

鲁来玉. 2021. 基于平面波模型重访地震背景噪声互相关及空间自相关 (SPAC). 地球与行星物理理论评, 52(2): 123-163. doi: [10.16738/j.dqyxx.2020-016](https://doi.org/10.16738/j.dqyxx.2020-016)

Lu L Y. 2021. Revisiting the cross-correlation and SPatial AutoCorrelation (SPAC) of the seismic ambient noise based on the plane wave model. Reviews of Geophysics and Planetary Physics, 52(2): 123-163. doi:[10.16738/j.dqyxx.2020-016](https://doi.org/10.16738/j.dqyxx.2020-016)

基于平面波模型重访地震背景噪声互相关及 空间自相关 (SPAC)

鲁来玉*

中国地震局地球物理研究所 北京 100081

摘要: 自 Aki (1957) 提出微震的空间自相关 (SPatial AutoCorelation, SPAC) 技术以来, SPAC 技术一直独立发展, 并在工程地震领域获得了广泛应用. 近 20 年来, 地震干涉 (Seismic Interferometry, SI) 在多个领域引起人们的关注, 该技术的核心思想是连续地震背景噪声的互相关函数 (Noise Crosscorrelation Function, NCF) 可以重建系统的格林函数 (Green's Function, GF), 对该技术的回溯性研究建立了 SPAC 和 NCF 的关系: 它们是对同一物理现象的不同描述, SPAC 在频率域中描述随机平稳噪声的空间相干, NCF 在时间域中描述扩散场的互相关. 理论上 SPAC 和 NCF 技术要求背景噪声源均匀分布, 这样的噪声场可以用平面波叠加来模拟. 本文基于平面波模型重访地震背景噪声的互相关和空间自相关技术, 从单色平面波的互相关表示出发, 对地震背景噪声互相关及空间自相关技术进行评述, 试图使这些概念更易于理解. 与之前众多研究地震干涉技术的理论相比, 本文尤其关注以下几点: (1) 基于简单的平面波模型, 给出不同维度下, 源或台站对方位均匀分布时, 平面波互相关对入射波的方位平均和台阵对方的方位平均结果, 并对格林函数 GF 和时域互相关函数 NCF 的关系进行总结. (2) 给出声源和 (或) 交叉台站方位分布不均匀时的互相关表示, 指出这种非均匀性对方位的依赖关系, 与弱各向异性介质中波速度的方位依赖关系类似, 因此, 非均匀源的影响在反演时可能会映射到面波方位各向异性结果中. (3) 互相关运算中, 哪一个台站是虚拟源. NCF 包含因果性和非因果性两部分, NCF 的非对称性通常用于研究噪声源的方位分布, 但由于源和接收的互易关系, 及对互相关运算的不同定义和不同的傅里叶变换习惯, 哪一个台站是虚拟源在目前的文献中并不明确. (4) 方位平均和时间平均的关系. 在 SPAC 处理中, 需要对不同方位分布的台站对进行方位平均, 本文从理论上说明, 单个平面波入射时, 交叉台站互相关系数对台站对方的方位平均, 等价于单个台站对互相关系数对入射波的时间平均. (5) 几种特定分布非均匀噪声源的 SPAC 表示. 包括单独的因果性噪声源和非因果性噪声源给出的互相关函数表示, 及由此带来的相移问题. (6) 利用 SPAC、NCF 和面波 GF 之间的关系, 给出交叉分量的空间自相关系数表示. (7) 衰减介质的空间相干表示. 虽然利用地震干涉技术研究介质衰减在理论上仍然存在一些争议, 但人们正试图研究从连续背景噪声记录中提取介质衰减的可能性. 本文基于平面波模型, 给出了不同坐标选择下, 衰减介质的空间相干表示, 这种表达的不同, 指示了由地震干涉技术提取介质衰减的困难. 与众多研究地震干涉的理论相比, 比如稳相近似理论、互易定理、时间反转声学等, 本文主要考虑均匀介质, 不涉及非均匀介质的散射, 从最简单的平面波模型, 理解背景噪声重建系统格林函数这一地震干涉的核心思想和相应的基本概念.

关键词: 地震背景噪声; 空间自相关; 平面波; 地震干涉; 格林函数

doi: [10.16738/j.dqyxx.2020-016](https://doi.org/10.16738/j.dqyxx.2020-016)

中图分类号: P315

文献标识码: A

Revisiting the cross-correlation and SPatial AutoCorrelation (SPAC) of the seismic ambient noise based on the plane wave model

Lu Laiyu*

Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China

Abstract: Since Aki (1957) proposed the spatial autocorrelation (SPAC) technology based on the micro-

收稿日期: 2020-09-01; 录用日期: 2020-10-27

基金项目: 国家重点研发计划 (2017YFC1500200) 资助项目; 国家自然科学基金资助项目 (41674062, 41174041); 国家自然科学基金地震联合基金资助项目 (U1839209)

Supported by the National Key R & D Program of China (Grant No. 2017YFC1500200), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41674062, 41174041 and U1839209)

*通讯作者: 鲁来玉 (1976-), 男, 中国地震局地球物理研究所研究员, 主要从事地震面波理论与层析成像等方面的研究工作. E-mail: laiyulu@cea-igp.ac.cn

tremor, the SPAC technique has been independently developed and widely used to infer the S wave velocity at the shallow structure in the field of civil engineering. In the past two decades, seismic interferometry has attracted people's attention in many fields. The key idea of seismic interferometry (SI) is the Green's function (GF) of the system can be extracted via noise cross-correlation function (NCF), which is calculated by cross correlating the continuous seismic ambient noise. The relation between SPAC and NCF is established by the retrospective study of SI technology: two theories describe the same physics with different language. SPAC of microtremors is mainly conducted in the frequency domain, while the retrieval of Green's function is done in the time domain. In theory, both of them require a uniform distribution of ambient noise sources. Such a noise model can be simulated by plane wave superposition. In this paper, starting from the cross-correlation representation of monochromatic plane waves, we review the SPAC and NCF technique of the seismic ambient noise based on the plane wave model. Compared with previous references on seismic interference technology, special attentions are focused on the following: (1) Under the assumption that the source and station-pair orientation are uniform distributed, the averaged SPAC representation is given over the wave incidence and over the inter-station orientation. The relationship between the GF and NCF are reviewed for 1D, 2D and 3D diffuse field constructed by plane wave superposition. (2) The SPAC representation is given for the uneven distribution of the source or the inter-station orientation. It is pointed out the dependence of the SPAC expression on the azimuth of the source or the inter-station orientation is similar to the azimuth dependence of the surface wave velocity in weakly anisotropic media. The influence of anisotropic source and inter-station orientation may therefore be projected into the inversed surface wave azimuthal anisotropy. (3) Which station is the virtual source when calculating the cross correlation using the given definition. Causal and noncausal parts are involved in NCFs. The asymmetry of NCFs is usually used to study the azimuth distribution of noise sources. However, due to the reciprocal relationship between the source and the receiver, and different convention on the cross-correlation and Fourier transform, it is not clear stated in the literature which station is the virtual source. (4) The relationship of the average over the azimuth and over the time. It is usually in SPAC technique to conduct the azimuthal average over the inter-station orientation. For one incident plane wave, it is illustrated in this paper that the averaged SPAC expression over the inter-station orientation is equivalent to that averaged over the time. (5) SPAC representations are given for several noise source model with non-uniform distribution. The phase shift in causal and noncausal part of NCFs is discussed. (6) The SPAC expressions for cross component is derived based on the relations between SPAC, NCF and surface wave GF. (7) The SPAC representation for the attenuation medium is given. Although there is still some controversy in theory on the extracting of attenuation by SI technology, people have been trying to study the possibility on extracting attenuation of the earth from continuous ambient seismic noise. Based on the plane wave model, the SPAC expressions are given for the attenuating medium. The difference of SPAC expressions for different normalization and the selection of the coordinate origin indicates the difficulty of extracting the attenuation of the medium using NCF. Compared with other theories studying SI, such as the stationary phase approximation, reciprocity theorem, time reversal acoustics, etc., homogeneous media is considered in this paper. The key idea and concept on SI is illustrated from the simple plan wave model.

Key words: seismic ambient noise; SPatial AutoCorrelation (SPAC); plane wave; seismic interferometry; Green's function

0 引 言

正如字面意思所表达的, 在信号处理中, “相关”通常表示时间域中两个信号的相似程度. 通过将两个信号中的一个延迟时间 τ , 与对应时间的另一个信号相乘并求和, 然后对两个信号的时间长度

进行归一, 如果在某个给定的 τ , 相关值取得最大, 我们说这两个信号在该延迟时间处最相关. 将这种普通的技术用于处理扩散场中两点的连续噪声记录时, 术语“相关”被赋予了新的含义, 尤其是在地震学中, 连续背景噪声记录的互相关引起了地震学的一场革新 (Nakata et al., 2019). 这是因为人们发现, 两个台站连续背景噪声记录的互相关序列中,

其能量主导部分对应的时间延迟 τ , 与假定其中一个台站为虚拟源, 在另一个台站记录到的脉冲走时有关, 即通过叠加长时间连续背景噪声记录的互相关函数 (Noise Cross-correlation Function, NCF), 可以重建系统的格林函数 (Green's Function, GF), 该技术称为地震干涉 (Seismic Interferometry, SI) 或叫格林函数的重建 (retrieval of Green's function)。

地震干涉技术广泛应用于不同领域, 比如超声学 (Weaver and Lobiks, 2001)、海洋声学 (Brooks and Gerstoft, 2007)、地震学 (Campillo and Paul, 2003)、勘探地球物理 (Schuster, 2009)、电磁学 (Slob and Wapenaar, 2007)、结构监测 (Snieder and Safak, 2006; Sabra et al., 2007)、人体组织成像 (Gallot et al., 2011) 等。这促使人们对该技术进行了交叉学科研究与理论回溯, 发现这一理论可以追溯到 1957 年 Aki (1957) 提出的空间自相关 (SPatial AutoCorrelation, SPAC) 技术。空间自相关在频率域中计算交叉台站之间的互谱, 然后对不同方位但具有相同台间距的结果进行方位平均。Aki (1957) 发现, 如果背景噪声在时间和空间上是平稳的, 归一化之后的空间自相关系数是自变量为 kr 的零阶贝塞尔函数 $J_0(kr)$ (这里 k 为水平波数, r 为两点之间的距离)。据此, 人们可以利用空间自相关系数提取面波的频散信息。这种方法在岩土工程和浅层地震勘探中广泛用于获取浅层横波速度结构。

由于 NCF 和 SPAC 技术都是利用连续的背景噪声记录, 人们也开始关注这两种方法的关系, Chavez-Garcia 和 Luzon (2005) 通过对同一组数据进行时域互相关和空间自相关处理, 比较了两者之间的差别, 认为“两个台站之间的时域互相关获得的信号, 是空间自相关的信号, 经由两个台站间按 Rayleigh 面波频散关系相位校正之后的信号”, 这一实验结果实际就是后来 Tsai 和 Moschetti (2010) 的理论分析所证实的结论, 即“空间自相关是零时间延迟 ($\tau=0$) 的背景噪声互相关在频率域中的表示”。由于我们处理的总是两个不同台站的记录, 从字面来看, 空间“自”相关似乎有些名不副实, 实际上, 如果理解了随机信号在时间和空间上是平稳的这一假设, 并不难理解为何叫空间“自”相关。时间和空间上平稳意味着在一个台站记录的信号, 比如一个单色波信号, 是另一个台站信号的时间延迟 (或提前), 可以看成是同一个信号从一个台站传播到另一个台站, 因此, 该信号相位的空间变化可以通过互相关获取, 同一个信号的相位的空

间变化我们称之为空间自相关系数。

SPAC 要求微震记录在时间和空间上是平稳的, NCF 要求背景噪声场是扩散场, 这意味着 SPAC 和 NCF 技术都假定背景噪声源近似均匀分布。这样的噪声场可以用均匀入射的平面波叠加来模拟, 源的非均匀性采用不同方向具有不同幅度的入射平面波模拟。本文基于平面波入射模型, 重访地震背景噪声的互相关和空间自相关技术, 对相关问题进行评述。从平面波的互相关表示出发, 研究不同维度下, 平面波互相关对入射波的方位平均和台阵对的方位平均结果, 给出声源和 (或) 交叉台站方位分布不均匀时的互相关表示, 分析几种特定分布的源对速度和方位各向异性反演的影响。与之前众多研究地震干涉技术的理论相比, 本文主要关注以下几点:

(1) 评述时域互相关函数 (NCF)、空间自相关 (SPAC) 系数和系统格林函数 (GF) 之间的关系

空间自相关 (SPAC) 理论和地震干涉中的格林函数重建理论是对同一物理现象的不同描述。一个是在频率域中的描述 (SPAC), 另一个是在时间域中的描述 (NCF)。Nakahara (2006) 利用这种关系, 研究了一维、二维和三维情况下系统的时域格林函数和 NCF 的明确联系。本文基于简单的平面波模型, 给出不同维度下, 源均匀分布时, 平面波互相关对入射波的方位平均和台阵对的方位平均结果, 并对不同维度下, 时域互相关函数 (NCF)、空间自相关 (SPAC) 系数和系统时间域和频率域格林函数 (GF) 之间的关系进行了总结。

(2) 非均匀源的分布对基于 NCF 反演面波方位各向异性的影响

基于平面波模型, 给出声源和 (或) 交叉台站方位分布不均匀时的互相关表示, 非均匀源的空间自相关 (SPAC) 系数, 除了 $J_0(kr)$ 之外, 在一阶近似下, 对源 (或交叉台站) 方位的依赖关系, 与弱各向异性介质中面波速度的方位依赖关系类似。因此, 在利用噪声互相关函数 (NCF) 反演面波的方位各向异性时, 非均匀源的影响可能会映射到面波方位各向异性反演结果中 (Löer et al., 2018; Lu et al., 2018)。

(3) 互相关运算中, 哪一个台站是虚拟源

非均匀的背景噪声源使得计算的 NCF 不对称 (Stehly et al., 2006), 虽然在提取频散曲线之前,

通常将 NCF 的正负半轴进行叠加, 但源的非均匀性仍然给面波的速度和各向异性反演带来误差, 很多作者基于不同的模型对此进行了讨论 (Tsai, 2009; Weaver et al., 2009; Yao and Van Der Hilst, 2009; Tsai and Moschetti, 2010). 源的非均匀性同样影响空间自相关系数, 如果噪声源或 (和) 台站对方位分布不均匀, 实际计算的 SPAC 会偏离 $J_0(kr)$. NCF 中的正负两个时间半轴, 对应格林函数及其时间翻转版本, 正半轴表示两个台站中的一个为虚拟源, 在另一个台站记录的格林函数, 负半轴则反过来. 基于正负半轴的非对称性, 可以用两种方法来分析非均匀源的方位分布: 一种方法是直接分析不同方位台站对 NCF 的归一化幅度 (Stehly et al., 2006) 或者信噪比 (Bensen et al., 2007; Yang and Ritzwoller, 2008), 另一种方法采用背景噪声的聚束 (Beam Forming, BF), 通过分析聚束输出的能量大小 (Harmon et al., 2008; Gerstoft and Tanimoto, 2007), 考察噪声源的优势方位分布. 无论采用哪种方法, 基于所采用的互相关定义和计算次序, 明确知道哪一点是虚拟源是重要的, 否则得到的噪声源优势方位可能正好相反. 然而, 由于源和接收的互易关系, 及对互相关运算的不同定义和不同的傅里叶变换习惯, 据作者所知, 并没有文献从理论上明确指出互相关运算中哪一个点是虚拟源.

(4) 方位平均和时间平均的关系

在 SPAC 的实际应用中, 通常按照早期 Aki (1957) 的思想, 将传感器布置为含有一个圆心的圆形阵列, 然后对相同间距的台站求取方位平均, 这限制了 SPAC 方法的应用, Chavez-Garcia 等 (2005) 提出了一种线性排列的 SPAC 方法, 指出只要记录的时间足够长, 可以认为对各个方位的波进行了足够的采样, 利用时间的平均来代替台站的方位平均, 从而一个台站对就可以给出一次测量, 不需要在同一时间段布置大量台站, 而且可以获得具有更多台间距的测量结果, 他们后来的实验结果 (Chavez-Garcia and Luzon, 2005) 证实了其想法, 但目前并没有理论上的解释, 本文基于平面波模型模拟的扩散场, 研究互相关对台站对的方位平均和对入射波的方位平均, 讨论方位平均对 NCF 和 SPAC 实际数据处理的含义.

