

数学试卷汇编

2025 年 11 月 17 日

目录

1	2008-2009	2
2	2009-2010	8
3	2010-2011	13
4	2011-2012	18
5	2013-2014	24
6	2014-2015	30
7	2015-2016	37
8	2016-2017	44

1 2008

1 (程序设计)

一、本题仅为自己编写、运行并交了优化程序同学的必做题。答题情况将作为给程序成绩的依据。未交程序或未答此题的同学，程序成绩为零。

用你在已交优化程序中所用的编程语言，给下面的问题编写一个小程序。

问题：设函数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ ，向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ 。对每个分量，计算

$$d_i = f(u_i, v_i) = u_i^3 - v_i^2,$$

并将所有 $d_i > 0$ 的值求和：

$$S = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{d_i > 0\}} d_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{u_i^3 - v_i^2 > 0\}} (u_i^3 - v_i^2),$$

其中 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ 为示性函数（条件成立取 1，否则取 0）。

程序要求：必须有输入、输出结果数据语句，用循环语句编写计算语句。

2 (试用两阶段单纯形法求解如下线性规划)

$$\begin{aligned} & \min -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + x_2 = 3, \\ & 6x_1 + 3x_2 \geq 7, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

3

有 A, B 两种产品都需要经过前、后两道化学反应过程。每一个单位产品 A 需要前道过程 2 小时和后道过程 3 小时；每一个单位产品 B 需要前道过程 3 小时和后道过程 4 小时。可利用的前道过程时间是 16 小时，后道过程时间是 24 小时。每生产一个单位产品 B 的同时，会生产两个单位的副产品 C ，且不需要任何费用。副产品 C 的一部分可以作为废料处理，其余的可以销售。出售单位产品 A 可以获利 4 元，出售单位产品 B 可以获利 10 元；出售单位副产品 C 可以获利 3 元，销毁单位副产品 C 的费用是 2 元。最多可售出 5 个单位的副产品 C 。问产品 A, B 的产量、副产品 C 的销售量和副产品 C 的销毁量是多少，使利润达到最大？建立该问题的线性规划模型。

4

求函数 $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_1 - 2x_2)^2$ 在点 $(1, 1)^T$ 处的 Taylor 展开式（写到三项）。

5

对于极小化问题

$$\min f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2$$

判断 $\bar{x}_1 = [0, 0]^T$ 和 $\bar{x}_2 = [2\sqrt{2}, 4]^T$ 是否是该问题的局部极小点.

6

对于线性规划问题

$$\begin{aligned} & \max -x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ & 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

设 $B = (\bar{a}_1, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$, B 是否是基? 如果 B 是基, 那么求出关于 B 的基本解, 并判断它是否是基本容许解。

7

下面是三个二元正定二次函数的等值线图. 从指定初始点 x_0 出发, 各图按指定算法, 画出求极小点的迭代路径. 其中最速下降法须迭代三次.

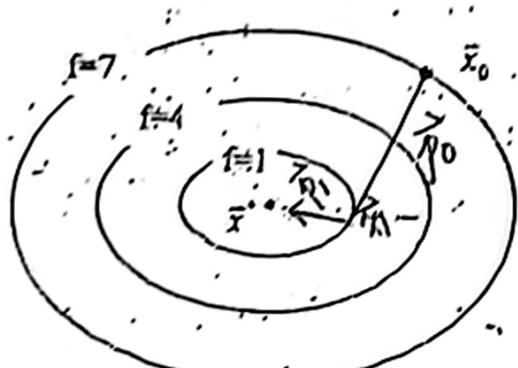


图1 共轭梯度法 P158

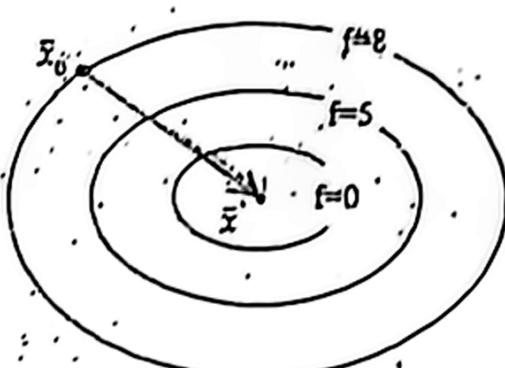
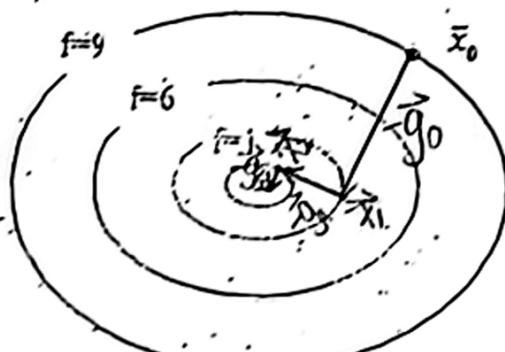


图2 Newton 法



P153 图3 最速下降法

图 1.1: 不会 p 图见谅

8

已知无约束优化问题

$$\min f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1$$

取初始点为 $\bar{x}_0 = [-4, 3]^T$, 用 DFP 算法迭代两次, 并判断最后一点是否为最优解.

公式:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\bar{s}_k \bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T \bar{y}_k} - \frac{H_k \bar{y}_k \bar{y}_k^T H_k}{\bar{y}_k^T H_k \bar{y}_k}, \quad H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9

采用图上作业方式, 用步长加速法求无约束问题 $\min f(\bar{x})$. 初始点为图中标号 1 的点. 步长取为图中单位格的长和宽. 极小点在 x^* 处. 迭代到开始缩小步长为止. $f(\bar{x})$ 的等值线图如下所示.

