Darcy-forchheimer Equation 的块中心差分方法 (二维)

李奥

November 26, 2018

目录

符号

符号说明	
符号	意义
Ω	$(0,1)\times(0,1)$(二维区域)
p	压强 (压力)
$\boldsymbol{u}$	流体速度
μ	黏性系数
K	渗透张量
k	正数且 K = kI(I 是单位矩阵)
β	非线性项系数
ρ	流体密度
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}\in(L(\Omega)^2)^2$, a vector function
$g(\boldsymbol{x})$	$g(\boldsymbol{x})\in L^2(\Omega)$, a scalar function
nx	x 方向剖分的段数
ny	y 方向剖分的段数
h_x	x 方向剖分的步长
h_y	y 方向剖分的步长
NC	单元个数
NE	边的个数

模型

$$\begin{cases}(\dfrac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f} \quad in \;\; \Omega=(0,1)\times(0,1)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=g \quad in \;\; \Omega\\ \boldsymbol{u}=0 \quad on \;\; \partial\Omega\end{cases}$$

记 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, 那么有

$$\begin{cases}(\dfrac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)u+\nabla_x p=f_1 \quad (i)\\ (\dfrac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)v+\nabla_y p=f_2 \quad (ii)\\ \partial_x u+\partial_y v=g \quad (iii)\end{cases}$$

差分离散

利用一阶向前差分把方程变成差分方程,现在从 $cell$ 和 $edge$ 的角度考虑模型。
对于 (i), 从内部纵向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部纵向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$.

左右两边的 $cell$ 所对应的 p 分别记为 p_l、p_r.u 为 $edge$ 的 y 方向的 m 条边中点,记为 u_m。按照 $mesh$ 里的编号规则排序。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(\frac{\mu}{k} + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}|) \cdot u_m + \frac{p_r - p_l}{h^x_{i+1/2}} = f_{1,m} \tag{3.1}$$

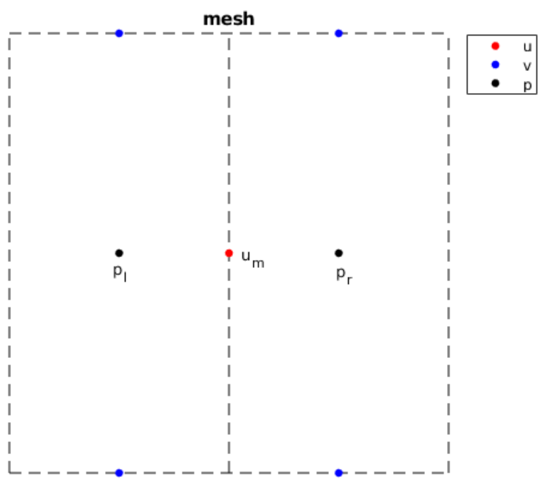


图 1: $edge_y$

对于 (ii), 从内部横向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部横向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$. $cell$ 所对应的 p 与 (i) 中的相同。v 为 $edge$ 的 x 方向的 m 个中点,记为 v_m。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(\frac{\mu}{k} + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}|) \cdot v_m + \frac{p_l - p_r}{h^y_{j+1/2}} = f_{2,m} \tag{3.2}$$

现在我们先求解 p, 再求解 $\boldsymbol{u}$.

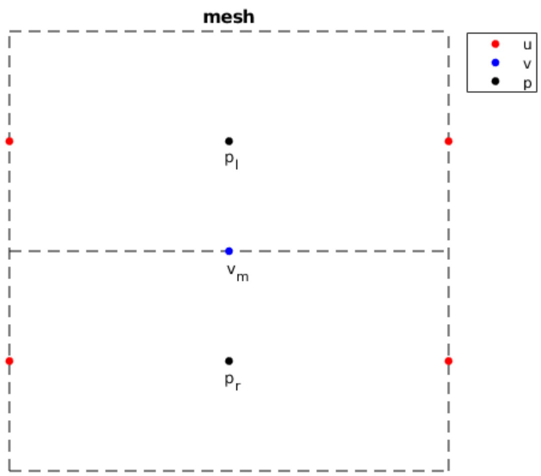


图 2: $edge_x$

对于 (iii), 从 $cell$ 的角度考虑：由于单元是四边形单元，我们记单元所对应边的局部编号为 [0,1,2,3] (StructureQuadMesh.py 里的网格), 第 i 个单元所对应的边记为 $e_{i,0}, e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}$。