(5) 几种特定分布非均匀噪声源的 SPAC 表示

根据源的方位平均和台站对的方位平均结果, 可以知道对噪声源的方位平均和对台站对的方位平

均是一个问题的两个方面. 在某些情况下, 源的非均匀性和台站的非均匀性对面波反演具有类似的影响, 从而只要考虑源的非均匀性和台站方位非均匀性中的一个, 我们通过分析几种非均匀源的 SPAC 表达式, 讨论它们相对标准均匀源空间自相关系数 $J_0(kr)$ 的偏差. 同时, 讨论格林函数正负半轴对应的源给出的 SPAC 表示, 及由此带来的相移问题.

(6) 利用 SPAC、NCF 和面波 GF 之间的关系, 给出交叉分量的 SPAC 互相关的表达式

SPAC 可以利用 NCF 来表示, NCF 又与系统的格林函数相关, 这意味着, 如果面波格林函数不同分量的表达已知, 利用这种关系可以推导面波不同分量的空间自相关系数. 比如 Yokoi 和 Margaryon (2008) 基于这种关系, 利用已知的格林函数表示导出了面波水平分量的空间相关系数. 与 Yokoi 和 Margaryon (2008) 相反, Haney 和 Nakahara (2014) 则是利用交叉分量的空间自相关系数导出了包含近场的面波格林张量, 在此之前, 他们首先根据不同分量的面波表达式, 采用类似 Nakahara (2006) 的方法, 给出了面波交叉分量的空间自相关系数 (Haney et al., 2012). 然而, 实际上包含近场的面波格林函数是已知的 (Friederich et al., 1993; Maupin, 2001; Luetal., 2008), 因此, 采用 Yokoi 和 Margaryon (2008) 的类似方法, 可以利用包含近场的面波格林函数, 利用 NCF、GF 和 SPAC 之间的关系, 来推导面波交叉分量的互相关. 各个分量的 SPAC 表示, 为基于密集台阵背景噪声、利用频率—贝塞尔变换提取多模面波的特征值 (Wang et al., 2019; 杨振涛等, 2019; 吴华礼等, 2019; Hu et al., 2020), 提供了理论基础.

(7) 衰减介质中空间相干表示

关于 NCF 在地震层析成像中的应用, 大多关注 NCF 的相位信息, 即利用背景噪声互相关测量地震波的走时, 对 NCF 的振幅信息研究较少. 最近, 研究人员开始关注背景噪声互相关振幅测量 (Lin et al., 2011; Liu et al., 2013; Weemstra et al., 2013; Weemstra et al., 2014; Liu et al., 2015). Prieto 等 (2009) 认为在衰减介质中, 经过方位平均以后, 两个台站之间频率域归一化的互相关 (相干的实部) 等于零阶贝塞尔函数与衰减指数项的乘积, 虽然在美国南加州地区获得了成功应用, 但衰减项的引入, 仅仅是对弹性介质的一个简单推广, 并没有做详尽的讨论 (Prieto et al., 2009; Prieto et al., 2011; Lawrence

and Prieto, 2011). NCF 的振幅受衰减、背景噪声源分布、散射等因素影响 (Lawrence et al., 2013). 是否可以从背景噪声空间自相关方法提取衰减依旧是有争议的. Nakahara (2012) 认为只有当衰减很小时, 指数衰减项的引入才是近似正确的. Weaver (2011) 和 Tsai (2011) 认为相干的方位平均可能无法重建可靠的衰减系数. 我们基于均匀入射的平面波模型, 给出衰减介质中 SPAC 的理论表达式, 并讨论相关和叠加的运算次序对衰减介质的影响.

文中的一些公式或讨论散见于一些文献, 本文基于平面波模型, 在相应的逻辑架构下对相关问题进行重新阐述, 避免采用有些文献中在讨论类似问题时经常采用的稳相近似积分 (例如, Snieder, 2004; Boschi and Weemstra, 2015), 从最简单的情形出发, 试图使公式背后的概念更容易理解.

1 模型及定义

1.1 傅里叶变换和希尔伯特变换的习惯及互相关定义

我们采取如下的傅里叶变换 (Fourier transform) 习惯:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $f(t)$ 为时域函数, $F(\omega)$ 为其傅里叶谱, ω 为角频率. 这意味着时谐因子为 $e^{i\omega t}$, 平面波表达 $e^{-ikx}e^{i\omega t}$ 表示沿 x 轴正向传播的波, $e^{ikx}e^{i\omega t}$ 表示沿 x 轴负向传播的波.

函数 $s(x)$ 的希尔伯特变换 (Hilbert transform) 定义为:

$$s(t) = \mathcal{H}[s(x)] = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x)}{t-x} d\tau \quad (2)$$

式中, P.V. 表示柯西积分主值, 在此定义下, 实值信号 $s(t)$ 的解析信号 $S(t)$ 为:

$$S(t) = s(t) + i\mathcal{H}[s(t)] \quad (3)$$

式中, 符号 \mathcal{H} 表示希尔伯特变换.

两个信号 $f(t)$ 、 $g(t)$ 的 (复) 互相关定义为:

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)g(t+\tau)dt \quad (4)$$

式中, * 号表示复共轭. 若 $g(t)$ 的傅里叶变换为 $G(\omega)$,

根据 (1) 式, 有:

$$g(t+\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega')e^{i\omega'(t+\tau)}d\omega' \quad (5)$$

将 (1) 式中的 $f(t)$ 和 (5) 式代入 (4) 式, 有:

$$\begin{aligned} C_{fg}(\tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega')e^{i\omega'(t+\tau)} d\omega' \right] dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)G(\omega')e^{i(\omega'-\omega)t}e^{i\omega'\tau} dt d\omega d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)G(\omega')\delta(\omega-\omega')e^{i\omega'\tau} d\omega d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)G(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $\delta(x-x_0)$ 称为狄拉克 (dirac delta) 函数, 或称为单位脉冲函数, 由如下方程定义 (Arfken and Weber, 2005):

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)dx = 1 & x \neq x_0 \end{cases} \quad (7)$$

或者由如下性质定义:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad (8)$$

由 (6) 式可知, 根据 (1) 式的傅里叶变换习惯, $C_{fg}(\tau)$ 和 $F^*(\omega)G(\omega)$ 互为傅里叶变换, 时间域中的互相关对应频率域中的 (其中一个量取复共轭后的) 乘积.

1.2 时域相关、空间自相关及空间相干

用 \mathbf{r}_a 、 \mathbf{r}_b 表示空间中任意两点的坐标, 其中 $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_a + \mathbf{r}$, $r = |\mathbf{r}|$ 为 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 两点之间的距离, 用 u_a 和 u_b 表示在 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 两点记录的时间序列, 其长度为 T , 根据 (4) 式, 两点之间归一化的时域互相关函数定义为:

$$C_{ab}(r, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^*(\mathbf{r}_a, t)u(\mathbf{r}_b, t+\tau)dt \quad (9)$$

式中, τ 为时间延迟.

类似地, 空间相关是求取某个固定时间 t 的波场, 在空间上的相关性. 对于二维情形, 根据 (4) 式, 归一化的空间自相关定义为 (Tsai and Moschetti, 2010):

$$R_{ab}(\xi, t) = \frac{1}{A} \int_A u^*(r, t) u(r + \xi, t) dr \quad (10)$$

式中, A 是所考虑的区域面积, ξ 是空间的偏移量. 由于地震背景记录是一个统计随机变量, 对面积 A 的归一利用整体平均代替. 在实际操作中, 对 A 的整体平均 ($r \in A$) 由某个时间段内对时间的平均代替 (Aki, 1957; Tsai and Moschetti, 2010). 如果波场在时间和空间上是平稳的, 空间自相关将独立于时间 t , 它可以表示为:

$$\phi_{ab}(\xi) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^*(r, t) u(r + \xi, t) dt \quad (11)$$

在 SPAC 的实际操作中, 除了对时间的平均外, 还对不同方位相同间距的台站对进行方位平均, 方位平均的操作将在下面具体讨论.

1.3 平面波模型

如图 1 所示, 不失一般性 (对于弹性介质), 将 a 点置于坐标原点, 对于某个方向入射的频率为 ω 、初始相位为 ϕ_0 、幅度为 A 的平面波, 可以表示为 $A \cos(\omega t + \phi_0)$. 由于地震信号 $s(t)$ 通常是一个实信号, 可以按照 (3) 式构建一个复信号或解析信号 $S(t)$, 该解析信号的虚部为 $s(t)$ 的希尔伯特变换, 由于 $\cos x$ 的希尔伯特变换为 $\sin x$ (Ben-Menahem and Singh, 1981), 单色波 $\cos(\omega t + \phi_0)$ 对应的解析信号为 $e^{i(\omega t + \phi_0)}$, 因此, 在 a 点的平面单色波可以表示为:

$$u_a(r_a, \omega, t) = A e^{i(\omega t + \phi_0)} \quad (12)$$

式中, $r_a = 0$. 在下面的讨论中, 我们主要针对解析信号展开, 与针对实信号的讨论不同 (Tsai, 2009; Tsai, 2010; Tsai and Moschetti, 2010; Boschi et al., 2013), 对解析信号的处理更方便, 最终的结果取实部即可.

系统格林函数和背景噪声互相关函数之间关系的数学证明, 最早是由 Lobkis 和 Weaver (2001) 基于简正模构成的扩散场假设给出的. 很多模型用于描述扩散场 (Jacobsen and Roisin, 2000), 在室内声学中, 通常用各个方向入射的平面波描述扩散场, 这些平面波由远场沿各个方向均匀分布的非相关随机源激发, 具有随机的幅度和相位 (Jacobsen and Roisin, 2000; Rafaely, 2000). 因此在下面的讨论中, 如果平面波从各个方向均匀入射, 实际上就构成了一个扩散场. 需要指出, 对于完全弹性介质, 如果平面波源均匀分布于图 1 中以 a 点为圆心的大圆上, 在大圆内部的各点, 包括 a 点和 b 点处的能

量是相同的. 如果考虑介质的衰减, 则只有相对 a 点, 各个方向的入射能量是均匀分布的, 这意味着对于衰减介质而言, 坐标原点的选择不同, 互相关的结果可能有所不同. 对于衰减介质情况, 我们在本文第 6 节讨论.

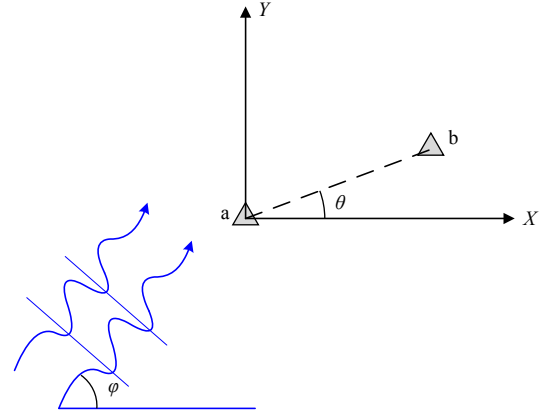


图 1 单色平面波入射示意图, θ 为台站对的方位, φ 为入射波的传播方向, a 、 b 为台站位置

Fig. 1 Illustration on the incidence of a monochromatic plane wave. θ is the azimuth of the station pair, and φ is the propagation direction of the incident wave. Stations a and b are denoted by triangles

1.4 单个单色平面波空间自相关的表达式

如图 1 所示, 单个单色平面波经由 a 点到达 b 点, b 点接收到的波是 a 点波形的延迟, 可以用下式表示:

$$u_b(r_b, \omega, t) = A e^{i\omega[t - \frac{r}{c} \cos(\theta - \varphi) + \phi_0]} \quad (13)$$

根据图 1 的坐标关系, $r_b = r$, $r = |r| = |r_a - r_b| = |r_b|$ 为 a 、 b 两点之间的距离, θ 为 r 与 x 轴正向的夹角, 它表示台站对的方位, φ 是平面波的入射方向与 x 轴正向的夹角, 表示入射波的方位, c 为介质的相速度, 这里假定为常数. 根据 (11) 式, a 、 b 两点单个单色平面波的空间自相关为:

$$\begin{aligned} \phi_{ab}(r, \omega) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_a^*(r_a, \omega, t) u_b(r_b, \omega, t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} dt = A^2 e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $k = \omega/c$ 为波数, 类似地, a 、 b 两点波场的自相关为:

$$\begin{aligned} \phi_{aa} = \phi_{bb} &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_a^*(r_a, \omega, t) u_a(r_a, \omega, t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_b^*(r_b, \omega, t) u_b(r_b, \omega, t) dt = A^2 \end{aligned} \quad (15)$$

利用 a、b 两点波场的功率谱, 即它们各自的自相关, 对 (14) 式进行归一化, 归一化之后的空间自相关为:

$$\widehat{\phi}_{ab}(r, \omega) = \frac{\phi_{ab}}{\sqrt{\phi_{aa}\phi_{bb}}} = e^{-ikr\cos(\theta-\varphi)} \quad (16)$$

地震背景噪声或叫地脉动, 可以用不同方向入射的非相关的平面波模型表示, 与扩散场不同, 背景噪声源的密度可能随入射波方向变化, 假定入射波密度为 $\rho^{\text{wave}}(\varphi)$. 对于 SPAC 技术, 假定入射波在时间和空间上是稳定的, 在实际应用中, 通常对圆形排列的不同方位的台站对取方位平均, 用 $\rho^{\text{sta}}(\theta)$ 表示台站对的方位密度分布, 单个单色平面波互相关对台站对的方位平均可以表示为:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{\text{sta}}(\theta) e^{-ikr\cos(\theta-\varphi)} d\theta \quad (17)$$

对于 NCF 技术, 实际应用中是对单个台站对的记录进行互相关计算. 对长时间互相关结果的平均, 相当于对不同方位的噪声源的平均, 单个台站对的单色平面波互相关对入射波方位的平均可以表示为:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{\text{wave}}(\varphi) e^{-ikr\cos(\theta-\varphi)} d\varphi \quad (18)$$

$\widehat{\phi}_{ab}$ 中的上标 sta 和 wave 分别表示是对台站对方位和入射波 (源) 方位平均后的结果. 我们将根据上述表达式, 讨论弹性介质中不同空间维度和噪声源密度的空间自相关表示.

1.5 (标量) 格林函数

格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 定义为: 在源点 $\mathbf{r}'(x', y', z')$ 处的单位点源, 在场点 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 处产生的场. 对于一个线性系统, 任意分布的源产生的场可以通过将源剖分成很多微元, 考虑微元产生的场并将其叠加来计算. 如果已知系统的格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, 那么对于任意分布的源 $\rho(\mathbf{r}')$ 在 \mathbf{r} 处产生的场可以通过格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 对源分布的整个范围进行积分获得 (Morse and Feshbach, 1953). 对于线性系统任意算子 \hat{L} , 标量格林函数定义为如下方程的解 (Snieder and van Wijk, 2015):

$$\hat{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (19)$$

式中, \hat{L} 可以是拉普拉斯算符, 也可以是别的算符, 对于不同的算符有不同的格林函数形式. 如果格林函数已知, 那么方程:

$$\hat{L}u = f(\mathbf{r}) \quad (20)$$

的解可以写为:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (21)$$

将形如 (21) 式的解, 代入非齐次方程 (20) 式, 并利用 (8) 式所示狄拉克函数的性质, 有:

$$\begin{aligned} \hat{L}u &= \hat{L} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (22)$$

显然 (21) 式满足方程 (20) 式, 是非齐次方程 (20) 式的解.

1.5.1 (标量) 波动方程格林函数

弹性介质齐次 (位移) 波动方程可以写为:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

式中, ∇^2 为拉普拉斯算符, 对于不同空间维度, 具有如下形式:

$$\begin{aligned} 1D: \nabla^2 &= \frac{d^2}{dx^2} \\ 2D: \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 3D: \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (24)$$

根据 (19) 式, 波动方程的 (位移) 格林函数可以定义为:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (25)$$

式中, $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ 表示随着时间的推进, 位于 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 的源, 在 $t = t'$ 时刻激发, 脉冲远离 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 传播时的波场. 根据初始条件, 脉冲源在 $t = t'$ 时刻激发, 因此假定格林函数及其对时间的导数在源激发之前, 即 $t < t'$ 时为零是合理的, 就好像脉冲出现在 t' 时刻, 在此时间之前它的影响不应该出现, 即假定格林函数及其对时间的导数在 $t < t'$ 时为零. 格林函数满足时域和频率的互易关系:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= G(\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}, -t) \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (26)$$

注意时间域中互易关系, 除了源和场的位置互易外, 时间轴是相互反转的.