要求: 1. 按下面的标识方式标出搜索过程中的全部基点、参考点和探测经历点.

- 基点 / 临参考点 / 基点与参考点重合点 / 探测经历点
2. 按进行的先后顺序对基点、参考点进行序号 1, 2, … .

图片省略 (太模糊)

2 2009-2010

1

试用两阶段单纯形法求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = -2x_1 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2

用 Newton 法求解极小化问题:

$$\min f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + x_2^3 - x_1^2 x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$, 迭代一次, 并说明 \bar{x}_1 是否是局部最优解吗?

3

用 F-R 共轭梯度法求解无约束优化问题:

$$\min f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2}$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [2, -1]^T$, 已知第一次沿 $\bar{p}_0 = -\nabla f(\bar{x}_0)$ 方向迭代得到的迭代点 $\bar{x}_1 = [1, -1]^T$ 不是最优解. 求第二个迭代点 (\bar{x}_2) .

4

试用 DFP 法求解无约束优化问题

$$\min f(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$, 已知第一次沿 $\bar{p}_0 = -\nabla f(\bar{x}_0)$ 方向迭代得到迭代点 $\bar{x}_1 = [1, \pm 1]^T$.

$$(公式: H_{k+1} = H_k + \frac{\bar{s}_k \bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T \bar{y}_k} - \frac{H_k \bar{y}_k \bar{y}_k^T H_k}{\bar{y}_k^T H_k \bar{y}_k}, H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.)$$

5

考虑约束最优化问题

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

s.t.

$$3x_1 + x_2 \geq 2$$

$$2x_1 - 5x_2 \geq -10$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [0, 2]^T$. 用 Zoutendijk 法求许可方向迭代一次.

6

用外部罚函数法求解约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 - 5x_1 - x_2$$

s.t.

$$2 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

7

用最小二乘法解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

8

试判断向量 $\bar{p} = [1, 0, 1]^T$ 是否是如下线性约束

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 5x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 2 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

在点 $\bar{x} = [2, 2, 0]^T$ 处的容许方向向量.

9

利用 K-T 条件求解约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + e^{-x_2}$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

3 2010-2011

1

用两阶段单纯形法解如下线性规划

$$\min 3x_1 - x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\-2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\3x_2 + x_3 &= 9 \\x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

并回答：该线性规划目标函数的等值——是——

2

用 Newton 法解无约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^4 + (x_1^2 - x_2)^2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 2]^T$, 迭代一次求 \bar{x}_1 , 并说明 \bar{x}_1 是否为最优解.

3

三、(15 分) 用 F-R 共轭梯度法解无约束问题

$$\min f(\bar{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 + 2x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 0]^T$.

回答: F-R 共轭梯度法是一种共轭方向方法, 具有——步终止性. 本题的目标函数为——, 使用共轭梯度法至多迭代——次即可求到最优解. 本题的目标函数的等值——是——

4

用步长加速法求解无约束极小化问题

$$\min f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [-1, 1]^T$. 初始步长向量 $\bar{s}_0 = [1, 1]^T$. 迭代到开始缩小步长为止.根据计算过程回答: 步长加速法主要包括加速和修正两个基本过程. 如果有 $f(\bar{b}_1) < f(\bar{b}_0)$, 则说明 $\bar{b}_1 - \bar{b}_0$ 是 \bar{b}_0 处的下降方向.

5

已测得变量 t 与 y 的 5 组数据如下：

t	0	1	2	3	4
y	1	3	5	4	2

1. 根据这 5 组数据，试说说用一次函数，还是二次函数作 t 与 y 之间的拟合更好？
2. 用在(1)中你所选择的拟合函数，建立 t 与 y 之间的最小二乘模型。（注：不求值）

6

对于方程组

$$\begin{cases} t_1 + x_2 = 4, \\ -t_1 + 2x_2 = -1, \\ 3t_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

求其最小二乘解，并给出结果判断该方程组是否含有解。

7

求如下约束问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & f(x_1, x_2) = \ln x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2^2 \geq 1 \end{aligned}$$

的 K-T 点，并利用凸规划的 K-T 点定理，判断求到的 K-T 点是否为问题的最优解。

8

用 Zoutendijk 容许方向法解如下约束问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 2, \\ & x_1 + 4x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

初始点取为 $\bar{\mathbf{x}} = [1, 1]^T$ ，迭代一步求出 $\bar{\mathbf{x}}_1$ 。

9

用乘子法解如下约束问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 - 5x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \quad (\text{隐含约束}) \end{aligned}$$

并回答：乘子法中的罚因子与外部罚函数法中的罚因子的本质区别。

公式: $F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}, \mu) = f(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^l \lambda_j h_j(\bar{\mathbf{x}}) + \mu \sum_{j=1}^l h_j^2(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^m \{ [\max(0, \bar{\nu}_i - 2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}))]^2 - \bar{\nu}_i^2 \}.$

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(t+1)} &= \lambda_j^{(t)} - 2\mu h_j(\bar{\mathbf{x}}_t), \quad j = 1, 2, \dots, l; \\ \nu_i^{(t+1)} &= \max(0, \nu_i^{(t)} - 2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}_t)), \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

4 2011-2012

1

试用两阶段单纯形法解线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2

设一个求极小的线性规划的容许集 D 、目标函数的负梯度向量 $-\bar{c}$ 及初始点 \bar{x}_0 的位置如右图所示。试在图上画出至少 3 条等值线，及从初始点 \bar{x}_0 到最优点的迭代路径（要求标出各迭代点）。

