数学试卷汇编

2025 年 11 月 14 日

目录

1 2008-2009

1 （程序设计）

一、本题仅为自己编写、运行并交了优化程序同学的必做题。答题情况将作为给程序成绩的依据。未交程序或未答此题的同学，程序成绩为零。

用你在已交优化程序中所用的编程语言，给下面的问题编写一个小程序。

问题：设函数 $f(x,y)=x^3-y^2$，向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)^{\mathrm{T}}$。对每个分量，计算

$$d_i=f(u_i,v_i)=u_i^3-v_i^2,$$

并将所有 $d_i>0$ 的值求和：

$$S=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{d_i>0\}}\,d_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{u_i^3-v_i^2>0\}}\,(u_i^3-v_i^2),$$

其中 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ 为示性函数（条件成立取 1，否则取 0）。

程序要求：必须有输入、输出结果数据语句，用循环语句编写计算语句。

2 （试用两阶段单纯形法求解如下线性规划）

$$\begin{aligned}
&\min\ -3x_1-2x_2\\
\text{s.t.}\quad &3x_1+x_2=3,\\
&6x_1+3x_2\ge 7,\\
&x_1+2x_2\le 3,\\
&x_i\ge 0,\ i=1,2.
\end{aligned}$$

3

有 A, B 两种产品都需要经过前、后两道化学反应过程。每一个单位产品 A 需要前道过程 2 小时和后道过程 3 小时；每一个单位产品 B 需要前道过程 3 小时和后道过程 4 小时。可利用的前道过程时间是 16 小时，后道过程时间是 24 小时。每生产一个单位产品 B 的同时，会生产两个单位的副产品 C，且不需要任何费用。副产品 C 的一部分可以作为废料处理，其余的可以销售。出售单位产品 A 可以获利 4 元，出售单位产品 B 可以获利 10 元；出售单位副产品 C 可以获利 3 元，销毁单位副产品 C 的费用是 2 元。最多可售出 5 个单位的副产品 C。问产品 A, B 的产量、副产品 C 的销售量和副产品 C 的销毁量是多少，使利润达到最大？建立该问题的线性规划模型。

4

求函数 $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_1 - 2x_2)^2$ 在点 $(1, 1)^T$ 处的 Taylor 展开式 (写到三项).

5

对于极小化问题

$$\min f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2$$

判断 $\bar{x}_1 = [0, 0]^T$ 和 $\bar{x}_2 = [2\sqrt{2}, 4]^T$ 是否是该问题的局部极小点.

6

对于线性规划问题

$$\begin{aligned} &\max\ -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ & 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

设 $B = (\bar{a}_1, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$，$B$ 是否是基？如果 B 是基，那么求出关于 B 的基本解，并判断它是否是基本容许解。

7

下面是三个二元正定二次函数的等值线图. 从指定初始点 $\mathbf{x}_0$ 出发, 各图按指定算法, 画出求极小点的迭代路径. 其中最速下降法须迭代三次.

