A Mass-Conservative MMOC-MFEM Scheme for Two Component Incompressible Miscible Displacement in Porous Media

李奥

January 4, 2019

目录

1 摘要

有两个方程

1. 压力方程 (pressure equation)
在连续的混合元空间中求解,通过连续函数近似向量

2. 浓度方程 (concentration equation)
能够保持质量守恒的方法求解

2 简介

2.1 模型

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{u}=q(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}=-\dfrac{K(\boldsymbol{x})}{\mu(c)}\nabla p=-a(c)\nabla p,\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t\in[0,T]; \\ \phi(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial c}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{u}c)-\nabla\cdot(D\nabla c)=\overline{c}(\boldsymbol{x},t,c),\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t\in[0,T]; \\ c(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x}),\ x\in\Omega; \\ p=p_0,\ \ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

2.2 符号

符号说明	
符号	含义
Ω	空间域 Ω 是具有分段光滑的边界 Γ 的 $\mathcal{R}^2$ 的有界子集
T	正常数
$p(\boldsymbol{x},t)$	$p(\boldsymbol{x},t)$, 混合物中的压力
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$	$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=(\boldsymbol{u_1}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u_2}(\boldsymbol{x},t))$, 流体的 Darcy 速度
$c(\boldsymbol{x},t)$	浸入流体或有关溶质/溶剂的浓度且 $0\le c(\boldsymbol{x},t)\le 1$

没有提到的都是参数

这里我们假设问题在空间上是周期性的,并且所有的系数可以周期性地扩展到所有的 R^2, 同时满足下面的条件: 存在一致常数 (uniform constant)K_1,s.t., 对于 $\kappa\in[0,1]$, $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 和 $t\in J$

$$\begin{aligned} &0<a_*\le a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\kappa})\le a^*\le K_1, \\ &0<\phi_*\le\phi(x)\le\phi^*\le K_1, \\ &0<D_*\le D(x)\le D^*\le K_1, \\ &\sup_{t\in J}||\overline{c}(t)||_{L^1(\Omega)}\le K_1. \end{aligned}$$

3 离散形式

3.1 压力方程的离散格式

$$\begin{aligned} &(\nabla\cdot U^{n+1},w^h)=(q,w_h).\quad\forall w_h\in W_h^{k-1}; \\ &(a^{-1}(C^n)\boldsymbol{U}^{n+1},\boldsymbol{v}_h)-(P^{n+1},\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h)=-[p_0,\boldsymbol{v}_h\cdot\vec{n}]_{\partial\Omega}.\quad\forall v_h\in V_h^k \end{aligned} \tag{2}$$

⋆⋆

(2) 变分形式的推导过程

proof: i)

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{u},w_h)=(q,w_h),\ \forall w_h\in W_h^{k-1}$$

ii)

$$\boldsymbol{u} = -a(c)\nabla p$$
$$\Leftrightarrow a^{-1}(c)\boldsymbol{u} = -\nabla p$$
$$(a^{-1}(c)\boldsymbol{u}, v_h) = -(\nabla p, v_h)$$

对上式的右端应用 green 公式,可得

$$(\nabla p, v_h) = -(p, \nabla\cdot v_h) + [p_0, v_h\cdot\vec{n}]_{\partial\Omega}$$

故

$$(a^{-1}(c)\boldsymbol{u}, v_h) = (\nabla p, v_h)$$
$$\Leftrightarrow (a^{-1}(c)\boldsymbol{u}, v_h) = (p, \nabla\cdot v_h) - [p_0, v_h\cdot\vec{n}]_{\partial\Omega}$$
$$\Leftrightarrow (a^{-1}(c)\boldsymbol{u}, v_h) - (p, \nabla\cdot v_h) = -[p_0, v_h\cdot\vec{n}]_{\partial\Omega}$$

⋆⋆

其中

$$\begin{aligned} W_h^{k-1} &= \{w\in L^2(\Omega): w|_D \in W_h^{k-1}(D), \forall D\in\Upsilon_h\} \\ V_h^k &= \{\boldsymbol{v}\in(C^0(\Omega))^2: \boldsymbol{v}|_D\in V_h^k(D), \forall D\in\Upsilon_h\} \end{aligned} \tag{3}$$

对于任意的矩形 $D\in\Upsilon_h$

$$\begin{aligned} V_h^k(D) &= Q_{k,k+1}(D)\times Q_{k+1,k}(D, \\ W_h^{k-1}(D) &= Q_{k-1}(D) \end{aligned} \tag{4}$$

$Q_{i,j}$ 表示 x 方向是次数 $\le i$ 的多项式的集合,y 方向是次数 $\le j$ 的多项式的集合。

空间 W_h^{k-1} 在单元的边界是不连续的。全局基函数的定义是通过下面引理的自由度给出的:

引理 1: 已知,D 是矩形, $\boldsymbol{u}_h\in V_h^k(D)$ 按照下面自由度的定义是唯一确定的:
(i) 对于每一个角点 (corner point) $x\in\partial D$,

$$DOF_{x,j}^{(i)}(\boldsymbol{u}_h) = \boldsymbol{u}_h(x) = \boldsymbol{u}_h(x)\cdot\boldsymbol{e}_j,\ j=1,2$$

(ii) 在每一条边 $e\subset\partial D$,

$$DOF_{e,\lambda}^{(ii)}(\boldsymbol{u}_h) = \langle\boldsymbol{u}_h\cdot\tau_e, \lambda\rangle_e\ \forall\lambda\in P_{k-2}(e)$$

其中 τ_e 是单位切向量 (iii) 在每一条边 $e\subset\partial D$,

$$DOF_{e,\lambda}^{(iii)}(\boldsymbol{u}_h) = \langle\boldsymbol{u}_h\cdot\nu_e, \lambda\rangle_e\ \forall\lambda\in P_{k-1}(e)$$

其中 ν_e 是单位外法向量 (iv) 在 D 上

$$DOF_v^{(iv)}(\boldsymbol{u}_h) = (\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v})_D\ \forall\boldsymbol{v}\in Q_{k-2,k-1}(D)\times Q_{k-1,k-2}(D)$$

而且,在每一条边 $e\subset\partial D$, $\boldsymbol{u}_h|_e$ 由 (i)-(iii) 限制在 e 上的自由度唯一定义。

3.2 浓度方程的离散形式

$$\frac{1}{\Delta t}(\phi C^{n+1} - (\phi C^n)\circ X_1^n r^{n+1}, \psi_h) + (D^{n+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U}^{n+1})\nabla C^{n+1}, \nabla\psi_h) = (\bar{c}, \psi_h), \forall\psi\in W_h^{k-1} \tag{5}$$

⋆⋆⋆

⋆⋆⋆

定义映射 $X_1^n : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$:

$$X_1^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{U^{n+1}(\boldsymbol{x})}{\phi}\Delta t$$

并且定义

$$\begin{aligned} r^{n+1} &= |Jac(\boldsymbol{x} - \frac{U^{n+1}}{\phi}\Delta t)| \\ &= 1 - \nabla \cdot (\frac{U^{n+1}}{\phi})\Delta t + O((\Delta)^2) \\ &= 1 - \frac{\nabla \cdot U^{n+1}}{\phi} + \frac{U^{n+1} \cdot \nabla \phi}{\phi^2}\Delta t + O((\Delta t)^2) \end{aligned}$$

参考文献