Darcy-forchheimer Equation 的块中心差分方法

李奥

October 21, 2018

目录

1 二维问题

1.1 符号

符号说明	
符号	意义
Ω	$(0,1)\times(0,1)$(二维区域)
p	压强 (压力)
$\mathbf{u}$	流体速度
μ	黏性系数
K	渗透张量
k	正数且 K = kI(I 是单位矩阵)
β	非线性项系数
ρ	流体密度
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}\in(L(\Omega)^2)^2$, a vector function
$g(\mathbf{x})$	$g(\mathbf{x})\in L^2(\Omega)$, a scalar function
nx	x 方向剖分的段数
ny	y 方向剖分的段数
h_x	x 方向剖分的步长
h_y	y 方向剖分的步长
NC	单元个数
NE	边的个数

1.2 模型

$$\begin{cases} (\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\mathbf{u}|)\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f} \quad in\ \ \Omega=(0,1)\times(0,1) \\ \nabla\cdot\mathbf{u}=g \quad in\ \ \Omega \\ \mathbf{u}=0 \quad on\ \ \partial\Omega \end{cases}$$

记 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, 那么有

$$\begin{cases} (\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\mathbf{u}|)u+\nabla_x p=f_1 \quad (i) \\ (\frac{\mu}{k}+\beta\rho|\mathbf{u}|)v+\nabla_y p=f_2 \quad (ii) \\ \partial_x u+\partial_y v=g \quad (iii) \end{cases}$$

利用一阶向前差分把方程变成差分方程,现在从 $edge$ 和 $cell$ 的角度考虑模型。

对于 (i), 从 y 方向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到 y 方向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$。u 为 $edge$ 的中点,记为 u_m。左右两边的 $cell$ 所对应的 p 分别记为 $p_{l,m}$、$p_{r,m}$。按照 $mesh$ 里的编号规则排序。

则每条 y 方向边上所对应的差分方程为:

$$(\mu/k + \beta\rho\,|\mathbf{u}|)_m \cdot u_m + \frac{p_r - p_l}{h_x} = f_{1,m} \tag{1}$$

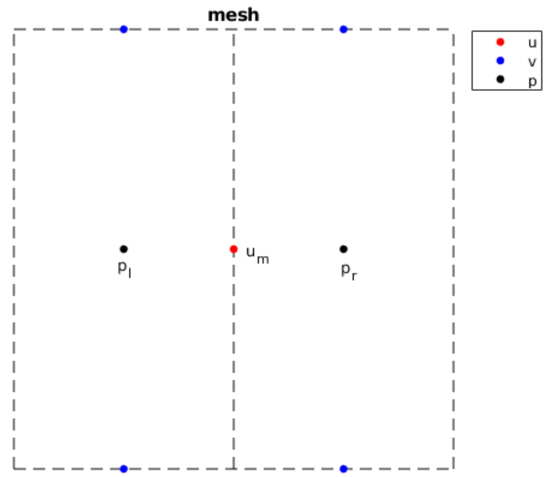


图 1: $edge_y$

对于 (ii), 从 x 方向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到 x 方向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$。v 为 $edge$ 的中点,记为 v_m。$cell$ 所对应的 p 记为 p_a、p_d。

则每条 x 方向边上所对应的差分方程为:

$$(\mu/k + \beta\rho\,|\mathbf{u}|)_m \cdot v_m + \frac{p_a - p_d}{h_y} = f_{2,m} \tag{2}$$

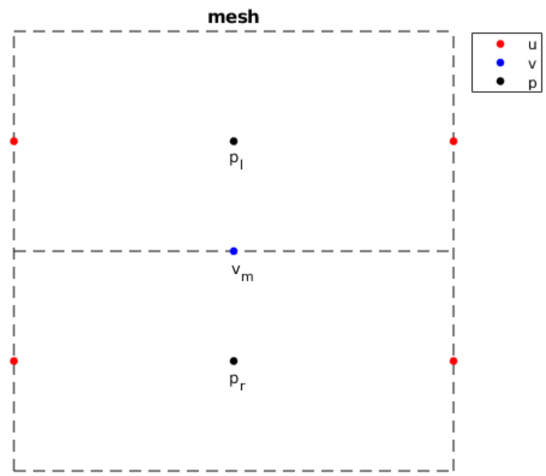


图 2: $edge_x$

对于 (iii), 从 $cell$ 的角度考虑：由于单元是四边形单元，我们记单元所对应边的局部编号为 [0,1,2,3] (StructureQuadMesh.py 里的网格),第 i 个单元所对应的边记为 $e_{i,0}, e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}$。

