

弯曲界面 SH 波

散 射

導 師 傅 承 義

研 究 生 趙 連 社

中国科学院地球物理研究所

一九八五年元月二十一日

目 录

摘要	1
引言	2
周期界面散射問題 具有弯曲界面地壳介质结构 中的矩阵方法	8
多层介质结构的矩阵方法	27
计算结果及分析	41
结论	42
致谢	44
附图	45
附录	50
参考文献	66

弯曲界面 SH 波散射

摘要

本文利用惠更斯原理得到周期界面 SH 波散射的矩阵解。该方法可以用来处理具有任意形状界面均匀结构的波场散射问题。作为例子，我们计算了几种弯曲自由面结构的波场，并和两种不同的方法进行了比较，结果表明，这种方法在实际计算中是可行的。

该方法，没有采用通常合成理论波场方法所用的高频假定，在反演地球浅部，局部构造和计算强地面运动时可能是很有用的。

引言

在反演地球浅部构造时，界面的形状是重要的。到目前为止，已发展了不少计算弯曲界面波场的方法。

目前计算弯曲界面波场响应的方法有：有限元 (Smith, 1975; Boore, 1973)、有限差分法 (Aki et al., 1970; Alterman and Karal, 1968)；标准射线法 (Červený et al., 1977)；高斯光束法 (Červený, 1983; Červený and Pšencík, 1983)；偏轴射线方法 (Červený and Hron, 1980)；复相位匹配方法 (赵连社和姚振兴, 1985)；Maslov 渐近方法 (Chapman and Drummond, 1982)；光学法 (Hong and Helmberger, 1978)；主曲率法 (Lee and Langston, 1983)；Kirchhoff — Helmholtz 积分法 (Scott and Helmberger, 1983) 等。

有限元和有限差分法，基于弹性动力学方程的直接数值解，对介质结构没有任何假定，因而可以处理介质速度任意分布和不规则界面的波场问题。它们的不足之处在于要求过大的计算机内存和计算时间过长，而难于用于实际

目的。

标准射线方法，目前在实际中得到广泛的应用。它是一个典型的高頻近似方法，是使用弹性动力学方程，把位移表示为频率的負幂次級數的形式，忽略高阶项后得到的。它是计算理论波场的有效方法之一。该方法的优点是：计算速度快，可以处理不均匀介質及界面弯曲的问题。该方法要求介質变化的尺度和界面的曲率半径遠大于波長（这是采用高頻近似的方法所共有的弱点），然而它的主要问题在于它不能计算奇异区（焦散区、临界区、从影区到亮区的过渡区）的波场，以及非射线波场（如非均匀波、通道波等）。不幸的是这些奇异区在资料解釋时往往是非常重要的，因为体波振幅在这些地方达到极大。

偏轴射线法和标准射线方法的区别在于求几何扩散因子。在标准射线法中，求几何扩散因子是求射线管的面积；而在偏轴射线法中几何扩散因子是在解程函方程时求出的——这就是所谓的动力射线追踪。这种方法比标准射线法

优越的地方是不需要费时的两点射线追踪。它所存在的问题和标准射线方法一样。

光学法和主曲率法，实际上是对波场分解为广义射线的迭加，将在介电均匀、和平界面假定之下得到的波场解析解，采用速降路径方法求出波函数积分（这实际上采用了高频率假定）得到广义射线，再推广到曲界面并考虑边界上发生反射、透射和转换后得到的。它们之间的不同点在于求几何扩散因子，光学法通过求射线管的横截面积来求，而主曲率法通过求相前曲率来求的。这两种方法，当接收点在焦散面上时失效，原因是几何扩散因子为零。

科西霍夫积分法，是把弹性动力学方程，当介电均匀时的解用边界面上的波场的积分表示，然后利用高频率近似把边界上场表示为广义射线流函数和相应的反射透射系数的乘积，并采用数值积分求解。这种方法由于采用数值积分，要用它来计算众多弯曲界面结构的波场几乎是不可能的。

高斯射线束方法，基于用一系列的高斯射

线束来模拟高頻波场。该方法是把弹性动力学方程在高頻近似下化为抛物型波动方程，更进一步化为矩阵黎曼提方程和传输方程。沿射线第一个方程可以数值解，第二个方程可以解析解。该方法独特的优点是不需要费时的两点射线追踪。其原因是由于它的最终结果和偏轴射线法的基本相同，只是应矩阵，在这里是复值的，并且由于高斯射线束的波阵面上带有振幅分布，只要计算足够多束高斯射线束，即可计算全空间波场。高斯射线束既便在复杂的奇异区也是正则的，不存在任何奇异点。前不久 Cerveny 和 Klimes (1984) 用该方法计算了具有弯曲界面介质结构的波场。

复相位匹配方法的基本思路类似于高斯射线束和主曲率两种方法。该方法处理均匀介质问题时仍具有高斯射线法的优点，并可以推广到非均匀介质。

关于上述各种方法的基于理论在附录中进行详细地介绍。

上述各种方法，除有限元和有限差分法外，

都采用了高頻假定，换句话说，也就是要求界面的曲率半径远大于波長；在处理非均匀介质时，要求介質參數和其变化率的比值比波長大的多。它们在研究地壳和上地幔这样大尺度的介質之中的体波是很合适的，但对于地球浅部、局部小范围结构则无能为力。本文就这个问题提出了一种计算 SH 波场散射、不用高頻近似的方法。该方法，以后我们把它叫做矩阵方法，基于惠更斯原理，把空间波场表示为边界上场的迭加，再把空间波场、边界上的波场分解为平面波的迭加来处理一个界面，而得到。然后再把它推广到二层介質和多层介質问题。该方法是半解析的，可以处理任意界面，均匀结构介質之中的波场問題。

用矩阵方法计算的结果和点源方法 (Sánchez-Sesma 和 Rosenblueth, 1979) 和边界方法 (Sánchez-Sesma et al, 1982) 的符合的相当好，并且我们还计算了矩形槽对地面运动的影响。

下面我們把矩阵方法分为：

1. 周期边界散射問題

2. 两层介质结构的矩阵方法
3. 多层介质结构的矩阵方法
4. 计算结果及分析
5. 结论

来逐步介绍。

1. 周期边界散射问题

在本节中，我们给出具有周期分界面均匀半空间 SH 波散射的矩阵解。在本节和以下各节的讨论中，均采用直角坐标系 (x, z) ，水平方向为 x 轴，向右为正，单位轴向矢量 \hat{x} 来表示；竖直方向为 z 轴，向上为正，单位轴向矢量用 \hat{z} 表示。

1.1 惠更斯原理

惠更斯在 1690 年提出 (Born 和 Wolf, 1978)，一个波阵面的每个面元可各看作是一个产生球面子波的各级扰动中心；而且，以后任何时刻波阵面的位置是所有这些子波的包络面。下面我们将给出二维情况下惠更斯原理的数学描述 (Borgnis 和 Papas, 1955; Baker 和 Copson, 1953)。

考虑二维 Helmholtz 方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi(x, z) + k^2 \psi(x, z) = 0 \quad (1.1-1)$$

我们知道，P 波、SV 波位移势和 SH 波位移或位移势，在均匀介质情况下，在频域内满足这个

方程，具体推导在 1.2 中给出。我们应用格林函数方法来解这个方程。设 $\phi(x, z)$ 是 (1.1-1) 的格林函数， $\phi(x, z)$ 满足：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, z) + k^2\phi(x, z) = \delta(x - x_0)\delta(z - z_0) \quad (1.1-2)$$

其中 (x_0, z_0) 为源点的位置。我们选择 (x_0, z_0) 为坐标原点，并进行坐标变换。

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad (1.1-3)$$

方程 (1.1-2) 可写为

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\phi(r, \theta) + k^2\phi(r, \theta) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (1.1-4)$$

或者

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr}\phi(r)) + k^2\phi(r) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (1.1-5)$$

方程 (1.1-4), (1.1-5) 的奇次解为

$$\phi(r) = C_1 H_0^{(1)}(kr) + C_2 H_0^{(2)}(kr) \quad (1.1-6)$$

其中 $H_0^{(1)}(kr)$ 和 $H_0^{(2)}(kr)$ 是 Hankel 函数，它们为：

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty e^{ikr \cosh T} dT$$

$$H_0^{(2)}(kr) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty e^{-ikr \cosh T} dT$$

当 r 很大时，它们的渐近表达式为：

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \left(\frac{\omega}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(kr - \frac{\pi}{2})} \quad (1.1-7a)$$

$$H_0^{(2)}(kr) \sim \left(\frac{\omega}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{2})} \quad (1.1-7b)$$

从 (1.1-7a, b) 可见， $H_0^{(2)}(kr)$ 代表内行波， $H_0^{(1)}(kr)$

代表外行波。我们考虑的从点源向外幅射问题，不存在内行波，所以(1.1-6) 中的 $C_2=0$ 。考虑积分：

$$\begin{aligned} & C_1 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} H_0^{(1)}(kr) \right) \right] + C_1 k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r \phi dr \\ & = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \frac{\delta(r)}{2\pi r} r dr = 1 \end{aligned} \quad (1.1-8)$$

对于任意小的 ϵ ，我们都有一：

$$C_1 \int_{\epsilon}^r \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} H_0^{(1)}(kr) \right) + k^2 H_0^{(1)}(kr) \right] r dr = 0 \quad (1.1-9)$$

代入到(1.1-8) 式，得到。

$$\int_0^{\epsilon} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} H_0^{(1)}(kr) \right] + k^2 H_0^{(1)}(kr) \right\} r dr = \frac{1}{2\pi C_1} \quad (1.1-10)$$

当 $r \ll 1$ 时，把 $H_0^{(1)}(kr)$ 按级数展开，有：

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(kr) &= J_0(kr) + i Y_0(kr) \\ &= 1 + i \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) + O(r^2). \end{aligned} \quad (1.1-11)$$

$$r \leq \epsilon$$

其中 γ 是欧拉常数。把(1.1-11) 代入(1.1-10)，我们得到：

$$\int_0^{\epsilon} k^2 H_0^{(1)}(kr) r dr = 0 \quad (1.1-12)$$

於是：

$$\int_0^{\epsilon} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} H_0^{(1)}(kr) \right] \right\} r dr = \frac{1}{2\pi C_1} \quad (1.1-13)$$

此式的左边是

$$\frac{1}{2\pi} \int_S r^2 H_0^{(1)}(kr) ds = \frac{1}{2\pi} \int_l \vec{n} \cdot \nabla H_0^{(1)}(kr) dl \quad (1.1-14)$$

其中 S 是以原点为圆心，半径为 ϵ 的圆面积，
 l 是 S 的边界， \vec{n} 是 S 的边界上的单位外法向。

把 (1.1-11) 代入上式，我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_l \vec{n} \cdot \nabla H_0^{(1)}(kr) dl \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\epsilon \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr) \Big|_{r=\epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\epsilon \cdot i \frac{2}{\pi} \frac{2}{k\epsilon} \cdot \frac{k}{2} = \frac{2}{\pi} i \end{aligned} \quad (1.1-15)$$

由 (1.1-15) 和 (1.1-13)，我们可以得到待定常数 C_1

$$C_1 = \frac{1}{4i} \quad (1.1-16)$$

於是，我们得到方程 (1.1-2) 的解，即 (1.1-1) 的格林函数中。

$$\phi = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr) \quad (1.1-17)$$

現在讨论边值问题。

设 l 是任意区域 D 的边界，由格林公式：

$$\int_l \left(4 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial 4}{\partial n} \right) dl = \iint_D (4 \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 4) dx dy \quad (1.1-18)$$

如果 $(x_0, y_0) \notin D$ ，則

$$\iint_D (4 \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 4) dx dy = 0$$

$$\int_l \left(4 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial 4}{\partial n} \right) dl = 0$$

如果 $(x_0, y_0) \in D$ ，則

$$\begin{aligned} & \iint_D (\nabla \cdot \vec{A} - \phi \nabla^2 \psi) dx dy = \\ & \iint_D [\{4\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) - k^2 \phi \psi\} + \phi k^2 \psi] dx dy \\ & = \psi(x_0, z_0) \end{aligned} \quad (1.1-19)$$

所以

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & \frac{1}{4i} \int_L \left\{ \psi(x', z') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(u)}(kR) \right. \\ & \left. - H_0^{(u)}(kR) \frac{\partial \psi(x', z')}{\partial n'} \right\} dl' \quad \begin{cases} \vec{r} \in D \\ \vec{r}' \in D \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1-20)$$

其中 $\vec{r} = (x, z)$, $(x', z') \in L$, $\frac{\partial}{\partial n'}$ 表示法向导数, dl' 是 L 的线元; $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = [(x-x')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$. (1.1-20)
就是惠更斯原理的数学表达。

下面讨论满足方程

$$\nabla^2 \psi^i(\vec{r}) + k^2 \psi^i(\vec{r}) = 0$$

入射波 $\psi^i(\vec{r})$ 在区域 D 上的散射问题。设散射场为 $\psi^s(\vec{r})$, 则空间的波场为 $\psi(\vec{r}) = \psi^i(\vec{r}) + \psi^s(\vec{r})$ 。
若 D 为一个有限的区域, 我们可以以任意一点 $\vec{r}_0 \in D$ 为圆心, 以足够大的半径作一圆周 Γ , 使得 D 包含在 Γ 所包围的区域之中, 这时 Γ 和 D 的边界 L 形成一区域 Ω (图 1.1)。由 (1.1-20), $\vec{r} \in \Omega$ 时, 沿边界 Γ 和 L 的积分给出 $\psi(\vec{r})$, $\vec{r} \in \Omega$

时，积分为零，即：

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \psi^i(\vec{r}) + \psi^s(\vec{r}) \\ 0 &\quad \left. \right\} = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma+i} \left\{ \psi(x', z') \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(0)}(kR) - \right. \\ &\quad \left. H_0^{(0)}(kR) \frac{\partial}{\partial n} \psi(x', z') \right\} dl' \quad \begin{cases} \vec{r} \in Q \\ \vec{r} \notin Q \end{cases} \quad (1.1-21) \end{aligned}$$

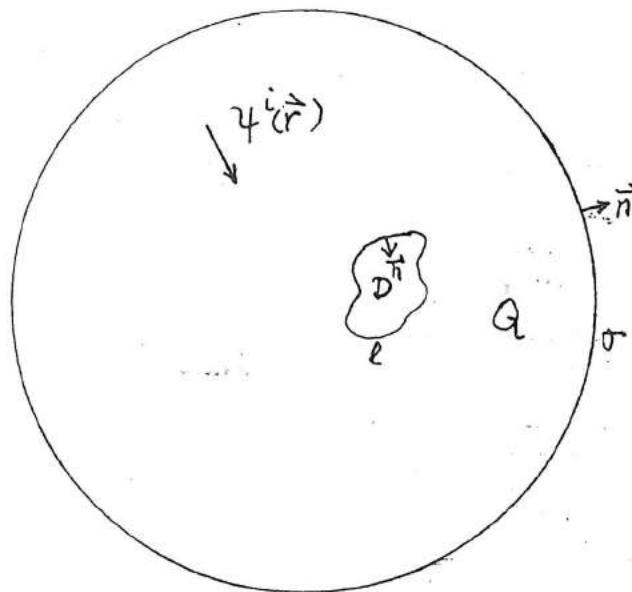


图 1：区域 D 散射的几何构形

现在我们考虑 Γ 上的积分，并把 $\psi(\vec{r})$ 写为 $\psi^i(\vec{r}) + \psi^s(\vec{r})$ ，由 (1.1-21)， Γ 上的积分为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4i} \int \left[\left[\psi^i(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(0)} - H_0^{(0)} \frac{\partial}{\partial n} \psi^i(\vec{r}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\psi^s \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(0)} - H_0^{(0)} \frac{\partial}{\partial n} \psi^s \right] \right] dl \end{aligned}$$

