Darcy-forchheimer Equation 的块中心差分方法 (二维)

李奥

October 31, 2018

目录

1 符号

符号说明	
符号	意义
Ω	$(0,1)\times(0,1)$(二维区域)
p	压强 (压力)
$\boldsymbol{u}$	流体速度
μ	黏性系数
K	渗透张量
k	正数且 K = kI(I 是单位矩阵)
β	非线性项系数
ρ	流体密度
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}\in(L(\Omega)^2)^2$, a vector function
$g(\boldsymbol{x})$	$g(\boldsymbol{x})\in L^2(\Omega)$, a scalar function
nx	x 方向剖分的段数
ny	y 方向剖分的段数
h_x	x 方向剖分的步长
h_y	y 方向剖分的步长
NC	单元个数
NE	边的个数

2 模型

$$\begin{cases} (\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f} \quad in \ \ \Omega=(0,1)\times(0,1) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=g \quad in \ \ \Omega \\ \boldsymbol{u}=0 \quad on \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 那么有

$$\begin{cases} (\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)u+\nabla_x p=f_1 \quad (i) \\ (\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)v+\nabla_y p=f_2 \quad (ii) \\ \partial_x u+\partial_y v=g \quad (iii) \end{cases}$$

3 差分离散

利用一阶向前差分把方程变成差分方程,现在从 $cell$ 和 $edge$ 的角度考虑模型。
对于 (i), 从内部纵向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部纵向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$.

左右两边的 $cell$ 所对应的 p 分别记为 p_l、p_r.u 为 $edge$ 的 y 方向的 m 条边中点,记为 u_m。按照 $mesh$ 里的编号规则排序。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(\frac{\mu}{k}+\beta\rho\,|\boldsymbol{u}|)\cdot u_m+\frac{p_r-p_l}{h^x_{i+1/2}}=0 \tag{3.1}$$

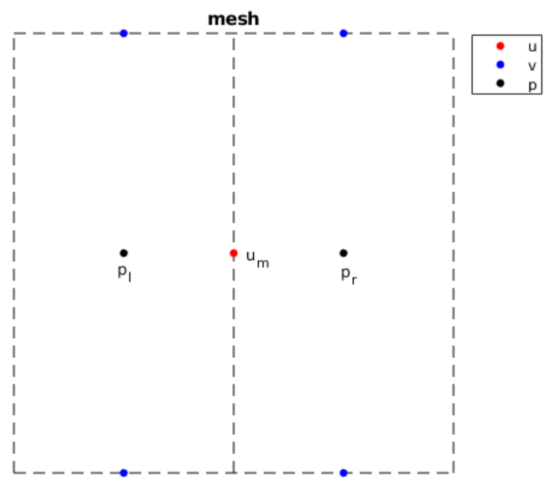


图 1: $edge_y$

对于 (ii), 从内部横向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部横向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$. $cell$ 所对应的 p 与 (i) 中的相同。v 为 $edge$ 的 x 方向的 m 个中点,记为 v_m。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(\frac{\mu}{k}+\beta\rho\,|\boldsymbol{u}|)\cdot v_m+\frac{p_l-p_r}{h^y_{j+1/2}}=0 \tag{3.2}$$

现在我们先求解 p, 再求解 $\boldsymbol{u}$.

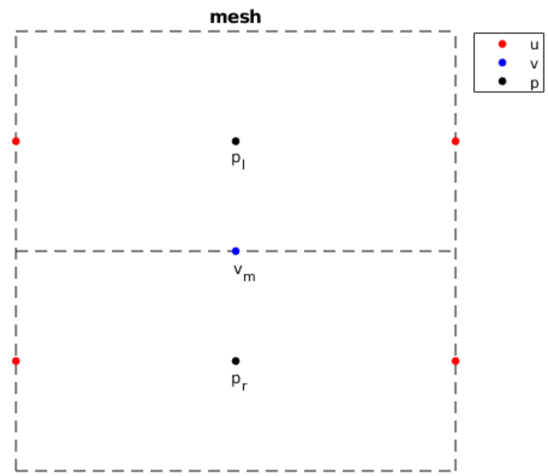


图 2: $edge_x$

对于 (iii), 从 $cell$ 的角度考虑：由于单元是四边形单元，我们记单元所对应边的局部编号为 [0,1,2,3] (StructureQuadMesh.py 里的网格)，第 i 个单元所对应的边记为 $e_{i,0}, e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}$。

则 (iii) 式第 i 个单元所对应的差分方程为：

$$\frac{u_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_i^x} + \frac{v_{e_{i,2}} - v_{e_{i,0}}}{h_i^y} = f_i \tag{3.3}$$

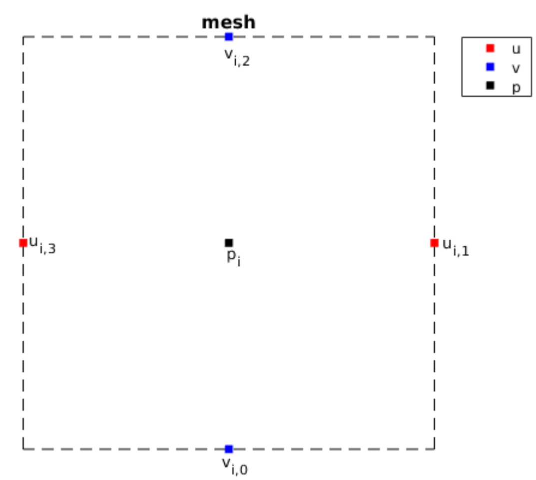


图 3: cell

现在我们先求解 p, 再求解 $\boldsymbol{u}$.

