求解 Darcy Forchheimer 方程的多重网格方法

李奥

January 4, 2019

目录

1 模型

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\rho}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}+\frac{\beta}{\rho}|\mathbf{u}|\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f}\\ \nabla\cdot\mathbf{u}=g\\ \mathbf{u}\times\mathbf{n}=g_N\end{aligned}$$

$$\int_\Omega g(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\partial\Omega}g_N(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

1.1 空间

$$\begin{aligned}X&=L^3(\Omega)^2,\\ M&=W^{1,\frac{3}{2}}\cap L_0^2(\Omega)\end{aligned}$$

其中积分平均条件

$$L_0^2(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)\colon\int_\Omega\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0\right\}$$

1.2 变分形式

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\rho}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u},\mathbf{v})+\frac{\beta}{\rho}(|\mathbf{u}|\mathbf{u},\mathbf{v})+(\nabla p,\mathbf{v})=&(f,\mathbf{v}),\quad\forall v\in X\\ (\mathbf{u},\nabla q)=&-(g,q)+(g_N,q)_{\partial\Omega},\quad\forall q\in M\end{aligned}$$

1.3 离散变分形式

给定三角形网格,X_h 是分片常数的 2 维向量空间,M_h 分片线性连续的空间。

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\rho}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+\frac{\beta}{\rho}(|\mathbf{u}_h|\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+(\nabla p_h,\mathbf{v}_h)=&(f,\mathbf{v}_h),\quad\forall v_h\in X_h\\ (\mathbf{u}_h,\nabla q_h)=&-(g,q_h)+(g_N,q_h)_{\partial\Omega},\quad\forall q_h\in M_h\end{aligned}$$

2 初值确定

去掉非线性项,就得到线性的 Darcy 离散方程:

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\rho}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_h^0,\mathbf{v}_h)+(\nabla p_h^0,\mathbf{v}_h)=&(f,\mathbf{v}_h),\quad\forall v_h\in X_h\\ (\mathbf{u}_h^0,\nabla q_h)=&-(g,q_h)+(g_N,q_h)_{\partial\Omega},\quad\forall q_h\in M_h\end{aligned}$$

上面的离散方程的矩阵形式可以写为

$$\begin{bmatrix}A & G\\ G^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_{n+\frac{1}{2}}\\ g\end{bmatrix}$$

说明: 由于 $\mathbf{u}$ 的基函数是分片常数,因此 A 是对角阵,且对角元为相对应的三角形的面积与对应位置的常数的乘积。p 的基函数是分片线性连续的,可以利用上面的方程得到非线性方程的一个更好的初值。

3 非线性多重网格的一般算法

给定一个非线性的系统:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}) = \mathbf{s},\ \text{其中}\mathbf{z}, \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n$$

记 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{z}$ 的近似解

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} - \mathbf{y}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathcal{L}(\mathbf{y})$$

3.1 FAS

1. 在第 k 层网格上,进行 m 次前磨光 $\mathbf{y}^j = R_k \mathbf{y}^{j-1}$, 其中 $1 \le j \le m$, $\mathbf{y}^0$ 给定。设 $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}^m$.

2. 计算第 k 层的残差, 并限止到 $k-1$ 层上:$\mathbf{r}_{k-1} = I_k^{k-1}(\mathbf{s}_k - \mathcal{L}(\mathbf{y}_k))$。进一步,把 k 层的近似解限止到 $k-1$ 层上:$\mathbf{y}_{k-1} = I_k^{k-1}\mathbf{y}_k$。

3. 如果第 $k-1$ 是最粗层,则直接求解方程:$\mathcal{L}_{k-1}(\mathbf{z}_{k-1}) = \mathcal{L}_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1}) + \mathbf{r}_{k-1}$; 否则,回到第 1 步。

4. 计算最粗网格上的误差:$\mathbf{e}_{k-1} = \mathbf{z}_{k-1} - \mathbf{y}_{k-1}$, 并把误差插值到第 k 网格上去。

5. 并校正第 k 层网格上的值:$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{y}_k + I_{k-1}^k \mathbf{e}_{k-1}$,

6. 并进行 m 次后磨光:$\mathbf{y}^j = R_k^t \mathbf{y}^{j-1}$, 其中 $m+2 \le j \le 2m+1$。

其中第 $k-1$ 上求解方程来自于:

$$\mathcal{L}_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{e}_{k-1}) - \mathcal{L}_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1}) = \mathbf{r}_{k-1}$$

4 程序实现的数学细节

给定一组三角形网格 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$.