将 (24) 式所示的算符代入 (25) 式, 可以得到不同维度下 (25) 式的解, 即相应维度波动方程

的格林函数, 它们可以写为 (例如, Morse and Feshbach, 1953; Snieder and van Wijk, 2015):

$$1D: G(x, t) = \frac{c}{2} H\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad x = |x - x'| \quad (27)$$

$$2D: G(r, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} H\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (28)$$

$$3D: G(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} \delta\left[t - \frac{r}{c}\right] \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (29)$$

式中, $H(x)$ 为单位阶跃函数 (unit-step function 或 heaviside step function), 满足 (Ben-Menahem and Singh, 1981):

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (30)$$

1.5.2 亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程格林函数

根据 (19) 式, 亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程的格林函数可以定义为:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (31)$$

将 (24) 式所示的算符代入 (31) 式, 可以得到 (31) 式在一维、二维和三维情况下的解分别为 (Morse and Feshbach, 1953; Snieder and van Wijk, 2015):

$$1D: G(x, \omega) = \frac{i}{2k} e^{-ikx} \quad x = |x - x'| \quad (32)$$

$$2D: G(r, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (33)$$

$$3D: G(r, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (34)$$

$H_0^{(2)}(x)$ 为第二类零阶汉克尔 (Hankel) 函数. 对于一维情形, 我们用 x 表示源到接收点的距离, 对于二维和三维情形, 我们都用 r 表示源到接收点的距离.

2 虚拟源: 以一维情形为例解释 NCF 和 SPAC 的关系

2.1 一维情形的时域互相关

如图 2a 所示, 坐标轴的选择如图中黑色实线

所示, x 轴正向由 a 点指向 b 点, 假定频率为 ω 的单色平面波从左侧入射, 即波的入射角 $\theta = 0$, 平面波的相速度为 c , a、b 两点间的距离为 x . a 点的平面单色波信号可以表示为:

$$u_a = A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} \quad (35)$$

式中, A_0 表示平面波的幅度, ϕ_0 表示波的初始相位, b 点接收到的信号是 a 点信号的时间延迟波形, 根据图中的坐标关系, 可以表示为:

$$u_b = A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} e^{-ikx} = A_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} e^{i\phi_0} \quad (36)$$

将 (35) 式和 (36) 式代入 (9) 式, 计算 a、b 两点信号的时域互相关函数, 有:

$$C_{ab}^+(x, \omega, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_a^*(t) u_b(t + \tau) dt \\ = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_0^2 e^{i\omega\tau} e^{-ikx} dt = A_0^2 e^{i\omega(\tau - \frac{x}{c})} \quad (37)$$

容易看出 (37) 式表示沿 x 轴正向由 a 点传向 b 点的平面单色波信号. 如图 2b 所示, 如果平面波从右边入射, 即 $\theta = \pi$, 则 a、b 两点的平面单色波可以表示为:

$$u_a = A_\pi e^{i(\omega t + \phi_\pi)} \\ u_b = A_\pi e^{i(\omega t + \phi_\pi)} e^{ikx} = A_\pi e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} e^{i\phi_\pi} \quad (38)$$

类似地, 其时域互相关为:

$$C_{ab}^-(x, \omega, \tau) = A_\pi^2 e^{i\omega(\tau + \frac{x}{c})} \quad (39)$$

(39) 式表示沿 x 轴负向由 b 点传向 a 点的波. 将二者的结果叠加并归一可以得到:

$$C_{ab}(x, \omega, \tau) = \frac{e^{i\omega\tau} (A_0^2 e^{-ikx} + A_\pi^2 e^{ikx})}{2} \quad (40)$$

通常来说, 两侧的入射波幅度是不同的, 这就造成实际的互相关函数不是对称的, 利用这种非对称性, 可以研究入射波的强度随方位的变化. 对于一维情形来说, 可以直接利用两个传播方向的幅度

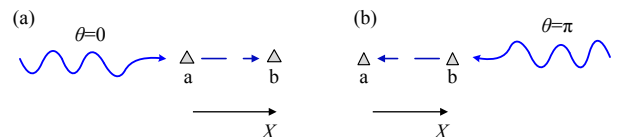


图 2 一维情形下, 平面单色波分别从左 (a) 右 (b) 单边入射的示意图, 黑色实线箭头表示 x 轴正向, 蓝色虚线表示虚拟源到虚拟接收的方向

Fig. 2 The plane monochromatic waves are incident from the left (a) or from the right (b). The solid black arrow indicates the positive direction of the x -axis, and the blue dotted line indicates the direction from the virtual source to the virtual receiver

信息, 分析 A_0 和 A_π 的相对大小. 对于二维情形来说, 可以利用聚束方法分析噪声源的方位. 这要求我们要知道时域互相关函数中的正负时间轴分别对应的虚拟源, 根据 (37) 式和 (39) 式及 (9) 式互相关的定义, 可以明确看出, 进行互相关运算时, 取复共轭的那一点为虚拟源, 信号进行延迟的另一点为虚拟接收, 了解这一点是重要的. 比如, 在地震干涉方面的文献中, 很多理论推导都是在频率域中进行的, 尤其是基于互易定理的推导, 可以将格林函数中的第一个变量表示源, 第二个表示接收, 或者采用相反的习惯. 由于互易定理, 源和接收可以互换, 及对互相关运算的不同定义和不同的傅里叶变换习惯 (附录 A 给出了另一种定义下互相关的频域表示), 在理论公式中, 虚拟源和虚拟接收的区分并不是很明确, 但这对实际的数据处理和分析, 特别是对噪声源的分析尤为重要. 另外, 对实信号来说, 在互相关运算中, 不进行时间延迟操作的那一点为虚拟源, 进行时延操作的一点为虚拟接收.

$$C_{ab}(x, \omega, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_a^*(t) u_b(t + \tau) dt = (A_0^2 e^{-ikx} + A_\pi^2 e^{ikx}) e^{i\omega\tau} + A_0 A_\pi e^{i(\phi_0 - \phi_\pi)} e^{ikx} e^{i\omega\tau} + A_0 A_\pi e^{i(\phi_\pi - \phi_0)} e^{-ikx} e^{i\omega\tau} \quad (44)$$

(44) 式的第二行源于不同方位的源的互相关, 若初始相位 ϕ_0 、 ϕ_π 是随机的, 不同的源之间幅度是不相关的, 即:

$$\langle A_0 A_\pi e^{i(\phi_0 - \phi_\pi)} \rangle = 0 \quad (45)$$

式中, $\langle \cdot \rangle$ 表示整体平均, 在实际应用中通常用长时间的平均代替. 如果相关的时间足够长, (44) 式第二行所示的交叉项会消失, 得到和 (40) 式相同的结果.

2.2 一维情形的空间自相关

在 Aki (1957) 最初提出 SPAC 方法的文献中, 需要对不同方位的台站取方位平均, 如果记录时间足够长, 背景噪声源可以认为来自各个方位, 这意味着传统 SPAC 方法实际上包含了对不同方向上的噪声源方位和交叉台站对方位的两个方位平均. 对于 NCF 方法来说, 单个台站就给出一个格林函数, 从而获取单个路径的频散信息, 没有对台站对方的方位平均. 因此, 这里我们分别研究对台站对方位和入射波场的方位平均, 并讨论 SPAC 与 NCF 的关系.

2.2.1 对台站对方的方位平均

一维情况下, 单个入射波, 对台站对方的方位平

明确这一点, 就可以根据计算的互相关函数的非对称性判断源的方位分布.

如果两边入射波的幅度相等, 且令 $A_0 = A_\pi = 1$, 有:

$$C_{ab}(x, \omega, \tau) = \frac{e^{i\omega\tau}(e^{ikx} + e^{-ikx})}{2} = e^{i\omega\tau} \cos kx \quad (41)$$

取 (41) 式的实部为:

$$\text{Re}\{C_{ab}(x, \omega, \tau)\} = \cos \omega\tau \cos kx \quad (42)$$

(42) 式即是一维情况下, 平面单色波构成的扩散场的时域互相关.

如果两边的源是同时激发的, 比如各个方向的地震背景噪声总是被同时接收, 需要先求取两边平面波的叠加, 然后再计算互相关. 双边叠加的平面波可以表示为:

$$u_a = A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} + A_\pi e^{i(\omega t + \phi_\pi)} \\ u_b = A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} e^{-ikx} + A_\pi e^{i(\omega t + \phi_\pi)} e^{ikx} \quad (43)$$

其互相关为:

均, 相当于固定入射波的方位, 取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 的结果, 然后进行叠加. 如图 3 所示, 单个平面波从左侧入射, (16) 式所示空间自相关系数中的 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 的结果相加可以得到:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(x, \omega) = \frac{e^{ikx \cos \varphi} + e^{-ikx \cos \varphi}}{2} \quad (46)$$

如果平面波从左侧入射, 即 $\varphi = 0$ (图 3), 如果平面波从右侧入射, $\varphi = \pi$. 可以发现, 无论是从哪个方向入射, 将 $\varphi = 0$ 或 $\varphi = \pi$ 代入 (46) 式, 单个平面波入射对台站对方位平均后的结果均为:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(x, \omega) = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) = \cos kx \quad (47)$$

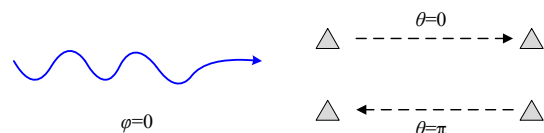


图 3 一维情形下单色平面波从左侧入射, 对台站对方位进行平均

Fig. 3 A monochromatic plane wave is incident from the left, and average is take over the station pair azimuth

2.2.2 对入射波的方位平均

由于 θ 和 φ 的对称性, 如图 4 所示, 平面波从两

侧入射, 且幅度相同, $A_0 = A_\pi = 1$, 令 $\theta = 0$, 固定台站对的方位, 对两侧 ($\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$) 入射的单色平面波取平均, 其结果和 (47) 式对台站对的方位平均相同, 即:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(x, \omega) = \widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(x, \omega) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) = \cos kx \quad (48)$$

如果取 $\theta = \pi$, 得到与 (48) 式相同的结果. (47) 式和 (48) 式的一致性表明, 单个入射波对台站对的方位平均, 与单个台站对对入射波的方位平均一致. 下面我们会看到, 若源均匀分布, 对于二维情形也有相同的结论.

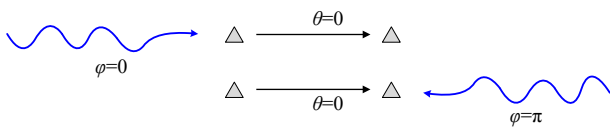


图 4 一维情形下单色平面波双侧入射, 单方向台站的互相关结果对入射波的方位平均

Fig. 4 A monochromatic plane wave is incident on both sides, the cross-correlation for single station pair is averaged over the incident wave

2.2.3 空间自相关 SPAC、时域互相关 NCF 和格林函数 GF 的关系

对比 (42) 式单色平面波互相关函数和 (47) 式或 (48) 式单色波的 SPAC 系数, 可以发现, 频率域的 SPAC 的结果即是时域互相关 $\tau = 0$ 时的结果, 即空间自相关 (SPAC) 系数是零时间延迟 ($\tau = 0$) 的时域互相关函数:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(x, \omega) = \widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(x, \omega) = C_{ab}(x, \omega, \tau = 0) \quad (49)$$

Tsai 和 Moschetti (2010) 基于实的余弦函数表示的平面波模型, 明确指出了这一点. 实际上, 在声学领域, 很多研究者在研究扩散场的空间—时间相关时, 也发现这一关系, 比如 Cron 和 Sherman (1962)、Corn 等 (1965) 以及 Rafaely (2000).

(41) 式是针对频率为 ω 的单色波的表达式, 对于瞬态源激发的情形, 可以直接求取 (41) 式角频率在 $(-\infty, \infty)$ 的积分, 即:

$$\begin{aligned} C_{ab}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ab}(x, \omega, t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{ikx} + e^{-ikx})}{2} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (50)$$

式中, $\delta(x)$ 为 (7) 式所示的 dirac delta 函数, 它是 (30) 式所示的单位阶跃函数 $H(x)$ 的广义导数:

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x) \quad (51)$$

对比互相关函数 (50) 式和 (27) 式所示的 1D 波动方程格林函数, 可以发现:

$$C_{ab}(x, t) = \frac{1}{c} \left[\frac{d}{dt} G_{1D}(x, t) - \frac{d}{dt} G_{1D}(x, -t) \right] \quad (52)$$

(52) 式右端是一维情形格林函数的微分及其时间反转版本, 它建立了一维情形下, 时域互相关函数 $C_{ab}(x, t)$ 和系统格林函数 $G_{1D}(x, t)$ 之间的关系. 根据 (52) 式, Nakahara (2006) 指出, 一维空间的格林函数, 可以通过互相关函数的时间积分获得. 同时, Nakahara (2006) 根据类似 (52) 式的空间自相关函数在时域中的表达, 研究了二维和三维空间中的空间自相关与格林函数之间的关系. 由于时间域 NCF 和 SPAC 之间的等价性, 关于 NCF 性质的一些讨论, 可以更方便地在频率域通过讨论 SPAC 的性质来展开.

3 弹性介质的空间相干表示

3.1 二维情形

3.1.1 台站或源均匀分布时的 SPAC 表示

首先考虑入射波或台站对沿方位均匀分布的情形. 对于单个的入射平面波, 假定交叉台站对沿方位均匀分布; 对于单个的台站对, 假定入射波沿方位均匀分布.

(1) 单个平面波入射, 台站对方位均匀分布

如图 5 所示, 台站沿圆周均匀连续分布, 单个单色平面波以一定角度入射, 假设台站对的方位分布密度为 1, 即 (17) 式中的 $\rho^{\text{sta}}(\theta) = 1$, 从而对台站对的方位平均可以表示为:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} d\theta \quad (53)$$

作变量代换, 令 $\alpha = \theta - \varphi$, 有:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{2\pi - \varphi} e^{-ikr \cos \alpha} d\alpha \quad (54)$$

将平面波展开成柱面波形式 (Arfken and Weber, 2005):

$$e^{-ikr \cos \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(kr) \cos n\alpha \quad (55)$$

式中, $J_n(x)$ 为第一类 n 阶贝塞尔函数, $n = 0$ 时, $\varepsilon_0 = 1$, $n \neq 0$ 时, $\varepsilon_n = 2$. 由于三角函数的周期性, 除了 $n = 0$ 之外, 上式关于角 α 的积分在 2π 区间内为 0, 在 $n = 0$ 时, (54) 式的积分为 $J_0(kr)$, 因此有:

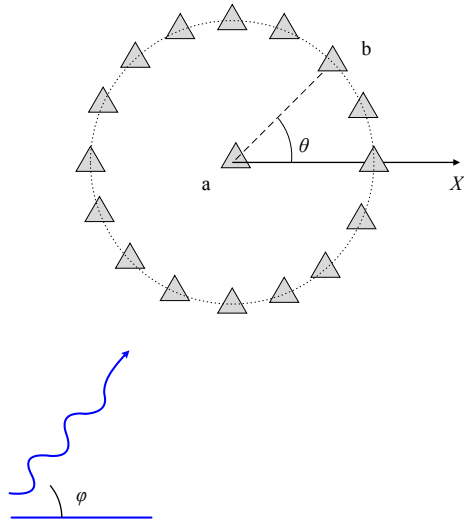


图 5 二维情况下, 单个平面波入射, 接收台站沿圆周均匀连续分布

Fig. 5 A single monochromatic plane wave is incident and stations are distributed uniformly along the circumference

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} d\theta = J_0(kr) \quad (56)$$

这个结果众所周知, 与 Aki (1957) 在研究空间自相关 (SPAC) 时给出的结果一致. 实际上形如 (56) 式的积分可以由 Watson (1966) 第 20 页的 (5) 式直接得到 (见附录 B).