由 (1.1-21)，该积分的第一项为 $\psi^i(\vec{r})$ 。而 $\psi^s(\vec{r})$ 是

散射场，应满足外向辐射条件（柯朗和希尔伯特，1981）：

$$\frac{\partial}{\partial p} \psi^s(p) - ik \psi^s(p) = O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

即： $\psi^s(p) \sim \frac{1}{p} e^{ikp}$

且当 R 很大时， $H_0^{(1)}(kR) \sim \frac{1}{R} e^{ikR}$ 。於是当大圆弧 Γ 的半径趋于无限时，上述积分第二项为零。于是我们得到当入射场为 $\psi^i(\vec{r})$ 时，任意区域 D 所产生的散射场为：

$$\psi(\vec{r}) = \psi^i(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \psi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR) \frac{\partial}{\partial n} \psi(\vec{r}') \right\} dl' \quad (1.1-22)$$

其中 $\vec{n} \perp l$ 。注意这里的法向向量是指向 D 里面的。

若 D 是一个半空间，其分界线为 Γ ，下面的讨论要用这一结果，我们可以把 Γ 取作离开 Γ 很远，处于入射波一边的直线，当 Γ 和 Γ 之间距离趋于无穷时，利用 $H_0^{(1)}(kR)$ 和 $\psi^s(\vec{r})$ 的行为，也可以得到 (1.1-22)。所不同的是这里的 Γ 不是一条闭合的曲线。

1.2 均匀空间 SH 波方程和边界条件

下面我们讨论二维均匀介质中 SH 波方程和所满足的边界条件。

我们知道，在无体力作用，均匀介质质点运动方程为：

$$(\rho + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} \quad (1.2-1)$$

在二维情况下，设 SH 波位移：

$$\vec{u}(x, t) = u(x, z, t) \hat{y}$$

其中 \hat{y} 是 y 轴方向基矢。代入到 (1.2-1)，可得

$$\mu \nabla^2 u(x, z, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, z, t) \quad (1.2-2)$$

利用付氏变换

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \exp(-i\omega\xi) d\xi \quad (1.2-3)$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) \exp(i\omega\xi) d\omega \quad (1.2-4)$$

对时间 t 进行变换 (1.2-2) 可写为

$$\nabla^2 u(x, z, \omega) + k^2 u(x, z, \omega) = 0 \quad (1.2-5)$$

其中 $k = \omega/\beta$, $\beta^2 = \mu/\rho$ 。这是 Helmholtz 方程，该方程在 1.1 中进行了充分的讨论。

下面我们来推导 SH 波位移所满足的边界条件。我们考虑 SH 波位移 $u(x, z, \omega) \hat{y}$ 。在边界上，要求位移和应力分量连续。由位移连续条件

$$u_1(x, z, \omega) = u_2(x, z, \omega)$$

(1.2-6)

下标表示界面两边的介质。

应变分量为

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} u$$

其余为零。由胡克定律，应力分量

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

可以得到，

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{\partial}{\partial x} u, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial}{\partial z} u.$$

应力张量

$$\vec{\sigma} = \mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} u & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} u & 0 & \frac{\partial}{\partial z} u \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} u & 0 \end{bmatrix}$$

界面上应力为

$$\vec{\tau} = \mu \vec{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ 0 \\ n_z \end{pmatrix} = \mu \vec{n} \cdot \nabla u \vec{e}_y$$

其中 $\vec{n} = (n_x, 0, n_z)^T$ 是界面的单位法向。从上面推导可见，SH波位移的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x, z, \omega) = u_2(x, z, \omega) \\ \mu_1 \vec{n} \cdot \nabla u_1(x, z, \omega) = \mu_2 \vec{n} \cdot \nabla u_2(x, z, \omega) \end{array} \right. \quad (1.2-11)$$

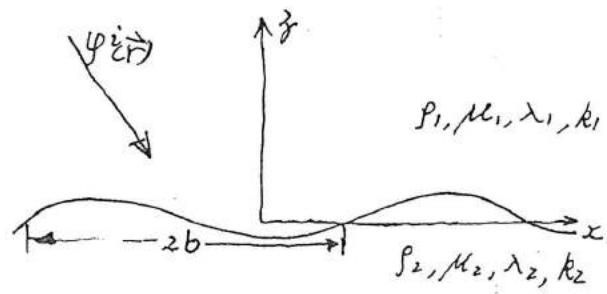
$(x, z) \in L$ (界面)

1.3 周期边界散射

在上面两节中，我们给出了惠更斯原理的数学表述和声波、光波所满足的波动和边界条件。本节我们讨论周期边界，平面波入射时的散射问题。

现在考虑周期边界 $f(x) = f(x+2b)$, $2b$ 是周期（图(2)）。入射波为

$$y^i(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) \exp(i\omega t)$$



图(2). 周期边界散射

(1.3-1)

其中 $\vec{k}_i(\theta)$ 是波矢，它和 z 轴夹角为 θ_0 ，因此

$$\vec{k}_i(\theta) = k_i (\hat{x} \sin \theta_0 - \hat{z} \cos \theta_0) \quad (1.3-2)$$

在以下的讨论中，我们略去时间项。

由公式 (1.1-22)

$$y_i(\vec{r}) = y^i(\vec{r}) + \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \left[H_o(kR) \nabla y_i(\vec{r}') \right. \\ \left. - y_i(\vec{r}') \nabla H_o(kR) \right] \quad \begin{cases} \vec{r} \cdot \hat{z} > \max(f(x)) \\ \vec{r} \cdot \hat{z} < \min(f(x)) \end{cases} \quad (1.3-3)$$

$$\left. \psi_2(\vec{r}) \right\} = -\frac{1}{4i} \int_{\sigma} d\vec{r}' \cdot [H_0(k_2 R) \nabla \psi_2(\vec{r}') - \psi_2(\vec{r}') \nabla H_0(k_2 R)]$$

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \hat{\vec{x}} > \max[\vec{x}(x)] \\ \vec{r} \cdot \hat{\vec{z}} < \min[\vec{z}(x)] \end{cases} \quad (1.3-4)$$

其中 $d\vec{r}' = (\hat{\vec{x}} - \vec{x} \frac{d\vec{x}(x)}{dx}) dx$, $k_1 = \omega/a_1$, $k_2 = \omega/a_2$, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, $\vec{r} \in \sigma$ (边界面)。上面二式的意义是：在上半空间，波场是入射波场和边界面 σ 上子波源向上幅射波场迭加之和；下半空间，波场是 σ 上的子波源向下幅的子波的迭加。

下面我们用平面波来展开 (1.3-3) 和 (1.3-4) 两式中的积分。为此我们引入平面波函数：

$$\begin{aligned} \psi(\pm i \vec{k}_1^\pm(n) \cdot \vec{r}) &= \exp(\pm i \vec{k}_1^\pm(n) \cdot \vec{r}) \\ \psi(\pm i \vec{k}_2^\pm(n) \cdot \vec{r}) &= \exp(\pm i \vec{k}_2^\pm(n) \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad \left. \right\} (1.3-5)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中：

$$\vec{k}_1^\pm(n) = k_1 (\hat{\vec{x}} \sin \theta_n \pm \hat{\vec{z}} \cos \theta_n) \quad (1.3-6a)$$

$$\vec{k}_2^\pm(n) = k_2 (\hat{\vec{x}} \sin \phi_n \pm \hat{\vec{z}} \cos \phi_n) \quad (1.3-6b)$$

$$\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n\pi/(k_1 b) \quad (1.3-6c)$$

$$\sin \phi_n = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_n \quad (1.3-6d)$$

$$\cos \theta_n = (1 - \sin^2 \theta_n)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Im } \cos \theta_n \geq 0 \quad (1.3-6e)$$

$$\cos \phi_n = (1 - \sin^2 \phi_n)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Im } \cos \phi_n \geq 0 \quad (1.3-6f)$$

$y(i\vec{k}_i^+(n) \cdot \vec{r})$ 代表界面辐射的上行波; $y(i\vec{k}_i^-(n) \cdot \vec{r})$ 表示界面辐射的下行波; $i=1, 2$ 。

(1.3-3)、(1.3-4) 中的积分，在进行坐标变换 $x \rightarrow x+2b$ 时，除了有一个 $2b\hat{x} \cdot \vec{k}_{i(0)}$ (或 $2b\hat{x} \cdot \vec{k}_{i(0)} = b \cdot 2k_i \sin \theta_0$) 的相移之外，其余不变，于是 (1.3-3)、(1.3-4) 中的积分可展成形如 (1.3-5) 所表示的平面波迭加

$$y_i(\vec{r}) = y(i\vec{k}_{i(0)} \cdot \vec{r}) + \begin{cases} \sum_n e_n y(i\vec{k}_i^+(n) \cdot \vec{r}) & \hat{x} \cdot \vec{r} > \max[\chi_{(0)}] \\ -\sum_n f_n y(i\vec{k}_i^-(n) \cdot \vec{r}) & \hat{x} \cdot \vec{r} < \min[\chi_{(0)}] \end{cases}$$

(1.3-7)

$$y_2(\vec{r}) = \begin{cases} -\sum_n E_n y(i\vec{k}_2^+(n) \cdot \vec{r}) & \hat{x} \cdot \vec{r} > \max[\chi_{(0)}] \\ \sum_n F_n y(i\vec{k}_2^-(n) \cdot \vec{r}) & \hat{x} \cdot \vec{r} < \min[\chi_{(0)}] \end{cases}$$

(1.3-8)

其中 \sum 表示对 n 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 求和。这两个展式在 $\min[\chi_{(0)}] \leq \hat{x} \cdot \vec{r} \leq \max[\chi_{(0)}]$ 之间是不适用的，原因在这个区域之上，界面辐射的上行波和下行波都有。

我们知道 $H_o^{''}(kR)$ 可以表述为 (Morse 和 Feshbach,

1953):

$$H_o^{''}(PR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dP_x (P^2 - P_x^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(i\vec{P}^2 \cdot \vec{R}) \quad (1.3-9)$$

其中 Γ 表示所用的 k_1 和 k_2 ，和

$$\vec{\Gamma}^\pm = \hat{x}\Gamma_x \pm \hat{y}(\Gamma^2 - \Gamma_x^2)^{\frac{1}{2}}$$

“+”号用于 $\vec{\Gamma}_0 > \max(z(x))$ 空间，“-”号用于 $\vec{\Gamma}_0 < \min(z(x))$ 。我们把界面积分表示为

$$\int_{\sigma} d\vec{\sigma}' = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}'$$

其中 $\int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}'$ 表示对一个周期的积分，并注意到：(1.3-4)、(1.3-3) 之中的场量 $g(\vec{r}_m)$

$$g(\vec{r}_m) = g(\vec{r}_0 + 2mb\hat{x}) = g(\vec{r}_0) \exp(zimkb\sin\theta_0)$$

把它代入到 (1.3-4)、(1.3-3)，我们得到：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4i} \int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}' \cdot [H_0(k_i R) \nabla \varphi_i(\vec{r}_0) - \varphi_i(\vec{r}_0) \nabla H_0(k_i R)] \\ &= \frac{1}{4i} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}' \cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{ix} (k_i^2 - k_{ix}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(i\vec{k}_i^\pm \cdot \vec{R}) \nabla \varphi_i(\vec{r}_0) \right. \\ & \quad \times \exp(zimk_i b \sin\theta_0) - \exp(zimk_i b \sin\theta_0) \cdot \varphi_i(\vec{r}_0) \times \\ & \quad \left. \times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{ix} (k_i^2 - k_{ix}^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla \exp(i\vec{k}_i^\pm \cdot \vec{R}) \right] \\ &= \frac{1}{4i} \sum_m \int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}' \cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{ix} (k_i^2 - k_{ix}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(i\vec{k}_i^\pm \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) \right. \\ & \quad \times \nabla \varphi_i(\vec{r}_0) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{ix} (k_i^2 - k_{ix}^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla \exp(i\vec{k}_i^\pm \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) \times \varphi_i(\vec{r}_0) \right] \\ & \quad \times \exp(zimk_i b (\sin\theta_0 - \sin\theta)) \\ &= \frac{1}{4ik_i b} \sum_m \frac{1}{\cos\theta_{im}} \int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}' \cdot [\exp(i\vec{k}_i^\pm \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) \nabla \varphi_i(\vec{r}_0) \\ & \quad - \varphi_i(\vec{r}_0) \nabla \exp(i\vec{k}_i^\pm \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0))] \end{aligned}$$

24

$$= \frac{1}{4ik_ib} \sum_m \frac{1}{\cos\theta_{im}} \int_{\sigma_0'} d\vec{r}_0' \cdot [\varphi(-i\vec{k}_i^+(cn) \cdot \vec{r}_0') \nabla \varphi_i(\vec{r}_0) \\ - \varphi_i(\vec{r}_0) \nabla \varphi(-i\vec{k}_i^+(cn) \cdot \vec{r}_0')] \varphi(i\vec{k}_i^+(cn) \cdot \vec{r}_0) \quad (1.3-10)$$

在这里我们用了

$$\sum_m \exp(2\pi i m x) = \sum_n \delta(x+n)$$

把 (1.3-10) 和 (1.3-7)、(1.3-8) 进行比较，可以得到：

$$e_n = \frac{1}{4ik_ib \cos\theta_n} \int_{\sigma_0'} d\vec{r}_0' \cdot [\varphi(-i\vec{k}_i^+(cn) \cdot \vec{r}_0') \nabla \varphi_i(\vec{r}_0) \\ - \varphi_i(\vec{r}_0) \nabla \varphi(-i\vec{k}_i^+(cn) \cdot \vec{r}_0)] \quad (1.3-11a)$$

$$f_n = -\frac{1}{4ik_ib \cos\theta_n} \int_{\sigma_0'} d\vec{r}_0' \cdot [\varphi(-i\vec{k}_i^+(cn) \cdot \vec{r}_0') \nabla \varphi_i(\vec{r}_0) \\ - \varphi_i(\vec{r}_0) \nabla \varphi(-i\vec{k}_i^+(cn) \cdot \vec{r}_0)] \quad (1.3-11b)$$

$$E_n = \frac{1}{4ik_2 b \cos\phi_n} \int_{\sigma_0'} d\vec{r}_0' \cdot [\varphi(-i\vec{k}_2^+(cn) \cdot \vec{r}_0') \nabla \varphi_2(\vec{r}_0) \\ - \varphi_2(\vec{r}_0) \nabla \varphi(-i\vec{k}_2^+(cn) \cdot \vec{r}_0)] \quad (1.3-12)$$

$$F_n = -\frac{1}{4ik_2 b \cos\phi_n} \int_{\sigma_0'} d\vec{r}_0 \cdot [\varphi(-i\vec{k}_2^-(cn) \cdot \vec{r}_0) \nabla \varphi_2(\vec{r}_0) \\ - \varphi_2(\vec{r}_0) \nabla \varphi(-i\vec{k}_2^-(cn) \cdot \vec{r}_0)] \quad (1.3-12b)$$

从 (1.3-7) 可见，在平面波入射时， f_n 除了 $f_0 = 1$ 外，其余为零；若不是平面波，其它

的 f_n 也不为零。从 (1.3-8) 可见对所有的 n 都有 $E_n = 0$ 。注意，这几个积分 $d\vec{\sigma}' = dx_0 (\delta - \frac{d\vec{x}_0(x)}{dx_0})$ 是对界面上一个周期进行的。

我们知道，平面波函数系在界面上形成一个完全集 (Millar, 1973)，不正交归一。我们把函数 $\varphi_2(\vec{r}_0)$ 、 $\vec{n} \cdot \nabla \varphi_2(\vec{r}_0)$ 展开为 $\varphi(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)$ 、 $\vec{n} \cdot \nabla \varphi(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)$ 的迭加：

$$\begin{cases} \varphi_2(\vec{r}_0) = \sum_n d_n \varphi(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) \\ \vec{n} \cdot \nabla \varphi_2(\vec{r}_0) = \sum_n g_n \vec{n} \cdot \nabla \varphi(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) \end{cases} \quad (1.3-13)$$

