FAS

1. 非线性迭代

我们使用 PR 迭代方法解耦非线性和限制。 首先，我们通过解线性系统得到初值 $\boldsymbol{u}_k^0, p_k^0$:

$$\frac{\mu}{\rho}\int_\Omega (\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_k^0)\cdot\boldsymbol{\varphi}_k \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{T\in\mathcal{T}_k}\int_T \nabla p_k^0\cdot\varphi_k \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\varphi_k \mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \forall\varphi\in X_k \quad (1)$$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_k}\int_T \nabla q_k\cdot\boldsymbol{u}_k^0 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega g q_k \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g_N q_k \mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \forall q_k\in M_k. \quad (2)$$

知道了 $\boldsymbol{u}_k^0, p_k^0$，构造一个子列 $\boldsymbol{u}_k^{n+1}, p_k^{n+1}$ $(n\geq 0)$, α 是一个增强收敛的正的参数。

1). 没有约束的非线性迭代:求解 $\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}$,通过

$$\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{u}_T^n - \frac{\mu}{\rho}K_T^{-1}\boldsymbol{u}_T^n - \nabla_T p_k^n + \boldsymbol{f}_T \\
K_T^{-1} &= \frac{1}{|T|}\int_T K^{-1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\gamma &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4\frac{\beta}{\rho}\left|\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}\right|}
\end{aligned}$$

2). 已知 $\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}$ 计算 $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, p_k^{n+1})$:

$$\begin{bmatrix} A_\alpha & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{n+\frac{1}{2}} \\ w \end{bmatrix}$$

其中

$$A_{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_{\Omega}(\boldsymbol{u}_k^{n+1})\cdot\varphi_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega}(K^{-1}\boldsymbol{u}_k^{n+1})\cdot\varphi_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$B=\sum_{T\in\mathcal{T}_k}\int_T\nabla p_k^{n+1}\cdot\varphi_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{f}_{n+\frac{1}{2}}=\int_{\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\varphi_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{\alpha}\int_{\Omega}\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}\cdot\varphi_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\frac{\beta}{\rho}\int_{\Omega}\left|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}\right|(\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}\cdot\varphi_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$w=-\int_{\Omega}gq_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega}g_Nq_k\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

2.非线性多重网格的算法

Full Approximation Scheme(FAS)

假设方程为

$$\boldsymbol{L}(z)=s$$

定义误差 $\boldsymbol{e}$ 和残差 $\boldsymbol{r}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}&=\boldsymbol{z}-\boldsymbol{v},\\ \boldsymbol{r}&=\boldsymbol{s}-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

首先，给一个初值 $\boldsymbol{v}^0$,对它进行前磨光

1. Pre-smoothing: $1\le j\le m$, 通过 $\boldsymbol{v}^j=R_k\boldsymbol{v}^{j-1}$ 对 $\boldsymbol{v}^0$ 进行 m 次磨光，现在的近似 $\boldsymbol{v}^j=R_k\boldsymbol{v}^{j-1}$
2. 现在把细网格上的残差和近似解限制到粗网格上: $\boldsymbol{r}_{k-1}=\boldsymbol{I}_k^{k-1}(\boldsymbol{s}_k-\boldsymbol{L}_k(\boldsymbol{v}_k)),\ \boldsymbol{v}_{k-1}=\boldsymbol{I}_k^{k-1}\boldsymbol{v}_k$
3. 在粗网格上采用直接解法求解问题: $\boldsymbol{L}_{k-1}(\boldsymbol{z}_{k-1})=\boldsymbol{L}_{k-1}(\boldsymbol{v}_{k-1})+\boldsymbol{r}_k-1$
4. 计算粗网格误差的近似: $\boldsymbol{e}_{k-1}=\boldsymbol{z}_{k-1}+\boldsymbol{r}_{k-1}$
5. 把 e_k 投到细网格上的，并校正细网格的值: $\boldsymbol{v}_{m+1}=\boldsymbol{v}_k+I_{k-1}^k\boldsymbol{e}_{k-1}$
6. 后磨光: $m+2\le j\le 2m+1$, 通过 $\boldsymbol{v}^j=R_k'\boldsymbol{v}^{j-1}$ 对 $\boldsymbol{v}_{m+1}$ 进行 m 次磨光

混合元的**FAS**

思路:

I. 首先我们给它一个初始的解，记为 (u^0,p^0)， 并且我们给出初始的参数。

II. 我们需要进行 MG 迭代

- Pre-smoothing(前磨光):
  - $(u^0, p^0) \to (u, p)$ (P-R)迭代
  - 计算残差 $r = f - Au$

- Restrict to the coarse grid(把信息限制到粗网格上):
  - 生成提升算子和限制算子 Pro_u, Res_u
  - 计算rc = Res_u@r, uc = Res_u@u/4, pc = p[:NNc]

- 粗网格校正
  - 获得粗网格上的矩阵 (可以通过线性混合元得到)

- 细网格校正
  - 把粗网格的信息提升到细网格上(这里需要之前所对应的细网格上的信息，包括矩阵和当时限制到这一层时的 (u, p))

- Prstsmoothing(后磨光):
  - 使用 $P - R$ 迭代求解 DarcyForchheimer 方程

In [ ]:

```

```