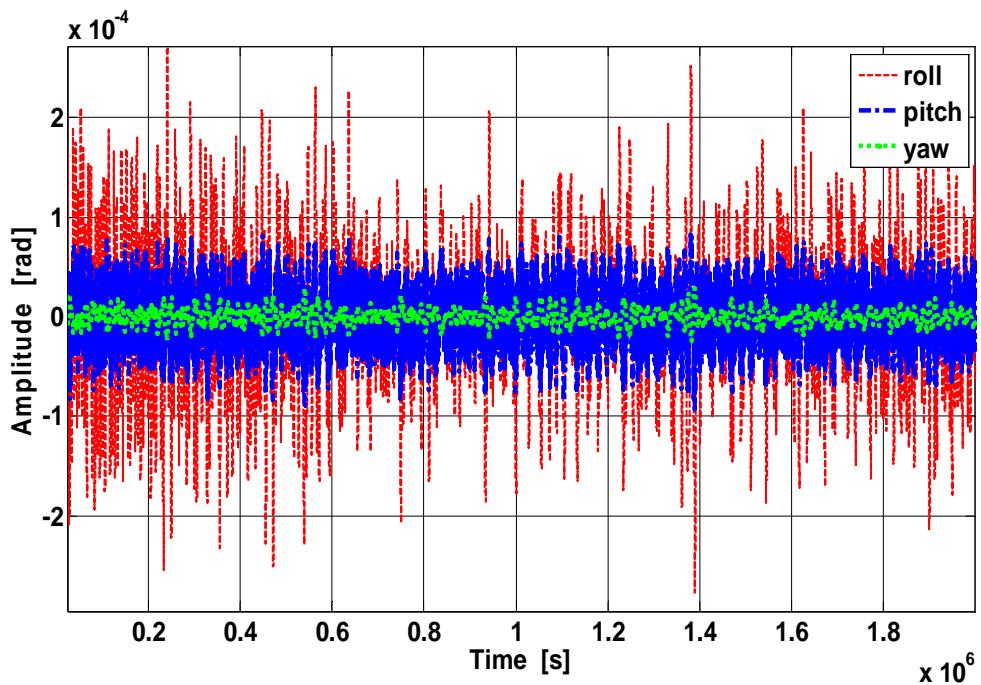


图 7-14 卫星 B 的姿态误差时间序列

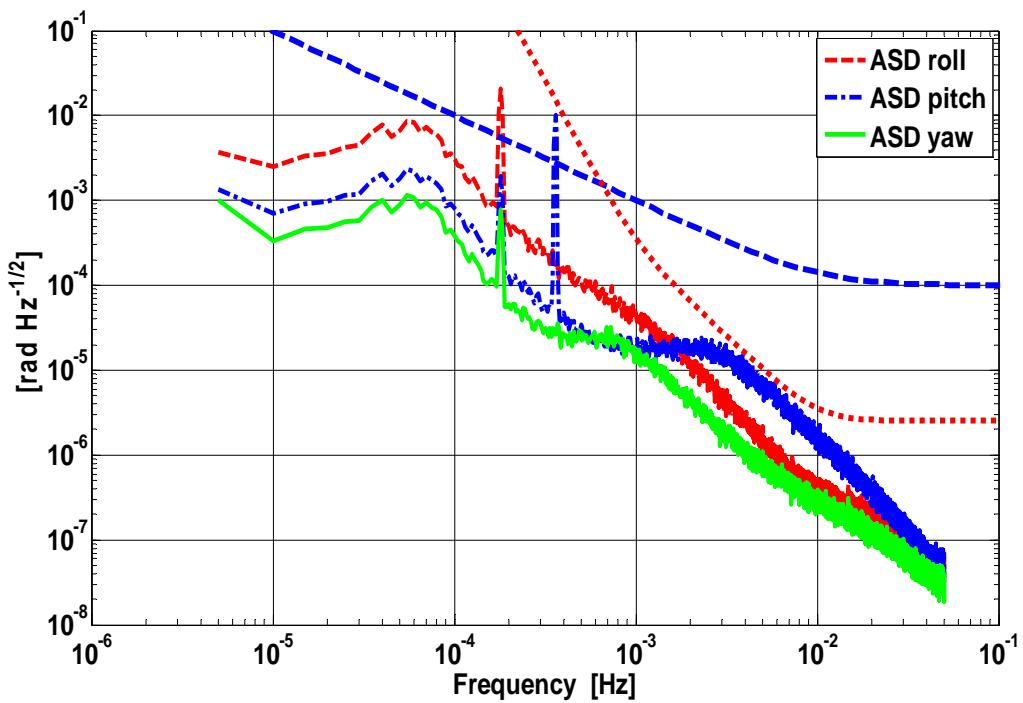


图 7-15 卫星 B 的姿态误差功率谱密度

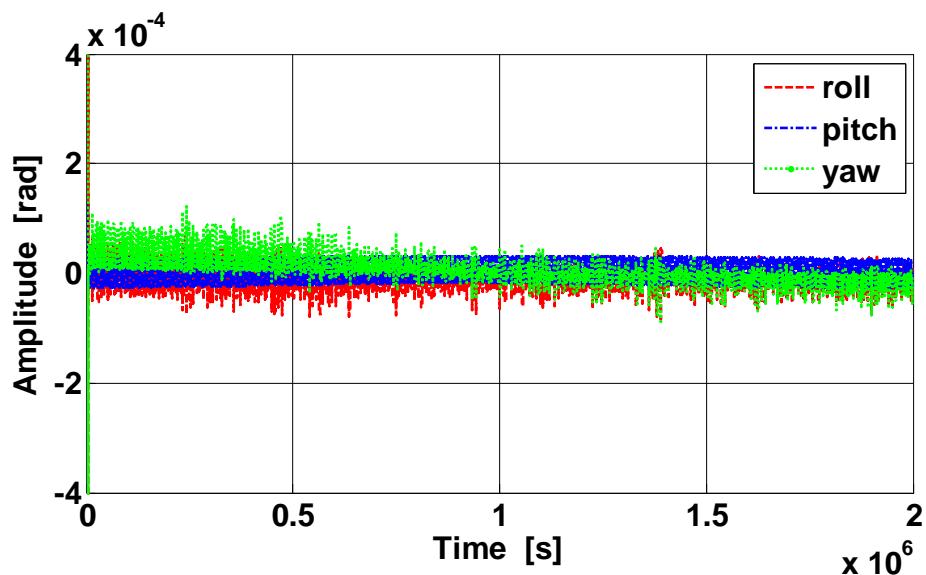


图 7-16 两颗卫星相对姿态误差

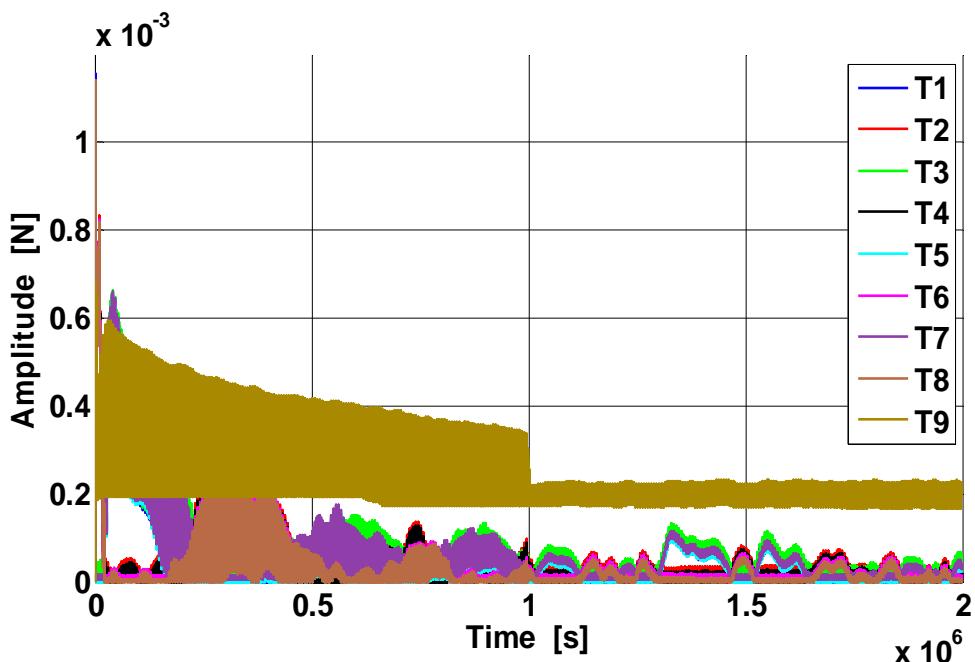


图 7-17 卫星 A 的推力器推力指令时间序列

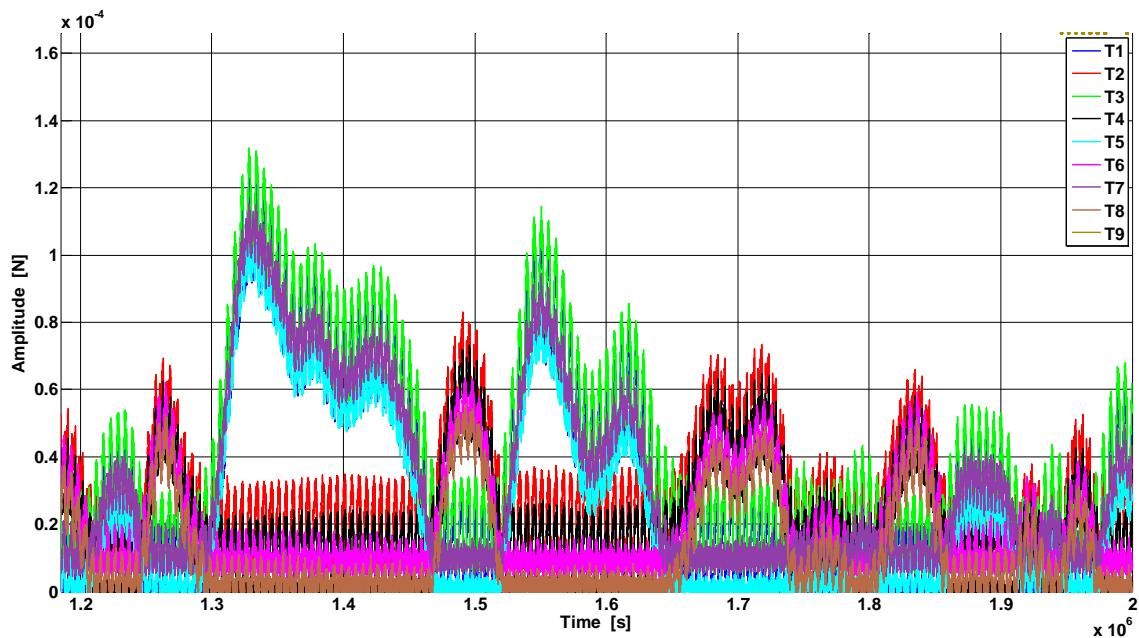


图 7-18 卫星 A 的推力器推力指令时间序列（放大）

对卫星 A 的 9 个推力器产生的推力进行了分析，包含了产生控制力、力矩所需的推力如图 7-17，图 7-18 所示，对编号为 1~8 的推力器，其最大推力为 2mN，对于编号为 9 的推力器，其最大推力为 8mN，从指令需求看，均未超过其边界约束，符合工程实现要求。

7.5 本章小结

本章研究内容对各仿真回路进行了集成，建立了从控制期望输入到推力器模拟、到动力学输出的数字仿真系统，对仿真流程与仿真软件进行了介绍，仿真系统体现了敏感器、执行器噪声模拟及推力器控制力分配，对仿真数据进行了分析，分析结果显示各个回路运行正常，两星相对位置、姿态满足重力场测量任务的需求，控制后产生的残差加速度在测量频段内满足所定义的功率谱密度约束，验证了本论文提出的分析与设计方法，可以为重力场测量任务提供参考。