代入到 (1.3-12)，得到

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\Sigma'_0} d\vec{\sigma}' \cdot [\varphi(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) \sum_n g_n \nabla \varphi(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) \\ &\quad - \sum_n d_n \varphi(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) \nabla \varphi(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)] \\ &= \sum_n q_{mn}^+ g_n + \sum_n P_{mn}^+ d_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } q_{mn}^{\pm} &= \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\Sigma'_0} d\vec{\sigma}' [\varphi(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) \nabla \varphi(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)] \\ &= \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\Sigma'_0} d\vec{\sigma}' \cdot [i\vec{k}_2(n)] \cdot e^{-ik_2 x_0 (\sin \phi_n - \sin \phi_m)} \\ &\quad \times e^{-ik_2 x_0 (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\Sigma'_0} d\vec{\sigma}' \cdot (\hat{x} i k_2 \sin \phi_n - \hat{x} i k_2 \cos \phi_n) \\ &\quad \times e^{ik_2 x_0 (\sin \phi_n - \sin \phi_m)} \times \\ &\quad \times \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-ik_2 z_0(x_0)} (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m) \\
= & \frac{1}{4b} \left[- \int_{\sigma'_0} (dx_0 \frac{\sin \phi_n}{\cos \phi_m} + dz_0 \frac{\cos \phi_n}{\cos \phi_m}) \right. \\
& \times e^{i(n-m)\pi x_0/b - ik_2 z_0(x_0)} (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m) \\
= & -\frac{1}{4b} \frac{1}{\cos \phi_m} \left[\cos \phi_n + \frac{\sin \phi_n - \sin \phi_m \times \sin \phi_n}{(\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)} \right] \\
& \times \int_{\sigma'_0} dx_0 e^{i(n-m)\pi x_0/b - ik_2 z_0(x_0)} (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m) \\
= & -\frac{1}{8a} \frac{(\sin \phi_n - \sin \phi_m)^2 + (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)^2}{\cos \phi_m (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)} \\
& \times \int_{\sigma'_0} dx_0 e^{i(n-m)\pi x_0/b - ik_2 z_0(x_0)} (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)
\end{aligned}$$

和?

$$\begin{aligned}
P_{mn}^{\pm} = & -\frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\sigma'_0} d\vec{z}_0 \cdot [\varphi_{C-i\vec{k}_2(m)} \cdot \vec{r}_0) \nabla \varphi_{C+i\vec{k}_2(m)} \cdot \vec{r}_0] \\
= & \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\sigma'_0} dx_0 (\hat{z} - \hat{x} \frac{dz_0}{dx_0}) \cdot [i\vec{k}_2(m)] \\
& \times e^{ik_2(s \sin \phi_n - s \sin \phi_m)x_0 - ik_2 z_0(\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)} \\
= & \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\sigma'_0} dx_0 (\hat{z} - \hat{x} \frac{dz_0}{dx_0}) (\hat{x} ik_2 \sin \phi_m \\
& \pm ik_2 \hat{z} \cos \phi_m) \\
& \times e^{ik_2 x_0(s \sin \phi_n - s \sin \phi_m) - ik_2 z_0(\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)} \\
= & \frac{1}{4b \cos \theta_m} \int_{\sigma'_0} (dx_0 \cos \phi_m - dz_0 \sin \phi_m) \\
& \times e^{ik_2 x_0(s \sin \phi_n - s \sin \phi_m) - ik_2 z_0(\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4b \cos \phi_m} [\pm \cos \phi_m - \frac{\sin \phi_n - \sin \phi_m}{\cos \phi_n \pm \cos \phi_m} \cos \phi_m] \\
&\quad \times \int_{x_0'} dx_0 e^{i(n-m)\pi x_0/b - ik_2 x_0 (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)} \\
&= \frac{1}{8a} \frac{(\sin \phi_n - \sin \phi_m)^2 + (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)^2}{\cos \phi_m (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)} \\
&\quad \times \int_{x_0'} dx_0 e^{i(n-m)\pi x_0/b - ik_2 x_0 (\cos \phi_n \pm \cos \phi_m)}
\end{aligned}$$

以上我们给出了 P_{mn}^{\pm} 和 Q_{mn}^{\pm} 表达式的推导，可見

$$P_{mn}^{\pm} = -Q_{mn}^{\pm}$$

由 $E_n = 0$ ，我们还可以得到

$$\begin{aligned}
E_m &= \sum_n P_{mn}^+ d_n + \sum_n Q_{mn}^+ g_n \\
&= \sum_n P_{mn}^+ (d_n - g_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$d_n = g_n$$

把(1.3-3) 代入到(1.3-12b)，可得

$$F_m = - \sum_n (P_{mn}^- + Q_{mn}^-) g_n \quad (1.3-14)$$

从上述知

$$P_{mn}^- = -Q_{mn}^- \quad m \neq n$$

当 $m = n$ 时

$$\begin{aligned}
 g_{mm} &= \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}_0 \cdot [g(-ik_2 \vec{cm} \cdot \vec{r}_0) + g(ik_2 \vec{cm} \cdot \vec{r}_0)] \\
 &= \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\sigma_0'} dx_0 (\hat{z} - \hat{x} \frac{dz_0}{dx_0}) \cdot (2ik_2 \sin \phi_m - ik_2 \hat{y} \cos \phi_m) \\
 &= -\frac{1}{4b} \int_{-b}^b dx_0 = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{mm} &= -\frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\sigma_0'} d\vec{\sigma}_0 \cdot [g(ik_2 \vec{cm} \cdot \vec{r}_0) - g(-ik_2 \vec{cm} \cdot \vec{r}_0)] \\
 &= -\frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_{\sigma_0'} dx_0 (\hat{z} - \hat{x} \frac{dz_0}{dx_0}) \\
 &\quad \cdot (-\hat{x} ik_2 \sin \phi_m + ik_2 \hat{y} \cos \phi_m) \\
 &= -\frac{1}{4b} \int_{-b}^b dx_0 = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

代入 (1.3-14)，我们得到：

$$F_n = g_n \quad (1.3-15)$$

把 (1.2-11) 和 (1.3-13) 代入到 (1.3-11)，并用矩阵表示，

$$\begin{cases} e = \vec{R} f \\ g = \vec{I} f \end{cases} \quad (1.3-16)$$

其中 $e = (\dots, e_{-n}, e_{-n+1}, \dots, e_1, e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots)^T$ ；

$f = (f_{-n}, f_{-n+1}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots)^T$ ；

$g = (g_{-n}, g_{-n+1}, \dots, g_{-1}, g_0, g_1, \dots, g_n, g_{n+1}, \dots)^T$ ；

\vec{R} 和 \vec{I} 分别表示反射、透射矩阵。如同上述的推导过程，我们还可以得到 (Waterman, 1975; Chung, 1981)：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{Q}^+ (\vec{Q}^-)^{-1} \\ \vec{I} = (\vec{Q}^-)^{-1} \end{array} \right. \quad (1.3-17)$$

$$Q_{mn}^{\pm} = \frac{1}{4ik_1 b \cos \theta_m} \int_{\Omega_0'} d\vec{\sigma}_0 \cdot [C_1 \nabla \left(\varphi(-i\vec{k}_1^{\pm}(m) \cdot \vec{r}_0) \varphi(-i\vec{k}_2^{\pm}(n) \cdot \vec{r}_0) \right. \\ \left. - C_2 \varphi(-i\vec{k}_1^{\pm}(m) \cdot \vec{r}_0) \nabla \varphi(\vec{k}_2^{\pm}(n) \cdot \vec{r}_0) \right]$$

(1.3-18)

在本节中，我们得到了，平面波入射到周期界面时所产生的反射、透射场的矩阵表达式 (1.3-16)。在得到这种方法的过程中，我们没有应用高頻假定——亦即不需要合成波场的波長遠小于所考虑界面的曲率半径。用这种方法来计算波场，可以计算弯曲程度很大的界面结构。在第二节之中，我们将简单地讨论上述结果的应用。

2. 具有一弯曲界面地壳介质 结构中的矩阵方法

在前一节中，我们给出了周期界面反射和透射场的矩阵表示。在本节中，我们将给出 SH 波在具有一弯曲界面地壳结构（图 3）中的点源响应和下半空间入射平面波的矩阵解。我们在此次讨论任意界面，利用 Bouchon (1979, 1980, 1981) 的离散波数方法，界面和源可看作是周期的。为明确起见，本节内的推导完全从头开始。

所讨论的方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.0-1)$$

和边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(x, z) = 0 \quad \text{当 } z=0 \text{ 时} \\ \frac{\partial}{\partial n} \psi_1(x, z) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial n} \psi_2(x, z), \quad z=z(x) \text{ 时} \end{array} \right. \quad (2.0-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi_1(x, z) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial n} \psi_2(x, z), \quad z=z(x) \text{ 时} \quad (2.0-3)$$

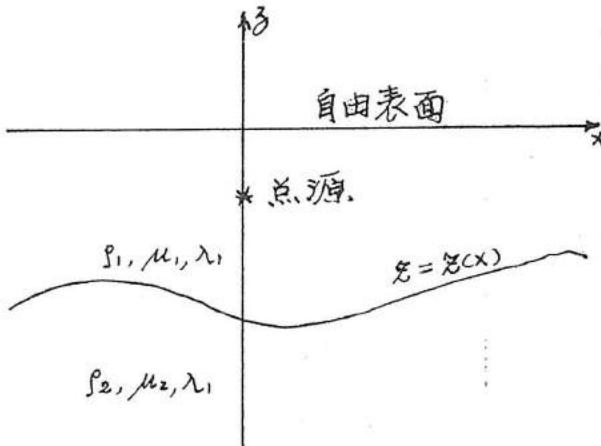


图 3 地壳结构的几何构形

2.1 半空间格林函数

半空间格林函数满足：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(x, z) + k^2 \phi(x, z) = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \\ \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(x, z) + k^2 \phi(x, z) = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \\ \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1-2)$$

并且 $\phi(x, z)$ 满足辐射条件

$$r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) \rightarrow 0 \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (2.1-3)$$

其中 $r^2 = (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2$ 。由镜像法，我们知道
满足 (2.1-1)、(2.1-2)、(2.1-3) 的解为

$$\phi(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} [H_0^{(1)}(kR_1) + H_0^{(1)}(kR_2)] \quad (2.1-4)$$

其中

$$R_1^2 = (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad \} \quad (2.1-5)$$

$$R_2^2 = (x - x_0)^2 + (z + z_0)^2$$

2.2 一般边界的散射

对于任意区域 D ，其边界为 L （图 (4)），假定在 D 中 $\psi(\vec{r})$ 没有源。由格林公式：

$$\begin{aligned} & \iint_D (\nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dx dy \\ &= \int_L (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dl \quad (2.2-1) \end{aligned}$$

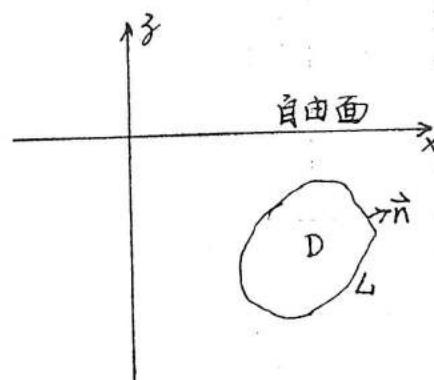


图 (4): 任意曲域
D 的散射

其中 \vec{n} 为法向量， $\frac{\partial}{\partial n}$ 为法向导数， dl 是 L 上的线元， $\psi(x, z)$ 满足 (2.0-1) 和 (2.0-2)， $\phi(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} H_0^{(1)}(kr)$ ， $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ 全空间格林函数。方程 (2.2-1) 的左边：

$$\iint_D (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dx dy = \begin{cases} \psi(x_0, z_0) & (x_0, z_0) \in D \\ 0 & (x_0, z_0) \notin D \end{cases}$$

所以 $\psi(x, z) = \begin{cases} \int_L (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl & (x, z) \in D \\ 0 & (x, z) \notin D \end{cases}$ (2.2-2)

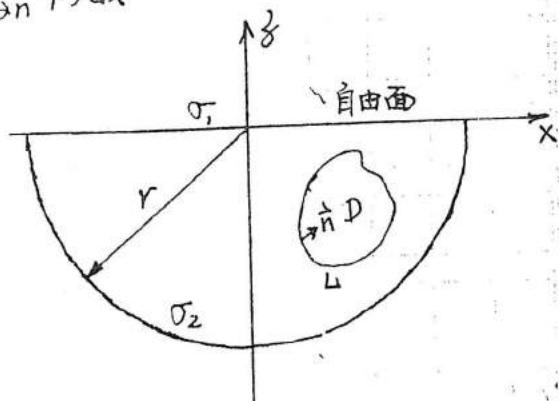
此式给出了区域 D 之中的场的积分表达式，区域之外的场，进行如下考虑可以得到。以坐标原点为心，半径为 r ，作一圆弧包围整个区域 D 。如图(5)所示， σ_1 、 σ_2 和 L 形成一个区域 E ，如果 $(x, z) \in E$ ，则由格林公式：

$$\psi(x, z) = \int_{\sigma_1 + \sigma_2 + L} (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl \quad (2.2-3a)$$

这儿的 $\phi(\vec{r}_0, \vec{r})$ 是半空间格林函数，可得

$$\int_{\sigma_1} (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl$$

$$= 0$$



和 \vec{n} 是区域 D 的内法向，图(5)： σ_1 自由面， σ_2 圆弧和 (2.2-2) 中的 \vec{n} 方向相反。

在 $\Sigma(2.2-3)$ 的同时，我们假定 $\psi(x, \vec{y})$ 在域 E 中没有奇异点，此时，运用 $\psi(\vec{r}_0, \vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ 所满足的幅射条件，可以得到：

$$\int_{\Sigma} [\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi] d\ell = 0$$

於是 $(2.2-3a)$ 可以重写为

$$\left. \begin{aligned} \psi(\vec{r}) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \int_L [\psi(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \phi(\vec{r}_0, \vec{r}) - \phi(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \psi(\vec{r}_0)] d\ell$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \in E \\ \vec{r} \in D \end{array} \right.$$
 $(2.2-3)$

現在考慮点源所產生的波在任意區域 D 的散射問題。設源位於 $(0, z_0)$ ，这时 $\psi(\vec{r})$ 在 $(0, z_0)$ 有一个奇异點。具體模型如

圖(6)。我們假定 D 中 $\psi(\vec{r})$

沒有奇點，即 D 中沒有源。

这时， D 中場仍由 $(2.2-2)$

式給出。我們用 $\psi^f(\vec{r})$ 表示

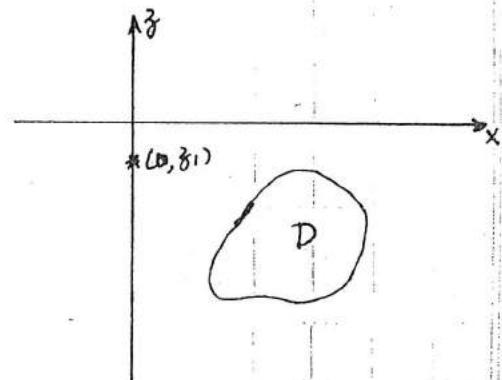
在沒有 D 時，單位點源所

產生的場，以後叫做自由

場。我們知道

$$\psi^f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} [H_0^{(1)}(kr_1) + H_0^{(1)}(kr_2)] \quad (2.2-4)$$

其中



圖(6). 任意區域 D 散射的幾何構形。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= (x^2 + (y - y_1)^2)^{\frac{1}{2}} \\ \zeta_2 &= (x^2 + (y + y_1)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-5)$$

