

Darcy-forchheimer Equation 的块中心差分方法 (二维)

李奥

October 31, 2018

目录

1	符号	2
2	模型	2
3	差分离散	2
3.1	均匀剖分	5
3.1.1	求解 p 的显式格式	5
3.1.2	求解 p 的隐格式	9
3.1.3	利用 ∇p 的隐格式	11
3.2	非均匀剖分	12
3.2.1	u, p 组装成大矩阵	12

1 符号

符号说明	
符号	意义
Ω	$(0, 1) \times (0, 1)$ (二维区域)
p	压强 (压力)
\mathbf{u}	流体速度
μ	黏性系数
K	渗透张量
k	正数且 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ (\mathbf{I} 是单位矩阵)
β	非线性项系数
ρ	流体密度
\mathbf{f}	$\mathbf{f} \in (L(\Omega)^2)^2$, a vector function
$g(\mathbf{x})$	$g(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$, a scalar function
nx	x 方向剖分的段数
ny	y 方向剖分的段数
h_x	x 方向剖分的步长
h_y	y 方向剖分的步长
NC	单元个数
NE	边的个数

2 模型

$$\begin{cases} (\frac{\mu}{k} + \beta\rho|\mathbf{u}|)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = g & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

记 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 那么有

$$\begin{cases} (\frac{\mu}{k} + \beta\rho|\mathbf{u}|)u + \nabla_x p = f_1 & (i) \\ (\frac{\mu}{k} + \beta\rho|\mathbf{u}|)v + \nabla_y p = f_2 & (ii) \\ \partial_x u + \partial_y v = g & (iii) \end{cases}$$

3 差分离散

利用一阶向前差分把方程变成差分方程, 现在从 *cell* 和 *edge* 的角度考虑模型。
对于 (i), 从内部纵向 *edge* 的角度考虑: 我们需要找到内部纵向 *edge* 所对应的左手边的 *cell* 和右手边的 *cell*.

左右两边的 *cell* 所对应的 p 分别记为 p_l, p_r . u 为 *edge* 的 y 方向的 m 条边中点, 记为 u_m 。按照 *mesh* 里的编号规则排序。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(3.1) \quad \left(\frac{\mu}{k} + \beta \rho |\mathbf{u}| \right) \cdot u_m + \frac{p_r - p_l}{h_{i+1/2}^x} = f_{1,m}$$

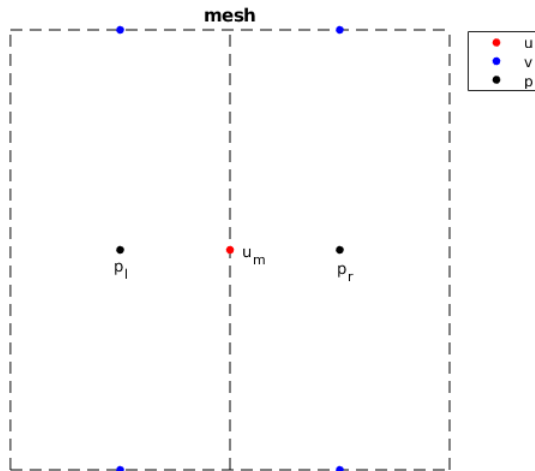


图 1: $edge_y$

对于 (ii), 从内部横向 *edge* 的角度考虑: 我们需要找到内部横向 *edge* 所对应的左手边的 *cell* 和右手边的 *cell*. *cell* 所对应的 p 与 (i) 中的相同。 v 为 *edge* 的 x 方向的 m 个中点, 记为 v_m 。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(3.2) \quad \left(\frac{\mu}{k} + \beta \rho |\mathbf{u}| \right) \cdot v_m + \frac{p_l - p_r}{h_{j+1/2}^y} = f_{2,m}$$

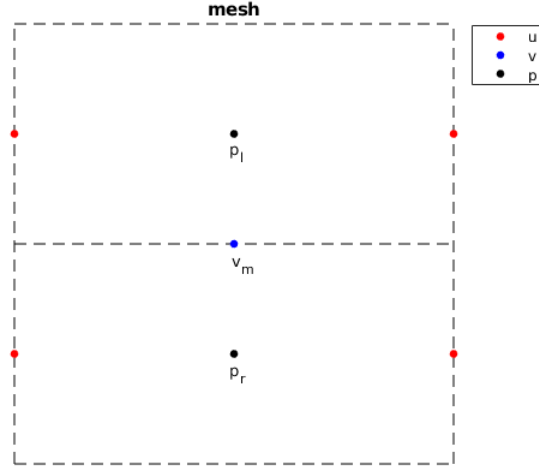


图 2: $edge_x$

对于 (iii), 从 *cell* 的角度考虑: 由于单元是四边形单元, 我们记单元所对应边的局部编号为 $[0,1,2,3]$ (StructureQuadMesh.py 里的网格), 第 i 个单元所对应的边记为 $e_{i,0}, e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}$ 。