第8章 总结和展望

8.1 论文总结

本文以引力波探测、重力场测量空间任务为背景，所需的星星跟踪无拖曳航天器编队技术进行研究，结合具体的下一代重力场测量工程任务参数开展了研究。完成的主要研究内容包括：完成了星星跟踪编队系统动力学建模；完成了编队系统控制器设计；完成了无拖曳回路控制器设计；完成了姿态控制回路控制器设计，形成了基于功率谱密度约束、频域与时域相结合的控制系统分析与设计方法。最后建立了全回路数字仿真系统，仿真结果验证了方法的有效性、各回路间的兼容性。设计与仿真中均考虑了工程实际约束，论文成果可以作为工程研究的参考。

8.2 论文创新点

本论文的创新点有：

(1) 提出了基于定量反馈理论 (QFT) 的无拖曳卫星编队、姿态回路成形方法，兼具解决频域内功率谱密度约束与编队系统低频段通道间强耦合等问题。

无拖曳卫星编队本质上为“松散式”编队，但受编队控制带宽应低于科学测量频宽 [1, 10]mHz 的约束，编队相对动力学在低频段表现为强耦合的多输入多输出 (MIMO) 系统，且编队控制本身产生非重力加速度，又形成了在重力场测量频带内的干扰，对其功率谱有严格约束，此外微推力器的饱和限制也对控制器设计提出了要求。针对这种频域、时域多约束耦合下的控制问题，本文提出了基于定量反馈理论 (QFT) 的全系数矩阵控制器设计方法，建立了回路幅频响应边界，配置了复杂零、极点控制器，仿真结果验证了这种设计方法的优越性。

对该方法进行整理，投《宇航学报》(EI) 论文一篇，已录用。

(2) 针对轨道测量误差影响飞行参考坐标系转换精度的问题，提出了功率谱密度约束条件下的线性估计系统特征值最优估计方法。

对于一般的卫星状态估计算法，通常以估计误差均方差作为评价指标，drag-free 卫星还需考虑频域约束，即与系统测量带宽相结合，需根据 GPS 获得的卫星状态信息，设计合理的状态观测器，使得输出噪声的功率谱密度满足测量条件。本文研究了通过特征值设置与传递函数对误差功率谱密度的放大、压制关系，提出了以状态估计误差均方根为目标函数，通过序列二次规划方法 (SQP) 获得满足约束条件的状态观测器优化方法，最终获得了优化的估计器参数。

对该方法进行整理，投《航空学报》英文版 (SCI) 论文一篇，已录用。

(3) 研究了基于动力学估计的卫星线加速度、角加速度无拖曳控制方法，分析

从系统指标、噪声功率谱密度约束向闭环回路幅频约束的转换方法，获得了估计器的增益的取值范围。

8.3 今后工作的展望

空间引力波探测、重力场测量将是我国、国际上未来几十年内重要的空间科学的研究领域，随着一系列计划的实施，这方面值得研究的问题将层出不穷，基于本论文的成果，可继续开展以下研究：

- 1) 非共轨道面的双星动力学建模及编队保持方法；
- 2) 加速度计偏置参数的识别及影响分析；
- 3) 双星激光链路快速捕获与跟踪方法；
- 4) 相应分析、设计、仿真从低轨重力场任务向具体高轨“天琴”任务、太阳轨道“太极”任务的延伸，研究位置跟踪模式下的无拖曳控制方法。

参考文献

- [1] Adam D. Gravity measurement: Amazing GRACE. *Nature*, 2002. 416: 10-11.
- [2] 宁津生. 地球重力场模型及其应用. *测绘工程*, 1994. 2: 1-8.
- [3] 章传银, 高永泉. 浅论现代测绘科学基本问题与科学思维. *测绘科学*, 2002. 27: 15-23.
- [4] 孙文科. 低轨道人造卫星(CHAMP, GRACE, GOCE) 与高精度地球重力场——卫星重力大地测量的最新发展及其对地球科学的重大影响. *大地测量与地球动力学*, 2002. 22: 92-100.
- [5] 徐海军, 张永志, 段虎荣, 薛建华. 卫星重力测量的应用进展. *物探与化探*, 2012. 36: 54-58.
- [6] Chen J L, Wilson C R, Tapley B D, Yang Z L, Niu G Y. Drought event in the Amazon River basins measured by GRACE and estimated by climate models. *J. Geophys. Res.*, 2005. 114: B05404.
- [7] Han S C, Shum C K, Bevis M, Ji C, Kuo C Y. Crustal dilatation observed by GRACE after the 2004 Sumatra-Andaman earthquake. *Science*, 2006. 313: 658-662.
- [8] Heiskanen W A. *The Earth and Its Gravity Field*. 1958. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.
- [9] 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. *大地测量学基础*. 2006. 武汉: 武汉大学出版社.
- [10] 何志堂, 张锐, 唐志明, 贺小明, 魏军辉, 程虎锋, 聂晶. 2000 国家重力基准现状分析. *大地测量与地球动力学*, 2012. 32: 87-90.
- [11] 许厚泽, 周旭华, 彭碧波. 卫星重力测量. *地理空间信息*, 2005. 1: 1-3.
- [12] 郑伟, 许厚泽, 钟敏, 员美娟, 彭碧波, 周旭华. 地球重力场模型研究进展和现状. *大地测量与地球动力学*, 2010. 30: 83-91.
- [13] Reigber Ch, Schwintzer P, Luehr H. The CHAMP geopotential mission. *Boll Geof Teor Appl*, 1999. 40:285-289.
- [14] Reigber Ch, Luehr H, Schwintzer P. CHAMP mission status. *Adv Space Res*, 2002. 30: 129-134.
- [15] Tapley B D, Reigber Ch. The GRACE mission: Status and future plans. *EOS Trans*, 2001. 82: G41C-02
- [16] Tapley B D, Bettadpur S, Watkins M, Reigber C. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 2004. 31: L09607.
- [17] Drinkwater M R, Floberghagen R, Haagmans R, Muzi D, Popescu A. GOCE: ESA's first Earth Explorer Core mission. In: *Earth Gravity Field from Space—from Sensors to Earth Sciences*. 2003. Netherlands: Springer 419-432.
- [18] Johannessen J A, Balmino G, Le Provost C, Rummel R, Sabadini R, Sunkel H, Tscherning C C, Visser P, Woodworth P, Hughes C W, Legrand P, Sneeuw N, Perosanz F, Aguirre-Fernandez M, Rebhan H, Drinkwater M. The European gravity field and steady-state ocean circulation explorer satellite mission its impact on geophysics. *Surveys in Geophysics*, 2003. 24: 339-386.