和用 $\psi(\vec{r})$ 表示域 D 的散射场，则

$$\psi(\vec{r}) = \psi^f(\vec{r}) + \psi^s(\vec{r}) \quad (2.2-6)$$

这时，在 D 之外的场，不再能由 (2.2-3) 给出。于是，我们在如图(7)所示的区域内进行讨论。

σ_1 是自由表面， σ_2 是以坐标原点为圆心， r 为半径包含 $(0, y_1)$ 和区域 D 的大圆弧， σ_3 是以 $(0, y_1)$ 为圆心，足够小 ϵ 为半径的圆周，所有这些边界围成区域 E。

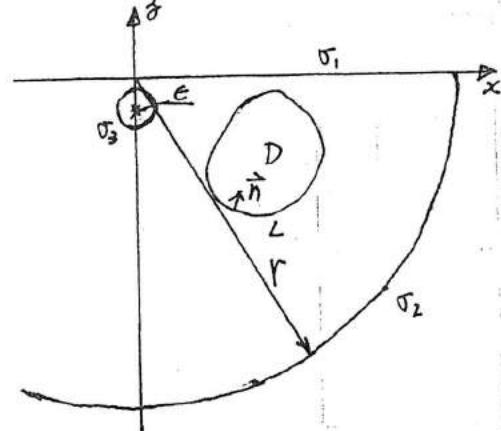
且是在 E 中 $\psi(\vec{r})$ 无奇点，图(7)：说明见正文。

当 $\vec{r} \in E$ 时，有

$$\psi(\vec{r}) = \int_{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + L} (\psi_{\partial n}^{\frac{1}{2}} \phi - \phi_{\partial n}^{\frac{1}{2}} \psi) dl \quad (2.2-7)$$

鉴于得到 (2.2-3) 的同样理由， σ_1, σ_2 线段上的积分均为零，(2.2-7) 可重写为

$$\psi(\vec{r}) = \int_{\sigma_3 + L} (\psi_{\partial n}^{\frac{1}{2}} \phi - \phi_{\partial n}^{\frac{1}{2}} \psi) dl$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\sigma_3} (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl + \int_L (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl \\
&= \int_{\sigma_3} [(\psi^f + \psi^s) \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} (\psi^f + \psi^s)] dl \\
&\quad + \int_L (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl \\
&= \int_{\sigma_3} [\psi^f \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi^f] dl \\
&\quad + \int_L (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl \\
&= \phi(\vec{r}_1, \vec{r}) + \int_L (\psi \frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi) dl
\end{aligned}$$

其中 $\vec{n} = (0, \vec{z}_1)$, 由 $\phi(\vec{r}_0, \vec{r})$ 的表达式可見

$$\phi(\vec{r}_0, \vec{r}) = \phi(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}) = \phi(\vec{r}, \vec{r}_1) = \psi^f(\vec{r})$$

我們最後得到

$$\psi(\vec{r}) = \psi^f(\vec{r}) + \int_L [\psi(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \phi(\vec{r}_0, \vec{r}) - \phi(\vec{r}_0, \vec{r}) \frac{\partial}{\partial n} \psi(\vec{r}_0)] dl \quad (2.2-8)$$

其中 $\vec{r}_0 \in L$, $\vec{r} \in E$, 也可以把此式重写为:

$$\left. \begin{aligned} \psi(\vec{r}) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \psi^f(\vec{r}) + \int_L [\psi(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} \phi(\vec{r}_0, \vec{r}) - \phi(\vec{r}_0, \vec{r}) \frac{\partial}{\partial n} \psi(\vec{r}_0)] dl$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \in D \\ \vec{r}_0 \in D \end{array} \right. \quad (2.2-9a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \psi(\vec{r}) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \psi^f(\vec{r}) + \int_L d\vec{l} \cdot [\psi(\vec{r}) \nabla \phi(\vec{r}_0, \vec{r}) - \phi(\vec{r}_0, \vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}_0)]$$

$$\begin{cases} \vec{r} \in D \\ \vec{r} \notin D \end{cases}$$

(2.2-9b)

和区域 D 的场

$$\psi(\vec{r}) = - \int_L d\vec{l} \cdot [\psi(\vec{r}_0) \nabla \phi_H(\vec{r}_0, \vec{l}) - \phi_T(\vec{r}_0, \vec{l}) \nabla \psi(\vec{r}_0)]$$

$$\begin{cases} \vec{r} \in D \\ \vec{r} \notin D \end{cases} \quad (2.2-10)$$

其中 $\phi_H(\vec{r}, \vec{l})$ 表示半空间格林函数， $\phi_T(\vec{r}, \vec{l})$ 表示全空间格林函数。如果 D 为半空间，上述公式仍然适用，只要我们把半径为 R 的大圆弧 Γ 换为离开子轴的两条平行于子轴的线，当它们和子轴的距离趋向无限时，即可得到 (2.2-9) 和 (2.2-10)。

(2.2-9)、(2.2-10) 和 (1.1-21)、(1.1-22) 形式上一样，于是我们可以按照求得 (1.3-16) 矩阵解的步骤来推导具有一弯曲界面地壳结构的矩阵解。

2.3 离散波数和矩阵解，源在上层介质中
 我们把图 3 所示的模型按如下方式进行周期延拓：以 $[-b, b]$ 这段为准向两边延拓，使得 $\varphi(x+2b) = \varphi(x)$ ，源也进行延拓，使得 $[(n-1)b, nb]$ 上的几何图形完全跟 $[-b, b]$ 上的一样。我们知道，

只要把 b 取得足够大，以至满足

$$v t_0 < b \quad (2.3-1)$$

t_0 是我们所计算的波场的最大时间延续长度。这时，在 $[t_1, t_0]$ 这个时间段内，所计算的波场是精确的， t_1 是初动时刻，因为在这一段时间内其考虑设源和 $x=-b$, $x=b$ 端点所产生的波还没有来得及传播至接收点。这种思想方法是由 Bouchon 提出的，现在已有很多作者用来自合成波场，如如姚振兴和 Harkrider (1983)、Olsen (1982) 等。

进行周期延拓之后的自由场 $\psi^f(\vec{r})$ 为

$$\psi^f(\vec{r}) = \frac{1}{4i\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H_0^{(1)}(k_1 \xi_{1n}) + H_0^{(2)}(k_1 \xi_{2n})] \quad (2.3-2)$$

其中 k_1 表示上半空间的波数（如图 (3)），和

$$\begin{aligned} \xi_{1n} &= [(x-2nb)^2 + (\bar{z}-\bar{z}_1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \xi_{2n} &= [(x-2nb)^2 + (\bar{z}+\bar{z}_1)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

和由 Hankel 函数的积分 (1.3-9) 式，可以得到

$$\psi^f(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4i\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_x (k_1^2 - \bar{x}_x^2)^{-\frac{1}{2}} [e^{i\bar{x}\pm\vec{O}_{1n}} + e^{-i\bar{x}\pm\vec{O}_{2n}}] \right]$$

其中 $\bar{x}^{\pm} = \bar{x}_x \pm \sqrt{k_1^2 - \bar{x}_x^2}^{\frac{1}{2}}$, $\vec{O}_{1n} = (x-2nb, \bar{z}-\bar{z}_1)$,

$$\vec{O}_{2n} = (x-2nb, \bar{z}+\bar{z}_1),$$

$$\begin{aligned} \psi^f(\vec{r}) &= \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}_x (k_1^2 - \bar{x}_x^2)^{-\frac{1}{2}} [e^{\pm i\sqrt{k_1^2 - \bar{x}_x^2}^{\frac{1}{2}}(\bar{z}-\bar{z}_1)} + \\ &+ e^{\pm i\sqrt{k_1^2 - \bar{x}_x^2}^{\frac{1}{2}}(\bar{z}+\bar{z}_1)}] e^{i\bar{x}_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2nb\bar{x}_x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_x (k_1^2 - x_x^2)^{-\frac{1}{2}} [e^{\pm i(k_1^2 - x_x^2)^{\frac{1}{2}}(\beta - \beta_1)} \\
 &\quad + e^{\pm i(k_1^2 - x_x^2)^{\frac{1}{2}}(\beta + \beta_1)}] e^{i x_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_x b - n) \\
 &= \frac{1}{4ib} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi x/b} [e^{\pm i[k_1^2 - (\frac{n\pi}{b})^2]^{\frac{1}{2}}(\beta - \beta_1)} \\
 &\quad + e^{\pm i[k_1^2 - (\frac{n\pi}{b})^2]^{\frac{1}{2}}(\beta + \beta_1)}] (k_1^2 - (\frac{n\pi}{b})^2)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

於是

$$\begin{aligned}
 \psi^f(\vec{r}) = & \frac{1}{4ib} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi x/b} [e^{\pm i[k_1^2 - (\frac{n\pi}{b})^2]^{\frac{1}{2}}(\beta - \beta_1)} + \\
 & + e^{-i[k_1^2 - (\frac{n\pi}{b})^2]^{\frac{1}{2}}(\beta + \beta_1)}] (k_1^2 - (\frac{n\pi}{b})^2)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.3-3}$$

式中的“+”号用于 $\beta > \beta_1$ ，负号用于 $\beta < \beta_1$ 。第二項中去掉“+”的理由为 $\beta + \beta_1 < 0$ 。

我们把上节的结果运用到我们所提的周期模型，可以得到

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_1(\vec{r}) \\
 \end{aligned} \right\} = \psi^f(\vec{r}) + \int_L d\vec{l} \cdot [\phi_1 \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \phi_1] \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \geq \beta \geq z(x) \\ \beta < z(x) \end{array} \right. \tag{2.3-4}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_2(\vec{r}) \\
 \end{aligned} \right\} = - \int_L d\vec{l} \cdot [\phi_2 \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \phi_2] \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \geq \hat{\beta} \geq z(x) \\ \beta < z(x) \end{array} \right. \tag{2.3-5}$$

其中 $d\vec{l} = (\hat{\beta} - \frac{d\beta(x)}{dx} \cdot \hat{x}) dx$ ， $\phi_i(\vec{r}_0, \vec{r})$ 是半空间格林函数， $\psi_i(\vec{r}_0, \vec{r})$ 是全空间格林函数。

我们引入和 (1.3-5) 同样的函数係，不过这

心的 $\theta_0 = 0$, 我们把 $\psi_1(\vec{r})$ 和 $\psi_2(\vec{r})$ 按这个函数展开, 得到

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\vec{r}) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \varphi f(\vec{r}) + \left\{ \begin{array}{l} \sum_n U_n \psi_n(i \vec{k}_1^+(n), \vec{r}) + \sum_n V_n \varphi(i \vec{k}_1^-(n), \vec{r}) \\ - \sum_n W_n \psi_n(i \vec{k}_1(n)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \geq \hat{\gamma} \cdot \vec{r} > \max(z(x)) \\ \hat{\gamma} \cdot \vec{r} < \min(z(x)) \end{array} \right. \quad (2.3-6)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_2(\vec{r}) \\ 0 \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \sum_n V_n \psi_n(i \vec{k}_2^-(n), \vec{r}) \\ - \sum_n U_n \psi_n(i \vec{k}_2^+(n), \vec{r}) - \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 0 > \hat{\gamma} \cdot \vec{r} > \max(z(x)) \\ \hat{\gamma} \cdot \vec{r} < \min(z(x)) \end{array} \right. \quad (2.3-7)$$

把 $\psi_1(\vec{r}_0, \vec{r})$ 的积分表达式代入到 (2.3-4), 并和 (2.3-6) 进行比较, 可以得到

$$U_n = V_n = \frac{1}{4ibk_1 \cos \theta_n} \int_{L_0} d\vec{l}_0 \cdot [\psi(-i \vec{k}_1^+(n), \vec{r}_0) \nabla \psi_1(\vec{r}_0) - \psi_1(\vec{r}_0) \nabla \varphi(-i \vec{k}_1^+(n), \vec{r}_0)] \quad (2.3-8)$$

$$W_n = - \frac{1}{4ibk_1 \cos \theta_n} \int_{L_0} d\vec{l}_0 \cdot \{ [\varphi(-i \vec{k}_1^+(n), \vec{r}_0) + \varphi(-i \vec{k}_1^-(n), \vec{r}_0)] \nabla \psi_1(\vec{r}_0) - \psi_1(\vec{r}_0) \nabla [\varphi(-i \vec{k}_1^+(n), \vec{r}_0) + \varphi(-i \vec{k}_1^-(n), \vec{r}_0)] \} \quad (2.3-9)$$

从 (2.3-7)、(2.3-5) 可见 U_n 、 V_n 分别和 E_n 、 F_n (1.3-12a)、(1.3-12b) 一样, 重写如:

$$V_n = U_n = \frac{1}{4ik_2 b \cos \theta_n} \int_{L_0} d\vec{l}_0 \cdot [\varphi(-i \vec{k}_2^+(n), \vec{r}_0) \nabla \psi_2(\vec{r}_0) - \psi_2(\vec{r}_0) \nabla \varphi(-i \vec{k}_2^+(n), \vec{r}_0)] \quad (2.3-10)$$

$$W_n = -\frac{1}{4ik_z b \cos \theta_n} \int_{L_0} d\vec{k}_0 \left\{ [\psi(-i\vec{k}_z^+(n) \cdot \vec{r}_0) + \psi(-i\vec{k}_z^-(n) \cdot \vec{r}_0)] \nabla \psi(\vec{r}_0) - \psi(\vec{r}_0) \nabla [\psi(i\vec{k}_z^+(n) \cdot \vec{r}_0) + \psi(i\vec{k}_z^-(n) \cdot \vec{r}_0)] \right\}$$

(2.3-11)

我们把 $\psi^f(\vec{r})$ 在 $\vec{x} \cdot \vec{r} < \min(\varphi(x))$, $x \in [-b, b]$ 上 展开为平面波的迭加, 由 (2.3-3), 得到

$$\begin{aligned} \psi^f(\vec{r}) &= \frac{1}{4ik_z b} \sum_n e^{inx/b} [e^{-ik_z \cos \theta_n (\vec{z} + \vec{z}_1)} \\ &\quad + e^{-ik_z \cos \theta_n (\vec{z} - \vec{z}_1)}] \frac{1}{\cos \theta_n} \\ &= \frac{1}{4ik_z b \cos \theta_n} \sum_n [\psi(i\vec{k}_z^+(n) \cdot \vec{r}_1) + \psi(i\vec{k}_z^-(n) \cdot \vec{r}_1)] \times \\ &\quad \psi(i\vec{k}_z^-(n) \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

其中 $\vec{r}_1 = (0, \vec{z}_1)$, 而 $\vec{z}_1 > \min(\varphi(x))$ (假定)。由 (2.3-6) 可见

$$w_n = \frac{1}{4ik_z b \cos \theta_n} [\psi(i\vec{k}_z^+(n) \cdot \vec{r}_1) + \psi(i\vec{k}_z^-(n) \cdot \vec{r}_1)] \quad (2.3-13)$$

由 (2.3-7), $\Im w_n = 0$, 对于所有的 n 。

我们把 $\psi_2(\vec{r}_0)$ 和 $\vec{n} \cdot \nabla \psi_2(\vec{r}_0)$ 展成

$$\begin{cases} \psi_2(\vec{r}_0) = \sum_m d_m \psi(i\vec{k}_z^-(m) \cdot \vec{r}_0) \\ \vec{n} \cdot \nabla \psi_2(\vec{r}_0) = \sum_m g_m \vec{n} \cdot \nabla \psi(i\vec{k}_z^-(m) \cdot \vec{r}_0) \end{cases} \quad (2.3-14)$$

代入到 (2.3-10), 并注意 $\Im w_n = 0$, 可以得到

$$d_m = g_m \quad (2.3-15)$$

把 (2.3-15)、(2.3-14) 代入到 (2.3-11), 可以得到:

$$\bar{W}_n = g_n \quad (2.3-16)$$

类似于(2.3-16)，我们可以得到：

$$\begin{cases} w = -\vec{Q}_P g \\ u = \vec{Q}_m g \end{cases} \quad \begin{aligned} w_m &= \sum_n (Q_P)_{mn} g_n \\ u_n &= \sum_m (Q_m)_{mn} g_n \end{aligned} \quad (2.3-17)$$

$$(Q_P)_{mn} = \frac{+1}{4ik_b b \cos \theta_m} \int_{L_0} d\vec{l} \cdot \left\{ [g_C(-i\vec{k}_1^+ \cdot \vec{r}_0) + g_C(-i\vec{k}_1^- \cdot \vec{r}_0)] \right. \\ \left. \frac{\mu_2}{\mu_1} \nabla g(i\vec{k}_2^+ \cdot \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_0 - g(i\vec{k}_2^- \cdot \vec{r}_0) \nabla [g_C(-i\vec{k}_1^+ \cdot \vec{r}_0) \right. \\ \left. + g_C(-i\vec{k}_1^- \cdot \vec{r}_0)] \right\} \quad (2.3-18a)$$

$$(Q_m)_{mn} = \frac{1}{4ik_b b \cos \theta_m} \int_{L_0} d\vec{l} \cdot [g_C(-i\vec{k}_1^+ \cdot \vec{r}_0) \frac{\mu_2}{\mu_1} \nabla g(i\vec{k}_2^+ \cdot \vec{r}_0) \\ - g(i\vec{k}_2^- \cdot \vec{r}_0) \nabla g(-i\vec{k}_1^+ \cdot \vec{r}_0)] \quad (2.3-18b)$$

由于 w_n 已知，(2.3-13) 给出，由(2.3-17) 可以求得 g ， $g_n = \bar{W}_n$ 即求得透射场，继之可得反射场 u 。即

$$\begin{cases} g = \vec{I} w \\ u = \vec{R} w \end{cases} \quad (2.3-19)$$

$$\vec{I} = -(\vec{Q}_P)^{-1}, \quad \vec{R} = -(\vec{Q}_m)(\vec{Q}_P)^{-1}.$$

以上给出了具有弯曲界面地壳结构的点源响应，即是源在界面之上。在下节中，我们讨论源在下面或平行波从下面入射到界面的

情况。

§2.4 源在下层介质中的波场矩阵解.