则 (iii) 式第 i 个单元所对应的差分方程为:

$$(3.3) \quad \frac{u_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_i^x} + \frac{v_{e_{i,2}} - v_{e_{i,0}}}{h_i^y} = g_i$$

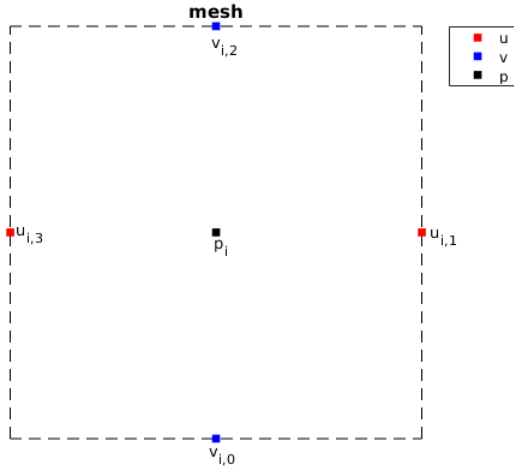


图 3: cell

现在我们先求解 p , 再求解 u 。

对于 (3.1) 我们有

$$(3.4) \quad u_m = \frac{f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h_{i+1/2}^x}}{(\mu/k + \beta\rho|\mathbf{u}|)_m}$$

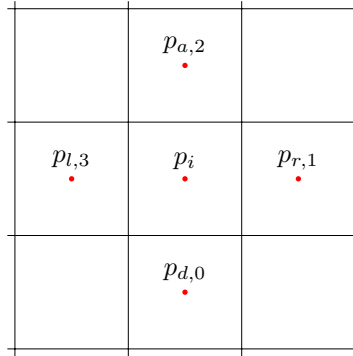
对于 (3.2) 我们有

$$(3.5) \quad v_m = \frac{f_{2,m} - \frac{p_a - p_d}{h_{j+1/2}^y}}{(\mu/k + \beta\rho|\mathbf{u}|)_m}$$

注: 记 $\mu/k + \beta\rho|\mathbf{u}| = C$, $p_{l,1}$ 、 $p_{r,3}$ 、 $p_{a,0}$ 和 $p_{d,2}$ 是同一个点处的 p , 记为 p_i .

且有

$$\begin{aligned} \frac{f_{1,1} - \frac{p_{r,1} - p_{l,1}}{h_i^x}}{C_{i,1}} &= \mathcal{W}_{i,1} \\ \frac{f_{1,3} - \frac{p_{r,3} - p_{l,3}}{h_i^x}}{C_{i,3}} &= \mathcal{W}_{i,3} \\ \frac{f_{2,2} - \frac{p_{a,2} - p_{d,2}}{h_i^y}}{C_{i,2}} &= \mathcal{W}_{i,2} \\ \frac{f_{2,0} - \frac{p_{a,0} - p_{d,0}}{h_i^y}}{C_{i,0}} &= \mathcal{W}_{i,0} \end{aligned}$$



3.1 均匀剖分

由于这里的方法是均匀剖分, 所以离散形式中的 x, y 方向的步长可以用 h_x, h_y 统一表示。

3.1.1 求解 p 的显式格式

要求解 p , 我们把 (3.4) 和 (3.5) 代入到 (3.3) 即可。但是, 我们现在需要分情况讨论:

1). 当 $u_{i,3}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (左下角的边界函数), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}}\right)p_i = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

2). 当 $u_{e_{i,3}}$ 与 $v_{e_{i,2}}$ 是边界边上中点的值时 (左上角的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_x} + \frac{v_{e_{i,2}} - \mathcal{W}_{e_{i,0}}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}\right)p_i = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

3). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (右下角的边界单元), 有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}}\right)p_i = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

4). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (右上角的边界单元), 有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}\right)p_i = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