则 (iii) 式第 i 个单元所对应的差分方程为:

$$\frac{u_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_i^x} + \frac{v_{e_{i,2}} - v_{e_{i,0}}}{h_i^y} = g_i \tag{3.3}$$

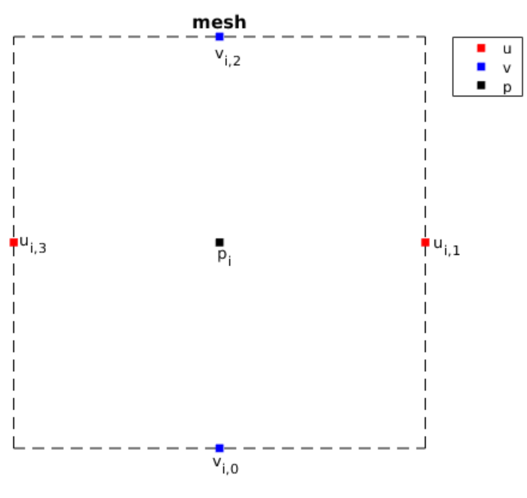


图 3: cell

现在我们先求解 p, 再求解 $\boldsymbol{u}$.

对于 (3.1) 我们有

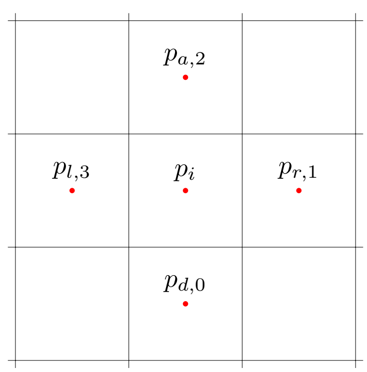
$$u_m = \frac{f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h^x_{i+1/2}}}{(\mu/k + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}|)_m} \tag{3.4}$$

对于 (3.2) 我们有

$$v_m = \frac{f_{2,m} - \frac{p_a - p_d}{h^y_{j+1/2}}}{(\mu/k + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}|)_m} \tag{3.5}$$

注: 记 $\mu/k + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}| = C$, $p_{l,1}$ 、$p_{r,3}$ 、$p_{a,0}$ 和 $p_{d,2}$ 是同一个点处的 p, 记为 p_i.
且有

$$\frac{f_{1,1} - \frac{p_{r,1} - p_{l,1}}{h^x_i}}{C_{i,1}} = \mathcal{W}_{i,1}$$
$$\frac{f_{1,3} - \frac{p_{r,3} - p_{l,3}}{h^x_i}}{C_{i,3}} = \mathcal{W}_{i,3}$$
$$\frac{f_{2,2} - \frac{p_{a,2} - p_{d,2}}{h^y_i}}{C_{i,2}} = \mathcal{W}_{i,2}$$
$$\frac{f_{2,0} - \frac{p_{a,0} - p_{d,0}}{h^y_i}}{C_{i,0}} = \mathcal{W}_{i,0}$$



均匀剖分

由于这里的方法是均匀剖分,所以离散形式中的 x, y 方向的步长可以用 h_x, h_y 统一表示。

求解 p 的显式格式

要求解 p, 我们把 (3.4) 和 (3.5) 代入到 (3.3) 即可。但是,我们现在需要分情况讨论:

1). 当 $u_{i,3}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (左下角的边界函数),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-u_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,0}}{h_y}$$

2). 当 $u_{e_{i,3}}$ 与 $v_{e_{i,2}}$ 是边界边上中点的值时 (左上角的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{e_{i,1}}-u_{e_{i,3}}}{h_x}+\frac{v_{e_{i,2}}-\mathcal{W}_{e_{i,0}}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i=g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}-\frac{v_{i,2}}{h_y}$$

3). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (右下角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=g_i+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}+\frac{v_{i,0}}{h_y}$$

4). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (右上角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i=g_i+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}-\frac{v_{i,2}}{h_y}$$