由于具体推导和上面多有重复，在这节中只给主要结果。当源在下层介质中时，波场的积分表达式为

$$\left. \psi_1(\vec{r}) \right\} = \frac{1}{4i} \int_L d\vec{k} \cdot \left[\left\{ H_0^{(u)}(k_{z1}) + H_0^{(u)}(k_{z2}) \right\} \nabla \psi_1(\vec{r}_0) - \psi_1(\vec{r}_0) \nabla \left\{ H_0^{(u)}(k_{z1}) + H_0^{(u)}(k_{z2}) \right\} \right] \quad \begin{cases} 0 \geq z \geq z(x) \\ z < z(x) \end{cases} \quad (2.4-1)$$

$$\left. \psi_2(\vec{r}) \right\} = \psi_2^f(\vec{r}) - \frac{1}{4i} \int_L d\vec{k} \cdot \left[H_0^{(u)}(k_{z1}) \nabla \psi_2(\vec{r}_0) - H_0^{(u)}(k_{z2}) \nabla \psi_2(\vec{r}_0) \right. \\ \left. - \psi_2(\vec{r}_0) \nabla H_0^{(u)}(k_{z2}) + \psi_2(\vec{r}_0) \nabla H_0^{(u)}(k_{z1}) \right] \quad \begin{cases} 0 \geq z \geq z(x) \\ z < z(x) \end{cases} \quad (2.4-2)$$

把(2.4-1)、(2.4-2)按平面波展开，得到

$$\left. \psi_1(\vec{r}) \right\} = \begin{cases} \sum_n U_n [g(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0) + g(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)] & 0 \geq z \geq \max(z(x)) \\ - \sum_n W_n g(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) & z \leq \min(z(x)) \end{cases} \quad (2.4-3)$$

$$\left. \psi_2(\vec{r}) \right\} = \psi_2^f(\vec{r}) + \begin{cases} - \sum_n U_n g(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) - \sum_n V_n g(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0) & 0 \geq z \geq \max(z(x)) \\ + \sum_n W_n g(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0) & z \leq \min(z(x)) \end{cases} \quad (2.4-4)$$

其中 U_n , W_n 和 V_n 的表达式与 (2.3-9) – (2.3-11) 相同。所不同的是 U_n 给出自由场的系数, W_n 对于所有 n 都为零。我们用

$$\begin{cases} \psi_i(\vec{r}_o) = \sum_n a_n \varphi(i\vec{k}_{in}(n) \cdot \vec{r}_o) \\ \vec{n} \cdot \nabla \psi_i(\vec{r}_o) = \sum_n b_n \vec{n} \cdot \nabla \varphi(i\vec{k}_{in}(n) \cdot \vec{r}_o) \end{cases} \quad (2.4-5)$$

$\vec{r}_o \in L$

由 $w_{in}=0$, 可以得到

$$a_n = b_n \quad (2.4-6)$$

把 (2.4-5)、(2.4-6) 代入到 (2.3-8), 可以得到

$$u_n = a_n \quad (2.4-7)$$

最后可以得到:

$$\begin{cases} W = \underline{\vec{Q}}_1 \cdot a \\ U = \underline{\vec{Q}}_2 \cdot a \end{cases} \quad (2.4-8)$$

$$(Q_2)_{mn} = \frac{1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_L d\vec{l}_o \cdot \left\{ \frac{u_1}{u_2} [\varphi(-i\vec{k}_2^+ c_m \cdot \vec{l}_o) + \varphi(-i\vec{k}_2^- c_m \cdot \vec{l}_o)] \right. \\ \times \nabla \varphi(i\vec{k}_{in}(n) \cdot \vec{l}_o) - \varphi(i\vec{k}_{in}(n) \cdot \vec{l}_o) \left[\nabla \varphi(-i\vec{k}_2^+ c_m \cdot \vec{l}_o) + \nabla \varphi(-i\vec{k}_2^- c_m \cdot \vec{l}_o) \right] \left. \right\} \quad (2.4-9)$$

$$(Q_1)_{mn} = \frac{-1}{4ik_2 b \cos \phi_m} \int_L d\vec{l}_o \cdot \left\{ \frac{u_1}{u_2} \varphi(-i\vec{k}_2^+ c_m \cdot \vec{l}_o) \nabla \varphi(i\vec{k}_{in}(n) \cdot \vec{l}_o) \right. \\ - \varphi(i\vec{k}_{in}(n) \cdot \vec{l}_o) \nabla \varphi(-i\vec{k}_2^- c_m \cdot \vec{l}_o) \left. \right\} \quad (2.4-10)$$

表示反射矩阵 \vec{R} 、透射矩阵 \vec{T} 的形式

$$\begin{cases} a = (\underline{\vec{Q}}_2)^{-1} U = \vec{T} U \\ W = (\underline{\vec{Q}}_1) (\underline{\vec{Q}}_2)^{-1} U = \vec{R} U \end{cases} \quad (2.4-11)$$

由已知的 \vec{U} , 可很容易求得反射场平面波系数

W 和透射场平面波系数 a 。

3. 多界面介质结构的矩阵方法

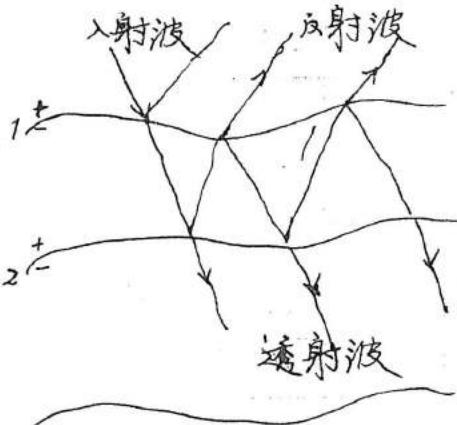
在本节中讨论具有多个界面介质结构的矩阵方法。它是单层界面结果的推广。从前面的讨论可见，散射场，即反射场和透射场的平面波展开系数，均可通过反射、透射矩阵和入射场的系数联结起来。这一点和我们讨论平界面的情况相同。我们遵循平界面情况由单层向多层的推^⑧方法来推广到多层界面的情况。
把单层的矩阵方法

首先我们讨论二层界面所形成交层的反射、透射场平面波系数的矩阵解。为方便起见，下面的讨论中，不写矩阵上面的尖号和下面的一横。如图(8)所示，反射场平面波系数为

$$U = R_1^+ a + T_2^- R_2^+ T_1^+ a + T_2^- R_2^+ R_1^- R_2^+ T_1^+ a + T_2^- R_2^+ R_1^- R_2^+ R_1^- R_2^+ T_1^+ a$$

+ ...

$$= R_1^+ a + T_2^- R_2^+ (1 + R_1^- R_2^+ + R_1^- R_2^+ R_1^- R_2^+ + \dots) T_1^+ a$$



图(8)：多层介质结构的几何构形

$$= R_1^+ a + T_2^- R_2^+ (1 - R_1^- R_2^+)^{-1} T_1^+ a = Ra \quad (4.1)$$

透射场的平面波係數為

$$\begin{aligned} W &= T_2^+ T_1^+ a + T_2^+ R_1^- R_2^+ T_1^+ a + T_2^+ R_1^- R_2^+ R_1^- R_2^+ T_1^+ a + \dots \\ &= T_2^+ (1 + R_1^- R_2^+ + R_1^- R_2^+ R_1^- R_2^+ + \dots) T_1^+ a \\ &= T_2^+ (1 - R_1^- R_2^+)^{-1} T_1^+ a = \tilde{T} a \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 a 是入射場的平面波係數； R ， T 分別表示反射、透射矩陣；“ $+$ ”表示以下標所示界面上方，“ $-$ ”表示从下方進行反射或透射。這些矩陣，可由第一章中給出的方式進行計算。

對於多重界面交層可以如同(4.1)、(4.2)進行推廣。把前 $n-1$ 個交層所得到反射、透射矩陣作為 R_i 和 T_i ，再計算 n 層的反射、透射矩陣。

4. 計算結果及分析

為驗證矩陣方法的可用性，我們計算了二維谷地和山區對SH波地面運動的影響。並把計算結果和點源方法、邊界方法進行了比較。

圖(9)、(10)、(11)給出了山區對SH波地面運動的影響。圖中的橫坐標是 x/a ， a 是山區的半寬度，高度為 $0.25a$ ，和归一頻率

$$\eta = \frac{k\alpha}{\pi} = \frac{2a}{\lambda}$$

为 0.5。图 9 是从下向上垂直入射、图 10 入射角为 45° 、图 11 是自左向右水平入射的结果。图中的实线是矩阵方法的计算结果，虚线是边界方法的计算结果。

图 12 是谷地对地面运动的影响，是深度为 a ， $\eta=0.5$ 的结果。实线是矩阵方法、虚线是点源方法的结果。

从图 9—12 可见，矩阵方法在两种模型下的计算结果分别和点源方法（它只计算了谷地的影响）、边界方法（只计算了山区的影响）的符合得很好。有偏离的原因可能是由于采用不同的近似所造成的，同时边界和点源方法的作者没有给出他们和别的方法的结果的比较。

图 14、13、15 是用矩阵方法计算的矩槽对地面运动的影响，这个矩槽可以看作是桥墩的理论模型。图中的三条线分别表示深度为 a ， $2a$ ， $3a$ 的结果。归一频率为 0.1。图中曲线的趋势可以由子波的位相不同的干涉来直观了解。

计算地面运动是提取初步模型的很好手段。

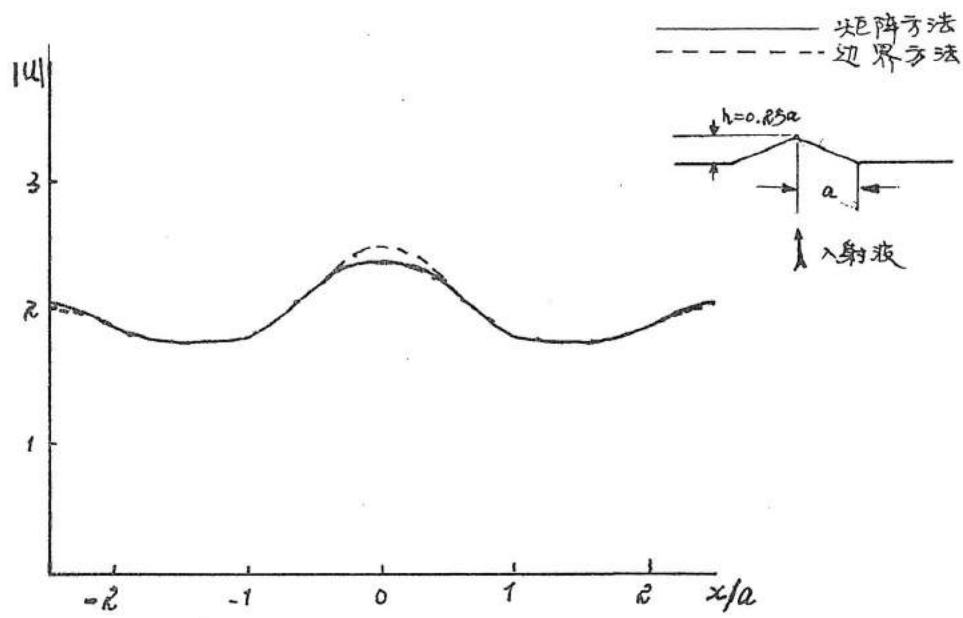
具体做法是：利用天然的、人工的地表水平向最大振幅作为资料，用多重界面SH波散射去拟合（Wong等，1977）。这样做，需要足够密的台网记录。

5. 结论

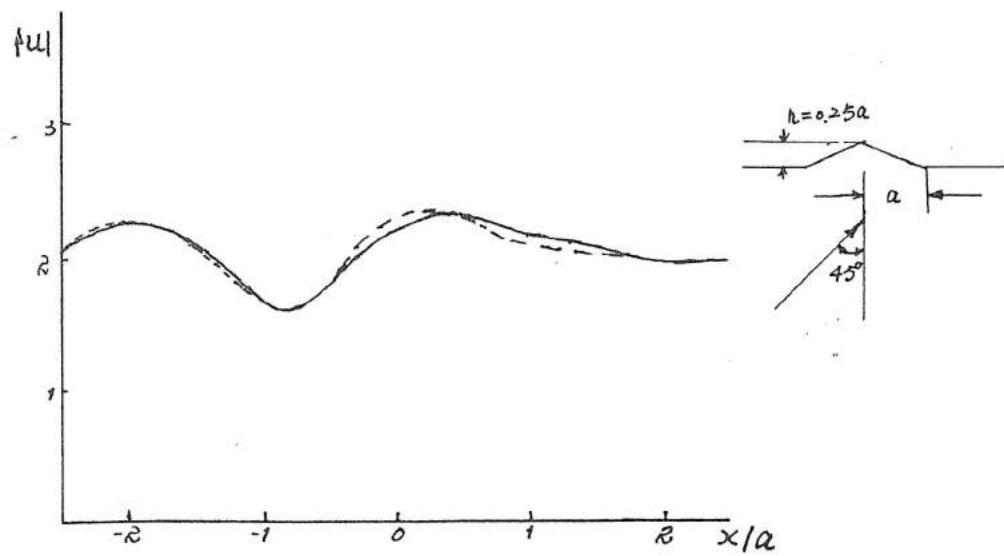
本文提出了计算弯曲界面情况下SH波散射场的矩阵方法。该方法的优点是没有采用高阶近似，因而可用于界面弯曲度较大的问题。原则上讲，它可用于计算任意均匀结构边界上的SH波散射问题，但对于大结构，如地壳上地幔结构问题，要求计算机内存较大。该方法是半解析的。由于我们没有找到其它可对比的数值实例，因此在文中我们只计算了地形对地面运动的影响，并和专门计算强地面运动的点源方法、边界方法进行了比较。结果表明，矩阵方法是可用的。