- [19]段建宾, 钟敏, 闫昊明, 江敏.利用重力卫星观测资料解算中国大陆水储量变化. 大地测量与地球动力学, 2007. 27: 68-71.
- [20]邹贤才.卫星轨道理论与地球重力场模型的确定. [D]. 2007. 武汉: 武汉大学.
- [21] Chambers D P. Evaluation of new GRACE time-variable gravity data over the ocean. Geophysical Research Letters, 2006. 33: L17603.
- [22]Seo K W, Wilson C R. Simulated estimation of hydrological loads from GRACE. Journal of Geodesy, 2005. 78: 442-456.
- [23]曾华霖.重力场与重力勘探. 2005. 北京: 地质出版社.
- [24]黄宗理, 严加永. 中国剩余重力异常与金属矿分布关系研究. 地球学报, 2011. 32: 652-658.
- [25]Rathke A, Aguirre M, Massotti L, Kern M, Haagmans R, Silvestrin P, NG2 Team. Assessment of a next generation gravity mission to monitor the variations of Earth's gravity field. Final Report, 2011.
- [26]Hu W R and Xu H Z. GRACE fellow-on in China—Space advanced gravity measurement program. LAMBERT Academic Publishing; 2015.p. 23-38
- [27]Hsien-Chi Yeh, Qi-Zhong Yan, Yurong Liang, et.al. Intersatellite laser ranging with homodyne optical phase locking for space advanced gravity measurements mission, Rev. Sci. Instrum. 2011, vol 82, 044501.
- [28] Massotti L, Canuto E, Cesare S, et al. Drag-free and Formation control for future earth observation missions[C], the 7th International ESA Conference on Guidance, Navigation & Control Systems, GNC. 2008: 2-5.
- [29]Panet I, Flury J, Biancale R, et al. Earth system mass transport mission (e. motion): a concept for future earth gravity field measurements from space. Surveys in Geophysics, 2013, 34(2):141-163.
- [30]GATH P F, WEISE D, SCHULTE H R, et al. LISA mission and system architectures and performances[J]. J. Phys. Conf. Ser. , 2009, 154:012013.
- [31]Ulrich Johann, the industrial LISA Mission studies[C], Sino-German Symposium on gravitational physics in space.2015,Sep.
- [32]赵艳斌, 王东孝, 孙克新. LISA 引力波探测器与关键技术分析[C], 中国宇航学会深空探测技术专业委员会第七届学术年会论文集. 2010
- [33]LISA: Laser interferometer Space antenna: A corners tone mission for the gravitational waves[R]. European Space Agency System and Technology study Report. 2000.
- [34]NGO-Revealing a hidden Universe:opening a new chapter of discovery: Assessment study report. ESA/SRE(2011)19, December 2011.
- [35]GO White Paper: The Gravitational Universe Ascience theme addressed by the eLISA mission observing the entire universe. 2013.
- [36]S.Vitale, et.al. LISA pathfinder[C], Sino-German Symposium on Gravitational Physics in Space. 2015, Sep.
- [37] Cesare S, Sechi G. 2013. Next generation gravity mission. In: Distributed Space Missions for Earth System Monitoring. New York: Springer, 575-598.
- [38]薛大同. 静电悬浮加速度计伺服控制分析. 空间科学学报,2009(vol.29):pp. 102-106.