(2) 单个台站对, 入射波沿方位均匀分布

如图 6 所示, 假定入射平面波由各个方位均匀入射, 且 $\rho^{\text{wave}}(\varphi) = 1$, 按 (18) 式对入射平面波方位进行平均, 由于 θ 和 φ 的对称性, 固定台站对, 对入射波进行平均, 可以得到与 (56) 式相同的结果, 即:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = J_0(kr) \quad (57)$$

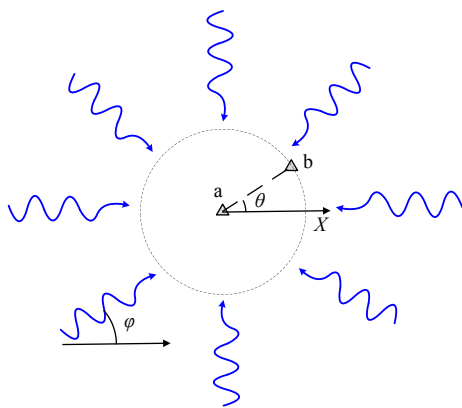


图 6 二维情况下, 一个台站对接收, 入射波各向同性入射

Fig. 6 The monochromatic plane waves incidence isotropic from all direction and single station pair receives

(56) 式和 (57) 式表明, 假定互相关函数计算中的时间平均等同于对入射波的方位平均, 那么, 单个台站对互相关函数对入射波的方位平均 ($\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}$) 等价于单个方向入射的平面单色波互相关函数对交叉台站对的方位平均 ($\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}$), Chavez-Garcia 等 (2005) 通过实验数据观测到了这一结果. 这种一致性使得 NCF 和 SPAC 方法在实际应用中, 可以灵活操作, 互相借鉴, 其直接的影响包括: (1) SPAC 方法的台站布设不必精确位于一个圆形台阵上, 利用单个台站对也可以采用不带方位平均操作的标准 SPAC 处理技术提取频散曲线. 如 Chavez-Garcia 等 (2006) 利用线性排列的台站获得了与圆形台站类似的结果. (2) 小尺度的 SPAC 技术用于大尺度结构反演中, 或反过来, 大尺度的 NCF 方法用于小尺度结构成像中. 如图 7b 所示, SPAC 方法的观测系统是在一定范围布置圆形 (或者嵌套三角形) 等排列的台阵, 求取不同方位分布的台站对 (图中圆周上的不同台站和圆心台站构成的台站对) 空间自相关系数, 然后将不同方位分布的台站对相关系数进行方位平均, 根据平均后的 SPAC 系数求取频散曲线, 这就意味着由此得到的频散曲线是台阵下方区域的平均效应, 反演得到的速度结构是该区域下平均的一维速度结构, 如果要用此方法获取二维速度剖面, 需要沿测线移动整个台阵, 将沿测线的一维速度结构拼接为二维剖面的形式. 相对而言, 时域 NCF 对每个台站对提取的频散曲线, 都是一次独立测量, 理论上 n 个台站可得到 $n(n-1)/2$ 个路径方位的路径覆盖. 如图 7a 所示, 在 NCF 中, 对于任意台站对 a、b, 将两个台站各自长时间的背景噪声记录, 进行分段, 然后对每一段进行互相关运算, 将不同时间段内的互相关函数进行叠加, 得到该路径下两点之间的近似格林函数, 对单个台站对, 就得到反应该台站对路径下的传播效应. 利用 NCF 进行面波成像时, 一般首先需要计算不同台站对的频散曲线, 得到两两不同台站对的频散曲线之后, 进行纯路径的面波速度反演, 得到不同周期的二维速度分布图, 然后对每个成像区域反演, 最后得到三维的 S 波速度结构 (Ditmar and Yanovskay, 1987; Debayle and Sambridge, 2004). 因此, 对于一个台阵来说, 不需要移动台阵的观测结果就可以获得三维的速度结构. Fang 等 (2015) 提出一种面波反演方法, 将水平二维方向面波不同路径的走时灵敏度和深度方向的灵敏度组合在一起, 可以略过纯路径

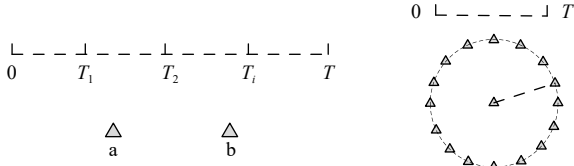


图 7 背景噪声互相关时间叠加平均 (左) 和 SPAC 的方位平均 (右) (刘庆华等, 2015)

Fig. 7 Ambient noise cross-correlation is averaged over the long time (left) and SPAC is averaged over the station-pair azimuth (right) (Liu et al., 2015)

反演, 直接获得 3D 剪切波速度结构.

利用时域 NCF 提取频散曲线, 是建立在远场假设的基础之上 (Yao et al., 2006), 因此通常要剔除台间距小于 2 倍或 3 倍波长的台站对 (Yao et al., 2006, 2011; Luo et al., 2015). 单个台站对对入射波的方位平均和单个入射波对台阵对方位平均的一致性表明, 可以利用 Aki 的方法, 提取单个台站对的频散曲线. 这避免了时域 NCF 的远场假设, 可以获得台站间距较小的频散曲线, 同时对每一个台站间距就得到一次独立测量, 充分利用 SPAC 和 NCF 方法的优点. 比如 Ekstrom 等 (2009) 利用频率域中互相关谱实部的零点来提取频散曲线.

3.1.2 源均匀分布时的时域互相关函数

将 (12) 式和 (13) 式所示频率为 ω 的单色波代入 (9) 式, 并假定入射波的幅度为 $A = 1$, 单个单色平面波在时间域中的互相关可以表示为:

$$C_{ab}(r, \omega, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i(\omega t + \phi_0)} e^{i\omega[t + \tau - \frac{r}{c} \cos(\theta - \varphi) + \phi_0]} dt$$

$$= e^{i\omega\tau} e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} \quad (58)$$

如果源沿圆周均匀分布, 对所有源进行叠加 (积分) 并归一, 有:

$$C_{ab}(r, \omega, \tau) = \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \right]$$

$$= \text{Re} [J_0(kr) e^{i\omega\tau}] = J_0(kr) \cos \omega\tau \quad (59)$$

即, 与一维情形类似, 空间自相关系数 SPAC 是零时间延迟 ($\tau = 0$) 的时域互相关函数 Jacobson (1962)

$$\begin{aligned} \overline{\phi_{ab}^{\text{wave}}}(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(kr) \cos n(\theta - \varphi) \rho(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[J_0(kr) \rho(\varphi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos n(\theta - \varphi) \rho(\varphi) \right] d\varphi \\ &= J_0(kr) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos n(\theta - \varphi) \rho(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (66)$$

和 Cox (1973) 给出了类似的结论, Tsai 和 Moschetti (2010) 基于余弦表示的平面波重新给出上述结果. (59) 式是单色平面波的结果, 对 (59) 式进行积分, 可以得到理想脉冲源激发的情况:

$$C_{ab}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ab}(r, \omega, t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(kr) e^{i\omega t} d\omega \quad (60)$$

由于 $J_0(x)$ 满足 (Abramowitz and Stegun, 1964, 11.4.24), 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_0(x) e^{iax} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} & |a| < 1 \\ 0 & |a| > 1 \end{cases} \quad (61)$$

因此, 对于无限带宽信号, 时域互相关函数等于空间自相关系数的傅里叶逆变换 (见附录 C):

$$C_{ab}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(kr) e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{c^2} - t^2}} & |t| < \frac{r}{c} \\ 0 & |t| > \frac{r}{c} \end{cases} \quad (62)$$

根据 Bateman (1954) 第 247 页 15.2.21 式, 有:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & x < |a| \\ 0 & x > |a| \end{cases} \quad (63)$$

它的希尔伯特变换 $\hat{f}(x) = \mathcal{H}[f(x)]$ 可以表示为:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{-1}{\sqrt{x^2 - a^2}} & x > a \end{cases} \quad (64)$$

对比二维空间的时域格林函数 (28) 式, 可以发现 (62) 式所示的互相关函数与格林函数的关系为:

$$\mathcal{H}[C_{ab}(r, t)] = 2[G(r, t) - G(r, -t)] \quad (65)$$

3.1.3 入射波强度或交叉台站方位分布不均匀的情形

如图 8a 所示, 假定入射平面波随方位角的密度变化为 $\rho(\omega, \varphi)$, 因为这里考虑的是单色波情形, 我们直接用 $\rho(\varphi) = \rho(\omega, \varphi)$ 来表示, φ 为入射平面波的方位, 单个台站对的空间自相关对入射波的方位平均如 (18) 式所示, 将 (55) 式所示平面波的柱面展开式代入 (18) 式, 有:

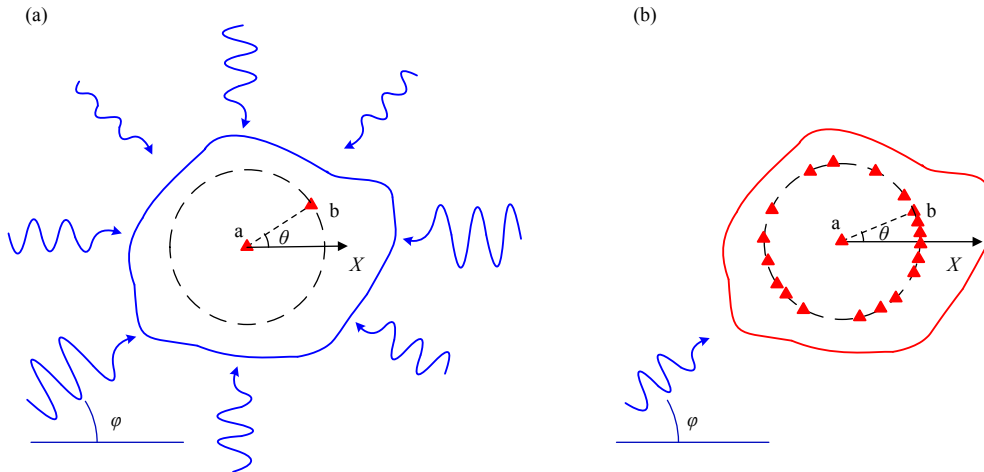


图 8 二维情况下, 平面波强度随方位变化 (a) 或交叉台站方位分布不均匀 (b). (a) 入射平面波入射强度随方位变化, 蓝色实线表示入射波强度随方位的变化. (b) 单个平面波入射, 台站对沿圆周非均匀分布, 红色实线是台站对密度随方位的变化 (修改自 Lu et al., 2018)

Fig. 8 An illustration of uneven distribution of sources and station-pair orientations. (a) A single station pair and incident plane waves with azimuthal varying intensity. The blue solid line denotes the amplitude intensity of incident wave as a function of azimuth. (b) A single plane wave and station-pair orientations with azimuthal varying distribution. The red solid line denotes the distribution of the station number as the function of the azimuth (modified from Lu et al., 2018)

这里对入射波的密度采用了如下的归一化条件:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi = 1 \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0(kr) \rho(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) [\cos n\theta \cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi] \rho(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{J_0(kr)}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \left[\cos n\theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \rho(\varphi) d\varphi + \sin n\theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \rho(\varphi) d\varphi \right] \\ &= \frac{a_0}{2} J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] \end{aligned} \quad (68)$$

式中, a_n 、 b_n 为:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \rho(\varphi) d\varphi \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \rho(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (69)$$

可知 $n=0$ 时, $a_0=2$, $b_0=0$, (68) 式与 Cox (1973) 的 (20) 式一致, 只是我们采用了不同的推导方法. 自然地, (69) 式可以看成是入射波密度的傅里叶展开系数.

保留 n 为偶数的项, 令 $n=2m$, $m=1, 2, \dots$, 得到 (68) 式的实部为:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= \frac{a_0}{2} J_0(kr) + \\ &\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(kr) [a_{2m} \cos 2m\theta + b_{2m} \sin 2m\theta] \end{aligned} \quad (70)$$

如果 $\rho(\varphi)$ 为常数, 由于三角函数的周期性, (66) 式第三行第二项的积分为 0, 自然退化为 (57) 式描述的平面波均匀入射的情形.

利用三角函数和差化积公式, 将 (66) 式中的 $\cos(n\theta - n\varphi)$ 展开:

类似地, 令 $n=2m-1$, ($m=1, 2, \dots$), 得到 (68) 式的虚部为:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= -i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m-1}(kr) \cdot \\ &[a_{2m-1} \cos(2m-1)\theta + b_{2m-1} \sin(2m-1)\theta] \end{aligned} \quad (71)$$

对于均匀入射的源, $n \geq 1$ 时, (69) 式中的 $\rho(\varphi)$ 为常数, 由于三角函数的周期性, (69) 式中源的傅里叶展开系数为 0, 从而 (70) 式右端第二项为 0, (71) 式所示的虚部为零. 对非均匀入射的源,

(69) 式的系数依赖于源的分布, 相干系数的虚部不为 0, 它由奇数阶的贝塞尔函数构成, 和台站对的方位角的依赖关系为奇数倍的正弦和余弦关系, 和实部相比, 虚部为一阶小量, 可用于评价噪声源的非均匀程度或其在时间上的稳态程度 (Asten, 2006).

一阶近似时, 忽略 $m > 1$ 的项, (70) 式可以写为:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) = J_0(kr) - a_2 J_2(kr) \cos 2\theta - b_2 J_2(kr) \sin 2\theta \quad (72)$$

(72) 式表明, 对于各向异性的背景噪声源分布, 空间相干系数 SPAC 不是零阶的贝塞尔函数 $J_0(kr)$, 一阶近似时, 和台站对的方位角 θ 的依赖关系呈 $\cos 2\theta$ 及 $\sin 2\theta$ 的线性变换. 由于 θ 和 φ 的对称性, 对于图 8b 所示, 单个平面波入射, 台阵对方位分布非均匀时, 空间自相关系数 SPAC 的实部具有类似的形式:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(r, \omega) = J_0(kr) - a_2 J_2(kr) \cos 2\varphi - b_2 J_2(kr) \sin 2\varphi \quad (73)$$

即, 单个平面波入射时, 非均匀台站分布引起的 SPAC 系数对源的方位 φ 的依赖关系, 和源非均匀时 SPAC 系数对台站对方位角 θ 的依赖关系相同.

另外, 在弱各向异性近似时, 面波的相速度 C_{ani} 和方位的依赖关系可以表示为 (Smith and Dahlen, 1973; Montagner and Nataf, 1986):

$$C_{\text{ani}} = C_{\text{iso}} + A_c \cos 2\theta + A_s \sin 2\theta \quad (74)$$

式中, C_{iso} 是相速度的各向同性分量, A_c 和 A_s 是与方位角 2θ 有关的系数, 快波的方位和各向异性强度分别由 $0.5 \tan 2(A_s/A_c)$ 和 $\sqrt{A_c^2 + A_s^2}/C_{\text{iso}}$ 给出. (74) 式构成了目前面波方位各向异性反演的基础 (Maupin and Park, 2007). 比较 (72) 式和 (74) 式可以发现, 非均匀源引起的空间自相关系数对台站对的方位依赖关系和面波相速度的方位依赖关系相同, 这意味着源的方位变化会在基于背景噪声的面波反演中, 映射到面波方位各向异性中 (Lu et al., 2018).

目前基于地震背景噪声反演面波的方位各向异性有两种方法, 一种直接在频率域中处理两点的互谱密度, 理论上两点间的互谱密度不必作为中间变量输出, 也不必计算时间域中的互相关函数. 这种方法通常需要密集的台阵分布, 以便对台阵进行移动窗处理时, 在窗口足够小的情况下, 每一个子台阵内仍有足够多的台站数目, 获得较好的横向分辨率, 基于密集台阵的背景噪声聚束分析技术便属于此类 (Roux and Ben-Zion, 2017; L  er et al., 2018;

Lu et al., 2018; Wang et al., 2020). 对于此类基于频率域干涉原理的方法来说, 由 (72) 式和 (74) 式的相似性可知, 源的非均匀性对面波方位各向异性的影响是直接的, 因为不同方位的相速度由不同方位聚束能量最大值对应的相速度决定, 而源的非均匀性直接影响不同频率下聚束能量的大小. 由于该方法基于台阵数据处理技术, 源的非均匀性和台站对方位分布的非均匀性很难区分, 不同方位的源需要相应方位的台站对对其进行采样. 比如, 针对中国科学探测台阵二期的台站分布, 由源和台站几何分布引入的方位各向异性平均在 1% 左右, 但少数在某些方位占据主导优势的台站分布, 由源和台站优势分布引入的方位各向异性可达 5% (Lu et al., 2018). 为此, 我们 (Lu et al., 2018) 提出一种方法用于校正台站对方位分布不均匀性引起的虚假各向异性, 该方法对给定的台阵几何分布, 假定介质是各向同性的, 计算平面波均匀入射时, 台阵几何分布造成的视各向异性, 然后从实际结果中减去这部分视各向异性.

另一种方法基于时域中噪声互相关函数 (NCF), 通过交叉台站的 NCF 提取不同路径的频散曲线, 利用纯路径的反演方法反演面波的方位各向异性. 由于地震干涉理论要求扩散场或源均匀分布, 噪声源的非均匀性使得从 NCF 中提取的相速度存在一定的误差, 比如, 对于青藏高原东南部, 由源的非均匀性引起的平均误差在 1% 左右 (Yao and Van Der Hilst, 2009), 这种误差及射线覆盖的不均匀性同样会映射到面波方位各向异性的反演结果中, 目前已提出一些对 NCF 提取相速度的校正方法 (Tsai, 2009; Yao and Van Der Hilst, 2009; Froment et al., 2010; Sadeghisorkhani et al., 2017).