图省略了（请看原卷）

3

下面是三个二元正定二次函数的等值线图。从指定初始点 \bar{x}_0 出发，各图按指定算法画出求极小点的迭代路径。其中最速下降法要求只迭代二次。

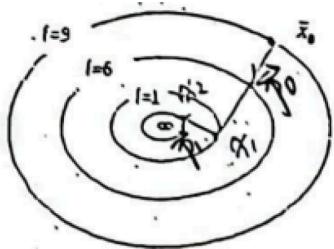


图1 最速下降法

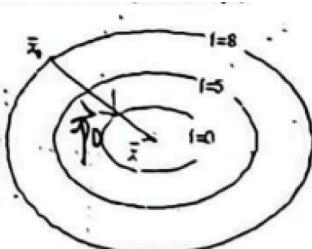


图2 Newton 法

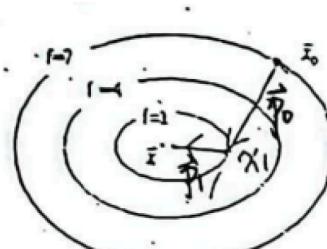


图3 共轭梯度法

4

用 F-R 共轭梯度法解无约束极小化问题

$$\min f(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2,$$

初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 1, 1]^T$ 。按 F-R 共轭梯度法现已迭代出 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{5}]^T$ ，要求继续迭代一次，求出 $\bar{\mathbf{x}}_2$ ，并判断 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 是否为局部最优解。

5

用 DFP 法解无约束极小化问题

$$\min f(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 x_2$$

初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 1]^T$ 。按 DFP 法现已迭代出 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [1, 1/4]^T$ ，要求继续迭代一次，求出 $\bar{\mathbf{x}}_2$ ，并判断 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 是否为局部最优解。

(公式：

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k} - \frac{H_k \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T H_k^T}{\mathbf{y}_k^T H_k \mathbf{y}_k},$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注： $\sqrt{146} \approx 12.08$, $\sqrt{148} \approx 12.17$)

6

用加速法解无约束极小化问题

$$\min f(\bar{\mathbf{x}}) = 4x_1^2 + x_2^2.$$

设初始点 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 2.5]^T$, 初始步长方向 $\bar{\mathbf{s}}_0 = [1, 1]^T$ 。要求迭代到模式移动结束为止。

7

试述容许方向法的 3 个主要过程是：

1. 确定当前迭代点处的_____。
2. _____，得到下一个迭代点。
3. 判断新_____是否为 K-T 点。

求解如下线性约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_2^2 - x_3^2 - 3x_2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

设初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 0, 0]^T$ 。

1. 检验 $\bar{p}_0 = [-2, 1, 1]^T$ 是否为 \bar{x}_0 处的下降容许方向。
2. 如果 $\bar{p}_0 = [-2, 1, 1]^T$ 是 \bar{x}_0 处的下降容许方向，那么沿 \bar{p}_0 作直线搜索，求出下一迭代点 \bar{x}_1 。然后停止计算；否则，直接停止计算。

8

简述外部罚函数法的“罚”思想。鉴于乘子法是外部罚函数法的改进方法，简述“改进”的本质。

试用乘子法解如下约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

(公式：

- 扩展拉格朗日函数 $F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}, \mu) = f(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^l \lambda_j h_j(\bar{\mathbf{x}}) + \mu \sum_{j=1}^l h_j^2(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^m \{[\max(0, \bar{\nu}_i - 2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}))]^2 - \bar{\nu}_i^2\}.$
- 等式乘子更新: $\lambda_j^{(k+1)} = \max(0, \dots - 2\mu h_j(\bar{\mathbf{x}}_k)), \quad j = 1, 2, \dots, l.$
- 不等式乘子更新: $\nu_i^{(k+1)} = \max(0, \nu_i^{(k)} - 2\mu g_i(\bar{\mathbf{x}}_k)), \quad i = 1, 2, \dots, m.$

9

试利用 K-T 条件解如下约束极小化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 0, \\ & 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

10

某工厂向用户提供发动机，合同规定交货量和交货日期分别是：第一季度末交 40 台，第二季度末交 60 台，第三季度末交 80 台。工厂每季的最大生产能力为 100 台。每季的生产费用函数为 $f(x) = 50x + 0.2x^2$ (元)， x 为生产台数。如果某季生产过剩，则多余的发动机可用于下季交货，但工厂需要支付存储费用：每台每季 4 元。试建立工厂能够完成合同而费用最少的数学模型（假定第一季度开始时发动机无存货）。

5 2013-2014

1

用两阶段单纯形法解线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2

采集到关于变量 x, y, z 的一组数据：

x	3	5	6	8	12	14
y	16	10	7	4	3	2
z	90	72	54	42	30	12

试建立 z 关于 x, y 的线性回归最小二乘模型。

3

判断 $\mathbf{p} = [1, 1, -2]^T$ 是线性约束

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\-3x_1 + 10x_2 + 6x_3 &\leq 10, \\6x_1 - x_2 + 4x_3 &\geq 15\end{aligned}$$

在点 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [2, 1, 1]^T$ 处的容许方向向量吗？

4

(1) 利用最优化条件，求如下无约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2$$

的严格局部极小点。

(2) 用 F-R 法解无约束极小化问题

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2.$$

设初始点为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 1]^T$ ，且按 F-R 法已求出 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [1, 1/2]^T$ 。试再迭代一次，求出 $\bar{\mathbf{x}}_2$ 。（不要把分数与根式化成小数）