5). 当 $u_{i,3}$ 是边界边上的中点的值时 (左边的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}}\right)p_i = & g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} \\ & + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} \end{aligned}$$

6). 当 $u_{i,1}$ 是边界边上中点的值时 (右边的边界单元), 有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}} \right) p_i = & g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} \\ & + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} \end{aligned}$$

7). 当 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (下边的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}} \right) p_i = & g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} \\ & + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{v_{i,0}}{h_y} \end{aligned}$$

8). 当 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (上边的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} \right) p_i = & g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} \\ & + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{v_{i,2}}{h_y} \end{aligned}$$

9). 全部为内部边的中点的值时 (内部单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}} \right) p_i = & g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} \\ & + \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} \end{aligned}$$

对于边界单元的 p , 需要做下特殊处理:

1) u 的左边的单元与 u 本身相等时

$$\begin{aligned}
C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} + \nabla p &= f_{1, \frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_l - p_r}{h_x} &= f_{1, \frac{1}{2}} - C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r &= -h_x f_{1, \frac{1}{2}} + h_x C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}$$

2) u 的右边的单元与 u 本身相等时

$$\begin{aligned}
C_{Nx + \frac{1}{2}} u_{Nx + \frac{1}{2}} + \nabla p &= f_{1, Nx + \frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_r - p_l}{h_x} &= f_{1, Nx + \frac{1}{2}} - C_{Nx + \frac{1}{2}} u_{Nx + \frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r &= h_x f_{1, \frac{1}{2}} - h_x C_{\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}$$

3) v 的下边的单元与 v 本身相等时

$$\begin{aligned}
C_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} + \nabla p &= f_{2, \frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_l - p_r}{h_y} &= f_{2, \frac{1}{2}} - C_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r &= -h_y f_{2, \frac{1}{2}} + h_y C_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}$$

4) v 的上边的单元与 v 本身相等时

$$\begin{aligned}
C_{Ny + \frac{1}{2}} v_{Ny + \frac{1}{2}} + \nabla p &= f_{2, Ny + \frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{p_r - p_l}{h_y} &= f_{2, Ny + \frac{1}{2}} - C_{Ny + \frac{1}{2}} v_{Ny + \frac{1}{2}} \\
\Rightarrow p_r &= h_y f_{2, Ny + \frac{1}{2}} - h_y C_{Ny + \frac{1}{2}} v_{Ny + \frac{1}{2}} + p_l
\end{aligned}$$

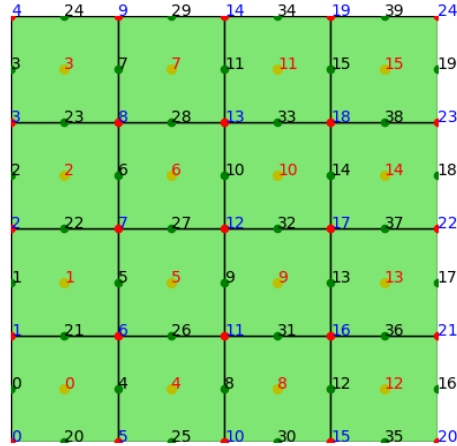


图 4: mesh

再求解 u :

$$u_m = (f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h_x})/C_m$$

$$v_m = (f_{2,m} - \frac{p_l - p_r}{h_y})/C_m$$

3.1.2 求解 p 的隐格式

与上面一部分一样,我们先求解 p , 再求解 u .
我们考虑 C 的求解方法,在边界的时候,记 $f = f_b$, 边界处的 u, v 统一记为 U , 则有

$$f_b = CU$$

要求解 p , 我们把 (3.4) 和 (3.5) 代入到 (3.3) 即可。但是,我们现在需要分情况讨论:

1). 当 $u_{i,3}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (左下角的边界函数), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

2). 当 $u_{e_{i,3}}$ 与 $v_{e_{i,2}}$ 是边界边上中点的值时 (左上角的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_x} + \frac{v_{e_{i,2}} - \mathcal{W}_{e_{i,0}}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}})p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

3). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (右下角的边界单元), 有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}})p_i - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} + \frac{v_{i,0}}{h_y}$$

4). 当 $u_{i,1}$ 与 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (右上角的边界单元), 有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}}\right)p_i - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} - \frac{v_{i,2}}{h_y}$$

5). 当 $u_{i,3}$ 是边界边上的中点的值时 (左边的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - u_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}}\right)p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} \\ & = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{u_{i,3}}{h_x} \end{aligned}$$