则 (iii) 式第 i 个单元所对应的差分方程为:

$$\frac{u_1 - u_3}{h_x} + \frac{v_2 - v_0}{h_y} = g_i \tag{3}$$

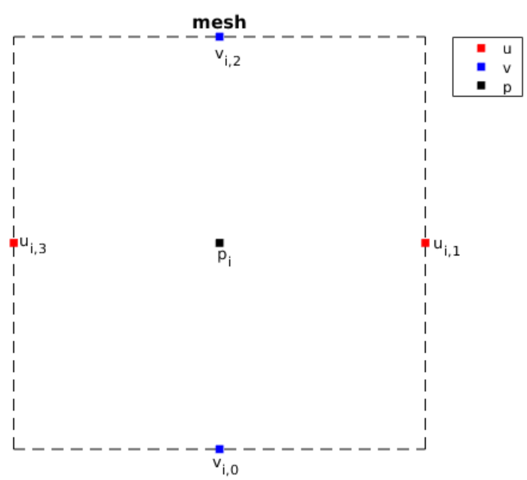


图 3: cell

现在我们先求解 p, 再求解 $\mathbf{u}$.

对于 (1) 我们有

$$u_m = \frac{f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h_x}}{(\mu/k + \beta\rho\,|\mathbf{u}|)_m} \tag{4}$$

对于 (2) 我们有

$$v_m = \frac{f_{2,m} - \frac{p_a - p_d}{h_y}}{(\mu/k + \beta\rho\,|\mathbf{u}|)_m} \tag{5}$$

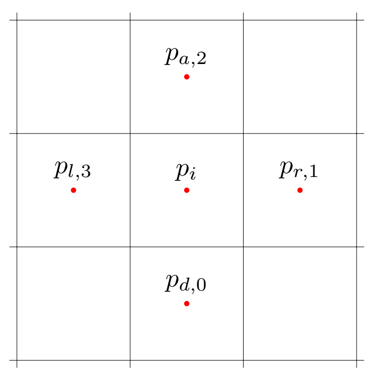
注: 记 $\mu/k + \beta\rho\,|\mathbf{u}| = C$, $p_{l,1}$ 、$p_{r,3}$ 、$p_{a,0}$ 和 $p_{d,2}$ 是同一个点处的 p, 记为 p_i.
且有

$$\frac{f_{1,1} - \frac{p_{r,1} - p_{l,1}}{h_x}}{C_{i,1}} = \mathcal{W}_{i,1}$$

$$\frac{f_{1,3} - \frac{p_{r,3} - p_{l,3}}{h_x}}{C_{i,3}} = \mathcal{W}_{i,3}$$

$$\frac{f_{2,2} - \frac{p_{a,2} - p_{d,2}}{h_y}}{C_{i,2}} = \mathcal{W}_{i,2}$$

$$\frac{f_{2,0} - \frac{p_{a,0} - p_{d,0}}{h_y}}{C_{i,0}} = \mathcal{W}_{i,0}$$



要求解 p, 我们把 (4) 和 (5) 代入到 (3) 即可。但是,我们现在需要分情况讨论:

1). 当 $u_{i,3}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (左下角的边界函数),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}}\right) p_i = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

2). 当 $u_{e_{i,3}}$ 与 $v_{e_{i,2}}$ 是边界边上中点的值时 (左上角的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_x} + \frac{v_{e_{i,2}} - \mathcal{W}_{e_{i,0}}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

3). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (右下角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

4). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (右上角的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

5). 当 $u_{i,3}$ 是边界边上的中点的值时 (左边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i =& g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} \\ &+ \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{u_{i,3}}{h_x}\end{aligned}$$

6). 当 $u_{i,1}$ 是边界边上中点的值时 (右边的边界单元),有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i =& g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} \\ &+ \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} - \frac{u_{i,1}}{h_x}\end{aligned}$$