- [39]唐富贵,薛大同. 静电悬浮式三轴加速度传感器的初步设计. 传感器技术, 2001(vol. 20): pp. 30-32.
- [40]张亮,陆秋海. 静电悬浮式电容差分加速度计测量原理与动特性. 振动与冲击, 2008(vol. 27):pp. 79-81.
- [41]薛大同. 静电悬浮加速度计噪声测试数据的频谱分析方法. 空间科学学报, 2008(vol. 28):pp. 55-63.
- [42]廖鹤. 静电加速度计悬浮质量块质心偏移量在轨标定. 中国惯性技术学报, 2008(vol. 16):pp. 707-711.
- [43]吴秋平,韩丰田. 星载静电加速度计的支承技术研究. 仪器仪表学报, 2007(vol. 28): pp. 1180-1184.
- [44]吴黎明. 静电悬浮加速度计检测线路设计及实验研究. 仪器仪表学报, 2006(vol. 27):pp. 1569-1572.
- [45]陈光锋. 静电悬浮加速度计控制器设计分析. 航天控制, 2005(vol. 23):pp. 79-82.,
- [46]罗子人, 白姗, 边星. 空间激光干涉引力波探测[J]. 力学进展, 2013,43(4):415-447.
- [47]刘润球, 等. 中国科学院空间科学战略性先导科技专项”空间科学预先研究项目“ (第二批): ”中国空间引力波探测计划任务概念研究”, 课题研究报告, 2013 年 9 月。
- [48]龚雪飞, 徐年生, 刘润球. 空间激光干涉引力波探测与早期宇宙结构形成[J]. 天文学进展, 2015,33(1):59-80。
- [49]Jun Luo, Li-Sheng Chen,Hui-Zong Duan, et,al. TianQin: a Space-borne gravitational wave detector[J]. Classical Quantum Gravity, 2015.
- [50]Danzmann K. LISA-an ESA cornerstone mission for the detection and observation of gravitational waves. Advances in Space Research, 2003; 32(7): 1233-1242.
- [51]宁津生, 王正涛, 地球重力场研究现状与进展, 高端论坛, 第 38 卷第 1 期, 1007-3817 (2013) 01-0001-07.
- [52]G. Pugh. Proposal for a satellite test of the Coriolis prediction of general relativity. Weapons Systems Evaluation Group Research Memorandum , 1959: No, vol. 11.,
- [53]H. Dittus. Lasers,Clocks and Drag-free Control-Exploration of Relativistic Gravity in Space. Astrophysics and Space Science Library, 2009:vol. 349.,
- [54]施梨. 基于 Drag-Free 的重力场测量场卫星动力学与控制研究. 硕士学位论文, 哈尔滨工业大学, 哈尔滨, 2006
- [55]B. Lange. The Control and Use of Drag-Free Satellites.Ph.D. dissertation, Stanford University. 1964:55-85
- [56]E. Canuto, et al., Drag free control for the European satellite GOCE. Part I: modelling, 2002.
- [57]D. Bortoluzzi, et al. The LISA Technology Package dynamics and control. Classical and Quantum Gravity, 2003(vol. 20): pp. S227-S238.
- [58]W. Fichter, et al. LISA Pathfinder drag-free control and system implications. Classical and Quantum Gravity, 2005(vol. 22): p. S139.
- [59]C. Grimaldi, et al. LISA test-mass charging process due to cosmic-ray nuclei and electrons. Classical and Quantum Gravity, 2005(vol. 22) :p. 327.
- [60]M. Hueller, et al. Measuring the LISA test mass magnetic properties with a torsion pendulum. Classical and Quantum Gravity, 2005(vol. 22):pp. S521-S526.,

- [61] S. Merkowitz, et al. Self-gravity modelling for LISA. *Classical and Quantum Gravity*, 2005(vol. 22): p. S395.
- [62] M. Armano, et al. Gravitational compensation for the LISA pathfinder. *Classical and Quantum Gravity*, 2005(vol. 22): p. S501.
- [63] M. Wiegand, et al. Step Proof Mass Dynamics. *Acta Astronautica*, 2005(vol. 54):pp. 631-638.
- [64] B. Schumaker. Overview of Disturbance Reduction Requirements for LISA. *Classical & Quantum Gravity*, 2003:S239-253.
- [65] 肖业伦, 陈万春. 飞行器相对姿态运动的静力学、运动学和动力学方法. 中国空间科学技术, 2003: pp. 10-15.
- [66] W. Bencze, et al. Precision electrostatic suspension system for the Gravity Probe B relativity mission's science gyroscopes. *Advances in Space Research*, 2007(vol. 39): pp. 224-229.,
- [67] E. Canuto, et al. Drag free control for the European satellite GOCE. Part II: digital control[C]. *IEEE Conference on Decision & Control*, 2002:1269-1274.
- [68] Enrico Canuto. Drag-Free Control of the GOCE Satellite: Noise and Observer Design. *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, 2010(VOL. 18, NO. 2): 501-509.
- [69] Enrico Canuto, Drag free control the european satellite GOCE, proceedings of the 41st IEEE conference on decision and control LAS Vegas, Nevada USA, December 2002.
- [70] Canuto E, Massotti L. Local orbital frame predictor for LEO drag-free satellite[J]. *Acta Astronautica*, 2010, 66(3): 446-454.
- [71] D. Prieto, et al. A drag free control based on model predictive techniques. *Proceedings of the American Control Conference*, Portland, OR, USA, 2005, pp. 1527-1532.
- [72] R. Haines, et al. Development of a drag-free control system. 14th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, Logan, Utah, USA, 2000.
- [73] P. Chapman, et al. Drag-Free Control Analysis and Algorithm Design for the STEP Mission.
- [74] P. Gath, et al. Drag free and attitude control system design for the LISA pathfinder mission. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Providence, Rhode Island, 2004.
- [75] W. Fichter, et al., "DFACS General Design," S2-ASD-TN-2001 version 1.1, EADS Astrium GmbH, 6 October 2004.
- [76] Wu S. F., Fertin D. Spacecraft drag-free attitude control system design with Quantitative Feedback Theory. *Acta Astronautica*, 2008, 62(12):668-682.
- [77] Kim J. Simulation study of a low-low satellite-to-satellite tracking mission, doctor thesis, the university of texas at Austin, 2000
- [78] Bryant Loomis, simulation study of a follow on gravity mission to grace, Doctor thesis, university of Colorado at boulder, 2009
- [79] Michael KIRSCHNER, flight dynamics aspects of the grace formation flying, German space operations Center.
- [80] M. Stephens, R. Craig. Demonstration of an interferometric laser Ranging System for