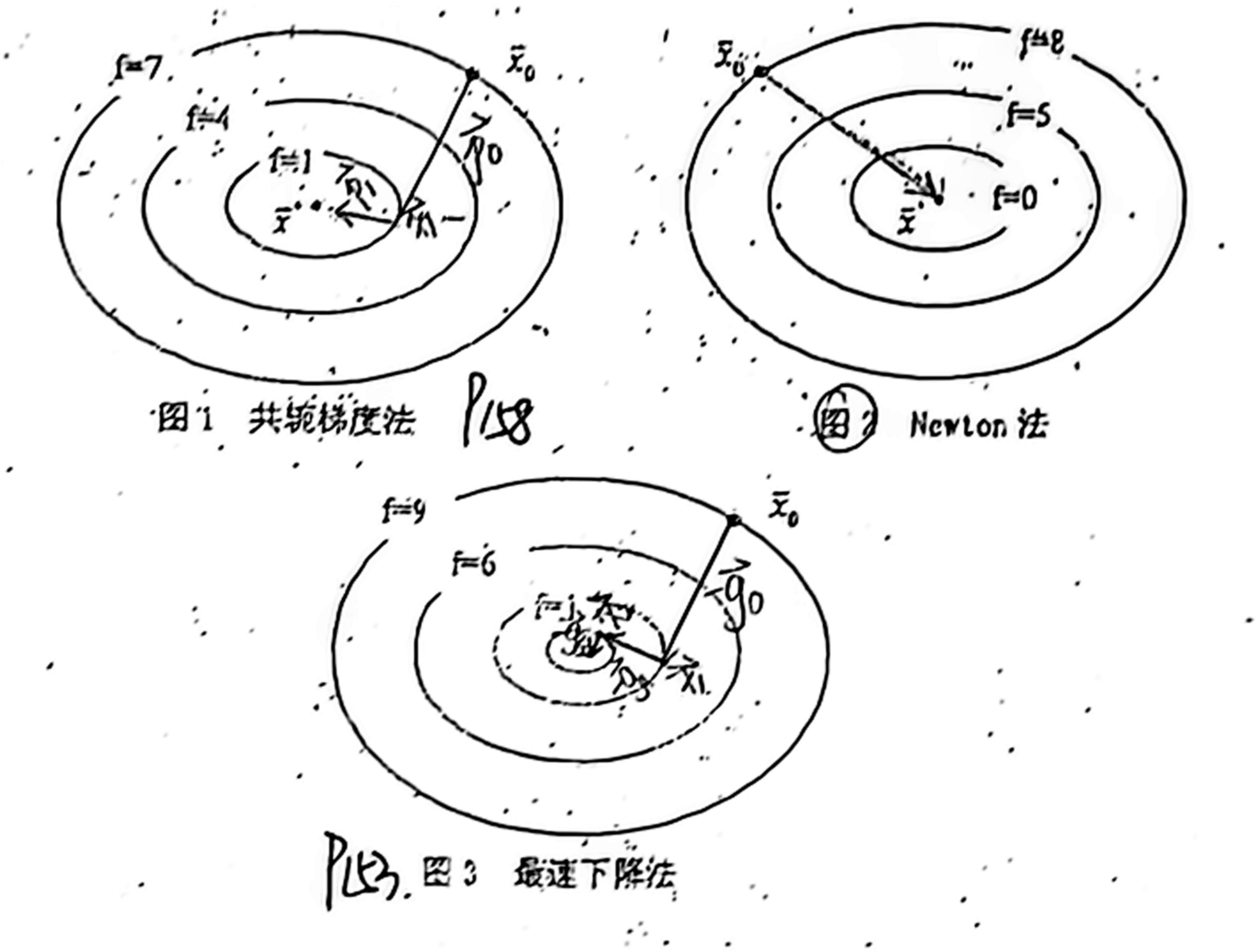


图 1.1: 不会 p 图见谅

8

已知无约束优化问题

$$\min f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1$$

取初始点为 $\bar{x}_0 = [-4, 3]^T$, 用 DFP 算法迭代两次, 并判断最后一点是否为最优解.

公式:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\bar{s}_k \bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T \bar{y}_k} - \frac{H_k \bar{y}_k \bar{y}_k^T H_k}{\bar{y}_k^T H_k \bar{y}_k}, \quad H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9

采用图上作业方式,用步长加速法求无约束问题 $\min f(\bar{x})$. 初始点为图中标号 1 的点. 步长取为图中单位格的长和宽. 极小点在 x^* 处. 迭代到开始缩小步长为止. $f(\bar{x})$ 的等值线图如下所示.

要求: 1. 按下面的标识方式标出搜索过程中的全部基点、参考点和探测经历点.

- 基点 / 临参考点 / 基点与参考点重合点 / 探测经历点

2. 按进行的先后顺序对基点、参考点进行序号 $1, 2, \cdots$.

图片省略（太模糊）

2 2009-2010

1

试用两阶段单纯形法求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & Z = -2x_1 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2

用 Newton 法求解极小化问题:

$$\min f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + x_2^3 - x_1^2 x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$, 迭代一次, 并说明 $\bar{x}_1$ 是否是局部最优解吗?

3

用 F-R 共轭梯度法求解无约束优化问题:

$$\min f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2}$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [2, -1]^T$, 已知第一次沿 $\bar{p}_0 = -\nabla f(\bar{x}_0)$ 方向迭代得到的迭代点 $\bar{x}_1 = [1, -1]^T$ 不是最优解. 求第二个迭代点 $(\bar{x}_2)$.

4

试用 DFP 法求解无约束优化问题

$$\min f(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$, 已知第一次沿 $\bar{p}_0 = -\nabla f(\bar{x}_0)$ 方向迭代得到迭代点 $\bar{x}_1 = [1, \pm 1]^T$.

$$(\text{公式:} H_{k+1} = H_k + \frac{\bar{s}_k \bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T \bar{y}_k} - \frac{H_k \bar{y}_k \bar{y}_k^T H_k}{\bar{y}_k^T H_k \bar{y}_k}, H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.)$$

5

考虑约束最优化问题

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

s.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 - 5x_2 &\geq -10 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [0, 2]^T$. 用 Zoutendijk 法求许可方向迭代一次.

6

用外部罚函数法求解约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 - 5x_1 - x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7

用最小二乘法解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

8

试判断向量 $\bar{p} = [1, 0, 1]^T$ 是否是如下线性约束

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 5x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 2 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

在点 $\bar{x} = [2, 2, 0]^T$ 处的容许方向向量.

9

利用 K-T 条件求解约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + e^{-x_2}$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

3 2010-2011

1

用两阶段单纯形法解如下线性规划

$$\min 3x_1 - x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\ 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

并回答: 该线性规划目标函数的等值——是————

2

用 Newton 法解无约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^4 + (x_1^2 - x_2)^2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 2]^T$, 迭代一次求 $\bar{x}_1$, 并说明 $\bar{x}_1$ 是否为最优解.

3

三、(15 分) 用 F-R 共轭梯度法解无约束问题

$$\min f(\bar{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 + 2x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 0]^T$.
回答: F-R 共轭梯度法是一种共轭方向方法, 具有———— 步终止性. 本题的目标函数为————,
使用共轭梯度法至多迭代———— 次即可求到最优解. 本题的目标函数的等值——是————

4

用步长加速法求解无约束极小化问题

$$\min f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [-1, 1]^T$. 初始步长向量 $\bar{s}_0 = [1, 1]^T$. 迭代到开始缩小步长为止.
根据计算过程回答: 步长加速法主要包括加速和修正两个基本过程. 如果有 $f(\bar{b}_1) < f(\bar{b}_0)$, 则说明 $\bar{b}_1 - \bar{b}_0$ 是 $\bar{b}_0$ 处的下降方向.

5

已测得变量 t 与 y 的 5 组数据如下：

t	0	1	2	3	4
y	1	3	5	4	2

1. 根据这 5 组数据，试说说用一次函数，还是二次函数作 t 与 y 之间的拟合更好?
2. 用在 (1) 中你所选择的拟合函数，建立 t 与 y 之间的最小二乘模型。（注：不求值）

6

对于方程组

$$\begin{cases} t_1 + x_2 = 4, \\ -t_1 + 2x_2 = -1, \\ 3t_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

求其最小二乘解，并给出结果判断该方程组是否含有解。

7

求如下约束问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & f(x_1,x_2)=\ln x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2^2 \geq 1 \end{aligned}$$

的 K-T 点，并利用凸规划的 K-T 点定理，判断求到的 K-T 点是否为问题的最优解。

8

用 Zoutendijk 容许方向法解如下约束问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & x_1^2+2x_2^2-x_1x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+x_2=2, \\ & x_1+4x_2 \leq 5, \\ & x_1,x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}=[1,1]^T$，迭代一步求出 $\bar{\mathbf{x}}_1$。

9

用乘子法解如下约束问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2-5x_1-x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+x_2\le 2, \\ & x_1,x_2\ge 0. \quad \text{(隐含约束)} \end{aligned}$$

并回答：乘子法中的罚因子与外部罚函数法中的罚因子的本质区别。

公式: $F(\bar{\mathbf{x}},\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\nu}},\mu)=f(\bar{\mathbf{x}})-\sum_{j=1}^{l}\lambda_j h_j(\bar{\mathbf{x}})+\mu\sum_{j=1}^{l}h_j^2(\bar{\mathbf{x}})+\frac{1}{4\mu}\sum_{i=1}^{m}\{[\max(0,\bar{\nu}_i-2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}))]^2-\bar{\nu}_i^2\}$.