5). 当 $u_{i,3}$ 是边界边上的中点的值时 (左边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-u_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}\end{aligned}$$

6). 当 $u_{i,1}$ 是边界边上中点的值时 (右边的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i =&g_i+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}\end{aligned}$$

7). 当 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (下边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i =&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{v_{i,0}}{h_y}\end{aligned}$$

8). 当 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (上边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i =&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}-\frac{v_{i,2}}{h_y}\end{aligned}$$

9). 全部为内部边的中点的值时 (内部单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i =&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}\end{aligned}$$

对于边界单元的 p, 需要做下特殊处理:

1) u 的左边的单元与 u 本身相等时

$$
\begin{aligned}
&C_{\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}}+\nabla p=f_{1,\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow \frac{p_l-p_r}{h_x}=f_{1,\frac{1}{2}}-C_{\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow p_r=-h_xf_{1,\frac{1}{2}}+h_xC_{\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}}+p_l
\end{aligned}
$$

2) u 的右边的单元与 u 本身相等时

$$
\begin{aligned}
&C_{Nx+\frac{1}{2}}u_{Nx+\frac{1}{2}}+\nabla p=f_{1,Nx+\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow \frac{p_r-p_l}{h_x}=f_{1,Nx+\frac{1}{2}}-C_{Nx+\frac{1}{2}}u_{Nx+\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow p_r=h_xf_{1,\frac{1}{2}}-h_xC_{\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}}+p_l
\end{aligned}
$$

3) v 的下边的单元与 v 本身相等时

$$
\begin{aligned}
&C_{\frac{1}{2}}v_{\frac{1}{2}}+\nabla p=f_{2,\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow \frac{p_l-p_r}{h_y}=f_{2,\frac{1}{2}}-C_{\frac{1}{2}}v_{\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow p_r=-h_yf_{2,\frac{1}{2}}+h_yC_{\frac{1}{2}}v_{\frac{1}{2}}+p_l
\end{aligned}
$$

4) v 的上边的单元与 v 本身相等时

$$
\begin{aligned}
&C_{Ny+\frac{1}{2}}v_{Ny+\frac{1}{2}}+\nabla p=f_{2,Ny+\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow \frac{p_r-p_l}{h_y}=f_{2,Ny+\frac{1}{2}}-C_{Ny+\frac{1}{2}}v_{Ny+\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow p_r=h_yf_{2,Ny+\frac{1}{2}}-h_yC_{Ny+\frac{1}{2}}v_{Ny+\frac{1}{2}}+p_l
\end{aligned}
$$

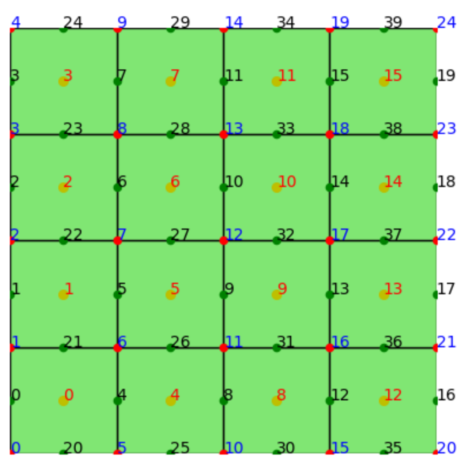


图 4: *mesh*

再求解 $\boldsymbol{u}$:

$$u_m = (f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h_x})/C_m$$
$$v_m = (f_{2,m} - \frac{p_l - p_r}{h_y})/C_m$$

求解 p 的隐格式

与上面一部分一样,我们先求解 p, 再求解 $\boldsymbol{u}$.
我们考虑 C 的求解方法,在边界的时候,记 $f = f_b$, 边界处的 u, v 统一记为 U, 则有

$$f_b = CU$$

要求解 p, 我们把 (3.4) 和 (3.5) 代入到 (3.3) 即可。但是,我们现在需要分情况讨论:

1). 当 $u_{i,3}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (左下角的边界函数),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

2). 当 $u_{e_{i,3}}$ 与 $v_{e_{i,2}}$ 是边界边上中点的值时 (左上角的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_x} + \frac{v_{e_{i,2}} - \mathcal{W}_{e_{i,0}}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

3). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (右下角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

4). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (右上角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}=g_i+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}-\frac{v_{i,2}}{h_y}$$

5). 当 $u_{i,3}$ 是边界边上的中点的值时 (左边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-u_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}}\\ =g_i-\frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}\end{aligned}$$

6). 当 $u_{i,1}$ 是边界边上中点的值时 (右边的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}}\\ =g_i+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}\end{aligned}$$

7). 当 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (下边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}}\\ =g_i-\frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}}+\frac{v_{i,0}}{h_y}\end{aligned}$$

8). 当 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (上边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}-\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}& \\
=g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}-\frac{v_{i,2}}{h_y}&
\end{aligned}
$$

9). 全部为内部边的中点的值时 (内部单元),有

$$
\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i
$$

整理后得到:

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}-\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}& \\
=g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}&
\end{aligned}
$$

再求解 $\boldsymbol{u}$:

$$
\begin{aligned}
u_m&=(f_{1,m}-\frac{p_r-p_l}{h_x})/C_m\\
v_m&=(f_{2,m}-\frac{p_l-p_r}{h_y})/C_m
\end{aligned}
$$

利用 ∇p 的隐格式

由模型中的第一个式子

(3.6)
$$
(\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f}
$$

可以得到

(3.7)
$$
\boldsymbol{u}=\frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|}
$$

对第一个式子求模,有

(3.8)
$$
\frac{\mu}{k}|\boldsymbol{u}|+\beta\rho|\boldsymbol{u}|^2=|f-\nabla p|
$$

得

(3.9)
$$
|\boldsymbol{u}|=\frac{-\frac{\mu}{k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{k^2}+4\beta\rho|f-\nabla p|}}{2\beta\rho}
$$

把 (9) 代入 (7) 中得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{k}+\beta\rho\frac{-\frac{\mu}{k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{k^2}+4\beta\rho|f-\nabla p|}}{2\beta\rho}} \\
&= \frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{2k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2}+\beta\rho|f-\nabla p|}}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

把 (10) 代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=g$ 中得

$$
\nabla\cdot\frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{2k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2}+\beta\rho|f-\nabla p|}}=g \tag{3.11}
$$

记 $\frac{\mu}{2k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2}+\beta\rho|f-\nabla p|}=c(\nabla p)$ (11) 式变为

没有真解的矢量图

计算数值解的时候我们需要注意的是边界点处的值跟之前有真解的时候一样,是为 0 的,但是 p 的处理的时候不一样,之前我们给了 p 的一个真解的值,为了确定我们求解的唯一性。现在我们要怎样保证数值解的唯一性? 在两网格的论文中的 f,g 与现在的文档的 g,f 是对应的,在写 pde 的时候应该特别注意这个问题。

pde 如下所示:

- Example 1
$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}=0\\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0\\
&g=\pi(\delta(0,0)-\delta(1,1))
\end{aligned}
$$

- Example 2
$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}=(\sin\pi x,\sin\pi y)^T\\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0\\
&g=0
\end{aligned}
$$

- Example 3
$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}=(x-x^2,y-y^2)^T\\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0\\
&g=0
\end{aligned}
$$

- Example 4
$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}=(1,0)^T\\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0\\
&g=exp\left\{-\left[(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\right]\right\}
\end{aligned}
$$

- Example 5

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f} = (1,0)^T \\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \\
&g = \sin\pi x\sin 2\pi y
\end{aligned}
$$

非均匀剖分

u,p 组装成大矩阵

得到离散的形式之后，我们根据 (3.1),(3.1),(3.3) 组装出左端的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和右端的向量 $\boldsymbol{b}$，进而使得模型的问题转化成

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}
$$

其中

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{(NE+NC)\times(NE+NC)}, \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}_{(NE+NC)\times 1}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \end{pmatrix}_{(NE+NC)\times 1}
$$

注: NE 是所有边的个数，NC 是单元的个数。

A_{11} 是一个对角矩阵，我们记

$$
\boldsymbol{C} = \frac{\mu}{k} + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}|
$$

有

$$
\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{C}_{NE-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{C}_{NE} \end{bmatrix}
$$

参考文献