每个网格上建立相应的有限元空间 $(X_h(\mathcal{T}_0), M_h(\mathcal{T}_0))$, $(X_h(\mathcal{T}_1), M_h(\mathcal{T}_1))$, $\ldots$, $(X_h(\mathcal{T}_n), M_h(\mathcal{T}_n))$.

每个网格上的离散非线性算子 $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$?

记:$y = \boldsymbol{u} \cup p$

对于最细层网格,已经知道线性 Darcy 方程的矩阵组装,因此对于矩阵只需要加上非线性项的部分。

$$A_{new} = A + \frac{\beta}{\rho}|\boldsymbol{u}| * area$$

因此最细层的残差为

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{f} - A_{new}\boldsymbol{u} - Gp$$

4.1 插值算子

由于 p 是定义在节点上的,因此把 p 在细网格上的值是什么,限制到粗网格的时候对应节点处的值是相同的,我们只需要定义与 $\boldsymbol{u}$ 有关的插值算子。把粗网格上的 $\boldsymbol{u}$ 的值直接插值到细网格上面去。

4.2 前磨光

前磨光 (迭代的时候一般使用三次迭代): 使用 PR 迭代

这里 α 是正的参数,选择 α 的目的是增强收敛性。根据经验,在数值算例里面我们选 $\alpha = frac1\beta$。

(I). 没有约束的非线性迭代: 已知 $(\boldsymbol{u}_k^n, p_k^n)$, 通过下面的式子计算中间速度 $\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{u}_k^n, \varphi_k) + \frac{\beta}{\rho}(|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_k) = (\boldsymbol{f}, \varphi_k) - \frac{\mu}{\rho}(K^{-1}\boldsymbol{u}_k^n, \varphi_k) - \sum_{T\in\mathcal{T}}(\nabla p_k^n, \varphi_k), \forall \varphi_k \in X_k \tag{1}$$

由于基函数 φ_k, 数值解 $\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}$, ∇p_k^n 在每个单元上都是常数,因此非线性步就可以写成下面的形式:

$$\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{u}_T^n - \frac{\mu}{\rho}K_T^{-1}\boldsymbol{u}_T^n - \nabla_T p_k^n + \boldsymbol{f}_T \\
K_T^{-1} &= \frac{1}{|T|}\int_T K^{-1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\gamma &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4\frac{\beta}{\rho}\left|\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}\right|}
\end{aligned}$$

γ 确定的过程:

(1) 式可以写为

$$\frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_k) + \frac{\beta}{\rho}(|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_k) = (\boldsymbol{f}, \varphi_k) - \frac{\mu}{\rho}(K^{-1}\boldsymbol{u}_k^n, \varphi_k) - \sum_{T\in\mathcal{T}}(\nabla p_k^n, \varphi_k) + \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{u}_k^n, \varphi_k)$$

由于基函数 φ_k, 数值解 $\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}$, ∇p_k^n 在每个单元 T 上都是常数,上式可以改写为

$$\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{\rho}|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}}|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{f} - \frac{\mu}{\rho}K^{-1}\boldsymbol{u}_T^n - \nabla_T p_k^n + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{u}_T^n \tag{2}$$

对两边同时取范数,可以得到

$$\frac{1}{\alpha}|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}}| + \frac{\beta}{\rho}|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}}|^2 = |\boldsymbol{f} - \frac{\mu}{\rho}K^{-1}\boldsymbol{u}_T^n - \nabla_T p_k^n + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{u}_T^n|$$

求解这个方程得 (由于一定是非负数,因此只有一种情况)

$$|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}}| = \frac{\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4\frac{\beta}{\rho}\left|\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}\right|}}{2\frac{\beta}{\rho}}$$

(2) 式可以写为

$$(\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\rho}|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}}|)\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}$$

即

$$\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\rho}|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}}|)}\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}$$

把 $|\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}}|$ 的值代入上式可得

$$\boldsymbol{u}_T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4\frac{\beta}{\rho}\left|\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}\right|}}\boldsymbol{F}_T^{n+\frac{1}{2}}$$