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(t+1)} &= \lambda_j^{(t)}-2\mu h_j(\bar{\mathbf{x}}_t), \quad j=1,2,\ldots,l; \\ \nu_i^{(t+1)} &= \max(0,\nu_i^{(t)}-2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}_t)), \quad i=1,2,\ldots,m. \end{aligned}$$

4 2011-2012

1

试用两阶段单纯形法解线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

2

设一个求极小的线性规划的容许集 D、目标函数的负梯度向量 $-\bar{c}$ 及初始点 $\bar{x}_0$ 的位置如右图所示。试在图上画出至少 3 条等值线，及从初始点 $\bar{x}_0$ 到最优点的迭代路径（要求标出各迭代点）。

图省略了（请看原卷）

3

下面是三个二元正定二次函数的等值线图。从指定初始点 $\mathbf{x}_0$ 出发，各图按指定算法画出求极小点的迭代路径。其中最速下降法要求只迭代二次。

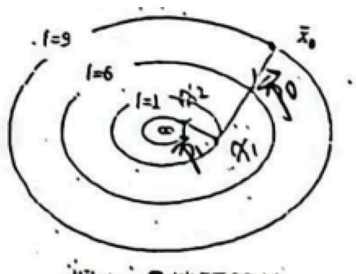


图 1 最速下降法

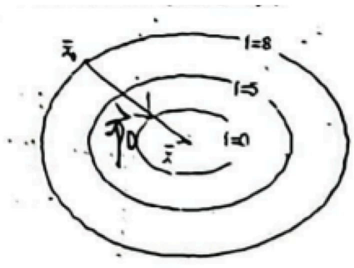


图 2 Newton 法

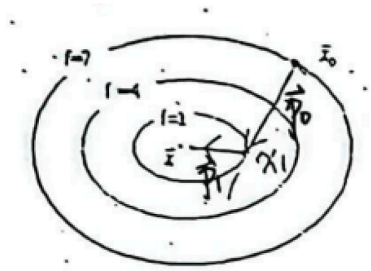


图 3 共轭梯度法

4

用 F-R 共轭梯度法解无约束极小化问题

$$\min f(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2,$$

初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1,1,1]^T$。按 F-R 共轭梯度法现已迭代出 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [\frac{1}{5},1,\frac{1}{5}]^T$，要求继续迭代一次，求出 $\bar{\mathbf{x}}_2$，并判断 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 是否为局部最优解。

5

用 DFP 法解无约束极小化问题

$$\min f(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 x_2$$

初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1,1]^T$。按 DFP 法现已迭代出 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [1, 1/4]^T$，要求继续迭代一次，求出 $\bar{\mathbf{x}}_2$，并判断 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 是否为局部最优解。

(公式：

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k} - \frac{H_k \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T H_k^T}{\mathbf{y}_k^T H_k \mathbf{y}_k},$$
$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注： $\sqrt{146} \approx 12.08$，$\sqrt{148} \approx 12.17$)

6

用加速法解无约束极小化问题

$$\min f(\bar{\mathbf{x}}) = 4x_1^2 + x_2^2.$$

设初始点 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 2.5]^T$，初始步长方向 $\bar{\mathbf{s}}_0 = [1,1]^T$。要求迭代到模式移动结束为止。

7

试述容许方向法的 3 个主要过程是:

1. 确定当前迭代点处的______________。
2. ______________，得到下一个迭代点。
3. 判断新______________ 是否为 K-T 点。

求解如下线性约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_2^2 - x_3^2 - 3x_2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 6, \\ & x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

设初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 0, 0]^T$。

1. 检验 $\bar{\mathbf{p}}_0 = [-2, 1, 1]^T$ 是否为 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 处的下降容许方向。
2. 如果 $\bar{\mathbf{p}}_0 = [-2, 1, 1]^T$ 是 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 处的下降容许方向，那么沿 $\bar{\mathbf{p}}_0$ 作直线搜索，求出下一迭代点 $\bar{\mathbf{x}}_1$。然后停止计算；否则，直接停止计算。

8

简述外部罚函数法的“罚”思想。鉴于乘子法是外部罚函数法的改进方法，简述“改进”的本质。

试用乘子法解如下约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \ge 1. \end{aligned}$$

(公式:

- 扩展拉格朗日函数 $F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\nu}}, \mu) = f(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j h_j(\bar{\mathbf{x}}) + \mu \sum_{j=1}^{l} h_j^2(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^{m} \{[\max(0, \bar{\nu}_i - 2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}))]^2 - \bar{\nu}_i^2\}$.
- 等式乘子更新: $\lambda_j^{(k+1)} = \max(0, \cdots - 2\mu h_j(\bar{\mathbf{x}}_k)), \quad j = 1, 2, \ldots, l.$
- 不等式乘子更新: $\nu_i^{(k+1)} = \max(0, \nu_i^{(k)} - 2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}_k)), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

9

试利用 K-T 条件解如下约束极小化问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 0, \\
& 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

10

某工厂向用户提供发动机，合同规定交货量和交货日期分别是：第一季度末交 40 台，第二季度末交 60 台，第三季度末交 80 台。工厂每季的最大生产能力为 100 台。每季的生产费用函数为 $f(x) = 50x + 0.2x^2$ (元)，x 为生产台数。如果某季生产过剩，则多余的发动机可用于下季交货，但工厂需要支付存储费用：每台每季 4 元。试建立工厂能够完成合同而费用最少的数学模型（假定第一季度开始时发动机无存货）。

5 2013-2014

1

用两阶段单纯形法解线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2

采集到关于变量 x, y, z 的一组数据：

x	3	5	6	8	12	14
y	16	10	7	4	3	2
z	90	72	54	42	30	12

试建立 z 关于 x, y 的线性回归最小二乘模型。

3

判断 $\mathbf{p} = [1, 1, -2]^T$ 是线性约束

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ -3x_1 + 10x_2 + 6x_3 &\leq 10, \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 &\geq 15 \end{aligned}$$

在点 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [2, 1, 1]^T$ 处的容许方向向量吗?