- a Follow-on Gravity mission to GRACE. IEEE International Conference on Geoscience & Remote Sensing Symposium, 2006, vol.8:08685.
- [81] Fowler, W. and Bettadpur, S. Mission Planning for the Twin GRACE Satellites. AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Florida: 2000. Clearwater Paper ,AAS 00-164
- [82] D.N. Wiese, W. M. Folkner, R. S. Nerem. Alternative mission architectures for a gravity recovery satellite mission. Journal of Geodesy. 2008, 83(6): 569-581.
- [83] Wise, D, Nerem, R., Lemoine, F. Design considerations for a dedicated gravity recovery satellite mission consisting of two pairs of satellites. Journal of Geodesy, 2012, 86(2): pp. 81-98.
- [84] Theil S, From M, Pettazzi L, et al. Formations Of Drag-Free Satellites[C]. the 56 th International Astronautical Congress. 2005.
- [85] Cesare S, Mottini S, Musso F, et al. Satellite formation for a next generation gravimetry mission, Small Satellite Missions for Earth Observation. Springer Berlin Heidelberg, 2010:125-133.
- [86] Enrico Canuto, Formation control for the next generation Earth-gravimetry missions, Preprints of the 18th IFAC World Congress, Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011
- [87] Canuto E, Molano-Jimenez A, Perez-Montenegro C, et al. Long-distance, drag-free, low-thrust, LEO formation control for Earth gravity monitoring[J]. Acta Astronautica, 2011, 69(7): 571-582.
- [88] Canuto E, Colangelo L, Buonocore M, et al. Orbit and formation control for low-earth-orbit gravimetry drag-free satellites[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2015, 229(7): 1194-1213.
- [89] Canuto E, Colangelo L, Lotufo M, Dionisio S. Satellite-to-satellite attitude control of a long distance spacecraft formation for the Next Generation Gravity Mission. European Journal of Control, 2015, 1-16.
- [90] 曹喜滨, 施梨, 董晓光等. 基于干扰观测的无阻力卫星控制器设计[J]. 宇航学报, 2012, 33(4): 411-418.
- [91] 姜卫平, 赵伟, 赵倩, 等. 新一代探测地球重力场的卫星编队[J]. 测绘学报, 2013, 43(2): 111-117.
- [92] Brian St. Rock,* , Propulsion Requirements for Drag-Free Operation of Spacecraft in Low Earth Orbit, JOURNAL OF SPACECRAFT AND ROCKETS, 2006(Vol. 43): No. 3.
- [93] Johansson H. Optimal Thruster Actuation in High Precision Attitude and Orbit control Systems [D]. Sweden, Lulea University of Technology. 2005
- [94] Ziemer J K, Merkowitz S M. Microthruster Propulsion for the LISA Mission[C]. AIAA/ASME Joint Propulsion Conference and Exhibit. 2004, 3439:1-10.
- [95] Kiltner M. Micropropulsion Technology Assessment for DARWIN[D]. Sweden, Lulea University of Technology, 2004.
- [96] 胡明, 李洪银, 周泽兵. 无拖曳控制技术及应用.[J] 载人航天, 2013,19(2): 61-69.
- [97] J. K. Ziemer. Microthrust Propulsion for the LISA Mission. AIAA-2004-3439.

- [98] Bjorn, Frommknecht. Intergrated sensor analyses of the GRACE Mission. Doctor thesis, Deutsche Geodatische Kommission, Munchen, 2008
- [99] Olivier L. de Weck, David W. Miller Integrated modeling and dynamics simulation for the next generation space telescope. Technical report, NASA Goddard Space flight Center. Jun, 1999. Page 50-59.
- [100] 张晓敏. 航天器轨道相对运动力学与控制研究. 博士学位论文, 北京航空航天大学, 北京, 2000.
- [101] Schweighart, S A, Sedwick, R J. High-fidelity linearized J2 model for satellite formation flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, 25(6): 1073-1079.
- [102] Tomas, G., Michael, M., Earth System Mass Transport Mission(square)-Concept for a next Generation Gravity Mission, final report of project, 2014.
- [103] Enrico Canuto, Luca Massotti. All propulsion design of the drag-free and attitude control of the European satellite GOCE. *Acta Astronautica*, 2009, 64, 325-344.
- [104] Proakis J G, Manolakis D G. Digital signal processing--principles, algorithms, and applications. *Diabetes Care*, 2002, 25(10): 1802-1806 .
- [105] Horowitz I. Survey of quantitative feedback theory (QFT). *International journal of robust and nonlinear control*, 2001, 11(10): 887-921.
- [106] Skogestad S, Postlethwaite I. Multivariable feedback control, Analysis and design. John Wiley&Sons Ltd. 2nd Editioned. Chichester. 2005.
- [107] Houpis, C.H., Rasmussen, S.J., and Garcia-Sanz, M.(2006). Quantitative Feedback theory: Fundamentals and Applications, 2nd edn. A CRC pressBook, Taylor&Francis, Boca raton, FL.
- [108] Garcia-Sanz, M. Robust frequency domain special issue. *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2003, 13(7).
- [109] Eitelberg, E. Quantitative feedback design for tracking error tolerance. *Automatica*, 2000, 36:319-326.
- [110] Khodabakhshian A, Hemmati R. Robust decentralized multi-machine power system stabilizer design using quantitative feedback theory. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2012, 41(1): 112-119.
- [111] Wu S. F., Wei. W., Grimble M. J. Robust MIMO control system design using eigenstructure assignment and QFT, *IEEE Control Theory Appl.*, 2004, 151: 198-209.
- [112] Garcia-Sanz M, Eguinoa I. Quantitative non-diagonal controller design for multivariable systems with uncertainty[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2002, 12(4): 321-333.
- [113] Boje, E. Non-diagonal controllers in MIMO quantitative feedback design. *Int. J. robust Nonlinear Control*, 2002, 12(4), 303-320.
- [114] Bojie, e. Multivarible quantitative feedback design for tracking error specifications. *Automatic*. 2002, 38:131-138.
- [115] Garcia-Sanz M, Eguinoa I, Bennani S. Non-diagonal MIMO QFT controller design reformulation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009,

- 19(9): 1036-1064.
- [116] Garcia-Sanz, M. Eguinoa, I. and Barreras, M. Advanced attitude and position MIMO robust control strategies for telescope-type spacecraft with large flexible appendages. In advances in spacecraft technologies. INTECH,Rijeka, Croatia,2011.
- [117] Garcia-Sanz, M. and Hadaegh, F.Y. Coordinated load sharing QFT control of formation flying spacecrafs. 3D deep space and low earth keplerian orbit problems with model uncertainty, NASA-JPL, JPL document, D-30052,Pasadena, CA.
- [118] Patil M D, Nataraj P S V. Automated synthesis of multivariable QFT controller using interval constraint satisfaction technique. Journal of Process Control, 2012, 22(4): 751-765.
- [119] Garcia-Sanz, M., Mauch, A., Philippe,C.. User' guide for QFT Control Toolbox(QFTCT) version 1.01, 2011.
- [120] 苏建敏, 董云峰. 电磁卫星编队位置跟踪滑模变结构控制[J]. 宇航学报, 2011,32(5): 1094-1099.
- [121] 丁世宏, 李世华, 罗生, 基于连续有限时间控制技术的导引律设计[J].宇航学报, 2011,32(4): 727-733.
- [122] Zeng G Q, Hu M. Finite-time control for electromagnetic satellite formations [J]. Acta Astronautica, 2012, 74: 120-130.
- [123] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(8): 751-766.
- [124] Zhu Z, Xia Y Q, Fu M Y. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(6): 686-702.
- [125] Qian C J, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7), 1061-1079.
- [126] Canuto E. Embedded Model Control: outline of the theory[J]. ISA transactions, 2007, 46(3): 363-377.