5

用 DFP 法解无约束极小化问题

$$\min f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2.$$

设初始点为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [0, 1]^T$, 且按 DFP 法已得到 $\bar{\mathbf{x}}_1 = [4/3, -4/3]^T$ 。

(校正公式: H_0 = 单位矩阵,

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k} - \frac{H_k \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T H_k^T}{\mathbf{y}_k^T H_k \mathbf{y}_k}$$

(不要把分数与根式化成小数)

6

采用图上作业方式, 用步长加速法解无约束问题 $\min f(\bar{\mathbf{x}})$ 。 $f(\bar{\mathbf{x}})$ 的等值线图如下图所示, 标号 1 处为初始点。设步长向量的分量均取 1 (图中网格为单位格), 迭代到开始缩小步长为止。

注意:

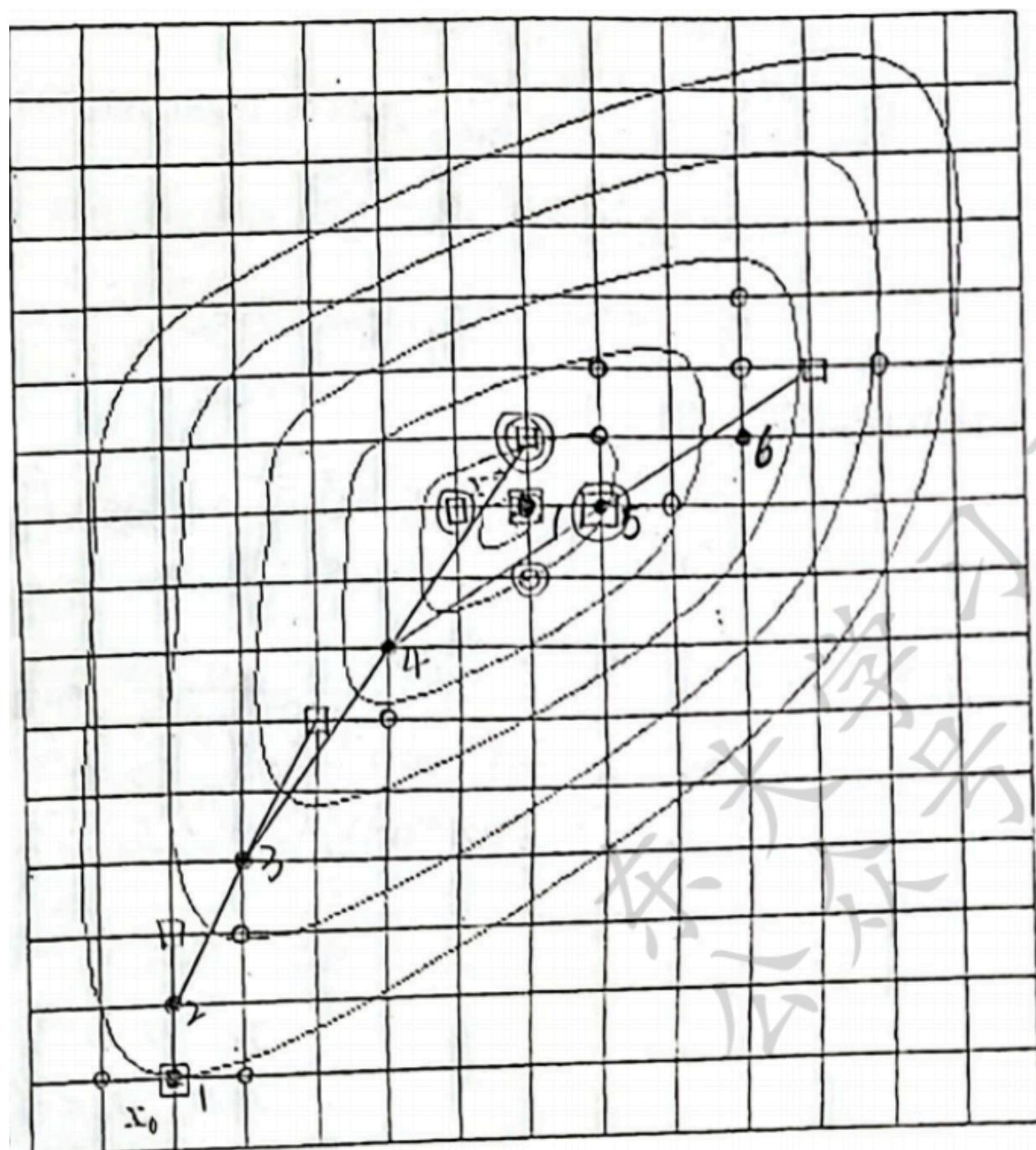
(a) 在下图左下方所示的直角坐标系上标出探测搜索方向的先后顺序;

(b) 按指定标识方式:

- 基点
- 参考点
- 基点与参考点的重合点
- 探测经历点

标出作业过程中的全部基点、参考点和探测经历点;

(c) 按进行的顺序, 仅对基点标号 1, 2, ...。



7

(1) 求极小化约束问题

$$\min f(x_1, x_2) = -\ln(1 + x_1) - 2 \ln(1 + x_2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 2.$$

的 K-T 点。

(2) 某公司有 3 个建筑工地要开工，每个工地位置用平面坐标 (a, b) 表示，距离单位：公里；及水泥用量 d (单位：吨) 由下表给出：

工地	1	2	3
(a, b)	(2, 2)	(8, 1)	(1, 4)
d (吨)	3	5	4

现拟建造一个料场，但储量备量为 6 吨。假设料场到工地之间均有直线道路相连。问如何选址和调配调用量，能使总的吨公里数最少 (仅建数学模型)？

8

求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2; \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