致 谢

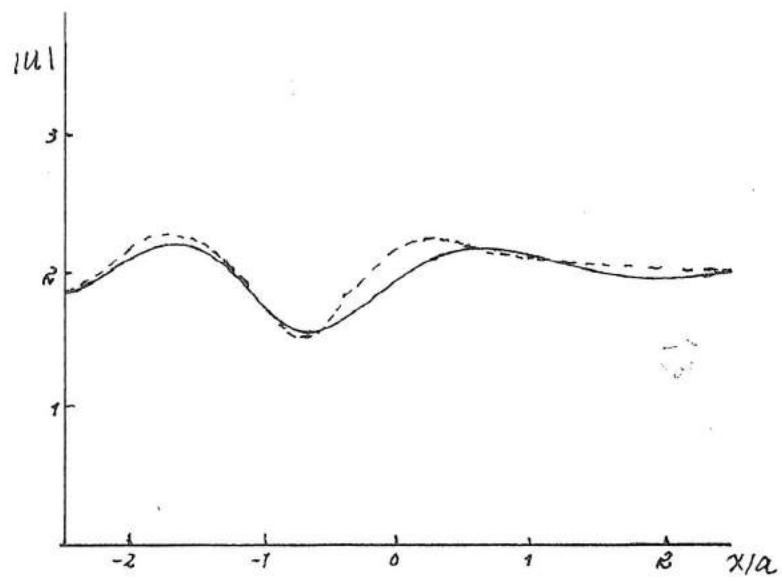
本文是在姚振兴老师指导下完成的，作者在此表示感谢。



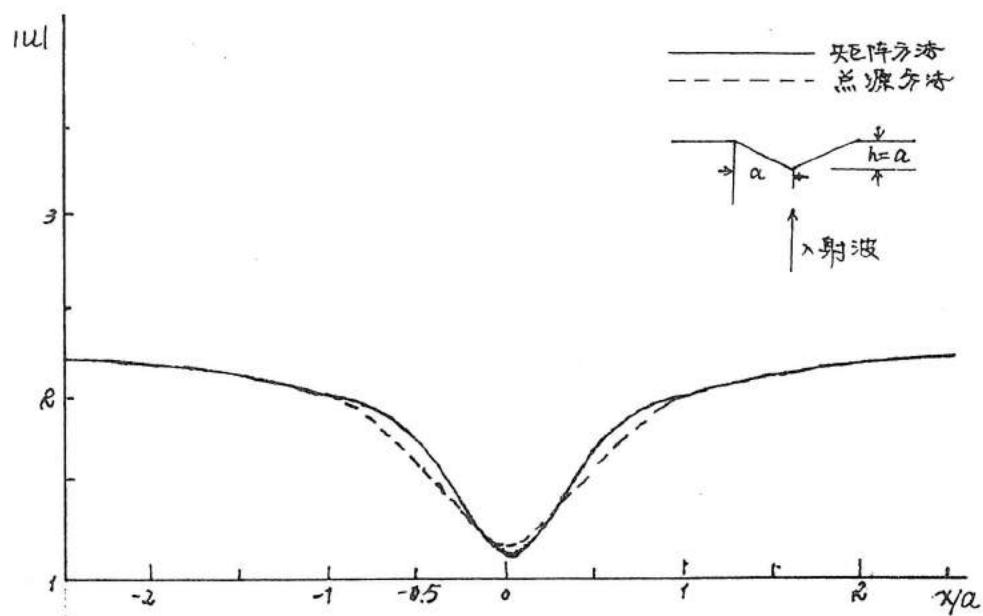
图(9)：三角形山形对地面运动的影响，归一化步长率 $\gamma=0.5$



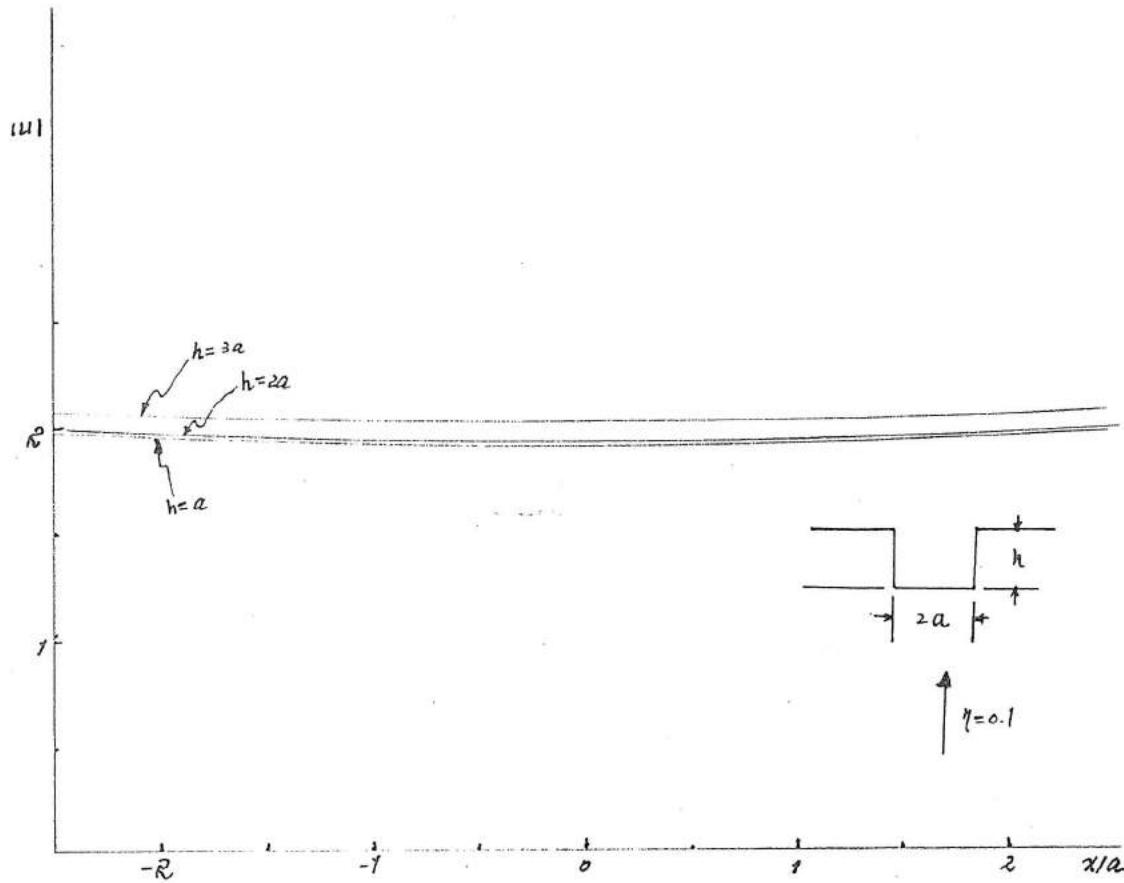
图(10)：山形对地面运动的影响，入射角 45° , $\gamma=0.5$
实线是矩阵方法、虚线是边界方法的结果。



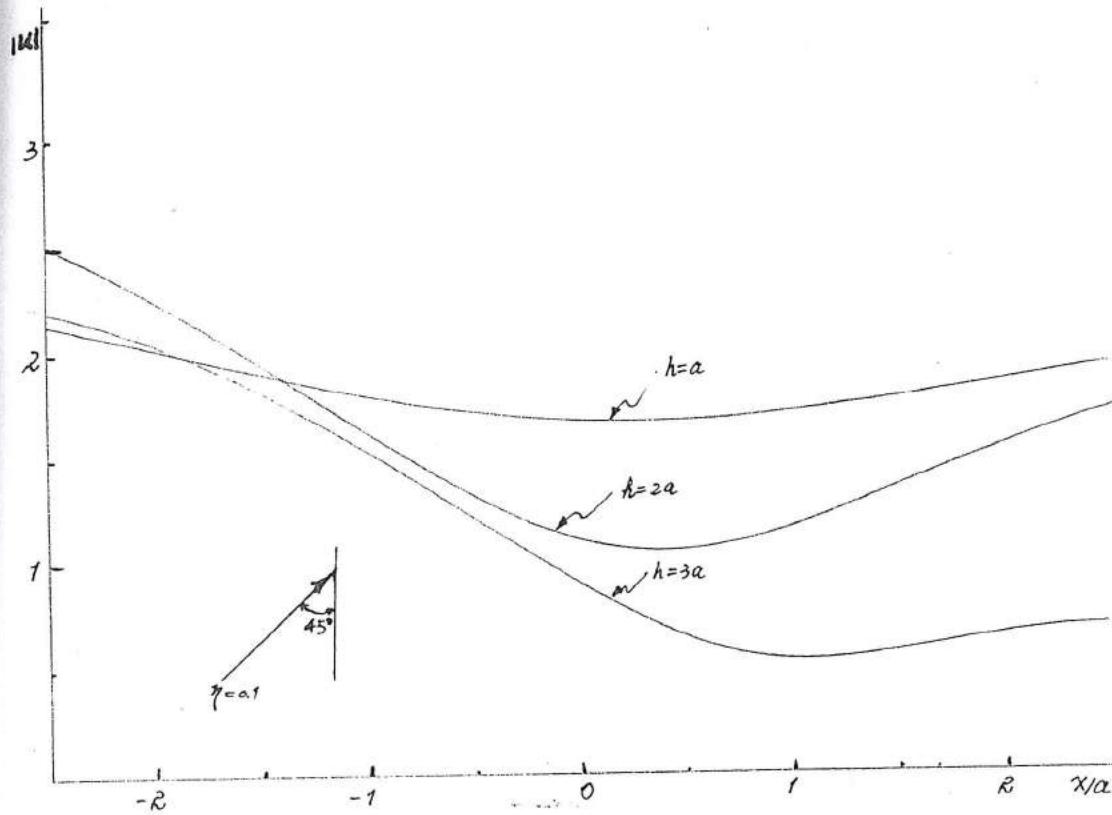
圖(11): 山形对地面运动的影响, 具体参看如图(9)(10),
波从左到右入射(水平).



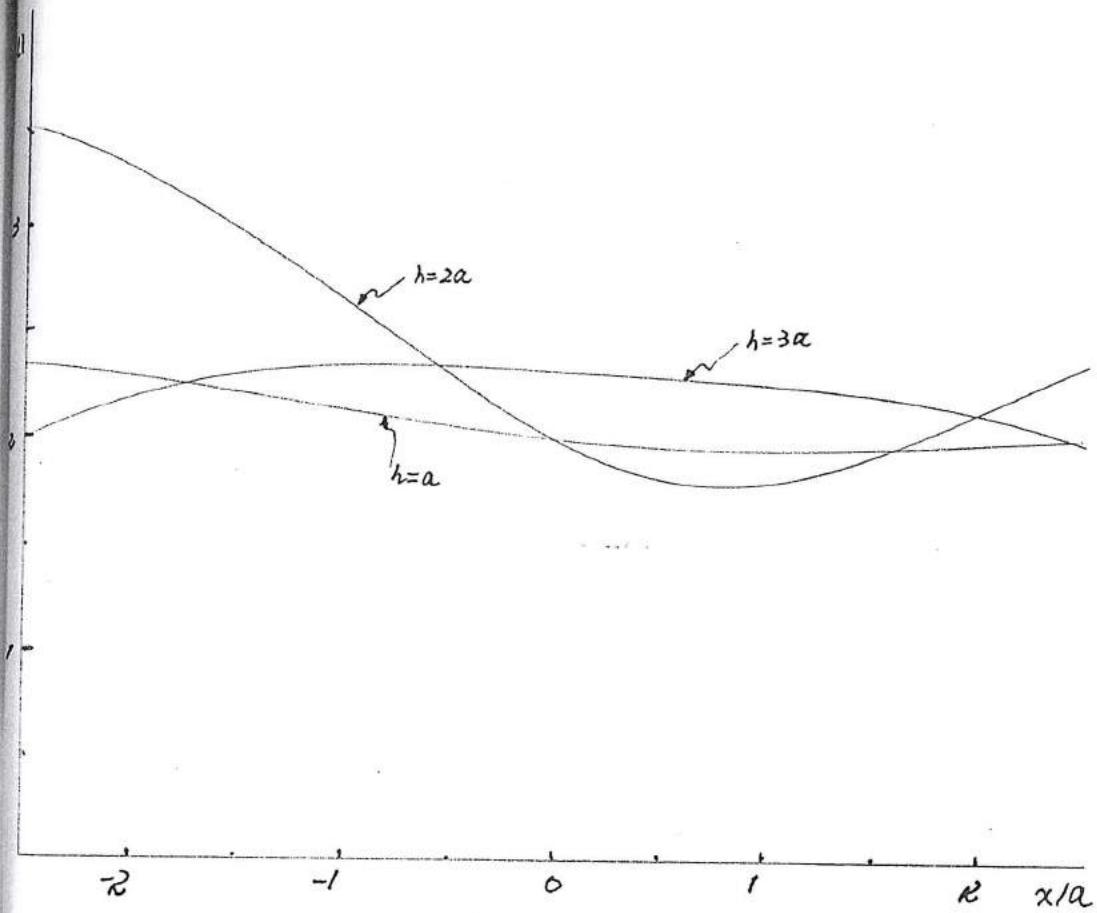
圖(12): 谷地对地面运动的影响. $\gamma = 0.85$



图(13) 坑槽对地面运动的影响。



圖(14)：矩槽對地面運動的影響。模型及參數同圖14。



图(15): 施槽对地面运动的影响, $\beta=0.1$

附录

在反演地球浅部结构时，界面的形状是重要的。到目前为止，已发展了不少合成弯曲界面波场的方法。本附录就弯曲界面波场计算的各种方法的理论依据及算法形态和解决实际问题的能力作出阐述并进行比较。

计算理论波场，就是解弹性动力学方程：

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{U} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) + \mu \nabla^2 \vec{U} + \nabla \lambda (\nabla \cdot \vec{U}) \\ + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{U}) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{U} + \vec{P}_f \quad (A-1)$$

的初边值问题。其中 $\vec{U}(x_i, t)$ 表示位移场； λ 、 μ 介质的拉梅常数； ρ 密度、 \vec{P}_f 体力。在不同的假定下解这个方程就得到了相应的方法。下面就能够计算弯曲界面理论波场的各种方法进行详细地介绍。

一、射线方法

射线方法又可按高频频近似所用的位置分为两类，一类是先用高频频近似简化方程 (A-1)，然后解高频频近似后的方程，得到 (A-1) 的高频频近似

解；属于这一类的方法有：标准射线法、偏轴射线法、高斯光束法、复相位匹配方法、Maslov 演近似方法；另一类是先在各种别的假定（如介质均匀等）下得到方程 (A-1) 的精确解，再利用高频率近似得到近似解；光学法和主曲率法就属于这一类。

由于采用高频率近似，这些方法的适用条件是：所考虑问题的特征尺度远大于波长，换句话说，也就是界面的曲率半径远大于波长，在研究地壳上地幔介质结构之中的体波是很合适的，在处理不均匀介质时，速度（更确切地说为介质的各种参数）和其梯度的比值比波长大得多。

1. 标准射线方法

基本方程

该方法，经过 Cerveny 等人的工作，不断改进，并用来合成波场，是目前用来反演具有弯曲界面、不均匀介质结构的很有效的方法。许多后来的方法，如偏轴射线、高斯光束、Maslov

渐近近似等方法都是从不同角度对标准射线方法的修正，在此我们打算详细地介绍这种方法的基本理论。

我们寻求体力 $\vec{f}(x, t) = 0$ 时 (A-1) 的形如

$$\vec{U}(x_i, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{U}^{(k)} F_k(t - \tau(x_i)) \quad (A-2)$$