对于 (3.1) 我们有

$$u_m = \frac{f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h^x_{i+1/2}}}{(\mu/k + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}|)_m} \tag{3.4}$$

对于 (3.2) 我们有

$$v_m = \frac{f_{2,m} - \frac{p_a - p_d}{h^y_{j+1/2}}}{(\mu/k + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}|)_m} \tag{3.5}$$

注: 记 $\mu/k + \beta\rho\,|\boldsymbol{u}| = C$, $p_{l,1}$ 、$p_{r,3}$ 、$p_{a,0}$ 和 $p_{d,2}$ 是同一个点处的 p, 记为 p_i.

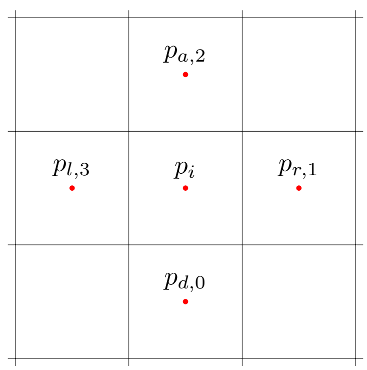
且有

$$\frac{f_{1,1} - \frac{p_{r,1} - p_{l,1}}{h^x_i}}{C_{i,1}} = \mathcal{W}_{i,1}$$

$$\frac{f_{1,3} - \frac{p_{r,3} - p_{l,3}}{h^x_i}}{C_{i,3}} = \mathcal{W}_{i,3}$$

$$\frac{f_{2,2} - \frac{p_{a,2} - p_{d,2}}{h^y_i}}{C_{i,2}} = \mathcal{W}_{i,2}$$

$$\frac{f_{2,0} - \frac{p_{a,0} - p_{d,0}}{h^y_i}}{C_{i,0}} = \mathcal{W}_{i,0}$$



3.1 均匀剖分

由于这里的方法是均匀剖分,所以离散形式中的 x, y 方向的步长可以用 h_x, h_y 统一表示。

3.1.1 求解 p 的显式格式

要求解 p, 我们把 (3.4) 和 (3.5) 代入到 (3.3) 即可。但是,我们现在需要分情况讨论:

1). 当 $u_{i,3}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (左下角的边界函数),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-u_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,0}}{h_y}$$

2). 当 $u_{e_{i,3}}$ 与 $v_{e_{i,2}}$ 是边界边上中点的值时 (左上角的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{e_{i,1}}-u_{e_{i,3}}}{h_x}+\frac{v_{e_{i,2}}-\mathcal{W}_{e_{i,0}}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i=g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}-\frac{v_{i,2}}{h_y}$$

3). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (右下角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=g_i+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}+\frac{v_{i,0}}{h_y}$$

4). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (右上角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i=g_i+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}-\frac{v_{i,2}}{h_y}$$

5). 当 $u_{i,3}$ 是边界边上的中点的值时 (左边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-u_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}\end{aligned}$$

6). 当 $u_{i,1}$ 是边界边上中点的值时 (右边的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=&g_i+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}\end{aligned}$$

7). 当 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (下边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{v_{i,0}}{h_y}\end{aligned}$$

8). 当 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (上边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}-\frac{v_{i,2}}{h_y}\end{aligned}$$

9). 全部为内部边的中点的值时 (内部单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}\end{aligned}$$

对于边界单元的 p, 需要做下特殊处理:

1) u 的左边的单元与 u 本身相等时

$$
\begin{aligned}
C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} + \nabla p = f_{1,\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_l - p_r}{h_x} = f_{1,\frac{1}{2}} - C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r = -h_x f_{1,\frac{1}{2}} + h_x C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}
$$

2) u 的右边的单元与 u 本身相等时

$$
\begin{aligned}
C_{Nx+\frac{1}{2}} u_{Nx+\frac{1}{2}} + \nabla p = f_{1,Nx+\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_r - p_l}{h_x} = f_{1,Nx+\frac{1}{2}} - C_{Nx+\frac{1}{2}} u_{Nx+\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r = h_x f_{1,\frac{1}{2}} - h_x C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}
$$

3) v 的下边的单元与 v 本身相等时

$$
\begin{aligned}
C_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} + \nabla p = f_{2,\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_l - p_r}{h_y} = f_{2,\frac{1}{2}} - C_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r = -h_y f_{2,\frac{1}{2}} + h_y C_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}
$$

4) v 的上边的单元与 v 本身相等时

$$
\begin{aligned}
C_{Ny+\frac{1}{2}} v_{Ny+\frac{1}{2}} + \nabla p = f_{2,Ny+\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_r - p_l}{h_y} = f_{2,Ny+\frac{1}{2}} - C_{Ny+\frac{1}{2}} v_{Ny+\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r = h_y f_{2,Ny+\frac{1}{2}} - h_y C_{Ny+\frac{1}{2}} v_{Ny+\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}
$$