设初始点取为 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [1, 1]^T$ ，试用 Zoutendijk 容许方向法迭代一次，求出下一迭代点 $\bar{\mathbf{x}}_1$ 。

9

(1) 外部罚函数法的惩罚方式是针对_____点惩罚, 而对_____点不惩罚, 罚因子的特点_____

(2) 用乘子法解约束问题时有如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1; \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1 x_2 = 70. \end{aligned}$$

$$(公式: F(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{v}, \mu) = f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^2 \lambda_j h_j(\bar{x}) + \mu \sum_{j=1}^2 h_j^2(\bar{x}) + \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^m \left\{ [\max(0, v_i^k - 2\mu s_i(\bar{x}_k))]^2 - v_i^{k^2} \right\})$$

$$\bar{\lambda}_j^{(k+1)} = \bar{\lambda}_j^{(k)} - 2\mu h_j(\bar{x}_k), j = 1, 2, \dots, l; \quad v_i^{(k+1)} = \max(0, v_i^{(k)} - 2\mu s_i(\bar{x}_k)), i = 1, 2, \dots, m.$$

6 2014-2015

1

用两阶段单纯形法解如下线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + x_2 + x_3; \\ \text{s.t.} \quad & -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11, \\ & x_1 + x_3 = 1, \\ & -2x_1 + x_3 = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2

用图解法求解非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 1; \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2^2 \leq 1, \\ & x_1 - x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

3

已测得变量 i 与 y 的 5 组数据：

i	-1	-0.7	0	0.7	1
y	-0.9	-1	-2	-3.5	-4.4

(1) 根据这 5 组数据，试从以下 4 个函数中选择最合适的一个函数拟合：

$$y = x_1(i + x_2), \quad y = x_1 i^2 + x_2 i + x_3, \quad y = x_1 e^{x_2 i}, \quad y = \ln(x_1 + x_2 i)$$

(2) 用你在 (1) 中选择的拟合函数，建立 y 与 i 之间的最小二乘模型。

(3) 判断你在 (2) 中建立的是否是线性最小二乘模型。如果是，写出 A, b .

4

用 F-R 共轭梯度法求解无约束问题

$$\min x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2.$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$ ，现已求出 $\bar{x}_1 = [1, 1/2]^T$ ，再迭代一次，求 \bar{x}_2 并讨论第 2 个迭代点是否为最优解。

5

用乘子法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2; \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \geq 20 \Rightarrow x_1 - 20 \geq 0, \\ & x_2 \geq 2. \end{aligned}$$

公式: $F(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{v}, \mu) = f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^l \lambda_j h_j(\bar{x}) + \mu \sum_{j=1}^l h_j^2(\bar{x}) + \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^m \{[\max(0, \bar{v}_i - 2\mu s_i(\bar{x}))]^2 - \bar{v}_i^2\}$

$$\bar{\lambda}_j^{(k+1)} = \bar{\lambda}_j^{(k)} - 2\mu h_j(\bar{x}_k), \quad j = 1, 2, \dots, l;$$

$$\bar{v}_i^{(k+1)} = \max(0, \bar{v}_i^{(k)} - 2\mu s_i(\bar{x}_k)), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

6

用 DFP 法求解无约束问题

$$\min x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_2 - x_3.$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [-2, 1]^T$, 现已求出 $\bar{x}_1 = [-1/2, 1]^T$, 再迭代一次, 求 \bar{x}_2 , 并解答 2 个问题: (1) \bar{x}_2 是最优解吗, 为什么? (2) 如果 \bar{x}_2 不是最优解, 那么求到最优解还需要多少次迭代?

公式:

$$\bar{H}_{k+1} = \bar{H}_k + \frac{\bar{s}_k \bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T \bar{y}_k} - \frac{\bar{H}_k \bar{y}_k \bar{y}_k^T \bar{H}_k}{\bar{y}_k^T \bar{H}_k \bar{y}_k}, \quad \bar{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7

设函数 $f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{b}^T \bar{x} + c$, 其中 Q 是正定矩阵, \bar{x}_* 为满足 $\nabla f(\bar{x}_*) = \bar{0}$ 的任意一点, 从 \bar{x}_0 出发, 沿方向 $\bar{p} = -Q^{-1}\nabla f(\bar{x}_0)$ 对 $f(\bar{x})$ 作直线搜索, 求最优步长因子 t_0 (从直线搜索到的极小点 \bar{z}_1 , 试问 \bar{z}_1 与 $f(\bar{x})$ 是什么关系?