的射线级数解。其中 $\tau(x_i)$ 是 t 时刻的波前，由方程

$$t = \tau(x_i) \quad (A-3)$$

来确定。 $F_k(\xi)$ 是一个复值函数，并满足：

$$F'_k(\xi) = dF_k(\xi)/d\xi = F_{k-1}(\xi) \quad (A-4)$$

$$F_k(\xi) = f_k(\xi) + i g(\xi) \quad (A-5)$$

$$g(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f_k(x) (x - \xi)^{-1} dx \quad (A-6)$$

把方程 (A-1) 写成张量形式

$$\begin{aligned} \rho U_{i,t} &= (\lambda + \mu) U_{j,i,j} + \mu U_{i,j,j} + \lambda_i U_{j,i,j} + \mu_j U_{i,j,j} \\ &\quad + \mu_{ij} U_{j,i} \end{aligned} \quad (A-7)$$

其中逗点前面的角标表示 \vec{U} 的分量，后面的表示微商， $i, j = 1, 2, 3$ 。把 (A-2) 代入 (A-7)，并注意到

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= \sum_{k=0}^{\infty} (U_{i,j}^{(k)} F_k - U_{i,j}^{(k)} T_{j,k} F'_k) \\ U_{i,j,m} &= \sum_{k=0}^{\infty} (U_{i,j,m}^{(k)} F_k - U_{i,j}^{(k)} T_{m,k} F'_k - U_{i,m}^{(k)} T_{j,k} F'_k \\ &\quad - U_i^{(k)} T_{j,m} F'_k + U_i^{(k)} T_{j,j} T_{m,k} F''_k) \end{aligned}$$

$$U_{i,tt} = \sum_{k=0}^{\infty} U_i^{(k)} F_k''$$

我们得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ F_k'' N_i(\vec{U}^{(k)}) - F_k' M_i(\vec{U}^{(k)}) + F_k L_i(\vec{U}^{(k)}) \} = 0$$

其中矢量算符 $\vec{N}[\vec{U}^{(k)}]$, $\vec{M}[\vec{U}^{(k)}]$ 和 $\vec{L}[\vec{U}^{(k)}]$ 的分量由

$$N_i[\vec{U}^{(k)}] = -\rho U_i^{(k)} + (\lambda + \mu) U_j^{(k)} \tau_{i,j} + \mu U_i^{(k)} \tau_{j,j} \quad (A-8)$$

$$\begin{aligned} M_i[\vec{U}^{(k)}] &= (\lambda + \mu) [U_{j,i}^{(k)} \tau_{j,j} + U_{j,j}^{(k)} \tau_{i,i} + U_j^{(k)} \tau_{i,j}] \\ &\quad + \mu [2U_{i,j}^{(k)} \tau_{j,j} + U_i^{(k)} \tau_{j,j}] + \lambda_{,i} U_j^{(k)} \tau_{i,j} \\ &\quad + \mu_{,j} U_j^{(k)} \tau_{i,i} \end{aligned} \quad (A-8')$$

$$\begin{aligned} L_i[\vec{U}^{(k)}] &= (\lambda + \mu) U_{j,i,j}^{(k)} + \mu U_{i,j,j}^{(k)} + \lambda_{,i} U_{j,j}^{(k)} \\ &\quad + \mu_{,j} U_{i,j}^{(k)} + \mu_{,j} U_{j,i}^{(k)} \end{aligned} \quad (A-8'')$$

由 (A-4), (A-7) 最终可写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ F_{k-2} N_i[\vec{U}^{(k)}] - F_{k-1} M_i[\vec{U}^{(k)}] + F_k L_i[\vec{U}^{(k)}] \} = 0$$

如果把 k 相同的项放在一起, 我们有

$$\begin{aligned} F_2 \{ N_i[\vec{U}^{(0)}] \} + F_1 \{ N_i[\vec{U}^{(1)}] - M_i[\vec{U}^{(0)}] \} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} F_k \{ N_i[\vec{U}^{(k+2)}] - M_i[\vec{U}^{(k+1)}] + L_i[\vec{U}^{(k)}] \} = 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left. \begin{aligned} N_i[\vec{U}^{(0)}] &= 0 \\ N_i[\vec{U}^{(1)}] - M_i[\vec{U}^{(0)}] &= 0 \\ N_i[\vec{U}^{(k+2)}] - M_i[\vec{U}^{(k+1)}] + L_i[\vec{U}^{(k)}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A-9)$$

取 $\vec{U}^{(0)} = 0 = \vec{U}^{(-2)}$, 我们可把 (A-9) 写为

$$N_i[\vec{U}^{(k)}] - M_i[\vec{U}^{(k-1)}] + L_i[\vec{U}^{(k-2)}] = 0 \quad (A-10)$$

方程 (A-10) 是标准射线法的基本方程, 可以用它来确定所有的振幅系数 $\vec{U}^{(k)}$ 和相位函数 φ 。

程源方程

由基本方程系统 (A-9) 的第一个方程

$$N_i[\vec{U}^{(0)}] = 0$$

由 (A-8), 上式可写为

$$U_j^{(0)} \{ -\rho \delta_{ij} + (\lambda + \mu) T_{i,j} T_{j,i} + \mu \delta_{ij} T_{k,j} T_{i,k} \} = 0 \quad (A-11)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

要使该方程组有非零解 $U_j^{(0)} (j=1, 2, 3)$, 就要求行列式

$$\begin{bmatrix} -\rho + (\lambda + \mu) T_{1,1}^2 + \mu T_{1,k} T_{k,1} & (\lambda + \mu) T_{1,1} T_{1,2} & (\lambda + \mu) T_{1,1} T_{1,3} \\ (\lambda + \mu) T_{1,1} T_{1,2} & -\rho + (\lambda + \mu) T_{2,2}^2 + \mu T_{2,k} T_{k,2} & (\lambda + \mu) T_{2,2} T_{2,3} \\ (\lambda + \mu) T_{1,1} T_{1,3} & (\lambda + \mu) T_{2,2} T_{2,3} & -\rho + (\lambda + \mu) T_{3,3}^2 + \mu T_{3,k} T_{k,3} \end{bmatrix} = 0$$

即

$$(T_{1,k} T_{k,1} - \frac{1}{\alpha^2})(T_{2,k} T_{k,2} - \frac{1}{\beta^2})^2 = 0$$

其中 $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $\beta^2 = \mu/\rho$ 。

于是 (A-11) 有非零解的条件为

$$T_{1,k} T_{k,1} = 1/\alpha^2 \quad T_{2,k} T_{k,2} = 1/\beta^2 \quad (A-12)$$

这个方程就是通常所说的程函方程。程函方程的特征线表示射线，相应的六个常微分方程（射线追踪系统）可写为

$$\frac{dx_i}{d\tau} = v^2 p_i \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -v^{-1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad i=1,2,3 \quad (A-13)$$

其中 $p_i = \partial \tau / \partial x_i$ 是波慢向量的分量， v 是波的相速度（对于 P 波， $v=\alpha$ ；S 波， $v=\beta$ ）。

输运方程

我们把 $\vec{U}^{(k)}$ 表示成

$$\vec{U}^{(k)} = U_p^{(k)} \hat{t} + U_{s1}^{(k)} \hat{n} + U_{s2}^{(k)} \hat{b} = \vec{U}_{||}^{(k)} + \vec{U}_{\perp}^{(k)} \quad (A-14)$$

其中坐标基 $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ 为射线坐标系的坐标基， \hat{t} 是射线的单位切向量， \hat{n} 单位主法向量， \hat{b} 是单位从法向量。

$$\vec{U}_{||}^{(k)} = U_p^{(k)} \hat{t}, \quad \vec{U}_{\perp}^{(k)} = U_{s1}^{(k)} \hat{n} + U_{s2}^{(k)} \hat{b}$$

由 (A-10) 可以得到 (Cerveny 和 Ravindra, 1971)：对于 P 波 $(\nabla \tau)^2 = \alpha^{-2}$ ，

$$\vec{U}_{\perp}^{(k)} = -\alpha^2 (\lambda + \mu)^{-1} [\vec{M}(\vec{U}^{(k-1)}) - \vec{L}(\vec{U}^{(k-2)})] \quad (A-15)$$

$$\frac{dU_p^{(k)}}{d\tau} + \frac{1}{2} U_p^{(k)} [\alpha^2 \nabla^2 \tau + \frac{d}{d\tau} \ln(\rho \alpha^2)] = g_k^{(0)}(\tau) \quad (A-16)$$

其中 $g_k^{(0)}(\tau) = \alpha (2\rho)^{-1} [\vec{L}(\vec{U}^{(k-1)}) - \vec{M}(\vec{U}_{\perp}^{(k)})] \cdot \nabla \tau \quad (A-17)$

对于 S 波 $(\nabla \tau)^2 = \beta^{-2}$ ，

$$U_p^{(k)} = \beta^2 (\lambda + \mu)^{-1} [\vec{M}(\vec{U}^{(k-1)}) - \vec{L}(\vec{U}^{(k-2)})] \cdot \hat{t} \quad (A-18)$$

$$\frac{dU_{S1}^{(k)}}{dT} - \beta T U_{S2}^{(k)} + \frac{1}{2} U_{S1}^{(k)} [\beta^2 \gamma^2 T + \frac{d}{dT} \ln(\beta^2 \rho)] = g_k^{(3)}(T) \quad (A-19)$$

$$\frac{dU_{S2}^{(k)}}{dT} - \beta T U_{S1}^{(k)} + \frac{1}{2} U_{S2}^{(k)} [\beta^2 \gamma^2 T + \frac{d}{dT} \ln(\beta^2 \rho)] = g_k^{(3)}(T) \quad (A-20)$$

其中

$$g_k^{(2)} = (\beta \rho)^{-1} [\vec{L}(\vec{U}^{(k-1)}) - \vec{M}(U_p^{(k)} \vec{t})] \cdot \vec{n} \quad (A-21)$$

$$g_k^{(3)} = (\beta \rho)^{-1} [\vec{L}(\vec{U}^{(k-1)}) - \vec{M}(U_p^{(k)} \vec{t})] \cdot \vec{b} \quad (A-22)$$

Γ 是射线的挠率， K 是主曲率。方程(A-16)、(A-19)和(A-20)通常被称作输运方程。由它们可以确定射线振幅系数 $\vec{U}^{(k)}$ 。

振幅系数的确定和几何扩散因子 L

在射线坐标系 (T, γ_1, γ_2) 中，位置矢量 \vec{x} 为：

$$\vec{x} = \vec{x}(T, \gamma_1, \gamma_2),$$

考虑一射线管，其横截面积为

$$d\sigma = J d\gamma_1 d\gamma_2, \quad J = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \gamma_2} \right|$$

$$L = J^{\frac{1}{2}}$$

L 就是几何扩散因子。可以得到(A-16)、(A-19)和(A-20)的解

$$U_p^{(k)} = (\alpha \rho J)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \psi_p^{(k)}(\gamma_1, \gamma_2) + \int_{T_0}^T g_k^{(1)}(J, \rho, \alpha)^{\frac{1}{2}} dT \right\} \quad (A-23)$$

$$U_{S1}^{(k)} = (\beta \rho J)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \psi_{S1}^{(k)}(\gamma_1, \gamma_2) \cos \theta(T, T_0) + \psi_{S2}^{(k)}(\gamma_1, \gamma_2) \sin \theta(T, T_0) + \int_{T_0}^T [g_k^{(2)} \cos \theta(T, \frac{1}{3}) + g_k^{(3)} \sin \theta(T, \frac{1}{3})] (\beta \rho J)^{\frac{1}{2}} d\frac{1}{3} \right\} \quad (A-24)$$

$$U_{S2}^{(k)} = (\beta \rho J)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \psi_{S1}^{(k)}(\gamma_1, \gamma_2) \cos \theta(T, T_0) - \psi_{S2}^{(k)} \sin \theta(T, T_0) + \right.$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} [g_k^{(2)} \cos \theta(\tau, \frac{1}{3}) - g_k^{(3)} \sin \theta(\tau, \frac{1}{3})] (\rho \beta \tau)^{\frac{1}{2}} d\frac{1}{3} \quad (A-25)$$

$$\theta(\tau, \tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau} \beta \tau d\tau \quad (A-25a)$$

其中 $\psi_p^{(k)}$, $\psi_{s1}^{(k)}$ 和 $\psi_{s2}^{(k)}$ 是 τ_1 , τ_2 的任意函数, 它们由源的类型确定。

在合成理论波场时, 根据需要来选择 k , 一般取 $k=0$, 由源函数来定 F_k 。当射线遇到界面, 并发生反射或透射时, 乘上相应的平面反射透射系数, 再把所有的到达所考虑点的射线迭加起来, 就得到理论波场。

这种方法可以处理相当一般的介质结构, 如横向不均匀和弯曲界面, 之中的波场问题, 用它来计算理论波场既快又便宜, 不仅可用于理论研究目的, 也可用于日常的实际资料解释工作。同时, 它的理论也较为成熟和完整, 程序也较为成熟。但该方法有着严重的不足和困难。除在本节开头所述的射线方法所共存的不足之外, 它还不能用来计算焦散区、影区和亮区边界区域、临界区的波场, 前两者可以从 A-23)、(A-24)、(A-25)可以看出, 在这些区域几何扩散因子 L 为零, 在临界区失效的原因是, 在射线

近似下，首波的位移 (Červený 和 Ravindra, 1971)

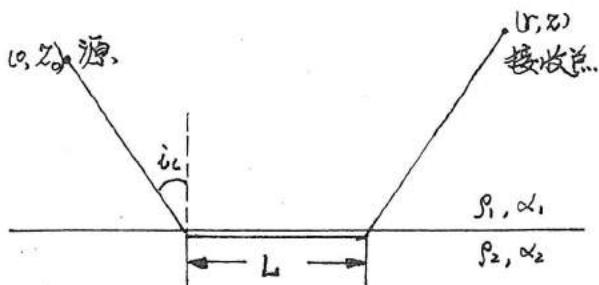
$$\vec{U} = \frac{i}{\omega} \frac{2\sqrt{2}}{\rho_2 \alpha_2} \frac{\rho_1 \alpha_1^2}{(1 - \alpha_1^2/\alpha_2^2)} \frac{1}{r^{1/2} L^{3/2}} \exp[i\omega(t_n - t)] \vec{H} \quad (A-26)$$

其中 \vec{H} 是方向矢量，

$$t_n = |z + z_0| / (\alpha_1 \cos i_0) + L/\alpha_2$$

从 (A-26) 可见，当 $L \rightarrow 0$

时，即临界区， $\vec{U} \sim L^{-3/2} \vec{H}$ 。同时，该方法



图(A-1): 首波示意图

所计算的波场不包括非射线，如非均匀波、通道波和衍射波等的波场。而奇异区和非射线波场在资料解释中往往是很重要的。再则在所考虑的时间域内，可能达到的射线数目是很大的，要选择贡献大的射线是很困难的。

2. 偏轴射线、高斯光束方法

偏轴射线方法

偏轴射线方法和标准射线方法的主要区别在于求几何扩散因子。在标准射线方法中，求几何扩散因子是求射线管的面程；而在偏轴射线中是在解程函方程时一并求出几何扩散因子，这是通过引入射线中心坐标系 (Červený, 1982)。

把 τ 在中心射线周围展开来实现的。

射线中心坐标系 $(\vec{t}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

\vec{t} 为射线的单位切向， $\vec{e}_1 = \vec{n} \cos \theta - \vec{b} \sin \theta$, $\vec{e}_2 = \vec{n} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta$, 其中 θ 由(A-25a)给出。在此坐标系下分解 $\vec{U}^{(k)}$, 可把输运方程写为一致形式。

$$\vec{U}^{(k)} = U_p^{(k)} \vec{t} + U_{s1}^{(k)} \vec{e}_1 + U_{s2}^{(k)} \vec{e}_2$$

输运方程

$$\frac{dU^{(k)}}{d\tau} + \frac{1}{v} U^{(k)} (v^2 \nabla^2 \tau + \frac{d \ln(Pv^2)}{d\tau}) = g^{(k)}(\tau) \quad (A-27)$$