3.1.4 入射波强度和交叉台站方位均随方位变化

实际应用中, SPAC 对源做了平均 (长时间的互相关叠加), 同时又对台站的方位做了平均, 比如 SPAC 圆形阵列的情况. 台站分布和入射波强度均随方位变化的情形如图 9 所示, 台站对的方位分布用 $\rho^{\text{sta}}(\theta)$ 表示, 入射波的方位分布用 $\rho^{\text{wave}}(\varphi)$ 表示, 对于二维情形有:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos(\theta-\varphi)} \rho^{\text{sta}}(\theta) d\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{\text{wave}}(\varphi) d\varphi \\ &= J_0(kr) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \rho^{\text{sta}}(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \rho^{\text{wave}}(\varphi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} 2(-i)^n J_n(kr) \cos n(\theta-\varphi) \right] d\varphi \end{aligned} \quad (75)$$

采用的归一化条件同 (67) 式.

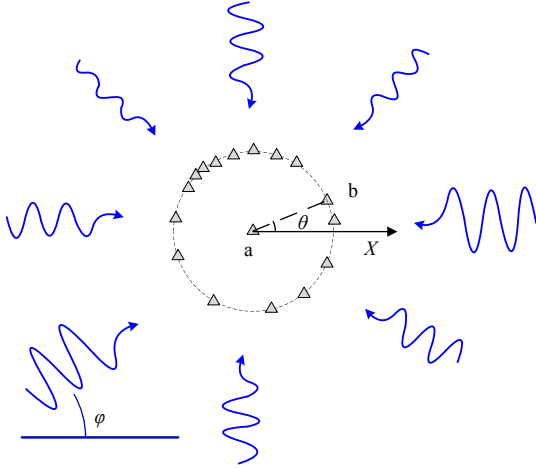


图 9 二维情况下, 入射波密度和台站方位分布均不均匀

Fig. 9 Both the incident plane wave and the station-pair distribution are not isotropic

3.2 三维情形

海洋的背景噪声通常可以由独立的、非相关的、沿各个方向传播的平面波的叠加来表示, 这样的平面波场可以认为是空间均匀的 (Buckingham, 2011), 与固体地球不同, 在三维海洋水体内部, 更容易沿不同方向放置阵列传感器, 因此, 三维情形的背景噪声源在海洋声学研究中较为常见。

3.2.1 台站和源均匀分布

考虑如图 10 所示的坐标系, θ 、 φ 为描述波传播方向的变量, γ 、 ξ 为描述台站方位的变量, \mathbf{k} 为矢量波数, 为波的传播方向, \mathbf{k} 的方向余弦为 $(k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta \sin \varphi, k \cos \theta)$, \mathbf{r} 表示由点 a 到点 b 的矢量, \mathbf{r} 的方向余弦为 $(r \sin \gamma \cos \xi, r \sin \gamma \sin \xi, r \cos \gamma)$, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} &= kr(\sin \theta \cos \varphi \sin \gamma \cos \xi + \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma \sin \xi + \\ &\quad \cos \theta \cos \gamma) \\ &= kr[\sin \theta \sin \gamma \cos(\varphi - \xi) + \cos \theta \cos \gamma] \end{aligned} \quad (76)$$

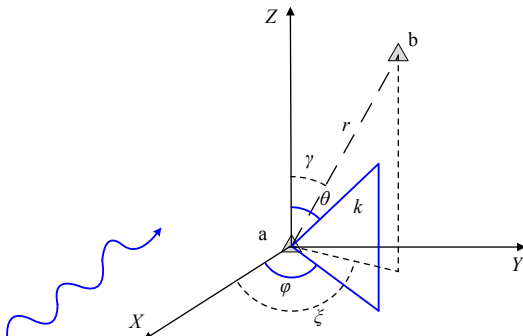


图 10 三维情形下单色平面波入射时, 波和台站方位坐标示意图

Fig. 10 Schematic diagram on the coordinates of the incident wave and station azimuth for 3D case

类似于二维情况下对 (16) 式的讨论, 在三维情况下, a、b 两点之间单色平面波 (幅度为 1) 的互相关可以表示为:

$$\hat{\phi}_{ab}(r, \omega) = e^{-ik \cdot r} \quad (77)$$

(1) 对入射波的方位平均

对入射波取方位平均意味着对 θ 、 φ 进行积分并取平均, 即:

$$\overline{\hat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{-ik \cdot r} d\varphi \quad (78)$$

将平面波 $e^{-ik \cdot r}$ 展开成一系列球面波的和 (Ben-Menahem and Singh, 1981), 有:

$$\begin{aligned} e^{-ik \cdot r} &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l j_l(kr) \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \psi) \end{aligned} \quad (79)$$

式中, $j_l(kr)$ 为 l 阶第一类球贝塞尔函数. 其中:

$$\cos \psi = \sin \theta \sin \gamma \cos(\varphi - \xi) + \cos \theta \cos \gamma \quad (80)$$

$$P_l(\cos \psi) = P_l[\sin \theta \sin \gamma \cos(\varphi - \xi) + \cos \theta \cos \gamma]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^l \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cos[m(\varphi - \xi)] P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \gamma) \\ &= P_l(\cos \theta) P_l(\cos \gamma) + \\ &\quad 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \gamma) \cos[m(\varphi - \xi)] \end{aligned} \quad (81)$$

式中, $P_l^m(\cos \theta)$ 为第一类 m 阶 l 次连带的勒让德函数, 将 (79) 式和 (81) 式代入 (78) 式的积分中, 原积分可以分解成两个积分. 由于三角函数的周期性, (81) 式右端第二项的积分为 0, 第一项积分包含如下的积分形式:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_l(\cos \gamma) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi P_l(\cos \gamma) \int_0^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi P_0(\cos \gamma) \int_0^\pi P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 4\pi \end{aligned} \quad (82)$$

由于 (82) 式第一行右端的积分仅在 $l=0$ 时存在, 在代入原积分式时, (79) 式中的球贝塞尔函数中对应的 l 取 0, 得到第一项总积分值为 $4\pi j_0(kr)$. 因此, 对入射波的方位平均最终可以表示为:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{-ik \cdot r} d\varphi = j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \quad (83)$$

式中, $j_0(kr)$ 为第一类球贝塞尔函数.

(2) 对台站对的方位平均

根据 θ 、 φ 与 γ 、 ξ 在积分表达式中的对称性, 互换 θ 、 φ 与 γ 、 ξ , 其积分值不变, 因此对波的方位平均与台站对的方位平均是相同的, 均为 $J_0(kr)$, 即:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{sta}}(r, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \gamma d\gamma \int_0^{2\pi} e^{-ik \cdot r} d\xi = \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) \\ &= j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \end{aligned} \quad (84)$$

通常认为, 地震噪声源来自海浪 (海洋重力波) 及其相互作用, 在海洋自由表面和海底产生的压力场 (Hasselmann, 1963; Nakata et al., 2019). 其相互作用方式主要有两种, 一种是海浪与海底的直接耦合, 这种机制产生的地震波频率与海浪频率相同, 比如互相关函数中 10~30 s 的面波信号, 通常由这种机制产生, 称为 Primary mechanism. 另一种相互作用方式是海浪之间的非线性相互作用 (Longuet-Higgins, 1950), 这种机制产生的地震波, 是海浪频率的 2 倍 (double frequency), 称为 Secondary mechanism, 比如背景噪声谱中 1~10 s 的信号, 其中除了短周期的面波信号, 还有强烈的体波信号 (Poli et al., 2012). 由于地球的非均匀性, 噪声源的分布并不均匀, Harmon 等 (2010) 的研究结果表明, 对于噪声成像来说, 二维的 0 阶柱贝塞尔函数与互相关谱的实部, 要比对 0 阶的球贝塞尔函数的吻合程度好, 从侧面说明均匀分布的二维源模型更接近地球实际的噪声源分布, 区域尺度的地震背景噪声互相关函数中的主要成分是面波. 但对于短周期, 比如小于 7 s 的周期, 由于噪声源模型比较复杂, 有非常强的体波和面波信号, 0 阶的柱贝塞尔函数和球贝塞尔函数的吻合都不好, 只用 0 阶表示是不够的.

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \varphi) \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) j_l(kr) \sum_{m=0}^l \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cos[m(\varphi - \xi)] P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \gamma) d\varphi \quad (90)$$

将 (90) 式中的三角函数展开, 计算积分后, 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= j_0(kr) + \\ &2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^l (-i)^l j_l(kr) P_l^m(\cos \gamma) [a_l^m \cos m\xi + b_l^m \sin m\xi] \end{aligned} \quad (91)$$

3.2.2 源均匀分布时的时域互相关函数

与对 (59) 式的讨论类似, 三维情况下, 单个单色平面波的时域互相关可以表示为:

$$\begin{aligned} C_{ab}(r, \omega, \tau) &= \text{Re} \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{i\omega\tau} e^{-ik \cdot r} d\varphi \right] \\ &= \text{Re} [j_0(kr) e^{i\omega\tau}] = j_0(kr) \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (85)$$

对于无限带宽的情形, 求 (85) 式的傅里叶逆变换 (见附录 D), 有:

$$\begin{aligned} C_{ab}(r, \omega, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ab}(r, \omega, \tau) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j_0(kr) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{c}{2r} \left[H\left(t + \frac{r}{c}\right) - H\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (86)$$

对 (86) 式求时间微分 (Roux et al., 2005), 可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{ab}(r, t)}{dt} &= \frac{c}{2r} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikr} e^{i\omega t} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikr} e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{c}{2r} \left[\delta\left(t + \frac{r}{c}\right) - \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (87)$$

对比三维情形波动方程的格林函数 (29) 式, 可以发现, 三维情形下, 格林函数和时域互相关函数的关系为:

$$\frac{dC_{ab}(r, t)}{dt} = 2\pi c [G(r, t) - G(r, -t)] \quad (88)$$

3.2.3 入射波强度随方位变化

类似地, 对于三维情形, 假定角频率为 ω 的入射平面波密度随方位的变化为 $\rho(\theta, \varphi)$, 将 (77) 式所示的空间自相关, 对入射波密度进行方位平均:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{-ik \cdot r} \rho(\theta, \varphi) d\varphi \quad (89)$$

将 (79) 式所示的球面波展开形式代入 (89) 式, 有:

式中:

$$\begin{aligned} a_l^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi \\ b_l^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (92)$$

为入射波密度 $\rho(\theta, \varphi)$ 的球谐展开, 采用的归一化条件为:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \rho(\omega; \theta, \varphi) d\varphi = 1 \quad (93)$$

如果入射波是各向同性的, $\rho(\theta, \varphi)$ 为常数, 后一项的积分如 3.2.1 节中的讨论, 其值为 0, (91) 式

$$\begin{aligned} \phi_{ab}(r, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \rho^{\text{wave}}(\theta, \varphi) d\varphi \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\gamma d\gamma \int_0^{2\pi} \rho^{\text{sta}}(\xi, \gamma) e^{-ik \cdot r} d\xi \\ &= j_0(kr) + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \rho^{\text{wave}}(\theta, \varphi) d\varphi \int_0^\pi \sin\gamma d\gamma \int_0^{2\pi} \rho^{\text{sta}}(\xi, \gamma) \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\psi) \right] d\xi \end{aligned} \quad (94)$$

归一化条件同 (93) 式.

3.3 源均匀分布时 1D、2D 和 3D 空间自相关 (SPAC) 系数和格林函数 (GF) 关系

前面的讨论给出了源均匀分布时, 时间域互相关函数和波动方程格林函数的关系, 也已经给出了源均匀分布时, 不同维度下的空间自相关 (SPAC) 系数及频率域亥姆霍兹方程的格林函数 GF, 因此, 很容易建立它们的关系.

对比 (32) 式和 (47) 式或 (48) 式, 可以发现一维情况下 SPAC 和 GF 的关系为:

$$\begin{aligned} 1D: \hat{\phi}_{ab}(x, \omega) &= \cos kx = -ik [G(x, \omega) - G^*(x, \omega)] \\ &= 2k \text{Im}[G(x, \omega)] \end{aligned} \quad (95)$$

对比 (33) 式和 (56) 式或 (57) 式, 可以得到二维情况下 SPAC 和 GF 的关系为:

$$\begin{aligned} 2D: \hat{\phi}_{ab}(r, \omega) &= J_0(kr) = -2i [G(r, \omega) - G^*(r, \omega)] \\ &= 4 \text{Im}[G(r, \omega)] \end{aligned} \quad (96)$$

对比 (34) 式和 (82) 式或 (83) 式, 可以得到三维情况下 SPAC 和 GF 的关系为:

$$\begin{aligned} 3D: \hat{\phi}_{ab}(r, \omega) &= j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} = -\frac{2\pi i}{k} [G(r, \omega) - G^*(r, \omega)] \\ &= \frac{4\pi}{k} \text{Im}[G(r, \omega)] \end{aligned} \quad (97)$$

根据前面的讨论, 我们将源均匀分布时, 不同维度下的格林函数 GF、空间自相关 (SPAC) 系数和时域互相关函数 NCF 的关系总结如表 1 所示. 这里建立了空间自相关系数 $\hat{\phi}_{ab}$ 和 $G - G^*$ 的关系, 即 SPAC 系数可以用格林函数的虚部表示, 在有些文献中 $\hat{\phi}_{ab}$ 和 $G + G^*$ 相关, 比如 Wapenaar 等 (2006, 2010) 采用格林函数的实部表示 SPAC 系数, 这是因为我们考虑的是质点位移及相应的格林函数 (见

退化 3.2.1 节中的 (83) 式.

3.2.4 入射波强度和交叉台站方位均随方位变化

用 $\rho^{\text{sta}}(\xi, \gamma)$ 、 $\rho^{\text{wave}}(\theta, \varphi)$ 分别表示三维情况下台站分布密度和入射波的谱密度, 将 (77) 式表示的空间自相关, 对入射波密度和台站对方位分布进行平均, 有:

附录 D) .

4 几种非均匀源的空间自相关表示

4.1 二维情形

在地震层析成像中, 背景噪声源一般认为是来自海洋与海岸的相互作用 (Longuet-Higgins and Jeffreys, 1950), 这些源激发的主要能量通常沿地表传播, 因此背景噪声互相关函数中的主要成分是地震面波, 面波的传播是二维的, 本节主要讨论二维情形下, 几种非均匀源的空间自相关系数表示.