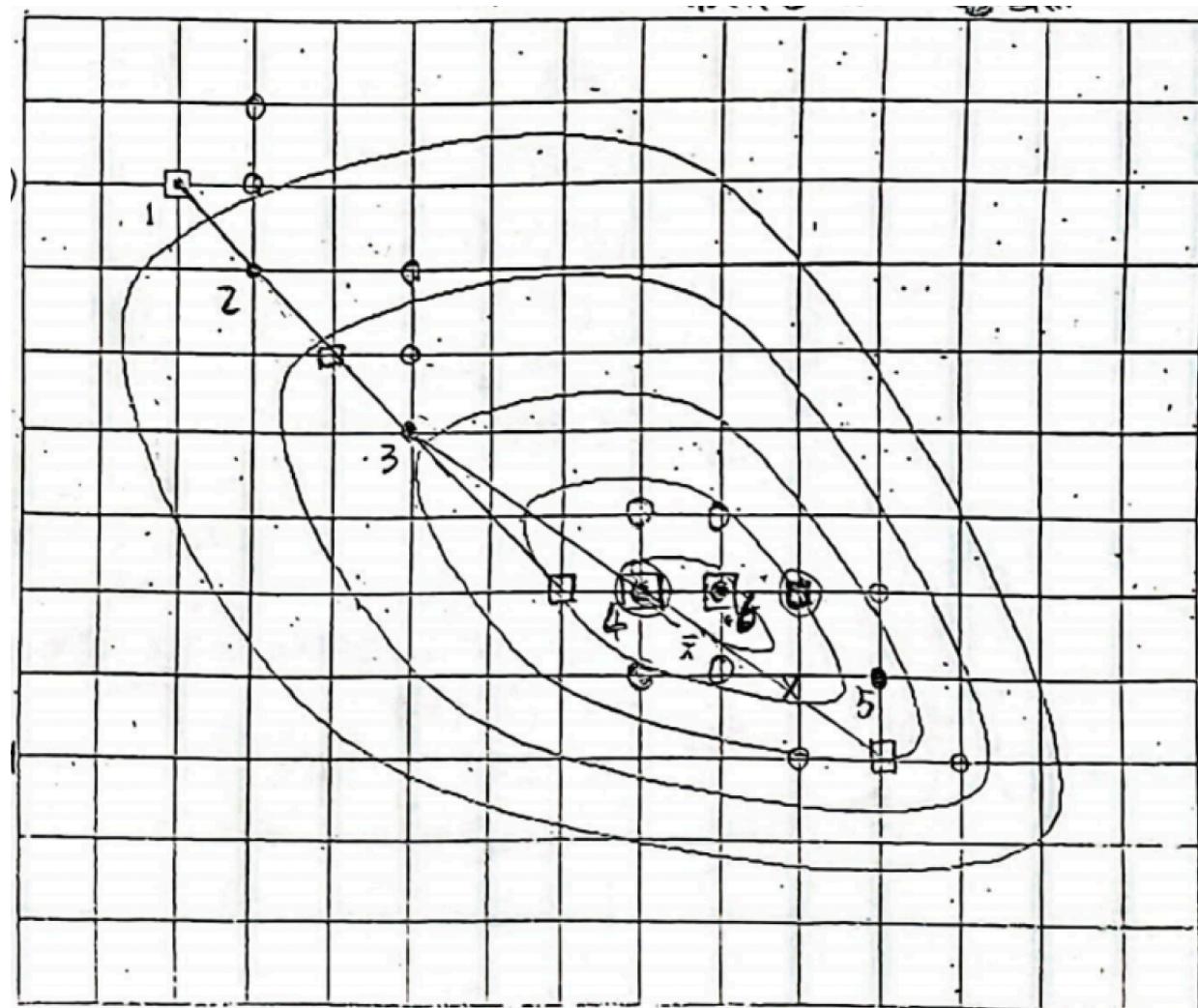
8

采用图上作业方式, 用步长加速法求解无约束问题 $\min f(\bar{x})$. $f(\bar{x})$ 的等值线图如下图所示, 标号 1 处为初始点, 设初始步长向量的分量均为 1 (图中网格为单位格), 迭代到开始缩小步长为止. 要求:

- (a) 在下方所示直角坐标系上标出探测的先后顺序;
- (b) 按下面指定的标识方式, 标出作业过程中的全部基点、参考点和探测经历点:

参考点 基点 探测经历点 基点与参考点重合的点

- (c) 按进行的顺序, 仅对焦点标号: 1, 2, ...



9

用 z-容许方向法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1; \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 - x_2 \geq -3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [2/3, 0]^T$, 迭代一次, 求 \bar{x}_1 .**10**

考虑约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 1 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

利用下述条件求 K-T 点, 并判断所求出的 K-T 点是否是全局最优解。

11

考虑线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 - x_2 + x_3 - x_4; \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

- (1) 求该问题的所有极点并验证解；
- (2) 已知该问题有最优解，试问：“可否通过 1 的方式求得最优解？为什么？”
- (3) 如果能由 1 的方式求出最优解，那么求出最优解.

7 2015-2016

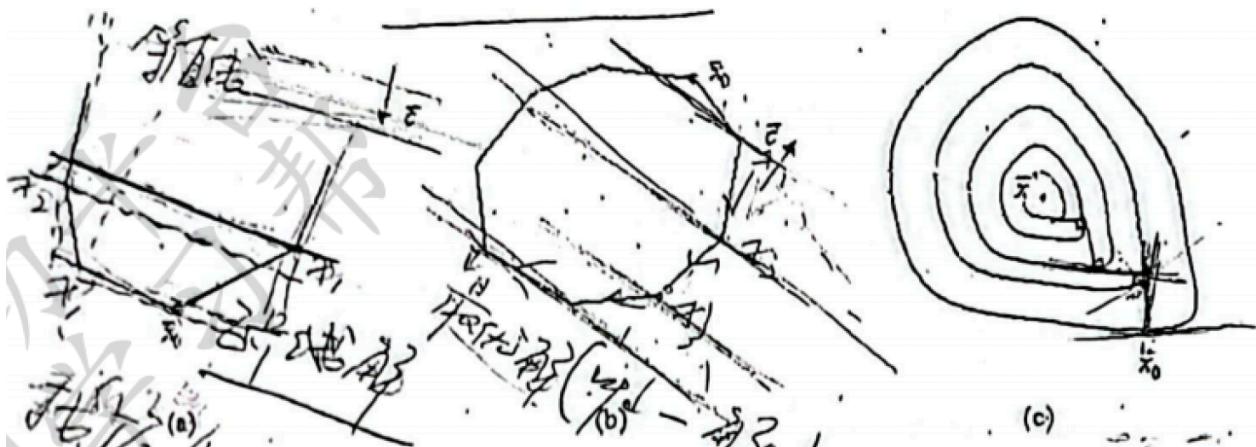
1

用两阶段单纯形法解下面的线性规划

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -5x_1 + x_2 + 2x_3; \\
 \text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3, \\
 & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