对于P波 $U^{(k)} = U_p^{(k)}$, $v^2 = \alpha^2$, $g^{(k)} = g_k^{(1)}$ (A-17); 对于S波 $v = \beta$, 当取 $U^{(k)} = U_{s1}^{(k)}$ 时, $g^{(k)} = g_k^{(2)}$ (和(A-21)不同的是把 \vec{n} 换为 \vec{e}_1); 取 $U^{(k)} = U_{s2}^{(k)}$, $g^{(k)} = g_k^{(3)}$ [A-22]中的 \vec{n} 换为 \vec{e}_2]。 (A-27) 的解可写为

$$U^{(k)} = [\Gamma(\tau) v(\tau) p(\tau)]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \phi_{C_1, C_2}^{(k)} + \int_{C_1}^{\tau} [\Gamma(\tilde{\tau}) v(\tilde{\tau}) p(\tilde{\tau})]^{\frac{1}{2}} g^{(k)}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right\} \quad (A-28)$$

在该坐标系下, 位置矢量 $\vec{r}(s, \varphi_1, \varphi_2)$:

$$\vec{r}(s, \varphi_1, \varphi_2) = \vec{r}(s, 0, 0) + \varphi_1 \vec{e}_1(s) + \varphi_2 \vec{e}_2(s) \quad (A-29a)$$

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h^2 ds^2 + d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 \quad (A-29b)$$

$$h = 1 - K (\varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \sin \theta) \quad (A-29c)$$

其中 K 为主曲率。

程函方程和几何扩散因子

$$\nabla \tau = \frac{1}{h} \frac{\partial \tau}{\partial s} \vec{t} + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi_2} \vec{e}_2 = \frac{1}{h} \tau_s \vec{t} + \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2$$

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{h^2} T_{,S}^2 + T_{,1}^2 + T_{,2}^2 = \frac{1}{v^2} \quad (A-30)$$

把 $T(S, q_1, q_2)$ 展开为 q_1, q_2 的多项式

$$T(S, q_1, q_2) = T(S, 0, 0) + \frac{1}{2} q^T \vec{M} q + O(||q||^3) \quad (A-31)$$

其中

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad M_{ij} = \left[\frac{\partial^2 T(S, q_1, q_2)}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{q_1=q_2=0}$$

$||q|| = (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}$ 。把 (A-30) 代入到 (A-29)，我们得到

$$\frac{d\vec{M}}{dT} + v M^2 = -v^{-2} \vec{V} \quad (A-32)$$

其中

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}.$$

由 (Červený 和 Ratnindra, 1971)

$$\nabla^2 T = \frac{1}{Jv} \frac{d}{dT} \left(\frac{J}{v} \right)$$

并且由 (A-29C)：

$$\nabla^2 T = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{v} \right) + M_{11} + M_{22}$$

于是我们可以得到

$$\begin{aligned} T(T) &= T(T_0) \exp \left\{ \int_{T_0}^T v^2 (M_{11} + M_{22}) dT \right\} \\ &= T(T_0) \exp \left\{ \int_{T_0}^T v^2 + r \vec{M} dT \right\} \end{aligned}$$

\vec{M} 和相前曲率矩阵 \vec{K} (赵连社和姚振兴, 1985; Deschamps, 1972) 的关系为：

$$\vec{M} = \frac{1}{v} \vec{K} \quad (A-33)$$

高斯射线束方法

高斯光束方法和偏轴射线方法一样，只把
 \vec{M} 矩阵变为复数：

$$\vec{M} = \frac{1}{v} \vec{R} + i \vec{B} \quad (A-34)$$

它的几何扩散因子 L 为

$$L = [\det \vec{M}]^{\frac{1}{2}}$$

\vec{M} 的定义为 $\vec{M} = \frac{1}{v} \frac{d}{ds} \ln \vec{M}$ 。

从 (A-33)、(A-34) 可见，偏轴射线方法中的波前面上的振幅分布一样，而高斯光束方法中的波前面上的振幅曾铃形分布。这两种方法均采用动力射线追踪传统 (A-32)，它们不仅给出了中心射线的振幅，而且给出了中心射线附近偏轴射线的振幅，只要追踪足够多条射线，就可以计算全空间的波场，从而避免了标准射线方法中所使用的费时的两点射线追踪。高斯光束法的优点已在前言中谈过。

3、光学法、主曲率法和复相位匹配法

光学法是将广义射线方法所得到的势函数

$$\phi(r, t, z) = f(z) * \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} * \text{Im} (T_{CP}) \frac{\int P}{\eta} e^{i k z} \right] \quad (A-35)$$

其中 $T(P)$ 是透射系数， P 是复值的射线参数；
 $\eta_i = (\frac{1}{v_i^2} - P^2)^{\frac{1}{2}}$ ； Γ 是 de-Hoop 积分路径；在初动
 近似

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{1}{[2(t-t_0)]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^2t}{dp^2} \right)_{t=t_0}^{-\frac{1}{2}} \quad (A-36)$$

之下，当界面是平面时，几何扩散因子 L

$$L' = \left\{ \sqrt{\frac{P}{\Gamma}} \frac{1}{\eta_i} \left[\left| \frac{d^2t}{dp^2} \right| \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}_{t=t_0} \quad (A-37)$$

改变为

$$\begin{aligned} \phi &= f(t) * \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma} * \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \right] \operatorname{Re}[T(p_0)] \cdot t^{-1} \\ &= f(t-t_0) \left(\frac{A}{A_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re}[T(p_0)] \end{aligned} \quad (A-38)$$

其中 A 和 A_0 分别表示接收点和起始点的波前曲面的面积， Re 表示取实部。再把 (A-38) 推广到曲界面的情况，用考虑射线管的方法，如同标淮射线法一样，来求几何扩散因子。

主曲率法和光学法的区别在于几何扩散因子的求法，前者是把几何扩散因子和相前曲率矩阵联系起来求的。

$$L = \left[\frac{(R_1+b)(R_2+b)}{R_1 R_2} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{S_B}{S_A}} \quad (A-39)$$

其中 R_1 和 R_2 是 A 点的相前曲面的主曲率半径，
 b 是 A、B 间的射线长。引入相前矩阵

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \quad (A-40)$$

当射线穿过界面时有

$$k' \vec{H}'^T \vec{Q}' \vec{H}' = k \vec{H}^T \vec{Q} \vec{H} + \vec{S} h \quad (A-41)$$

其中带撇号的表示透射后的量； $h = k' \cos \theta' - k \cos \theta$ ， θ 是入射角， θ' 透射角； \vec{S} 界面的曲率矩阵， \vec{H} 投影矩阵。并且该方法把势函数表示为更一般的形式：

$$\phi = L^{-1} R_e [R(p)] f(t-t_0) + L^{-1} I_m [R(p)] H [f(t-t_0)] \quad (A-42)$$

其中 H 表示 Hilbert 变换， $R(p)$ 是反射或透射系数。

复相位匹配方法，直接在复空间中解频域中位移势所满足的 Helmholtz 方程，在高频近似下，把位移势表示为射线的迭加，然后得到复射线束的最终表达式：

$$g(x, y, z) = g_{(0)} \left[\frac{\det \vec{Q}(z)}{\det \vec{Q}_{(0)}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp[i k \vec{S}(\vec{z})] \quad (A-43)$$

$$\vec{S}(\vec{z}) = \vec{z} + \frac{1}{k} \vec{r} \cdot \vec{Q}(z) \vec{r} \quad (A-44)$$

$$\vec{r} = (x, y) \quad (A-45)$$

\vec{Q} 和 (A-40) 相同，所不同的是 g_1, g_2 在这里是复数。经过界面时也有 (A-41) 式。

这三种方法，都是在假定介质是均匀的基础上得到的。复相位匹配方法克服了前两种不

能计算焦散区场的不足。同时，这种方法可推广到不均匀介质。我们知道，在不均匀介质中，频域中的势函数仍满足 Helmholtz 方程 (Richards, 1974)，只要假定

$$\varphi = \Psi \exp[iw \int_{r_0}^r \frac{dz}{v}] \quad (A-46)$$

即可得到 Schrödinger 型方程，而得到复射线束的最终解。由于这个推广工作没有做，在此只能谈一点想法。

二、Kirchhoff—Helmholtz 积分法

在均匀介质假定下，方程 (A-1) 可化为

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \Psi(\vec{r}_0, t) \quad (A-47)$$

其中 U 和 Ψ 分别是标量位移势和源势。利用格林定理，可以得到

$$\begin{aligned} U(\vec{r}, t) = & \int_V \int_{t_0}^{\infty} G(\vec{r}_0, \vec{r}, t-t_0) \Psi(\vec{r}_0, t_0) dt_0 dV_0 + \\ & + \int_V [G(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{r}_0, 0) - U(\vec{r}_0, 0) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0, t)}{\partial t}] dV_0 \\ & + \int_V \int_{t_0}^{\infty} c^2 [G(\vec{r}, \vec{r}_0, t-t_0) \nabla_0 U(\vec{r}_0, t_0) \\ & - U(\vec{r}_0, t_0) \nabla_0 G(\vec{r}, \vec{r}_0, t-t_0)] \cdot \vec{n}(\vec{r}_0) dt_0 dS_0 \end{aligned} \quad (A-48)$$

其中 G 是格林函数，三维空间的 G 。

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0, t-t_0) = \frac{\delta(ct-\tau)}{4\pi c^2 |\vec{r}-\vec{r}_0|} ; \quad \tau = \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c} = \frac{R}{c} \quad (A-49)$$

代入(A-48)可得：

$$u(\vec{r}, t) = \int_{\partial V} \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial R}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{RC} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\} dS_0 + f(\vec{r}, t) \quad (A-50)$$

其中 $f(\vec{r}, t)$ 表示(A-48)中的前两项，方括号表示其中函数取边界 ∂V 上的点在 $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c}$ 时刻的值。

在边界上，假定

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{R_0} f(t - \frac{R_0}{c}) (1+r) \quad (A-51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial R_0}{\partial n} (1-r) \left[-\frac{1}{R_0^2} f(t - \frac{R_0}{c}) - \frac{1}{cR_0} f'(t - \frac{R_0}{c}) \right] \quad (A-52)$$

其中 r 是反射系数， $f(t)$ 源函数。这个假定叫做 Kirchhoff、物理光学或切平面假定。该假定实际上是一个近似， R_0/c 是源到界面的时间延迟， R_0 几何扩散因子，从(A-38)可见，(A-51)实际上是一个射线的表达式，同时所使用的反射系数 r 是平面反射系数。把(A-51)、(A-52)代入到(A-50)就得到一次反射的位移势函数。它的计算是用数值积分来实现的。

1. Aki, K., and Larnar, K. L., Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH wave, J. Geophys. Res. 75, 933 - 954, 1970.
2. Alterman, Z. S. and Karal, F. C., Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, Bull. Seis. Soc. Am. 58, 367 - 398, 1968.
3. Baker, B. B., and Copson, E. T., The mathematical theory of Huygens' principle, Oxford, At The Clarendon Press, 1953.
4. Borgnis, F. E., and Papas, C. H., Randwerprobleme der Mikrowellenphysik, Berlin, Germany, Springer - Verlag, 1955.
5. Boore, D., The effect of simple topography on seismic waves: Implication for the accelerations recorded at Pacoima Dam, San Fernando Valley, California, Bull. Seis. Soc. Am. 63, 1603 - 1609, 1973.
6. Bouchon, M., Discrete wave number representation of elastic wave fields in three - space dimensions, J. Geophys. Res. 84, No B7, 3609 - 3614, 1979.
7. Bouchon, M., Calculation of complete seismograms for an explosive source in a layered medium, Geophys. 45, 197-203, 1980.
8. Bouchon, M., A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, Bull. Seis. Soc. Am. 71, 959 - 971, 1981.
9. Červený, V., Expansion of a plane wave into Gaussian beams, Studia geoph. et geod. 26, 120 - 131, 1982.
10. Červený, V., Synthetic body wave seismograms for laterally varying layered structures by the Gaussian Beam method, Geophys. J. 73, 389 - 426, 1983.
11. Červený, V., and Ravindra, R., Theory of Seismic Head Waves, University of Toronto Press, 1971.
12. Červený, V., Molotkov, I. A., and Psencík, I., Ray Method in Seismology, Universita Karlova Praha, 1977.
13. Červený, V., and Hron, F., The ray series method and ray tracing systems for 3 - D inhomogeneous media, Bull. Seis.

- Soc. Am. 70, 47 - 77, 1980.
- 14. Červený, V., and Psencík, I., Gaussian beams and paraxial ray approximation in three - dimensional elastic inhomogeneous media, J. Geophys. 53, 1 - 15, 1983.
 - 15. Červený, V., and Klimes, L., Synthetic body wave seismograms for three - dimensional laterally varying media, Geophys. J. 79, 119 - 133, 1984.
 - 16. Chapman, C. H., and Drummond, R., Body - wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory, Bull. Seis. Soc. Am. 72, S277 - S 317, 1982.
 - 17. Chung Shun - Lien, and Kong Jin Au, Scattering of waves from periodic surfaces, Proc. IEEE 69, 1132 - 1144, 1981.
 - 18. Deschamps, G. A., Ray techniques in electromagnetics, Proc. IEEE 60, 1022 - 1035, 1972.
 - 19. Hong Tai - Lin and Helmburger, D. V., Glorified Optics and wave propagation in nonplanar structure, Bull. Seis. Soc. Am. 68, 1313 - 1330, 1978.
 - 20. Lee Jia - Ju and Langston, C. A., Three - dimensional ray tracing and the method od principal curvature for geometrical spreading, Bull. Seis. Soc. Am. 73, 765 - 780, 1983.
 - 21. Millar, R. F., The Rayleigh hypotheses and a related least-squares solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers, Radio Sci. 8, 785 - 796, 1973.
 - 22. Morse, P. M., and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics, McGraw - Hill, New York, 1953.
 - 23. Richards, P. G., Weakly coupled potentials for high - frequency elastic waves in continuously stratified media, Bull. Seis. Soc. Am. 64, 1575 - 1588, 1974.
 - 24. Olsen, A. H., The discrete wavenumber / finite element method for synthetic seismograms, Ph.D Dissertation, California Institute of Technology, 1982.
 - 25. Sánchez - Sesma, F. J., Herrera, I., and Aviles, J., A boundary method for elastic wave diffraction: Application to scattering of SH waves by surface irregularities, Bull.

- Seis. Soc. Am. 72, 473 - 490, 1982.
- 26. Sánchez - Sesma, F. J., and Rosenblueth, E., Ground motions at canyons of arbitrary shape under incident SH waves, Int. J. Earthq. Eng. Struct. Dyn. 7, 441 - 450, 1979.
 - 27. Smith, W. D., The application of finite element analysis to body - wave propagation problems, Geophys. J. 42, 747 - 768, 1975.
 - 28. Scott, P., and Helmberger, D. V., Application of the Kirchhoff - Helmholtz integral to problems in seismology, Geophys. J. 72, 237 - 254, 1983.
 - 29. Waterman, P. C., Scattering by periodic surfaces, J. acoust. Soc. Am. 57, 791 - 802, 1975.
 - 30. Wong, H. L., Trifunac, M. D., and Westermo, B., Effects of surface and subsurface irregularities of the amplitudes of monochromatic waves, Bull. Seis. Soc. Am. 67, 361-, 1977.
 - 31. Yao Zhen - Xing (姚振兴) and Harkrider, D. G., A generalized reflection - transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms, Bull. Seis. Soc. Am. 73, 1685 - 1699, 1983.
 - 32. 柯朗, R., 希尔伯特, D., 数学物理方法, 1981. 科学出版社
 - 33. 玻恩, M., 沃耳夫, E., 光学原理, 科学出版社, 1978
 - 34. 赵连社, 姚振兴, 复相位匹配方法及其在具有弯曲界面层状结构问题中的应用—理论, 地球物理学报 28, 第一期, 1985.