7). 当 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (下边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-v_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{v_{i,0}}{h_y}\end{aligned}$$

8). 当 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (上边的边界单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{v_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}-\frac{v_{i,2}}{h_y}\end{aligned}$$

9). 全部为内部边的中点的值时 (内部单元),有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1}-\mathcal{W}_{i,3}}{h_x}+\frac{\mathcal{W}_{i,2}-\mathcal{W}_{i,0}}{h_y}=g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{1}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{1}{h_y^2C_{i,2}})p_i=&g_i-\frac{h_xf_{1,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{h_xf_{1,3}}{h_x^2C_{i,3}}-\frac{h_yf_{1,2}}{h_y^2C_{i,2}}+\frac{h_yf_{1,0}}{h_y^2C_{i,0}}\\&+\frac{p_{r,1}}{h_x^2C_{i,1}}+\frac{p_{l,3}}{h_x^2C_{i,3}}+\frac{p_{d,0}}{h_y^2C_{i,0}}+\frac{p_{a,2}}{h_y^2C_{i,2}}\end{aligned}$$

对于边界单元的 p, 需要做下特殊处理:

1) u 的左边的单元与 u 本身相等时

$$\begin{aligned}&C_{\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}}+\nabla p=f_{1,\frac{1}{2}}\\&\Rightarrow\frac{p_l-p_r}{h_x}=f_{1,\frac{1}{2}}-C_{\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}}\\&\qquad\Rightarrow p_r=-h_xf_{1,\frac{1}{2}}+h_xC_{\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}}+p_l\end{aligned}$$

2) u 的右边的单元与 u 本身相等时

$$
\begin{aligned}
&C_{Nx+\frac{1}{2}}u_{Nx+\frac{1}{2}} + \nabla p = f_{1,Nx+\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \Rightarrow \frac{p_r - p_l}{h_x} = f_{1,Nx+\frac{1}{2}} - C_{Nx+\frac{1}{2}}u_{Nx+\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow p_r = h_x f_{1,\frac{1}{2}} - h_x C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}
$$

3) v 的下边的单元与 v 本身相等时

$$
\begin{aligned}
&C_{\frac{1}{2}}v_{\frac{1}{2}} + \nabla p = f_{2,\frac{1}{2}} \\
&\Rightarrow \frac{p_l - p_r}{h_y} = f_{2,\frac{1}{2}} - C_{\frac{1}{2}}v_{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \Rightarrow p_r = -h_y f_{2,\frac{1}{2}} + h_y C_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}
$$

4) v 的上边的单元与 v 本身相等时

$$
\begin{aligned}
&C_{Ny+\frac{1}{2}}v_{Ny+\frac{1}{2}} + \nabla p = f_{2,Ny+\frac{1}{2}} \\
&\qquad \Rightarrow \frac{p_r - p_l}{h_y} = f_{2,Ny+\frac{1}{2}} - C_{Ny+\frac{1}{2}}v_{Ny+\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \Rightarrow p_r = h_y f_{2,Ny+\frac{1}{2}} - h_y C_{Ny+\frac{1}{2}} v_{Ny+\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}
$$

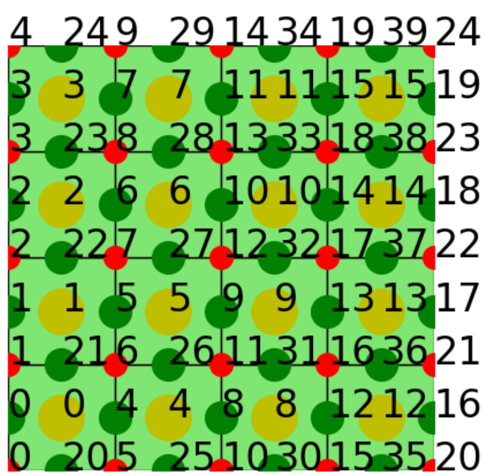


图 4: *mesh*

再求解 $\mathbf{u}$:

$$
u_m = (f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h_x})/C_m
$$

$$
v_m = (f_{2,m} - \frac{p_l - p_r}{h_y})/C_m
$$

参考文献