2

(1) 图 (a), (b) 显示的是两个最小化线性规划的容许集、初始点和目标函数的梯度方向，试画出单纯形法的迭代路径（并说明每种情况），图 (c) 是一个极小化问题的等值线图；试判断点 \bar{x}_0 方向，画出最速下降法的前 3 次迭代路径。



3

利用最小二乘法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4, \\ -x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

4

利用极小点的判定条件求下面优化问题的极小点.

$$\min x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2$$

5

用 DFP 法求解优化问题

$$\min x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 + x_2.$$

初始点为 $\bar{x}_0 = [0, 0]^T$.

公式:

$$\bar{H}_{k+1} = \bar{H}_k + \frac{\bar{s}_k \bar{s}_k^T}{\bar{s}_k^T \bar{y}_k} - \frac{\bar{H}_k \bar{y}_k \bar{y}_k^T \bar{H}_k}{\bar{y}_k^T \bar{H}_k \bar{y}_k}, \quad \bar{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

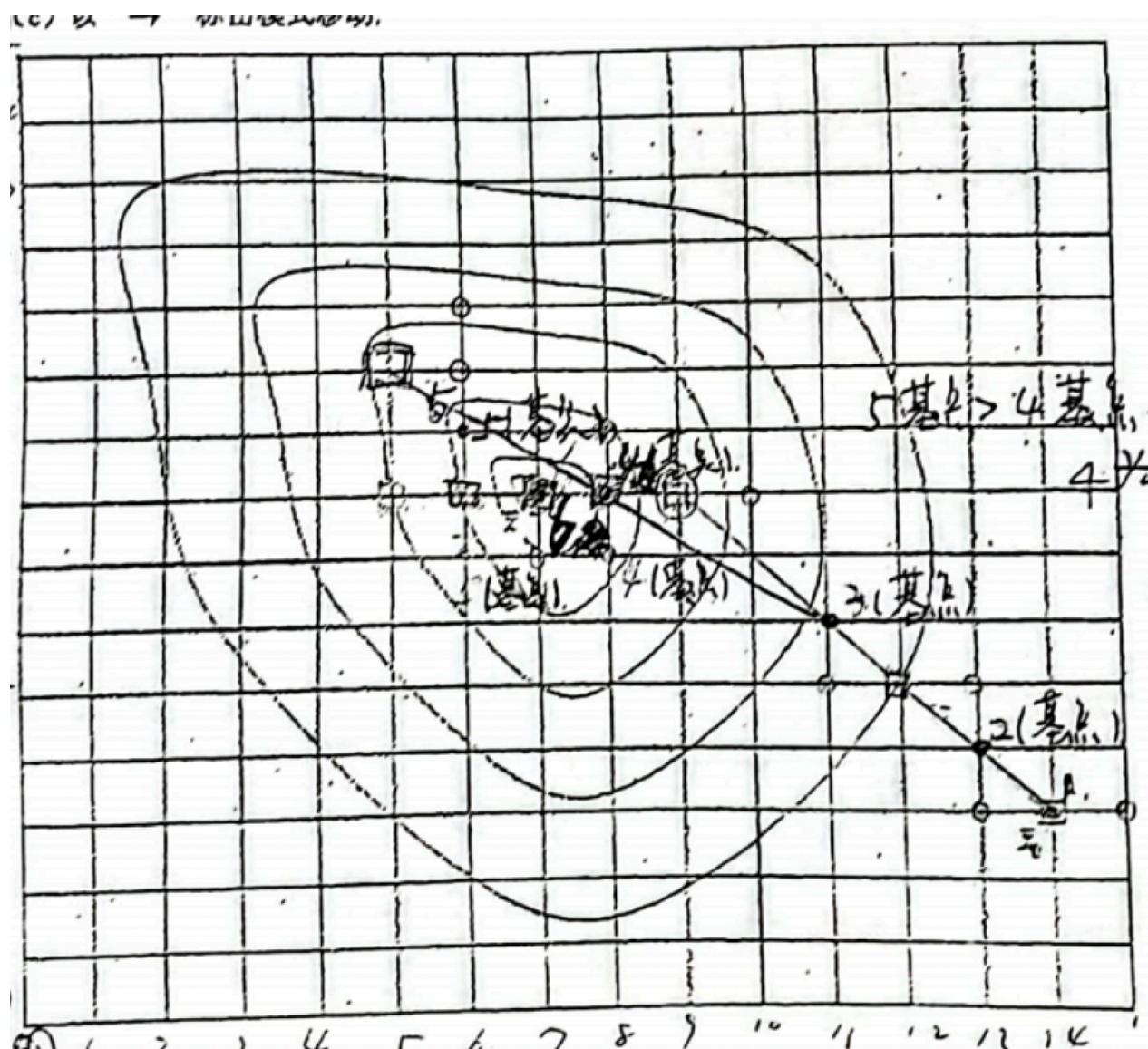
6

采用图上作业，用步长加速法求解无约束问题 $\min f(\bar{x})$. 下图是 $f(\bar{x})$ 的等值线图，标号 1 处为初始点，设初始步长向量的分量均为 1 (图中网格为单位格)，迭代到开始缩小步长为止. 要求:

- (a) 在下方所示直角坐标系上标出探测方向的顺序;
- (b) 按下面指定的标识方式，标出作业过程中的全部基点、参考点和探测经历点，对基点按进行的先后依次标号 1, 2, ...