6). 当 $u_{i,1}$ 是边界边上中点的值时 (右边的边界单元), 有

$$\frac{u_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}}\right)p_i - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} \\ & = g_i + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{u_{i,1}}{h_x} \end{aligned}$$

7). 当 $v_{i,0}$ 是边界边上中点的值时 (下边的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - v_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}}\right)p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} \\ & = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{v_{i,0}}{h_y} \end{aligned}$$

8). 当 $v_{i,2}$ 是边界边上中点的值时 (上边的边界单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{v_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} \right) p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} \\
& = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{v_{i,2}}{h_y}
\end{aligned}$$

9). 全部为内部边的中点的值时 (内部单元), 有

$$\frac{\mathcal{W}_{i,1} - \mathcal{W}_{i,3}}{h_x} + \frac{\mathcal{W}_{i,2} - \mathcal{W}_{i,0}}{h_y} = g_i$$

整理后得到:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{1}{h_x^2 C_{i,3}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,0}} + \frac{1}{h_y^2 C_{i,2}} \right) p_i - \frac{p_{r,1}}{h_x^2 C_{i,1}} - \frac{p_{l,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{p_{d,0}}{h_y^2 C_{i,0}} - \frac{p_{a,2}}{h_y^2 C_{i,2}} \\
& = g_i - \frac{h_x f_{1,1}}{h_x^2 C_{i,1}} + \frac{h_x f_{1,3}}{h_x^2 C_{i,3}} - \frac{h_y f_{1,2}}{h_y^2 C_{i,2}} + \frac{h_y f_{1,0}}{h_y^2 C_{i,0}}
\end{aligned}$$

再求解 \mathbf{u} :

$$\begin{aligned}
u_m &= (f_{1,m} - \frac{p_r - p_l}{h_x}) / C_m \\
v_m &= (f_{2,m} - \frac{p_l - p_r}{h_y}) / C_m
\end{aligned}$$

3.1.3 利用 ∇p 的隐格式

由模型中的第一个式子

$$(3.6) \quad \left(\frac{\mu}{k} + \beta \rho |\mathbf{u}| \right) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$

可以得到

$$(3.7) \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{f} - \nabla p}{\frac{\mu}{k} + \beta \rho |\mathbf{u}|}$$

对第一个式子求模, 有

$$(3.8) \quad \frac{\mu}{k} |\mathbf{u}| + \beta \rho |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{f} - \nabla p|$$

得

$$(3.9) \quad |\mathbf{u}| = \frac{-\frac{\mu}{k} + \sqrt{\frac{\mu^2}{k^2} + 4\beta\rho|\mathbf{f} - \nabla p|}}{2\beta\rho}$$

把 (9) 代入 (7) 中得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \frac{f - \nabla p}{\frac{\mu}{k} + \beta\rho \frac{-\frac{\mu}{k} + \sqrt{\frac{\mu^2}{k^2} + 4\beta\rho|f - \nabla p|}}{2\beta\rho}} \\
 (3.10) \quad &= \frac{f - \nabla p}{\frac{\mu}{2k} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2} + \beta\rho|f - \nabla p|}}
 \end{aligned}$$

把 (10) 代入 $\nabla \cdot \mathbf{u} = g$ 中得

$$(3.11) \quad \nabla \cdot \frac{f - \nabla p}{\frac{\mu}{2k} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2} + \beta\rho|f - \nabla p|}} = g$$

记 $\frac{\mu}{2k} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4k^2} + \beta\rho|f - \nabla p|} = c(\nabla p)$ (11) 式变为

3.2 非均匀剖分

3.2.1 \mathbf{u}, \mathbf{p} 组装成大矩阵

得到离散的形式之后, 我们根据 (3.1), (3.1), (3.3) 组装出左端的矩阵 \mathbf{A} 和右端的向量 \mathbf{b} , 进而使得模型的问题转化成

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{b}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(NE+NC) \times (NE+NC)}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}_{(NE+NC) \times 1}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}_{(NE+NC) \times 1}$$

注: NE 是所有边的个数, NC 是单元的个数。

\mathbf{A}_{11} 是一个对角矩阵, 我们记

$$\mathbf{C} = \frac{\mu}{k} + \beta\rho|\mathbf{u}|$$

有

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_{NE-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{C}_{NE} \end{bmatrix}$$

参考文献