附 录

论文变量名称及符号表统计表格。

编号	变量符号	变量名称
1	$\mathcal{R}_l\{O_l, \mathbf{x}_l, \mathbf{y}_l, \mathbf{z}_l\}$	地心惯性坐标系
2	$\mathcal{R}_E\{O_E, \mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E, \mathbf{z}_E\}$	地球固连坐标系
3	$\mathcal{R}_o\{C_o, \mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o\}$	卫星轨道坐标系
4	$\mathcal{R}_{FORF}\{C_f, \mathbf{x}_f, \mathbf{y}_f, \mathbf{z}_f\}$	编队质心轨道坐标系
5	$\mathcal{R}_s\{C_s, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s\}$	卫星本体坐标系
6	$\mathcal{R}_o\{O_l, r, i, \theta\}$	轨道极坐标系
7	\mathbf{R}_{fi}	\mathcal{R}_{FORF} 相对于 \mathcal{R}_l 的转换矩阵
8	\mathbf{q}_{fi}	\mathcal{R}_{FORF} 相对于 \mathcal{R}_l 的姿态四元数
9	\mathbf{R}_{sf}	\mathcal{R}_f 系转动到 \mathcal{R}_s 系转换矩阵
10	\mathbf{F}_p	大气阻力
11	\mathbf{F}_s	太阳光压摄动力
12	\mathbf{T}_g	重力梯度力矩
13	\mathbf{T}_{ds}	太阳光压力矩
14	\mathbf{T}_{dp}	气动力矩
15	R_e	地球赤道的平均半径
16	G	地球引力常数
17	M	地球质量
18	h	轨道高度
19	i	轨道倾角
20	θ	轨道幅角

21	r_0	卫星初始位置矢量长度
22	e	轨道偏心率
23	ω	角速度向量
24	r	卫星位置向量
25	v	卫星速度向量
26	Δr	编队相对位置向量
27	Δv	编队相对速度向量
28	δr_i	卫星 i 相对于基准点的位置向量
29	δv_i	卫星 i 相对基准点的速度向量
30	r_f	编队系统质心的位置向量
31	v_f	编队系统质心的速度向量
32	V	重力势
33	ΔV	重力势梯度算子
34	C_{nm} 、 S_{nm}	m 次 n 阶扰动场位系数
35	ρ	两颗卫星相对位置向量
36	a_g	重力加速度向量
37	$\Delta a_{g,i}$	两颗卫星重力加速度差分沿 $i \in \{x, y, z\}$ 的分量
38	a_l	线性非重力加速度
39	a_v	总的线加速度
40	a_ω	角加速度
41	$a_{l_{i,j}}(t)$	卫星 $j \in \{1, 2\}$ 沿 $i \in \{x, y, z\}$ 方向的 非引力加速度
42	J_2	J2 项的扰动系数
43	r	轨道的半长轴
44	ω_0	未受 J2 扰动的轨道角速度

45	ρ_r	两颗卫星之间的期望距离
46	Δa_{ng}	实际作用加速度
47	Δu_f	编队控制指令加速度
48	d_f	作用在编队系统上的干扰
49	x_d	单星 drag-free 控制后的残余加速度
50	w_d	系统白噪声
51	w_a	微推力器产生的噪声
52	ω	参考点 C 的角速度
53	g_0	无扰动加速度
54	$g_2(r_c)$	J2 项干扰的平均值项
55	δg_2	J2 项干扰的周期项
56	Δa_l	非重力加速度之差
57	δg	除 J2 项外的其他高阶摄动力之差
58	ω_f	M 点对应的角速度
59	∇g_0	重力加速度的梯度函数
60	∇J_2	J2 摆动项的梯度函数
61	Δa_{ngi}	卫星 i 所受的非重力加速度
62	$\tilde{a}_l(t)$	非重力线性加速度测量值
63	$b_l(t)$	偏置/飘移误差
64	n_l	测量噪声
65	P_l	推力至加速度测量的传函
66	P_t	推力器动力学传函

67	\mathbf{P}_g	加速度计动力学传函
68	$\partial \mathbf{P}_l$	动力学幅值
69	$\partial \mathbf{P}_t$	推力器动力学幅值
70	Δt	采样时间间隔
71	E_f	信号的能量谱密度
72	E	信号频率范围内的全部能量
73	P_f	信号的功率谱
74	P	信号的总功率
75	e_{rms}	信号的绝对误差
76	$S_{n_p}(f)$	测距噪声的幅值谱密度
77	$S_{n_a}(f)$	非重力加速度噪声的幅值谱密度
78	$S_{a_l}(f)$	线性残差加速度幅值谱密度
79	$S_{a_a}(f)$	角加速度幅值谱密度
80	$S_{d_{lk}}(f)$	外干扰引起的线性幅值谱密度 $k \in \{x, y, z\}$
81	$S_{b_{lk}}(f)$	加速度计测量引起的线性幅值谱密度 $k \in \{x, y, z\}$
82	$S_{d_{ak}}(f)$	外干扰引起的角加速度幅值谱密度 $k \in \{x, y, z\}$
83	$S_{b_{ak}}(f)$	加速度计测量引起的角加速度幅值谱密度 $k \in \{x, y, z\}$
84	$S_{lx}(z)$	线加速度回路闭环系统灵敏度函数
85	$V_{lx}(z)$	灵敏度函数的补偿函数
86	λ_{lk}	单轴线加速度估计回路第 k 个特征值 (k=1,2,3)