4

(1) 利用最优性条件，求如下无约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2$$

的严格局部极小点。

(2) 用 F-R 法解无约束极小化问题

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2.$$

设初始点为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 1]^T$，且按 F-R 法已求出 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [1, 1/2]^T$。试再迭代一次，求出 $\bar{\mathbf{x}}_2$。（不要把分数与根式化成小数）

5

用 DFP 法解无约束极小化问题

$$\min f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2.$$

设初始点为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [0, 1]^T$，且按 DFP 法已得到 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [4/3, -4/3]^T$。

(校正公式: $H_0 =$ 单位矩阵，

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k} - \frac{H_k \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T H_k^T}{\mathbf{y}_k^T H_k \mathbf{y}_k}$$

（不要把分数与根式化成小数）

6

采用图上作业方式，用步长加速法解无约束问题 $\min f(\bar{\mathbf{x}})$。$f(\bar{\mathbf{x}})$ 的等值线图如下图所示，标号 1 处为初始点。设步长向量的分量均取 1 (图中网格为单位格)，迭代到开始缩小步长为止。

注意:

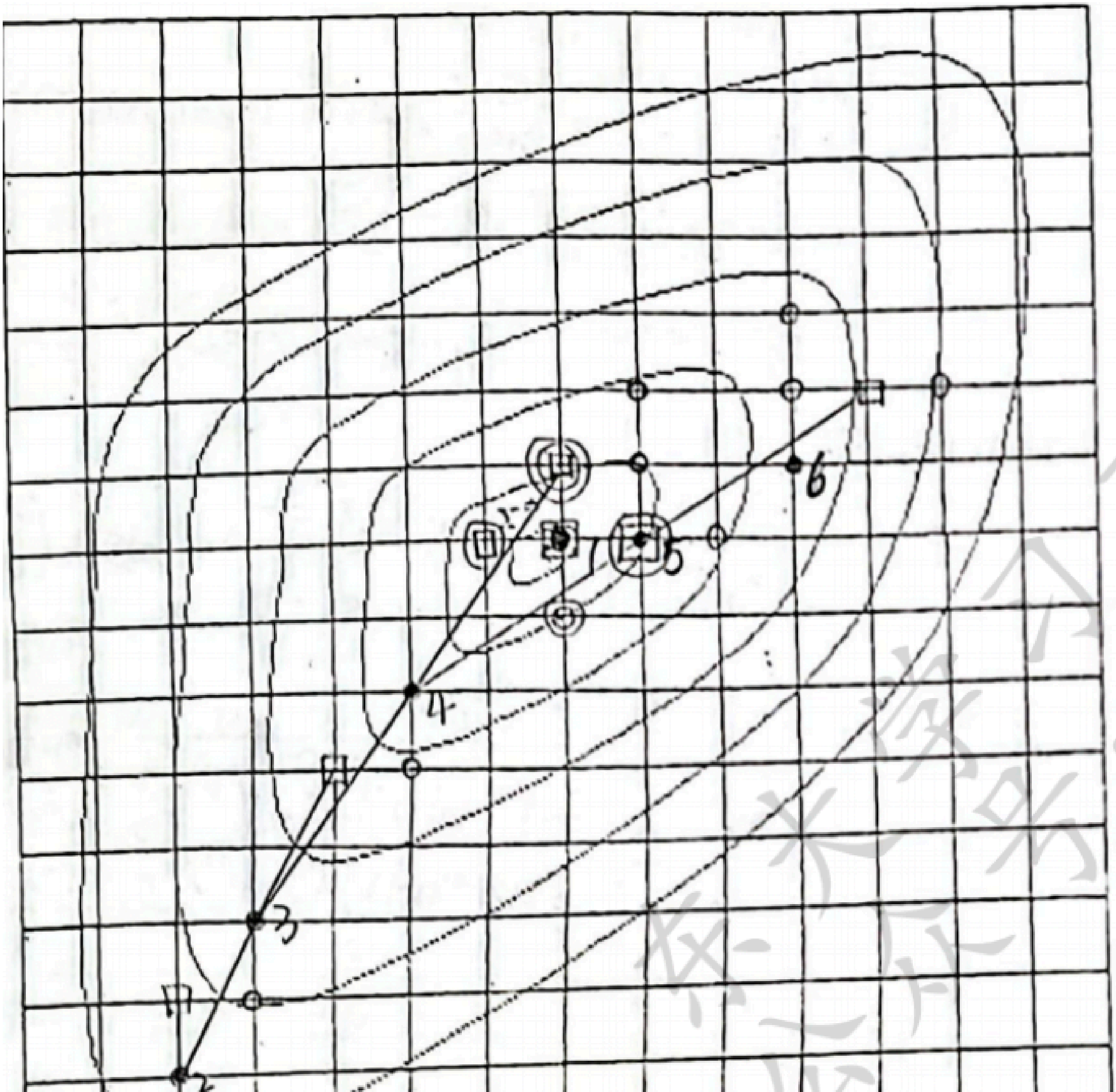
(a) 在下图左下方所示的直角坐标系上标出探测搜索方向的先后顺序；

(b) 按指定标识方式:

- ● 基点
- □ 参考点
- ■ 基点与参考点的重合点
- ○ 探测经历点

标出作业过程中的全部基点、参考点和探测经历点；

(c) 按进行的顺序，仅对基点标号 $1, 2, \ldots$。


6
5
4
3
2
1
x_0

7

(1) 求极小化约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = -\ln(1 + x_1) - 2\ln(1 + x_2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 2.$$

的 K-T 点。

(2) 某公司有 3 个建筑工地要开工，每个工地位置用平面坐标 (a, b) 表示，距离单位：公里；及水泥用量 d (单位：吨) 由下表给出：

工地	**1**	**2**	**3**
(a, b)	$(2, 2)$	$(8, 1)$	$(1, 4)$
d (吨)	3	5	4

现拟建造一个料场，但储量备量为 6 吨。假设料场到工地之间均有直线道路相连。问如何选址和调配调用量，能使总的吨公里数最少（仅建数学模型)?