4.1.1 稳相区的源: 因果性和非因果性格林函数

考虑如图 11 所示坐标关系, 将两个台站置于 x 轴上, 此时台站对的方位角 $\theta = 0$, 根据前述的一般性讨论, 令 (18) 式中的 $\theta = 0$ 可以得到:

$$\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \varphi} \rho^{\text{wave}}(\varphi) d\varphi \quad (98)$$

假设图中对称性的分布密度函数为 $\rho(\varphi) = \rho_0$ 为常数, 在角度 $[-\alpha, \alpha]$ 及 $[\pi - \alpha, \pi + \alpha]$ ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) 内均匀分布, 将 (55) 式所示的平面波展开形式代入 (98) 式, 可以得到:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \varphi} \rho^{\text{wave}}(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{J_0(kr)}{2\pi} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_0 d\varphi + \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \rho_0 d\varphi \right] + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_0 \cos n\varphi d\varphi + \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \rho_0 \cos n\varphi d\varphi \right] \end{aligned} \quad (99)$$

式中含有 $\cos n\varphi$ 的积分为:

表 1 均匀入射的平面波不同维度下格林函数 (GF)、空间自相关 (SPAC) 系数和时域互相关函数 (NCF) 的关系

Table 1 The relationship between Green's function (GF), spatial autocorrelation coefficient (SPAC) and cross-correlation function (NCF) for the uniform incident plane waves at 1D, 2D and 3D

空间 维度	单色平面波SPAC系数和互相关函数 [$C_{ab}(r, t)$] 的表示 $\hat{\phi}_{ab}(r, \omega) = C_{ab}(r, \omega; \tau = 0)$		时间域格林函数GF[$G(r, t)$]和NCF[$C_{ab}(r, t)$]的关系		频率域GF[$G(r, \omega)$]、SPAC[$\hat{\phi}_{ab}(r, \omega)$]的关系	
	SPAC [$\hat{\phi}_{ab}(r, \omega)$]	单色波 NCF[$C_{ab}(r, \omega, \tau)$]	GF	GF和NCF的关系	GF	GF和SPAC的关系
1D	$\cos kx$	$\cos \omega \tau \cos kx$	$G(x, t) = \frac{c}{2} H\left(t - \frac{x}{c}\right)$	$C_{ab}(x, t) = \frac{1}{c} \left[\frac{dG(x, t)}{dt} - \frac{dG(x, -t)}{dt} \right]$	$G(x, \omega) = \frac{i}{2k} e^{-ikx}$	$\hat{\phi}_{ab}(x, \omega) = -ik [G(x, \omega) - G^*(x, \omega)]$ $= 2k \text{Im} [G(x, \omega)]$
2D	$J_0(kr)$	$\cos \omega \tau J_0(kr)$	$G(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}}$	$\mathcal{H}[C_{ab}(r, t)] = 2[G(r, t) - G(r, -t)]$	$G(r, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr)$	$\hat{\phi}_{ab}(r, \omega) = -2i [G(r, \omega) - G^*(r, \omega)]$ $= 4 \text{Im} [G(r, \omega)]$
3D	$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$	$\cos \omega \tau j_0(kr)$	$G(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$	$\frac{dC_{ab}(r, t)}{dt} = 2\pi c [G(r, t) - G(r, -t)]$	$G(r, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}$	$\hat{\phi}_{ab}(r, \omega) = -\frac{2\pi i}{k} [G(r, \omega) - G^*(r, \omega)]$ $= \frac{4\pi}{k} \text{Im} [G(r, \omega)]$

注: 模型为均匀入射的互不相干的单位幅度平面波, 方位平均后的结果进行了幅度归一化。H(t) 为单位阶跃函数, $\mathcal{H}[\]$ 为希尔伯特变换符号, * 表示复共轭, $J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数, $j_0(x)$ 为零阶第一类贝塞尔函数, $H_0^{(2)}$ 为第二类Hankel函数, $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 为场点和源点之间的距离, 其中 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 和 $\mathbf{r}'(x', y', z')$ 分别为场点和源点坐标, 常数 c 为均匀介质的相速度, 傅里叶变换习惯为 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的互相关定义为 $C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt$ 。

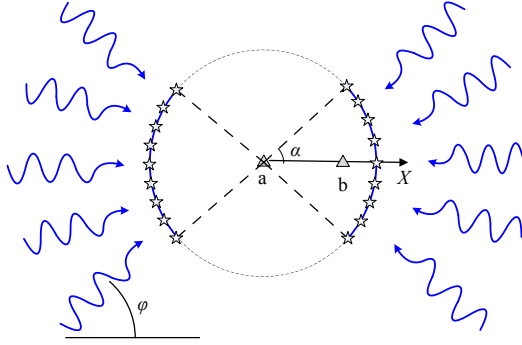


图 11 源主要分布在稳相区域示意图

Fig. 11 Sources are mainly distributed in the stationary phase area

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos n\varphi d\varphi = \frac{2}{n} \sin n\alpha$$

$$\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{1}{m} \sin 2m\alpha & n = 2m \\ -\frac{2}{2m-1} \sin(2m-1)\alpha & n = 2m-1 \end{cases} \quad (100)$$

将 (100) 式代入 (99) 式, 可以得到 $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$ 内的积分为:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= \frac{\rho_0 J_0(kr)}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi + \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos n\varphi d\varphi \\ &= \frac{\alpha \rho_0}{\pi} J_0(kr) + \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \frac{2}{n} \sin n\alpha \\ &= \frac{\alpha \rho_0}{\pi} J_0(kr) + \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha + \\ &\quad \frac{2\rho_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{2m-1}}{2m-1} J_{2m-1}(kr) \sin(2m-1)\alpha \end{aligned} \quad (101)$$

$\varphi \in [\pi-\alpha, \pi+\alpha]$ 内的积分为:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= \frac{\rho_0 J_0(kr)}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} d\varphi + \\ &\quad \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \cos n\varphi d\varphi \\ &= \frac{\alpha \rho_0}{\pi} J_0(kr) + \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha - \\ &\quad \frac{2\rho_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{2m-1}}{2m-1} J_{2m-1}(kr) \sin(2m-1)\alpha \end{aligned} \quad (102)$$

如果取 $\alpha = \pi/2$, 并采用 (67) 式的归一化条件, 则 $\rho_0 = 1$, 将 (101) 式和 (102) 式相加, 可以退化为 (57) 式源均匀分布的情形.

对时间域中的互相关, 如果 a 点是虚拟源, 互

相关函数中因果性部分 (a 点传向 b 点) 的源位于图 12 中 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 内, 如红色五角星所示, 这部分源对应的波传播方向为 $[-\pi/2, \pi/2]$ (注意波的传播方向与源所处的方位, 方向相反), 令 (101) 式中的 $\alpha = \pi/2$, 可以得到这部分源在互相关函数中的贡献为:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^+(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos \varphi} \rho_0 d\varphi \\ &= \frac{\rho_0}{2} \left[J_0(kr) - i \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} J_{2m-1}(kr) \right] \end{aligned} \quad (103)$$

注意到 Abramowitz 和 Stegun (1964) 中的 (12.1.19) 式, 0 阶 Struve 函数 $H_0(z)$ 可以表示为:

$$H_0(z) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} J_{2k-1}(z) \quad (104)$$

因此, (103) 式可以写为:

$$\widehat{\phi}_{ab}^+(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos \varphi} \rho_0 d\varphi = \frac{\rho_0}{2} [J_0(kr) - iH_0(kr)] \quad (105)$$

$\widehat{\phi}_{ab}^+(r, \omega)$ 表示互相关函数的正半轴, 表示由 a 点传向 b 点的波. 图 12 中蓝色五角星所示的位于 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内的源, 对应格林函数的负半轴, 表示由 b 点传向 a 点的波, 对应 (102) 式在 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 的积分贡献, 将 $\alpha = \pi/2$ 代入 (102) 式, 得到非因果性部分的贡献为:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ab}^-(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ikr \cos \varphi} \rho_0 d\varphi \\ &= \frac{\alpha \rho_0}{\pi} J_0(kr) + i \frac{2\rho_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} J_{2m-1}(kr) \\ &= \frac{\rho_0}{2} \left[J_0(kr) + i \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} J_{2m-1}(kr) \right] \\ &= \frac{\rho_0}{2} [J_0(kr) + iH_0(kr)] \end{aligned} \quad (106)$$

对 (105) 式和 (106) 式取远场近似后, 等价于 Kastle 等 (2016) 中 (11) 式的结果, 在那里 Kastle 等 (2016) 采用稳相近似 (Snieder, 2004; Boschi and Weemstra, 2015) 计算形如 (98) 式的积分, 我们采用了精确积分方法. 另外, 如图 12 所示, 我们选取 a 点作为坐标原点, 对于我们考虑的平面波模型, 或者考虑点源激发时的远场近似 (相对 a、b 两点周围区域), 对于弹性介质情形, 坐

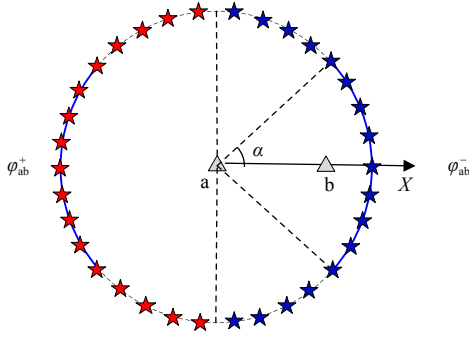


图 12 格林函数因果性（红色五角星）和非因果性（蓝色五角星）部分对应的源所在的位置

Fig. 12 The location of the sources corresponding to the causal (red star) and non-causal (blue star) part of Green's function

标原点选择在 a 点、 b 点或者二者的中点，结果并不会改变，因为无论坐标原点选在何处，我们关心的 a 、 b 两点及周围区域内的波场是扩散场，相对该区域内的每一个点，入射源是各向同性的。然而，对于衰减介质，同样的平面波模型，由于波到 a 点和 b 点传播距离的不同，衰减的存在使得只有相对在坐标原点处的波场，入射源是各向同性的，因此，正如在下面看到的，不同的坐标原点选择，对衰减介质而言，其空间相干可能不同。

4.1.2 因果性和非因果性格林函数的相移

传统基于地震事件的面波层析成像，通常选取与地震事件在同一个大圆路径上的两个台站，在平面波近似下，计算两个台站之间的走时。单个台站对接收到的单个入射平面波的互相关表达如 (58) 式所示，其中 $\theta - \varphi$ 是入射波方位和台站对方位角差（如图 1），令 $\theta - \varphi = 0$ ，即平面波的传播方向与台站对的方位一致，取 (58) 式的实部，可以将单色平面波的时域互相关表示为：

$$C_{ab}(r, \omega, t) = \text{Re} \left\{ e^{i\omega t} e^{-ikr \cos(\theta - \varphi)} \right\} = \cos[\omega(t - \tau_{ab})] \quad (107)$$

式中， $\tau_{ab} = r/c$ 为平面波从 a 点传到 b 的时间延迟。Tsai (2009) 和 Boschi 等 (2013) 利用实数表示的平面波信号得到了类似的结果。比如 Tsai (2009) 中的 (1) 式和 Boschi 等 (2013) 中的 (13) 式。

根据前面的讨论，如果源沿圆周均匀分布，因果性部分的贡献给出的空间互相关如 (105) 式所示。根据 Abramowitz 和 Stegun (1964) 中的 (9.2.1) 式，并将其中的 (9.2.2) 式及 (12.1.34) 式联合可知，在 kr 很大时，零阶贝塞尔函数和 Struve 函数具有如下渐近展开式：

$$\begin{aligned} J_0(kr) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos(kr - \frac{\pi}{4}) \\ H_0(kr) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin(kr - \frac{\pi}{4}) \end{aligned} \quad (108)$$

将 (108) 式代入到 (105) 式，并考虑时域中的单色波情形，有：

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ e^{i\omega t} \widehat{\phi}_{ab}^+ \} &= \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \text{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left[\cos(kr - \frac{\pi}{4}) - i \sin(kr - \frac{\pi}{4}) \right] \right\} \\ &= \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left[\omega \left(t - (\tau_{ab} - \frac{\pi}{4\omega}) \right) \right] \\ &= \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left[\omega(t - \tau_{ab}^+) \right] \end{aligned} \quad (109)$$

式中：

$$\tau_{ab}^+ = \tau_{ab} - \frac{\pi}{4\omega} \quad (110)$$

为因果性部分的时间延迟。类似地，将 (108) 式代入到非因果性的贡献 (106) 式，有：

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ e^{i\omega t} \widehat{\phi}_{ab}^- \} &= \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \text{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left[\cos(kr - \frac{\pi}{4}) + i \sin(kr - \frac{\pi}{4}) \right] \right\} \\ &= \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left[\omega \left(t + \left(\tau_{ab} - \frac{\pi}{4\omega} \right) \right) \right] \\ &= \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left[\omega(t - \tau_{ab}^-) \right] \end{aligned} \quad (111)$$

式中：

$$\tau_{ab}^- = - \left(\tau_{ab} - \frac{\pi}{4\omega} \right) \quad (112)$$

为非因果性部分的时间延迟。

(110) 式和 (112) 式的结果表明，相对于两台间平面波的实际走时 τ_{ab} ，对源的方位平均得到的因果性和非因果性的互相关函数给出的相干表达，对称的具有 $-\pi/4$ 的相移。Tsai (2009) 和 Boshci 等 (2013) 基于实的余弦函数表示的平面波模型研究过该问题，这里采用类似但更易处理和理解的方法得到了同样的结果。

对于三维分布的源，互相关函数的微分收敛于系统的格林函数 (Roux, 2005; Nakahara, 2006)，时间域中的时间微分等价于在频率域中乘以 $i\omega$ 因子，对应 $\pi/2$ 的相移，比如在 Yao 等 (2006) 和 Lin 等 (2008) 中曾采用互相关函数的时间微分提取面波频散曲线。然而，正如我们现在所知的，背景噪声源主要来源于海洋微震，更多的以 2D 面波形式传播 (Tanimoto, 2006; Webb, 2007; Harmon

et al., 2008), Harmon 等 (2010) 的观测结果也表明背景噪声互相关与二维情形下柱贝塞尔函数 $J_0(kr)$ 的拟合要比三维情形下的球贝塞尔函数 $j_0(kr)$ 的拟合要好. 对于二维情形, 系统格林函数对应时域背景噪声互相关的希尔伯特变换 (Nakahara, 2006), 并不需要时间微分, 因此对于背景噪声互相关函数的校正, 只需考虑 (110) 式和 (112) 式中对 $-\pi/4$ 相移的校正, 而不必考虑时间微分带来的相移.

根据 (103) 式及前面的讨论, 因果性的相移主要来源于 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 内分布的源 (由于源的分布与入射波方位的关系, 这部分源对应于 φ 的积分限为 $[-\pi/2, \pi/2]$), 从图 11 看出, 除了与 a、b 两台站同在大圆路径的源以外, 来自其余各处源的平面波相位的传播距离更短, 远离大圆路径附近的源的相位相消干涉, 大圆路径附近的源相长干涉 (Harmon et al., 2007), 这就造成了 (110) 式中的 τ_{ab}^+ 相对 τ_{ab} 有 $-\pi/4\omega$ 的差异, 其走时比 (107) 式中的平面波互相关走时 τ_{ab} 更短, 由互相关函数给出的相速度比实际相速度偏高. 另外, (110) 式和 (112) 式中 $-\pi/4\omega$ 的时差是源方位均匀分布时得到的结果, 如果源不是均匀分布的, 则需要利用 (68) 式给出的相位, 计算相应的相移, 比如 Harmon 等 (2010) 中的 (10) 式.

通常基于地震背景噪声互相关函数, 有两种方式提取面波频散曲线, 一种直接处理时间域信号, 与基于地震事件的双台法类似 (Meier et al., 2004; Yao et al., 2006), 通过计算互相关函数的相位, 从而计算相速度, 对于这种方法, 前述的相移校正是必要的. 另一种, 可以直接在频率域中进行, 利用理论的空间相干表示零阶贝塞尔函数 $J_0(kr)$ 拟合互相关谱的实部, Ekstrom 等 (2009) 采用类似方法通过分析相关谱的零点来提取相速度, 这种方法不需要进行相移校正, 也不受远场假设的影响. Boschi 等 (2013) 对这两种方法计算的相速度进行了对比研究, 验证了其一致性. 同理, 基于频率域中聚束分析方法提取相速度也不涉及相移的校正问题 (Wang et al., 2020).

4.1.3 非稳相区的源

$[-\alpha, \alpha]$ 或者 $[\pi-\alpha, \pi+\alpha]$ 的积分限对应的源通常在稳相区域, 类似地, 如果我们改变 (99) 式的积分限为 $[\alpha, \pi-\alpha]$ 或者 $[\pi+\alpha, 2\pi-\alpha]$, 就可以单独讨论如图 13 所示位于非稳相区的源, 此时有:

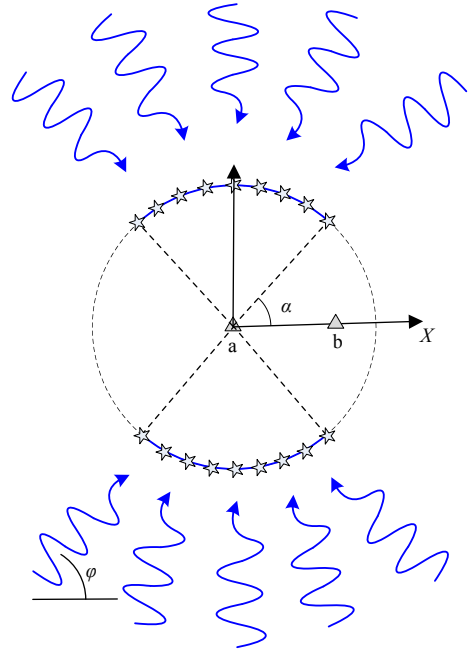


图 13 源主要分布在非稳相区域

Fig. 13 Sources are mainly distributed in nonstationary phase area

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \varphi} \rho^{\text{wave}}(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(kr) \cos n\varphi \right] \rho_0 d\varphi \\ &= \frac{J_0(kr)}{2\pi} \left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \rho_0 d\varphi + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \rho_0 d\varphi \right] + \\ &\quad \frac{\rho_0}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos n\varphi d\varphi + \\ &\quad \frac{\rho_0}{\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos n\varphi d\varphi\end{aligned}\quad (113)$$

式中, 含有 $\cos n\varphi$ 的积分为:

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \cos n\varphi d\varphi = \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} -\frac{1}{n} \sin 2m\alpha & n = 2m \\ 0 & n = 2m-1 \end{cases}\quad (114)$$

将 (114) 式代入 (113) 式, 可以得到 $\varphi \in [\alpha, \pi-\alpha]$ 内的积分为:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(r, \omega) &= \frac{\rho_0 J_0(kr)}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} d\varphi + \\ &\quad \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \cos n\varphi d\varphi \\ &= \frac{(\pi-2\alpha)\rho_0}{2\pi} J_0(kr) - \\ &\quad \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha\end{aligned}\quad (115)$$

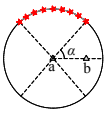
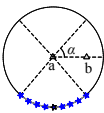
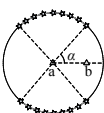
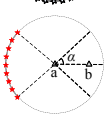
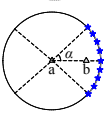
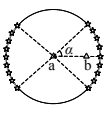
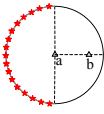
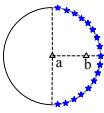
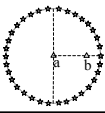
$\varphi \in [\pi + \alpha, 2\pi - \alpha]$ 内的积分与 (115) 式相同.