87	γ_{lk}	单轴线加速度估计回路第 k 个特征值补偿值 ($k=1,2,3$)
88	λ_{ak}	单轴角加速度估计回路第 k 个特征值 ($k=1,2,3$)
89	γ_{ak}	单轴角加速度估计回路第 k 个特征值 ($k=1,2,3$)
90	$S_{u_{at}}$	姿态控制引起的幅值谱密度
91	S_{N_s}	星敏感器噪声幅值谱密度

发表文章目录

- [1] 张永合, 梁旭文, 张健, 胡庆雷. 无阻力双星串行编队相对位置有限时间控制[J]. 宇航学报, 2015, 36 (8) :986-993. (EI)
- [2] Yonghe ZHANG, Yamin WANG, Qingyun MAO, Xuwen LIANG. Orbital reference frame estimation optimization with Power Spectral Density Constraints for Drag-free Satellites[J]. Chinese Journal of Aeronautics. (SCI, 已录用)
- [3] 张永合, 梁旭文, 周远强, 郭延宁, 马广富. 无阻力双星编队的满系数矩阵 MIMO 定量反馈控制[J]. 宇航学报. (EI, 拟录用)
- [4] Jun Luo, Li-Sheng Chen, Hui-Zong Duan, Yun-Gui Gong, Shoucun Hu, Jianghui Ji, Qi Liu, Jianwei Mei, Vadim Milyukov, Mikhail Sazhin, Cheng-Gang Shao, viktorTtoth, Hai-Bo Tu, Yamin Wang, Yan Wang, Hsien-chi Yeh, ming-Sheng Zhan, **Yonghe ZHANG**, Vladimir Zharov and Ze-Bing Zhou. TianQin: a Space-borne gravitational wave detector[J]. Classical Quantum Gravity.(SCI, 拟录用)
- [5] Yonghe ZHANG, Hongyang DONG, Qinglei HU, Xuewen LIANG. 6-DOF Fault-tolerant Tracking Control for Spacecraft Proximity Operations with Finite-time Convergence. Journal of Aerospace Engineering.(SCI, 已投在审)
- [6] Yonghe ZHANG, Xuewen LIANG, Yamin WANG, Qingyun MAO, Switching control method based drag free and formation for dual earth gravimetry satellites formation missions. Optimal control, Applications and methods.(SCI, 已投在审)
- [7] Yonghe ZHANG, Wen CHEN, Yong LIU, et al. TANSAT Pointing Strategy and Attitude Guidance Law. [C]. 63rd Internaltional Astronautical Congress, Nales, Italy. 2012, IAC-12-C1.3.5.
- [8] 丰志伟, 张永合, 刘志超, 张青斌, 唐乾刚. 基于路径规划的敏捷卫星姿态机动反馈控制方法[J]. 国防科大学学报, 2013, 35(4):1-6.
- [9] 朱敏, 张永合, 尹增山. 飞轮扰动经验模型的识别与改进[J]. 空间科学学报, 2012, 32(6):855-861.
- [10] 郭延宁, 李传江, 张永合, 马广富. 采用框架角受限控制力矩陀螺的航天器姿态机动控制[J]. 航空学报. 2011, 32 (7) :1231-1239.(EI)
- [11] 李传江, 郭延宁, 张永合, 马广富. 基于时频域分析的轮控航天器姿态控制规律参数整定[J]. 宇航学报. 2011, 32 (11) :2319-2325(EI)
- [12] Wen CHEN, Yonghe ZHANG, Zengshan YIN, et al, The TANSAT Mission: Global CO₂ Observation and Monitoring [C]. 63rd Internaltional Astronautical Congress, Nales, Italy. 2012, IAC-12-B4.4.12.
- [13] 丰志伟, 张青斌, 唐乾刚, 张永合, 基于二代小波的轨迹优化节点自适应调整[J]. 航空动力学报. 2013,28(7).

简 历

基本情况：

张永合，男，上海。

1977 年 7 月出生于山东省莱西市。

教育状况：

1997 年 9 月至 2001 年 7 月，哈尔滨工业大学航天学院，本科，专业：自动化。

2001 年 9 月至 2003 年 7 月，哈尔滨工业大学航天学院，硕士，专业：导航、制导与控制。

2010 年 4 月至 2016 年 1 月，中国科学院上海微系统与信息技术研究所，专业：通信与信息系统。

工作经历：

2003 年 7 月至今，工作于上海微小卫星工程中心（现成立中国科学院微小卫星创新研究院）。

2013 年 12 月至今，担任上海微小卫星工程中心总体技术研究室副主任。

参加研究课题：

2011 年 1 月至今，参加科技部“全球二氧化碳监测实验卫星与应用示范”任务，担任卫星副总设计师。

2006 年 6 月至今，参加民用航天“中法天文卫星项目”，担任卫星副总设计师。

联系方式：

通讯地址：上海市浦东新区海科路 99 号 4 号楼

邮编：201203

E-mail：yonghe.zhang@mail.sim.ac.cn

附件一 中国科学院上海微系统与信息技术研究所学位论文独创性声明及使用授权声明文本

中国科学院上海微系统与信息技术研究所

学 位 论 文 独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国科学院上海微系统与信息技术研究所或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一起工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名: _____ 日 期: _____

中国科学院上海微系统与信息技术研究所

学 位 论 文 使 用 授 权 声 明

本人完全了解中国科学院上海微系统与信息技术研究所有关保留、使用学位论文的规定，即研究所有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。保密的论文在解密后遵守此规定。论文的公布（包括刊登）授权中国科学院上海微系统与信息技术研究所人才教育处。

研究生签名: _____ 导师签名: _____ 日 期: _____