8

求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2; \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

设初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 1]^T$，试用 Zoutendijk 容许方向法迭代一次，求出下一迭代点 $\bar{\mathbf{x}}_1$。

9

(1) 外部罚函数法的惩罚方式是针对______________ 点惩罚, 而对______________点不惩罚, 罚因子的特点____

(2) 用乘子法解约束问题问题时有如下:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1; \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1 x_2 = 70. \end{aligned}$$

(公式: $F(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{v}, \mu) = f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j h_j(\bar{x}) + \mu \sum_{j=1}^{2} h_j^2(\bar{x}) + \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^{m} \left\{ [\max(0, v_i^k - 2\mu s_i(\bar{x}_k))]^2 - v_i^{k^2} \right\}$

$$\bar{\lambda}_j^{(k+1)} = \bar{\lambda}_j^{(k)} - 2\mu h_j(\bar{x}_k), j = 1, 2, \ldots, l; \quad v_i^{(k+1)} = \max(0, v_i^{(k)} - 2\mu s_i(\bar{x}_k)), i = 1, 2, \ldots, m.$$

6 2014-2015

1

用两阶段单纯形法解如下线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 + x_2 + x_3; \\
\text{s.t.} \quad & -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11, \\
& x_1 + x_3 = 1, \\
& -2x_1 + x_3 = 1, \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

2

用图解法求解非线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 1; \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2^2 \leq 1, \\
& x_1 - x_2 \geq 2, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

3

已测得变量 i 与 y 的 5 组数据：

i	-1	-0.7	0	0.7	1
y	-0.9	-1	-2	-3.5	-4.4

(1) 根据这 5 组数据，试从以下 4 个函数中选择最合适的一个函数拟合：

$$y = x_1(i + x_2), \quad y = x_1 i^2 + x_2 i + x_3, \quad y = x_1 e^{x_2 i}, \quad y = \ln(x_1 + x_2 i)$$

(2) 用你在 (1) 中选择的拟合函数，建立 y 与 i 之间的最小二乘模型。

(3) 判断你在 (2) 中建立的是否是线性最小二乘模型．如果是，写出 A, b.

4

用 F-R 共轭梯度法求解无约束问题

$$\min x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2.$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$，现已求出 $\bar{x}_1 = [1, 1/2]^T$，再迭代一次，求 $\bar{x}_2$ 并讨论第 2 个迭代点是否为最优解。

5

用乘子法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1^2 + (x_2-1)^2; \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \geq 20 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 20 \geq 0, \\ & x_2 \geq 2. \end{aligned}$$

公式: $F(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{v},\mu) = f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{l}\lambda_j h_j(\bar{x}) + \mu\sum_{j=1}^{l}h_j^2(\bar{x}) + \frac{1}{4\mu}\sum_{i=1}^{m}\{[\max(0,\bar{v}_i - 2\mu s_i(\bar{x}))]^2 - \bar{v}_i^2\}$

$$\bar{\lambda}_j^{(k+1)} = \bar{\lambda}_j^{(k)} - 2\mu h_j(\bar{x}_k),\ j = 1,2,\ldots,l;$$

$$\bar{v}_i^{(k+1)} = \max(0, \bar{v}_i^{(k)} - 2\mu s_i(\bar{x}_k)),\ i = 1,2,\ldots,m.$$

6

用 DFP 法求解无约束问题

$$\min x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_2 - x_3.$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [-2,1]^T$，现已求出 $\bar{x}_1 = [-1/2,1]^T$，再迭代一次，求 $\bar{x}_2$，并解答 2 个问题：(1) $\bar{x}_2$ 是最优解吗，为什么？(2) 如果 $\bar{x}_2$ 不是最优解，那么求到最优解还需要多少次迭代？

公式：

$$\bar{H}_{k+1} = \bar{H}_k + \frac{\bar{s}_k\bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T\bar{y}_k} - \frac{\bar{H}_k\bar{y}_k\bar{y}_k^T\bar{H}_k}{\bar{y}_k^T\bar{H}_k\bar{y}_k}, \quad \bar{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7

设函数 $f(\bar{x})=\frac{1}{2}\bar{x}^TQ\bar{x}+\bar{b}^T\bar{x}+c$，其中 Q 是正定矩阵，$\bar{x}_*$ 为满足 $\nabla f(\bar{x}_*)=\bar{0}$ 的任意一点，从 $\bar{x}_0$ 出发，沿方向 $\bar{p}=-Q^{-1}\nabla f(\bar{x}_0)$ 对 $f(\bar{x})$ 作直线搜索，求最优步长因子 t_0（从直线搜索到的极小点 $\bar{z}_1$，试问 $\bar{z}_1$ 与 $f(\bar{x})$ 是什么关系?