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{ab}^{\text{wave}}(\omega) &= \frac{\rho_0 J_0(kr)}{2\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} d\varphi + \\ &\quad \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \cos n\varphi d\varphi \\ &= \frac{(\pi-2\alpha)\rho_0}{2\pi} J_0(kr) - \\ &\quad \frac{\rho_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha\end{aligned}\quad (116)$$

如果取 $\alpha = 0$, 并采用 (67) 式的归一化条件, 则 $\rho_0 = 1$, 将 (115) 式和 (116) 式相加, 可以退化为 (57) 式源均匀分布的情形. 表 2 总结了二维情况下, 几种不同分布的源对应的空间自相关系数.

表 2 二维情况下, 不同分布的源对应的空间自相关系数表示

Table 2 The SPAC expressions for specific distributed sources for 2D case

源的分布	空间自相关 (SPAC) 系数
	$\frac{(\pi-2\alpha)}{2\pi} J_0(kr) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha$
	$\frac{(\pi-2\alpha)}{2\pi} J_0(kr) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha$
	$\frac{(\pi-2\alpha)}{\pi} J_0(kr) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha$
	$\frac{\alpha}{\pi} J_0(kr) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{2m-1}}{2m-1} J_{2m-1}(kr) \sin(2m-1)\alpha$
	$\frac{\alpha}{\pi} J_0(kr) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{2m-1}}{2m-1} J_{2m-1}(kr) \sin(2m-1)\alpha$
	$\frac{2\alpha}{\pi} J_0(kr) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} J_{2m}(kr) \sin 2m\alpha$
	$\frac{1}{2} [J_0(kr) - iH_0(kr)]$
	$\frac{1}{2} [J_0(kr) + iH_0(kr)]$
	$J_0(kr)$

注: 远场平面波源沿圆周在一定范围内均匀分布, 并假定源的分布密度为 1, $J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数, r 为 a 、 b 两点之间的距离, $H_0(x)$ 为第一类零阶 Struve 函数, 傅里叶变换习惯为 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的互相关定义为 $C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) g(t+\tau) dt$.

4.2 三维情形

三维情形的背景噪声源在海洋声学研究中较为常见. 如图 14 所示, 假定噪声源分布在海洋表面和海洋底部, 主要讨论两种常见的情况. 一是传感器水平放置, 此时, 源的分布相当于处在非稳相区域. 二是传感器垂直放置, 此时源的分布处在稳相区域.

4.2.1 水平放置的传感器: 非稳相区的源

根据图 10 的坐标关系, 若传感器水平放置, $\gamma = \pi/2$, $\xi = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \sin \theta \cos \varphi$.

$$\widehat{\phi}_{ab}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \rho^{\text{wave}}(\omega; \theta, \varphi) e^{-ikr \sin \theta \cos \varphi} d\varphi \quad (117)$$

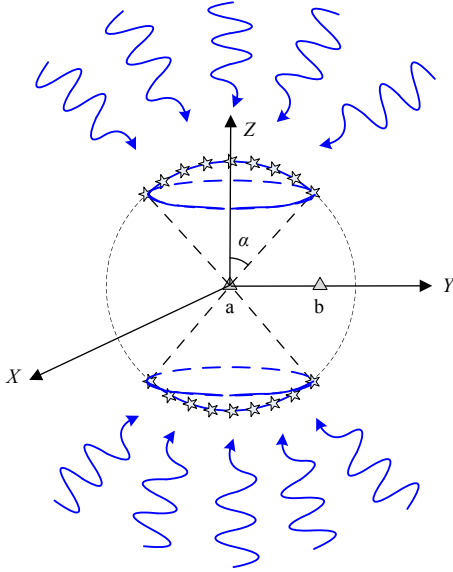


图 14 三维情形下, 特定方向入射的平面波源

Fig. 14 Plane wave source incident from a specific direction in a 3D case

假定源沿方位角 φ 均匀分布, 即 $\rho^{\text{wave}}(\omega; \theta, \varphi)$ 仅是 θ 角的函数 $\rho^{\text{wave}}(\omega; \theta, \varphi) = \rho(\theta)$, 且满足 (93) 式的归一化条件, 则有:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{\text{ab}}(r, \omega) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho(\theta) \sin \theta d\theta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \sin \theta \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho(\theta) J_0(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta\end{aligned}\quad (118)$$

从 (118) 式第一行到第二行的积分用到了如下积分式 (Arfken and Weber, 2005, P680, 11.30c):

$$\begin{aligned}J_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta\end{aligned}\quad (119)$$

其中 (119) 式第二行, 可以利用 $J_0(-x) = J_0(x)$ 由第一行的表示得到. (118) 式和 Cox (1973) 的 (65) 式一致.

如图 14 所示, 假定源处在非稳相区, 并且沿方位角 φ 均匀分布, 满足归一化条件:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi = 1\quad (120)$$

沿 θ 角方位分布的密度为常数 ρ_0 , 即 $\rho(\theta) = \rho_0$, 满足归一化条件:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho_0 \sin \theta d\theta = 1\quad (121)$$

按此归一化条件, 若源均匀分布在如图 14 所示的 α 角范围内, 则有 $\rho_0 = 1/(1 - \cos \alpha)$, 代入 (118) 式, 有:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{\text{ab}}(r, \omega) &= \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)} \int_0^\pi J_0(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)} \left[\int_0^\alpha J_0(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta + \int_{\pi-\alpha}^\pi J_0(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{(1 - \cos \alpha)} \int_0^\alpha J_0(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta\end{aligned}\quad (122)$$

如果令 $\alpha = \pi/2$, (122) 式变为 (Gradshteyn and Ryzhik, 2007, P725, 6.683.8 式):

$$\widehat{\phi}_{\text{ab}}(r, \omega) = \int_0^{\pi/2} J_0(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin kr}{kr} = j_0(kr)\quad (123)$$

退化为源均匀分布的情形 (见附录 F).

4.2.2 垂直放置的传感器: 稳相区的源

对于稳相区的源, 我们只需将传感器变成垂直放置既可, 此时 $\gamma = 0$, $\xi = \pi/2$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$:

$$\widehat{\phi}_{\text{ab}}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\quad (124)$$

如果源的分布和 4.2.1 相同, 那么对于垂直放置的传感器有:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{\text{ab}}(r, \omega) &= \frac{1}{2} \rho_0 \left[\int_0^\alpha e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta + \int_{\pi-\alpha}^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \right] \\ &= \frac{\sin(kr) - \sin(kr \cos \alpha)}{kr(1 - \cos \alpha)}\end{aligned}\quad (125)$$

如果 $\alpha = \pi/2$, 上式退化为源均匀分布的情况 $\widehat{\phi}_{\text{ab}}(r, \omega) = j_0(kr) = \sin kr / kr$.

5 面波交叉分量的空间自相关系数

Aki (1957) 在最初关于 SPAC 的文章中, 给出了垂向、径向和横向, 即 ZZ、RR 和 TT 三个分量的空间自相关系数, 没有考虑交叉分量的 SPAC. 如前所述, SPAC 和 NCF 是对同一物理现象在频率域和时间域中的不同描述, 表明 SPAC 可以利用 NCF 来表示, NCF 又与系统的格林函数相关, 这意味着, 如果面波张量格林函数不同分量的表达式已知, 利用这种关系可以导出面波 (包含交叉分

量)不同分量的空间自相关系数,或者反过来,由不同分量的空间自相关系数导出面波的格林函数. Yokoi 和 Margaryon (2008) 基于这种关系,利用已知的格林函数导出了面波水平分量的空间自相关系数. 与 Yokoi 和 Margaryon (2008) 相反, Haney 等 (2012) 首先根据不同分量的面波表达式,采用类似 Nakahara (2006) 的方法,给出了面波交叉分量的空间自相关系数,然后,利用交叉分量的空间自相关系数导出了包含近场的面波张量格林函数 (Haney and Nakahara, 2014). 由于包含近场的面波格林函数是已知的 (例如, Friederich et al., 1993; Maupin, 2001; Lu et al., 2008), 因此,采用 Yokoi 和 Margaryon (2008) 的类似方法,可以利用包含近场的面波格林函数,利用 NCF、GF 和 SPAC 之间的关系,导出面波交叉分量的互相关. 相对传统基于单分量互相关函数提取的相速度或群速度进行面波层析成像,交叉分量的互相关被认为可以提供介质额外的独立信息 (van Wijk et al., 2011), 而且也可用于分离体波和面波 (Takagi et al., 2014), 在最近的研究中,交叉分量的互相关也用于从背景噪声中提取 Rayleigh 波的椭圆率,从而与速度联合反

演,用于约束浅层速度结构 (Savage et al., 2013; Lin and Schmandt, 2014; Berg et al., 2018). 另外,基于面波(张量)空间自相关系数与弹性动力学干涉方程的表示形式, Wang 等 (2019) 与 Hu 等 (2020) 提出了基于台阵背景噪声提取多模式面波特征值的频率—贝塞尔变换方法.

5.1 包含近场的面波格林函数

格林函数 $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表示置于源点 \mathbf{r}' 处沿 j 方向的力,在场点 \mathbf{r} 处产生的沿 i 方向的位移. 在张量格林函数 $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表示中,我们约定用后一个位置坐标 (比如这里的 \mathbf{r}') 表示源点,用前一个位置坐标 (比如这里的 \mathbf{r}) 表示场点,前一个角标 (比如这里的 i) 表示场的方向,后一个角标 (比如这里的 j) 表示源的方向,这种约定的好处在于,对于一个线性系统,任意源 \mathbf{F} 产生的场 \mathbf{u} 表示成格林函数与源的点积,形如 $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')$ 或 $u_i(\mathbf{r}) = G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F_j(\mathbf{r}')$, 其顺序是自然的.

在笛卡尔坐标系 (N, E, Z) 中,均匀水平分层介质中包含近场的 Rayleigh 波张量格林函数可以表示为:

$$G_{ij}^{\text{Rayleigh}} = \begin{bmatrix} G_{NN} & G_{NE} & G_{NZ} \\ G_{EN} & G_{EE} & G_{EZ} \\ G_{ZN} & G_{ZE} & G_{ZZ} \end{bmatrix} = \sum_n \frac{-i}{8cuI} \begin{bmatrix} V(z)V(z') \left[\frac{1}{kr} H_1 - \cos^2 \varphi H_2 \right] & -V(z)V(z') \sin \varphi \cos \varphi H_2 & V(z)U(z') \cos \varphi H_1 \\ -V(z)V(z') \sin \varphi \cos \varphi H_2 & V(z)V(z') \left[\frac{1}{kr} H_1 - \sin^2 \varphi H_2 \right] & V(z)U(z') \sin \varphi H_1 \\ -U(z)V(z') \cos \varphi H_1 & -U(z)V(z') \sin \varphi H_1 & U(z)U(z') H_0 \end{bmatrix} \quad (126)$$

式中, U 、 V 分别为垂直和水平方向的特征函数. 式中的 i 为虚数单位,应与角标 i 做区分. φ 为源与接收位置在水平面内的投影的方位角,相对正北向顺时针为正,这个习惯和地震学通常定义的方位角习惯相同,与 Haney 等 (2012) 及 Hu 等 (2020) 的习

惯不同. $H_n (n=0,1,2)$ 为 n 阶第二类 Hankel 函数,其自变量为 kr , r 为场点和原点在水平面的投影距离. 求和对模式 n 进行, c 、 u 分别为模式 n 的相速度和群速度, I 为能量积分. 相应的 Love 波的格林函数可以表示为:

$$G_{ij}^{\text{Love}} = \begin{bmatrix} G_{NN} & G_{NE} & G_{NZ} \\ G_{EN} & G_{EE} & G_{EZ} \\ G_{ZN} & G_{ZE} & G_{ZZ} \end{bmatrix} = \sum_n \frac{-i}{8cuI} \begin{bmatrix} W(z)W(z') \left[\frac{1}{kr} H_1 - \sin^2 \varphi H_2 \right] & W(z)W(z') \sin \varphi \cos \varphi H_2 & 0 \\ W(z)W(z') \sin \varphi \cos \varphi H_2 & W(z)W(z') \left[\frac{1}{kr} H_1 - \cos^2 \varphi H_2 \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

W 为 Love 波横向特征函数. 利用坐标旋转关系:

$$\begin{bmatrix} G_{ZZ} & G_{ZR} & G_{ZT} \\ G_{RZ} & G_{RR} & G_{RT} \\ G_{TZ} & G_{TR} & G_{TT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{NN} & G_{NE} & G_{NZ} \\ G_{EN} & G_{EE} & G_{EZ} \\ G_{ZN} & G_{ZE} & G_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

可以将直角坐标系 (N, E, Z) 中的量转换为震源—接收坐标系 (Z, R, T) 中的量,其中 (Z, R, T)

分别表示震源—接收坐标系中的垂向 (Z)、径向 (R) 和横向分量 (T). 根据 (128) 式, 可以得

到 Rayleigh 波格林函数在 (Z, R, T) 坐标系统中表示为:

$$G_{ij}^{\text{Rayleigh}} = \begin{bmatrix} G_{ZZ} & G_{ZR} & G_{ZT} \\ G_{RZ} & G_{RR} & G_{RT} \\ G_{TZ} & G_{TR} & G_{TT} \end{bmatrix} = \sum_n \frac{-i}{8cuI} \begin{bmatrix} U(z)U(z')H_0 & -U(z)V(z')H_1 & 0 \\ V(z)U(z')H_1 & V(z)V(z')\left[\frac{H_0-H_2}{2}\right] & 0 \\ 0 & 0 & V(z)V(z')\left[\frac{H_0+H_2}{2}\right] \end{bmatrix} \quad (129)$$

Love 波格林函数在 (Z, R, T) 坐标系统中可以表示为:

$$G_{ij}^{\text{Love}} = \begin{bmatrix} G_{ZZ} & G_{ZR} & G_{ZT} \\ G_{RZ} & G_{RR} & G_{RT} \\ G_{TZ} & G_{TR} & G_{TT} \end{bmatrix} = \sum_n \frac{-i}{8cuI} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & W(z)W(z')\left[\frac{H_0+H_2}{2}\right] & 0 \\ 0 & 0 & W(z)W(z')\left[\frac{H_0-H_2}{2}\right] \end{bmatrix} \quad (130)$$

5.2 基于弹性动力学干涉方程推导面波交叉分量 SPAC 系数

对于弹性动力学情形, 互相关重建系统格林函数的干涉方程可以表示为 (Sánchez-Sesma and Campillo, 2006; Wapenaar and Fokkema, 2006; Lu et al., 2011):

$$\langle u_i^*(a; \omega) u_j(b; \omega) \rangle = -s(\omega) [G_{ij}(b, a; \omega) - G_{ji}^*(a, b; \omega)] \quad (131)$$

利用张量格林函数的互易定理, 上式可以表示为:

$$\langle u_i^*(a; \omega) u_j(b; \omega) \rangle = -2s(\omega) \text{Im} [G_{ij}(b, a; \omega)] \quad (132)$$

式中, $s(\omega)$ 是与源相关的系数, Yokoi 和 Margaryon (2008) 利用 (132) 式的关系, 导出了面波水平分量 (RR, TT) 的空间自相关系数, 他们没有讨论交叉分量之间的互相关。这里, 我们利用 (132) 式讨论包含交叉分量的空间自相关。

对于相同分量, 我们采用归一化的空间自相关定义:

$$\bar{\phi}_{ii}(a, b; \omega) = \frac{\langle u_i^*(a; \omega) u_i(b; \omega) \rangle}{\sqrt{\langle u_i^*(a; \omega) u_i(a; \omega) \rangle} \sqrt{\langle u_i^*(b; \omega) u_i(b; \omega) \rangle}} \quad (133)$$

对于扩散场, a 、 b 两点的自相关的整体平均相等, 有:

$$\langle u_i^*(a; \omega) u_i(a; \omega) \rangle = \langle u_i^*(b; \omega) u_i(b; \omega) \rangle \quad (134)$$