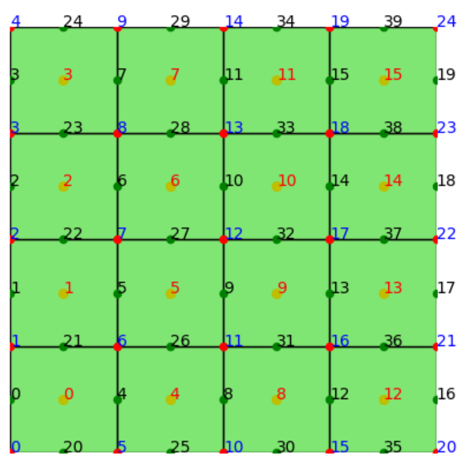


图 4: *mesh*

再求解 $\boldsymbol{u}$:

$$u_m = (f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h_x})/C_m$$
$$v_m = (f_{2,m} - \frac{p_l - p_r}{h_y})/C_m$$

3.1.2 求解 p 的隐格式

与上面一部分一样,我们先求解 p, 再求解 $\boldsymbol{u}$.
我们考虑 C 的求解方法,在边界的时候,记 $f = f_b$, 边界处的 u, v 统一记为 U, 则有

$$f_b = CU$$

要求解 p, 我们把 (3.4) 和 (3.5) 代入到 (3.3) 即可。但是,我们现在需要分情况讨论:

1). 当 $u_{i,3}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (左下角的边界函数),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

2). 当 $u_{e_{i,3}}$ 与 $v_{e_{i,2}}$ 是边界边上中点的值时 (左上角的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_x} + \frac{v_{e_{i,2}} - \mathcal{W}_{e_{i,0}}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

3). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (右下角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

4). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (右上角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}=g_i+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}-\frac{v_{i,2}}{h_y}$$

5). 当 $u_{i,3}$ 是边界边上的中点的值时 (左边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-u_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}}\\=g_i-\frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}+\frac{u_{i,3}}{h_x}\end{aligned}$$

6). 当 $u_{i,1}$ 是边界边上中点的值时 (右边的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}}\\=g_i+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{u_{i,1}}{h_x}\end{aligned}$$

7). 当 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (下边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}}\\=g_i-\frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}}+\frac{v_{i,0}}{h_y}\end{aligned}$$

8). 当 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (上边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}$$
$$=g_i-\frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{v_{i,2}}{h_y}$$

9). 全部为内部边的中点的值时 (内部单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i-\frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}}-\frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}}-\frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}}$$
$$=g_i-\frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}}+\frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}}-\frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}}+\frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}$$

再求解 $\boldsymbol{u}$:

$$u_m=(f_{1,m}-\frac{p_r-p_l}{h_x})/C_m$$
$$v_m=(f_{2,m}-\frac{p_l-p_r}{h_y})/C_m$$

3.1.3 利用 ∇p 的隐格式

由模型中的第一个式子

$$(\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f} \tag{3.6}$$

可以得到

$$\boldsymbol{u}=\frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\boldsymbol{u}|} \tag{3.7}$$

对第一个式子求模,有

$$\frac{\mu}{k}|\boldsymbol{u}|+\beta\rho|\boldsymbol{u}|^2=|f-\nabla p| \tag{3.8}$$

得

$$|\boldsymbol{u}|=\frac{-\frac{\mu}{k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{k^2}+4\beta\rho|f-\nabla p|}}{2\beta\rho} \tag{3.9}$$

把 (9) 代入 (7) 中得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{k}+\beta\rho\frac{-\frac{\mu}{k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{k^2}+4\beta\rho|f-\nabla p|}}{2\beta\rho}} \\
&= \frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{2k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2}+\beta\rho|f-\nabla p|}}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

把 (10) 代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=g$ 中得

$$
\nabla\cdot\frac{f-\nabla p}{\frac{\mu}{2k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2}+\beta\rho|f-\nabla p|}}=g \tag{3.11}
$$

记 $\frac{\mu}{2k}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2}+\beta\rho|f-\nabla p|}=c(\nabla p)$ (11) 式变为

3.2 非均匀剖分

3.2.1 u,p 组装成大矩阵

得到离散的形式之后,我们根据 (3.1),(3.1),(3.3) 组装出左端的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和右端的向量 $\boldsymbol{b}$,进而使得模型的问题转化成

$$
\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{b}
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}_{(NE+NC)\times(NE+NC)},\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}_{(NE+NC)\times 1},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g}\end{pmatrix}_{(NE+NC)\times 1}
$$

注: NE 是所有边的个数,NC 是单元的个数。

A_{11} 是一个对角矩阵, 我们记

$$
\boldsymbol{C}=\frac{\mu}{k}+\beta\rho\,|\boldsymbol{u}|
$$

有

$$
\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{C}_{NE-1} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{C}_{NE}\end{bmatrix}
$$

参考文献