8

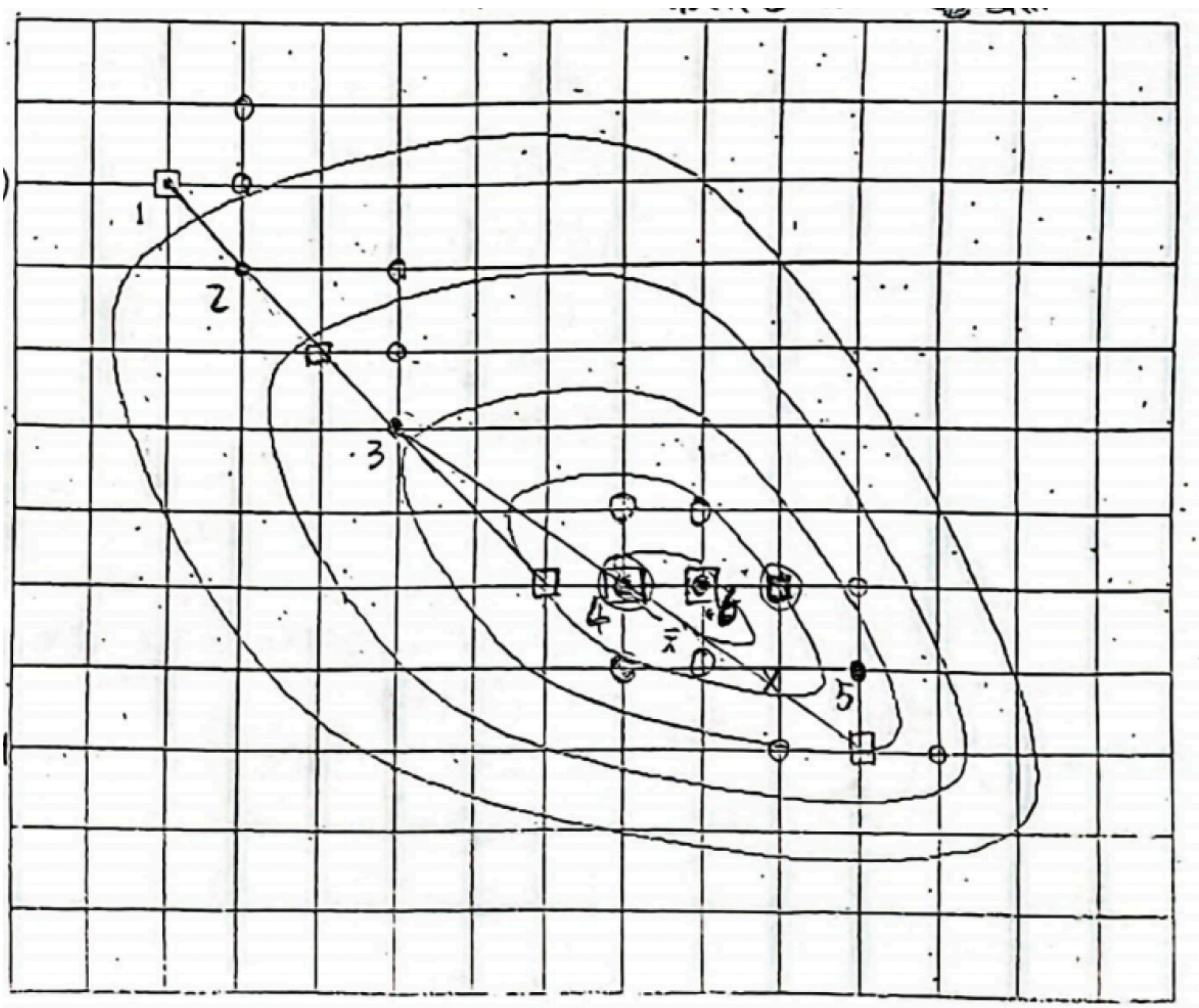
采用图上作业方式，用步长加速法求解无约束问题 $\min f(\bar{x})$．$f(\bar{x})$ 的等值线图如下图所示，标号 1 处为初始点，设初始步长向量的分量均为 1（图中网格为单位格），迭代到开始缩小步长为止．要求：

(a) 在下方所示直角坐标系上标出探测的先后顺序；

(b) 按下面指定的标识方式，标出作业过程中的全部基点、参考点和探测经历点：

□ 参考点 • 基点 ○ 探测经历点 ■ 基点与参考点重合的点

(c) 按进行的顺序，仅对焦点标号：1, 2, …


1
2
3
4
5
6

9

用 z-容许方向法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1; \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 - x_2 \geq -3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [2/3, 0]^T$，迭代一次，求 $\bar{x}_1$.

10

考虑约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 1 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

利用下述条件求 K-T 点，并判断所求出的 K-T 点是否是全局最优解。

11

考虑线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 + x_3 - x_4; \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 3x_3 + x_4 = 4, \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4.
\end{aligned}
$$

(1) 求该问题的所有极点并验证解；

(2) 已知该问题有最优解，试问:“可否通过 1 的方式求得最优解？为什么？”

(3) 如果能由 1 的方式求出最优解，那么求出最优解.

7 2015-2016

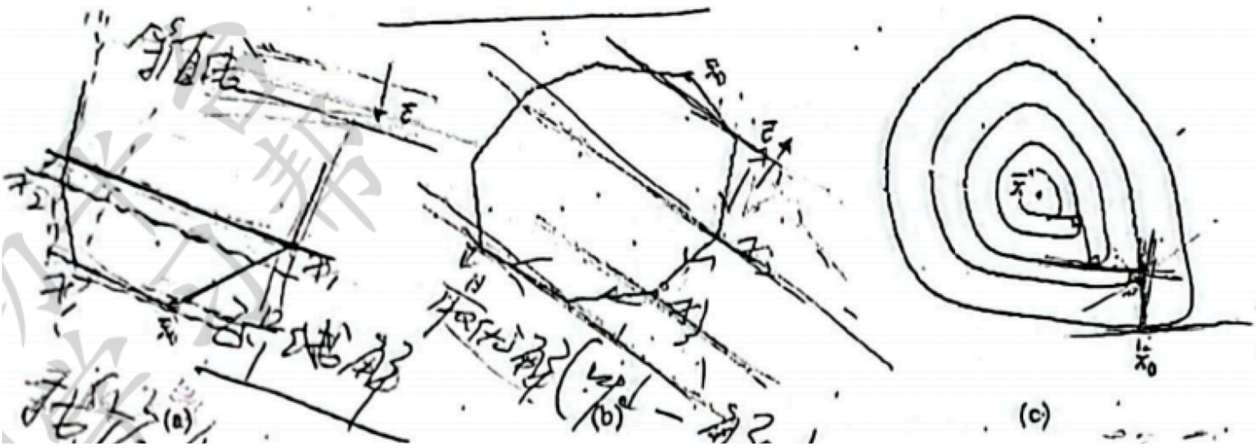
1

用两阶段单纯形法解下面的线性规划

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -5x_1 + x_2 + 2x_3; \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3, \\
& -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4, \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