因此,γ 的值确定。

考虑总的单元时,$-\nabla p + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - Gp$,

(II). 线性步: 已知 $\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}$ 计算 $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, p_k^{n+1})$:

$$\frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, \varphi_k) + \frac{\mu}{\rho}(K^{-1}\boldsymbol{u}_k^{n+1}, \varphi_k) + \sum_{T\in\mathcal{T}}(\nabla p_k^{n+1}, \varphi_k) = (\boldsymbol{f}, \varphi_k) - \frac{\beta}{\rho}(|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_k)$$

$$(\mathbf{u}_k^{n+1}, \nabla q_k) = -(g, q_k) + (g_N, q_k)_{\partial\Omega}$$

$$\begin{bmatrix} A_\alpha & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{n+\frac{1}{2}} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中

$$A_\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega(\boldsymbol{u}_k^{n+1})\cdot\varphi_k \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{\mu}{\rho}\int_\Omega(K^{-1}\boldsymbol{u}_k^{n+1})\cdot\varphi_k \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$B = \sum_{T\in\mathcal{T}_k}\int_T \nabla p_k^{n+1}\cdot\varphi_k \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{f}_{n+\frac{1}{2}} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\varphi_k \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}\cdot\varphi_k \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{\beta}{\rho}\int_\Omega\left|\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}\right|(\boldsymbol{u}_k^{n+\frac{1}{2}}\cdot\varphi_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathrm{w} = -\int_\Omega g q_k \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g_N q_k \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

由 (1), 得

$$A_\alpha \mathbf{u} + Bp = \mathbf{f}_{\mathbf{n}+\frac{1}{2}}$$
$$B^T \mathbf{u} = \mathrm{w}$$

故

$$\mathbf{u} = A_\alpha^{-1}(\mathbf{f}_{\mathbf{n}+\frac{1}{2}} - Bp) \tag{4}$$

所以最后求解的方程是

$$Sp = b$$

其中

$$S = B^T A_\alpha^{-1} B$$
$$b = B^T A_\alpha^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{n}+\frac{1}{2}} - \mathrm{w}$$

最后,通过 (2) 式求解 $\mathbf{u}$.

4.3 多重网格

把第 k 层细网格上的残差 $\mathbf{r}_k$ 和近似值 $\mathbf{u}_k, p_k$ 限制到下一层的网格上,限制后的近似解记为 $\mathbf{u}_{k-1}, p_{k-1}$,把它作为初值再进行前磨光,迭代的次数也是三次,得到的值记为 $\mathbf{u}_{\hat{k-1}}, \hat{p}$, 计算 $k-1$ 层上面的 $\mathbf{r}$, 然后把 $\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\hat{k-1}}, \hat{p}$ 限制到 $k-2$ 层上。

4.4 求解最粗网格上的问题

已经知道上一层的 $\mathbf{u}, p, \mathbf{r}$ 的值,在这层就直接利用 PR 求解. 得到这层的解 $\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}$ 误差 $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$, 把 $\mathbf{e}$ 投到细网格上面。

4.5 从粗网格提升到细网格上,并校正细网格的值

设已经得到最粗网格层 (假设为 $k-2$ 层) 的误差 $\mathbf{e}_{k-2}$, 把 $\mathbf{e}_{k-2}$ 提升到 $k-1$ 层网格上去,$e_{k-1} = I_{k-2}^{k-1}$,

尽管我们选择的有限元空间是嵌套的,但是当我们粗网格上 $\mathbf{u}$ 插值得到的校正, 投到细网格上得到的约束子空间是非嵌套的。也就是说, 我们在粗网格上得到的校正直接插值到细网格上, 得到的 $\mathbf{u}, p$ 可能不满足 Darcy-Forchheimer 模型中的散度方程。

因此构造一个加权 L^2 投影,通过求解鞍点系统把之前获得的校正映射到细网格的约束空间

$$\begin{bmatrix} A_\delta & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ G^T \mathbf{e}_u \end{bmatrix}$$

其中

$$A_\delta = \frac{\mu}{\rho}(K^{-1}\delta, \varphi_k) + \frac{\beta}{\rho}(|\delta|\delta, \varphi_k)$$

$\mathbf{e}_u$ 是把粗网格上的误差投影到细网格上来的值。

我们在求解 δ, θ 的时候,用的是先求解 θ, 再求解 δ.

这样,我们可以得到 δ, θ, 进而,获得近似 $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{e}_u + \delta$

4.6 后磨光

进行后磨光,调换一下 PR 迭代的两步的顺序,即先解 (2), 再求解 (1).

参考文献