参考点 基点 探测经历点 基点与参考点重合的点

- (c) 以“ \rightarrow ”标出模式移动。



7

(1) 用 Z-容许方向法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + 4x_2^2 - x_2; \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ & x_1 + x_2 = 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

设初始点为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$, 迭代一次求 \bar{x}_1 .

8

考虑问题

$$\min x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2.$$

设初始点为 $\bar{x}_0 = (2, 3)^T$. 用 Newton 法迭代一次.

9

用 F-R 共轭梯度法求解优化问题

$$\min 2(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2.$$

设初始点为 $\bar{x}_0 = [0, 0]^T$, 迭代二次求出 \bar{x}_2 (提示: 最优步长因子 t_0 是 2 的负整数次幂)

10

设 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{c} \neq \bar{0}$, 考虑问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}^T \bar{x}, \\ \text{s.t.} \quad & \bar{x}^T \bar{x} \geq 70 \text{ s.t. } \bar{x}^T \bar{x} \leq 1. \end{aligned}$$

求该问题的 K-T 点，并判断其是否为全局极小点。

11

用外部罚函数法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -\ln(x_1 + 1) - \ln(x_2 + 1); \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_i \geq 0. \end{aligned}$$

12

考虑问题.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1; \\ \text{s.t.} \quad & 16 - (x_1 - 4)^3 - x_2^2 \geq 0, \\ & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^3 - 13 \geq 0. \end{aligned}$$

问: $\bar{x}_1 = (0, 0)$ 与 $\bar{x}_2 = (3, 2 - \sqrt{3})$ 是 K-T 点吗? 为什么? 如果是 K-T 点, 则是否为全局极小点?

8 2016-2017

1

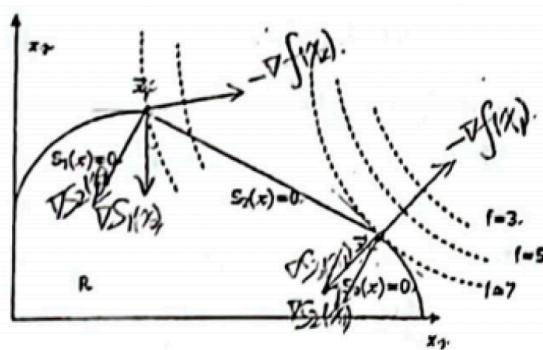
用两阶段单纯形法解线性规划

$$\min z = -4x_1 - x_2$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ 3x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2

- 简述迭代格式 $x_{k+1} = \bar{x}_k + t_k \bar{p}_k$ ($k = 0, 1, \dots$) 对于 x 受许方向法与最速下降法的区别, 以及 t_k 取了什么值才能保证 \bar{x}_k 是下一次迭代的允许点。
- 试图表示的克极小化问题 $\min f(x)$, R 表示容许域。(1) 在图中画出点 \bar{x}_1 , \bar{x}_2 的所有起作用的束函数的梯度方向; (2) \bar{x}_1 , \bar{x}_2 是否 $K-T$ 点?



3

(1) 用图解法求解下面问题；(2) 将它化为标准线性规划问题。

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4

用 Newton 法求解极小化问题

$$\min x_1^2 x_2 + 2x_2 x_3^4 - 4x_1 x_2,$$

初始点取为 $x_0 = [1, 1]^T$, 迭代一次得到迭代点 \bar{x}_1 , 并说明 \bar{x}_1 是局部最优解吗?

5

设初始点为 $\bar{x}_0 = [2, -1]^T$ 。用 F-R 共轭梯度法求解无约束极小化问题

$$\min x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

6

试用 DFP 法求解无约束优化问题

$$\min x_1^3 + 2x_2^3 - 2x_1x_2 + x_2^5,$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [1, 1]^T$ 。已知：一次迭代 $p_0 = -\nabla f(\bar{x}_0)$ 方向迭代得到迭代点 $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$ 否是最优解。求第二个迭代点 \bar{x}_2 ，并判断 \bar{x}_2 是否局部最优解。

(校正公式： $H_0 = I$ 单位矩阵， $H_{k+1} = H_k + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k}$)

7

用步长加速法求解无约束极小化问题

$$\min(x_1 - 1)^4 + 2x_2^2$$

初始点取为 $\bar{x}_0 = [4, 3]^T$, 初始步长向量 $\bar{s}_0 = [1, 1]^T$, 迭代到开始缩小步长为止

8

1. 利用最优化条件, 求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 = 1. \end{aligned}$$

9

下表给出了某厂节能煤耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x (吨) 与相应的生产能耗 y (吨标准煤) 的几组对照数据

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

- (1) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 与 x 的线性回归方程;
- (2) 已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤, 试根据 (1) 求出的线性回归方程, 预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤。

10

求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1^2 + x_2x_3 + 2x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 10, \\ & x_1 - 3x_2 \leq 4, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ & x_i \geq 0. \end{aligned}$$

- (1) 设初始点取为 $\bar{x}_0 = [4, 0]^T$, 试用 z 容许方向法迭代一次, 求出下一迭代点 \bar{x}_1 ;
- (2) z 容许方向法的迭代终止准则是什么?
- (3) 并预测 \bar{x}_0 和 \bar{x}_1 是否满足终止准则。

11

用外部罚函数法求解约束问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 4 \end{aligned}$$