2

(1) 图 (a), (b) 显示的是两个最小化线性规划的容许集、初始点和目标函数的梯度方向，试画出单纯形法的迭代路径（并说明每种情况），图 (c) 是一个极小化问题的等值线图；试判断点 $\bar{x}_0$ 方向，画出最速下降法的前 3 次迭代路径。



3

利用最小二乘法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4, \\ -x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

4

利用极小点的判定条件求下面优化问题的极小点.

$$\min x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2$$

5

用 DFP 法求解优化问题

$$\min x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 + x_2.$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [0,0]^T$.

公式：

$$\bar{H}_{k+1} = \bar{H}_k + \frac{\bar{s}_k\bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T\bar{y}_k} - \frac{\bar{H}_k\bar{y}_k\bar{y}_k^T\bar{H}_k}{\bar{y}_k^T\bar{H}_k\bar{y}_k}, \quad \bar{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6

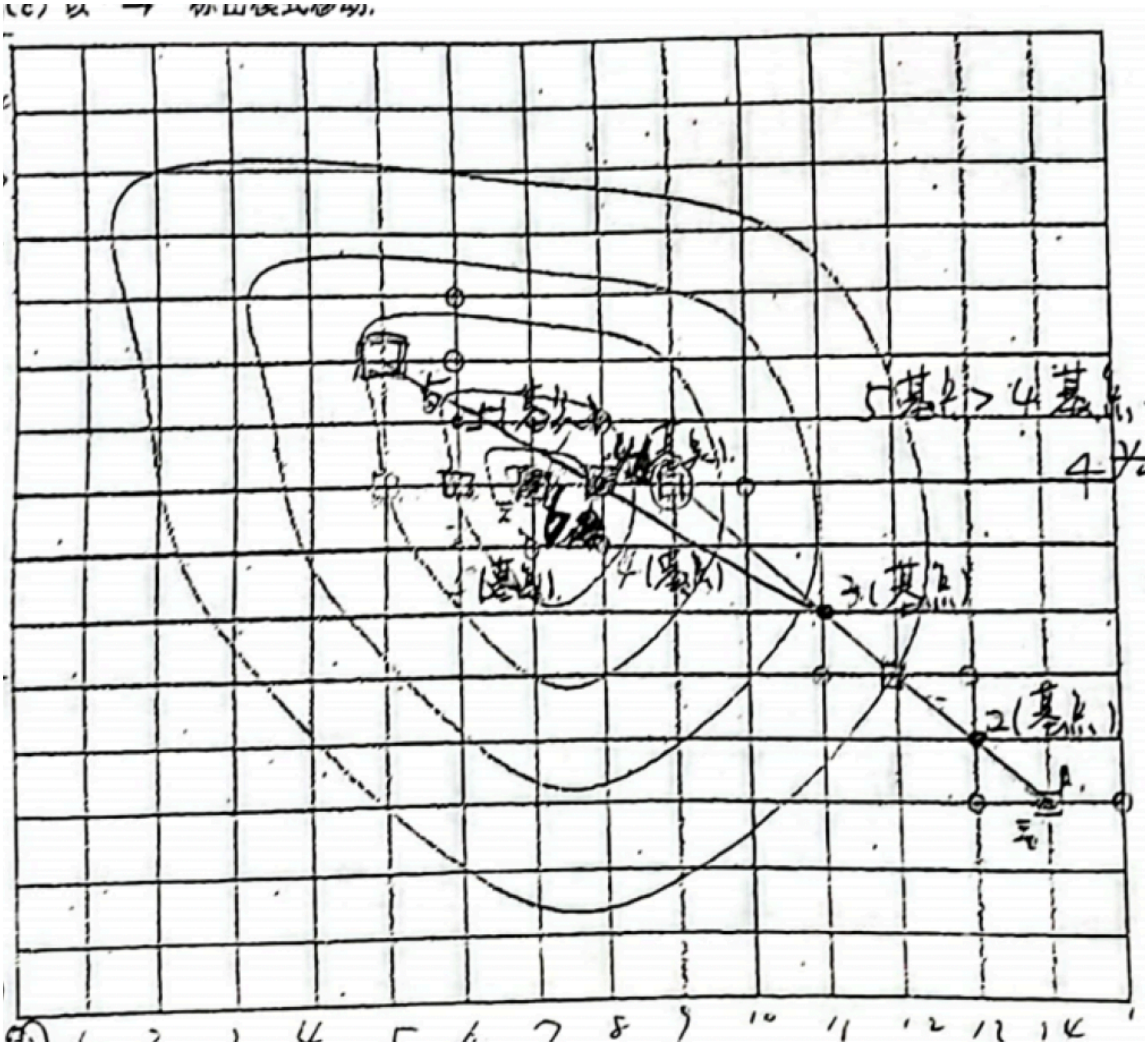
采用图上作业，用步长加速法求解无约束问题 $\min f(\bar{x})$. 下图是 $f(\bar{x})$ 的等值线图，标号 1 处为初始点，设初始步长向量的分量均为 1（图中网格为单位格），迭代到开始缩小步长为止. 要求：

(a) 在下方所示直角坐标系上标出探测方向的顺序；

(b) 按下面指定的标识方式，标出作业过程中的全部基点、参考点和探测经历点，对基点按进行的先后依次标号 1, 2, ...

□ 参考点 • 基点 ◦ 探测经历点 ■ 基点与参考点重合的点

(c) 以“→”标出模式移动。



7

(1) 用 Z-容许方向法求解约束问题

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1^2 + 4x_2^2 - x_2; \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 5, \\
& x_1 + x_2 = 2, \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

设初始点为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$，迭代一次求 $\bar{x}_1$.

8

考虑问题

$$
\min x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2.
$$

设初始点为 $\bar{x}_0 = (2, 3)^T$. 用 Newton 法迭代一次.

9

用 F-R 共轭梯度法求解优化问题

$$\min 2(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2.$$

设初始点为 $\bar{x}_0 = [0, 0]^T$，迭代二次求出 $\bar{x}_2$（提示：最优步长因子 t_0 是 2 的负整数次幂）

.

10

设 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{c} \neq \bar{0}$，考虑问题

$$\begin{array}{ll} \min & \bar{c}^T \bar{x}, \\ \text{s.t.} & \bar{x}^T \bar{x} \geq 70 \text{ s.t. } \bar{x}^T \bar{x} \leq 1. \end{array}$$

求该问题的 K-T 点，并判断其是否为全局极小点。

11

用外部罚函数法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -\ln(x_1+1)-\ln(x_2+1); \\ \text{s.t.} \quad & x_1+x_2 \le 2, \\ & x_i \ge 0. \end{aligned}$$

12

考虑问题.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1; \\ \text{s.t.} \quad & 16-(x_1-4)^3-x_2^2 \ge 0, \\ & (x_1-3)^2+(x_2-2)^3-13 \ge 0. \end{aligned}$$

问：$\bar{x}_1=(0,0)$ 与 $\bar{x}_2=(3,2-\sqrt{3})$ 是 K-T 点吗？为什么？如果是 K-T 点，则是否为全局极小点？

8 2016-2017

1

用两阶段单纯形法解线性规划

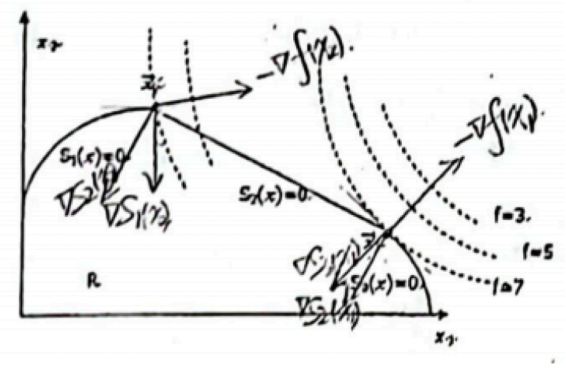
$$\min \quad z=-4x_1-x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1+2x_2\le 4 \\ -4x_1-3x_2\le -6 \\ 3x_2+x_3\ge 3 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

2

1. 简述迭代格式 $x_{k+1}=\overline{x}_k+t_k\overline{p}_k$ $(k=0,1,\ldots)$ 对于 x 受许方向法与最速下降法的区别，以及 t_k 取了什么值才能保证 $\overline{x}_k$ 是下一次迭代的允许点。

2. 试图表示的克极小化问题 $\min f(x)$，R 表示容许域。(1) 在图中画出点 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$ 的所有起作用的束函数的梯度方向；(2) $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$ 是否 $K-T$ 点?



3

(1) 用图解法求解下面问题；**(2)** 将它化为标准线性规划问题。

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4

用 Newton 法求解极小化问题

$$\min x_1^2 x_2 + 2x_2 x_3^4 - 4x_1 x_2,$$

初始点取为 $x_0 = [1, 1]^T$，迭代一次得到迭代点 $\overline{x}_1$，并说明 $\overline{x}_1$ 是局部最优解吗?

5

设初始点为 $\overline{x}_0=[2,-1]^T$。用 F-R 共轭梯度法求解无约束极小化问题

$$\min x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2.$$

6

试用 DFP 法求解无约束优化问题

$$\min x_1^3+2x_2^3-2x_1x_2+x_2^5,$$

初始点取为 $\overline{x}_0=[1,1]^T$。已知：一次迭代 $p_0=-\nabla f(\overline{x}_0)$ 方向迭代得到迭代点 $\overline{x}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$ 否是最优解。求第二个迭代点 $\overline{x}_2$，并判断 $\overline{x}_2$ 是否局部最优解。

(校正公式：$H_0=I$ 单位矩阵，$H_{k+1}=H_k+\frac{s_ks_k^T}{s_k^Ty_k}-\frac{H_ky_ky_k^TH_k}{y_k^TH_ky_k}$)

7

用步长加速法求解无约束极小化问题

$$\min(x_1-1)^4+2x_2^2$$

初始点取为 $\overline{x}_0=[4,3]^T$，初始步长向量 $\overline{s}_0=[1,1]^T$，迭代到开始缩小步长为止

8

1. 利用最优性条件，求解约束问题

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x_1+x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+x_2\le 1, \\ & x_1+x_2=1. \end{aligned}$$

9

下表给出了某厂节能煤耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x（吨）与相应的生产能耗 y（吨标准煤）的几组对照数据

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(1) 请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出 y 与 x 的线性回归方程；

(2) 已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤，试根据 (1) 求出的线性回归方程，预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤。

10

求解约束问题

$$\begin{aligned} \min\quad & 2x_1^2 + x_2x_3 + 2x_2^2 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 10, \\ & x_1 - 3x_2 \leq 4, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ & x_i \geq 0. \end{aligned}$$

(1) 设初始点取为 $\overline{x}_0 = [4,0]^T$，试用 z 容许方向法迭代一次，求出下一迭代点 $\overline{x}_1$；

(2) z 容许方向法的迭代终止准则是什么?

(3) 并预测 $\overline{x}_0$ 和 $\overline{x}_1$ 是否满足终止准则。

11

用外部罚函数法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 4 \end{aligned}$$