因此有:

$$\bar{\phi}_{ii}(a, b; \omega) = \frac{\langle u_i^*(a; \omega) u_i(b; \omega) \rangle}{\langle u_i^*(a; \omega) u_i(a; \omega) \rangle} \quad (135)$$

利用 (132) 式互相关函数和格林函数的关系, (135) 式可以表示为:

$$\bar{\phi}_{ii}(a, b; \omega) = \frac{\text{Im} [G_{ii}(b, a; \omega)]}{\text{Im} [G_{ii}(a, a; \omega)]} \quad (136)$$

根据 (129) 式, 对于单个 Rayleigh 波模式有 (上

标 Ray 表示与 Rayleigh 波相关的量):

$$\begin{aligned} G_{ZZ}^{\text{Ray}}(b, a; \omega) &= -\frac{i}{8cuI} U(b)U(a)H_0 \\ &= -\frac{i}{8cuI} U(b)U(a)[J_0(kr) - iY_0(kr)] \end{aligned} \quad (137)$$

因此, 格林函数分量 $G_{ZZ}^{\text{Ray}}(b, a; \omega)$ 和 $G_{ZZ}^{\text{Ray}}(a, a; \omega)$ 虚部可以表示为:

$$\begin{aligned} \text{Im} [G_{ZZ}^{\text{Ray}}(b, a; \omega)] &= -\frac{1}{8cuI} U(b)U(a)J_0(kr) \\ \text{Im} [G_{ZZ}^{\text{Ray}}(a, a; \omega)] &= -\frac{1}{8cuI} U(a)U(a)J_0(0) \end{aligned} \quad (138)$$

$J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数, 将 (138) 式代入 (136) 式, 并注意到 $J_0(0) = 1$ 可以得到:

$$\bar{\phi}_{ZZ}^{\text{Ray}}(a, b; \omega) = J_0(kr) \quad (139)$$

同理, 对于 G_{RR}^{Ray} 、 G_{TT}^{Ray} 有:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{RR}^{\text{Ray}}(a, b; \omega) &= J_0(kr) - J_2(kr) \\ \bar{\phi}_{TT}^{\text{Ray}}(a, b; \omega) &= J_0(kr) + J_2(kr) \end{aligned} \quad (140)$$

这个结果和 Yokoi 和 Margaryon (2008) 及 Haney 等 (2012) 给出的结果一致, 只是 Haney 等 (2012) 给出的空间自相关系数没有归一。

对于交叉分量的互相关, 我们采用非归一化的空间自相关定义:

$$\phi_{ij}(a, b; \omega) = \langle u_i^*(a; \omega) u_j(b; \omega) \rangle \quad (i \neq j) \quad (141)$$

对于 G_{ZR}^{Ray} 分量, 根据 (132) 式, 有:

$$\begin{aligned} \phi_{ZR}^{\text{Ray}}(a, b; \omega) &= \langle u_Z^*(a; \omega) u_R(b; \omega) \rangle = -2s(\omega) \text{Im} [G_{ZR}(b, a; \omega)] \\ &= -2s(\omega) \text{Im} \left[\frac{i}{8cuI} U(b)V(a)[J_1(kr) + iY_1(kr)] \right] \\ &= -\frac{s(\omega)}{4cuI} U(b)V(a)J_1(kr) = -S(\omega)J_1(kr) \end{aligned} \quad (142)$$

同理, 对于 G_{RZ}^{Ray} 则有:

$$\phi_{RZ}^{\text{Ray}}(a, b; \omega) = \langle u_R^*(a; \omega) u_Z(b; \omega) \rangle = S(\omega) J_1(kr) \quad (143)$$

式中:

$$S(\omega) = \frac{s(\omega)}{4cul} UV \quad (144)$$

$$\text{SPAC}^{\text{Rayleigh}} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{ZZ}^{\text{Ray}} & \phi_{ZR}^{\text{Ray}} & \phi_{ZT}^{\text{Ray}} \\ \phi_{RZ}^{\text{Ray}} & \bar{\phi}_{RR}^{\text{Ray}} & \phi_{RT}^{\text{Ray}} \\ \phi_{TZ}^{\text{Ray}} & \phi_{TR}^{\text{Ray}} & \bar{\phi}_{TT}^{\text{Ray}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0(kr) & -S(\omega) J_1(kr) & 0 \\ S(\omega) J_1(kr) & J_0(kr) - J_2(kr) & 0 \\ 0 & 0 & J_0(kr) + J_2(kr) \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$\text{SPAC}^{\text{Love}} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{ZZ}^{\text{Lov}} & \phi_{ZR}^{\text{Lov}} & \phi_{ZT}^{\text{Lov}} \\ \phi_{RZ}^{\text{Lov}} & \bar{\phi}_{RR}^{\text{Lov}} & \phi_{RT}^{\text{Lov}} \\ \phi_{TZ}^{\text{Lov}} & \phi_{TR}^{\text{Lov}} & \bar{\phi}_{TT}^{\text{Lov}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_0(kr) + J_2(kr) & 0 \\ 0 & 0 & J_0(kr) - J_2(kr) \end{bmatrix} \quad (146)$$

式中, ϕ 表示没有归一化的空间自相关系数, $\bar{\phi}$ 表示完全归一化的空间自相关系数, 即对于相同分量的空间自相关, 比如 (139) 式的 ϕ_{ZZ}^{Ray} , 我们采用 (138) 式的第二行所示的单点的自相关作为归一化因子. 正如 Haney 等 (2012) 指出的, 对于交叉分量的互相关无法采用类似的归一化方式进行定义, 因为在 $r=0$ 时, 采用单点自相关作为归一化因子, (142) 式或 (143) 式将出现在分母上, 其中 $J_1(0)=0$ 导致归一化的定义是奇异的.

与 Haney 等 (2012) 及 Takagi 等 (2014) 不同, 我们基于已知的包含近场的格林函数, 和弹性动力学干涉方程 (132) 式, 导出互相关函数的张量形式, 即张量形式的空间自相关系数. Haney 等 (2012) 则是基于矢量形式的平面波入射模型, 推导互相关函数张量, 从而研究其与格林函数的关系, 或者由其导出包含近场的面波张量格林函数 (Haney and Nakahara, 2014).

(145) 式和 (146) 式的结果与 Haney 等 (2012) 及 Takagi 等 (2014) 的结果一致. 由 (145) 式知, $\phi_{ZR}^{\text{Ray}} = -\phi_{RZ}^{\text{Ray}}$, Takagi 等 (2014) 正是利用面波的这种性质分离体波和面波, 另外, 在他们的结果中, ϕ_{ZR}^{Ray} 或 ϕ_{RZ}^{Ray} 前的系数包含了面波水平和垂直分量的比值 H , 也即面波水平和垂直特征函数的比. 根据 (144) 式, 本文给出的 ϕ_{ZR}^{Ray} 或 ϕ_{RZ}^{Ray} 前的系数是 a 点水平分量特征函数 $V(a)$ 和 b 点垂直分量特征函数 $U(b)$ 的乘积, 虽然在实际应用中, 由

由于考虑的是均匀水平分层的模型假设, 自由表面任意点的特征函数相同, 这里略去了特征函数对位置的依赖关系.

类似讨论可以得到 Love 波的空间自相关系数, 将其总结如下 (上标 Lov 表示与 Love 波相关的量):

于源的复杂性, 我们更多关心的是类似贝塞尔函数形状的相对变化, 系数的绝对大小并不能精确知道, 但在理论表示上, 两个分量时间域中的互相关, 对应频率的乘积, 其幅度的乘积是自然出现的, 因此将 ϕ_{ZR}^{Ray} 或 ϕ_{RZ}^{Ray} 前的系数理解为水平和垂直分量特征函数的乘积可能更为合理. Takagi 等 (2014) 中的 (16) 式和 (17) 式表明, 他们给出的 Z 和 R 分量的平面波幅度, 是利用 Z 向分量归一化之后的结果, ϕ_{ZR}^{Ray} 或 ϕ_{RZ}^{Ray} 前的系数 H 可能理解成 $1 \times H$ 更为合理. 与此类似, Haney 等 (2012) 的 (68) 式中 ϕ_{ZR}^{Ray} 或 ϕ_{RZ}^{Ray} 前的系数也含有 Rayleigh 波水平与垂直分量的比 R , 但其垂直分量的幅度隐含在源项 $P^{\text{Ray}}(\omega)$ 中, 该源项与本文 (144) 式的定义不同.

当然, 如果我们采用类似的非完全归一化因子, 比如对 (142) 式和 (143) 式所示的交叉分量互相关, 采用 $\frac{s(\omega)}{4cul} UV$ 对它们进行归一, 可以得到:

$$\phi_{ZR}^{\text{Ray}}(a, b; \omega) = -\frac{V}{U} J_1(kr) \quad (147)$$

$$\phi_{RZ}^{\text{Ray}}(a, b; \omega) = \frac{V}{U} J_1(kr) \quad (148)$$

这里出现的水平和垂直特征函数的比 V/U 即是 Haney 等 (2012) 及 Takagi 等 (2014) 中的水平与垂直分量的幅度比. 为便于和 Haney 等 (2012) 的结果进行比较, 我们给出 (145) 式和 (146) 式非归一的空间自相关系数如下:

$$\text{SPAC}^{\text{Rayleigh}} = \begin{bmatrix} \phi_{ZZ}^{\text{Ray}} & \phi_{ZR}^{\text{Ray}} & \phi_{ZT}^{\text{Ray}} \\ \phi_{RZ}^{\text{Ray}} & \phi_{RR}^{\text{Ray}} & \phi_{RT}^{\text{Ray}} \\ \phi_{TZ}^{\text{Ray}} & \phi_{TR}^{\text{Ray}} & \phi_{TT}^{\text{Ray}} \end{bmatrix} = \frac{s(\omega)}{4cuI} UU \begin{bmatrix} J_0(kr) & -\frac{V}{U} J_1(kr) & 0 \\ \frac{V}{U} J_1(kr) & \frac{V^2}{U^2} \frac{1}{2} [J_0(kr) - J_2(kr)] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V^2}{U^2} \frac{1}{2} [J_0(kr) + J_2(kr)] \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$\text{SPAC}^{\text{Love}} = \begin{bmatrix} \phi_{ZZ}^{\text{Lov}} & \phi_{ZR}^{\text{Lov}} & \phi_{ZT}^{\text{Lov}} \\ \phi_{RZ}^{\text{Lov}} & \phi_{RR}^{\text{Lov}} & \phi_{RT}^{\text{Lov}} \\ \phi_{TZ}^{\text{Lov}} & \phi_{TR}^{\text{Lov}} & \phi_{TT}^{\text{Lov}} \end{bmatrix} = \frac{s(\omega)}{4cuI} WW \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} [J_0(kr) + J_2(kr)] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} [J_0(kr) - J_2(kr)] \end{bmatrix} \quad (150)$$

(145) 式和 (146) 式也表明, 和 ZZ 分量互相关相同, 张量空间自相关系数均为实数, 这是由于我们的推导基于弹性动力学干涉方程 (131) 式, 该式是在扩散场或均匀入射的平面波源得到的, 因此 (145) 式和 (146) 式隐含了噪声场是扩散场或者背景噪声源均匀分布, 和 Aki (1957) 最初给出的微震在时间和空间上是平稳的这一假设等价. 如前所述, 与标量情形类似, 对于非均匀入射的平面波模型, (张量) 空间自相关系数的虚部可能不为 0, 比如可以参阅 Takagi 等 (2014).

5.3 基于频率—贝塞尔变换从背景噪声中提取高级模式面波

5.3.1 基本理论

对于均匀水平分层的各向同性介质, 位于一定深度的源激发的波, 在自由表面的位移谱可以表示为 (Harkrider, 1964; Ben-Menahem and Singh, 1968; 陈运泰, 1974; 姚振兴, 1979; Chen, 1999; Lu and Zhang, 2004):

$$u(\omega, r) = \int_0^\infty \frac{N^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)} J_n(kr) k dk + \int_0^\infty \frac{N^{\text{Lov}}(k, \omega)}{D_L(k, \omega)} J_n(kr) k dk \quad (151)$$

式中, $J_n(kr)$ 为 n 阶第一类贝塞尔函数, $N(k, \omega)$ 是与面波特征向量和震源类型相关的函数. (151) 式包含了体波、头波、面波等波型成份, 枝点的割线积分贡献对应体波, 分母 $D(k, \omega) = 0$ 为 Rayleigh (Ray) 和 Love (Lov) 面波的特征方程, 该方程确定的极点留数贡献为面波成份. (151) 式实际上构成了积分核函数 $\frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)}$ 的 Hankel 变换 (Morse and Feshbach, 1953, P944; Piessens, 2000), 只考虑与一种面波特征函数和特征值相关的量, 对 (151) 式求逆变换, 有:

$$I(k, \omega) = \frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)} = \int_0^\infty u(\omega, r) J_n(kr) r dr \quad (152)$$

即, 如果对频率—空间域的波场记录 $u(\omega, r)$ 进行 Hankel 逆变换, 我们将得到 (152) 式的积分核 $\frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)}$ 在 (k, ω) 或 (ω, c) 域的二维表示, 在该二维能谱中, 分母 $D(k, \omega) = 0$ 时, 对应 $I(k, \omega)$ 的能量极大值, 而 $D(k, \omega) = 0$ 对应 Rayleigh 或 Love 面波的特征值, 即不同频率对应的不同模式的相速度, 因此, 由自由表面位移谱的逆 Hankel 变换可以提取多模式面波的特征值. 另一方面, 如前所述, 背景噪声的互相关可以获得其中一个点视为虚拟源, 在另一个点接收到的脉冲响应, 因此, 通过对背景噪声互相关函数得到的虚拟源记录, 可以利用 (152) 式的逆 Hankel 变换提取基阶和 (或) 高阶模式的相速度频散曲线. Wang 等 (2019) 首先将这种方法应用于 Rayleigh 波垂直分量的互相关, 并称该方法为频率—贝塞尔变换 (Frequency-Bessel Transform, F-J) (吴华礼等, 2019) 或矢量波数变换法 (Vector Wavenumber Transformation Method, VWTM) (杨振涛等, 2019), Hu 等 (2020) 将其扩展用于交叉分量的互相关, 并用于提取 Love 面波的频散曲线和 Rayleigh 波 ZH 幅度比.

(151) 式 n 的取值与源的类型有关, 考虑格林函数对应的水平和垂直单力源情形 (Harkrider, 1964), 其不同方向力激发的不同方向位移为系统格林函数, 可以表示为 (这里的格林函数指包含各种波型成份的一般积分形式):

$$G_{ij}(\omega, r) = \int_0^\infty g_{ij}(k, \omega) J_{ij}(k, r) k dk \quad (153)$$

注意, (153) 式积分核中, 相同的下标不表示求和, 只表示将对应的矩阵分量相乘并积分. 包含 Rayleigh 波特征函数的部分为:

$$g_{ij}^{\text{Rayleigh}}(k, \omega) = \begin{bmatrix} g_{ZZ} & g_{ZR} & g_{ZT} \\ g_{RZ} & g_{RR} & g_{RT} \\ g_{TZ} & g_{TR} & g_{TT} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{N_{ZZ}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)} & \frac{N_{ZR}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)} & 0 \\ \frac{N_{RZ}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)} & \frac{N_{RR}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_{TT}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)} \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$J_{ij}^{\text{Rayleigh}}(k, r) = \begin{bmatrix} J_{ZZ} & J_{ZR} & J_{ZT} \\ J_{RZ} & J_{RR} & J_{RT} \\ J_{TZ} & J_{TR} & J_{TT} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_0(kr) & J_1(kr) & 0 \\ J_1(kr) & [J_0(kr) - J_2(kr)] & 0 \\ 0 & 0 & [J_0(kr) + J_2(kr)] \end{bmatrix} \quad (155)$$

包含 Love 波特征函数的部分为:

$$g_{ij}^{\text{Love}}(k, \omega) = \begin{bmatrix} g_{ZZ} & g_{ZR} & g_{ZT} \\ g_{RZ} & g_{RR} & g_{RT} \\ g_{TZ} & g_{TR} & g_{TT} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_{RR}^{\text{Lov}}(k, \omega)}{D_L(k, \omega)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_{TT}^{\text{Lov}}(k, \omega)}{D_L(k, \omega)} \end{bmatrix} \quad (156)$$

$$J_{ij}^{\text{Love}}(k, r) = \begin{bmatrix} J_{ZZ} & J_{ZR} & J_{ZT} \\ J_{RZ} & J_{RR} & J_{RT} \\ J_{TZ} & J_{TR} & J_{TT} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [J_0(kr) + J_2(kr)] & 0 \\ 0 & 0 & [J_0(kr) - J_2(kr)] \end{bmatrix} \quad (157)$$

(153) 式中的 G_{ij} 表示包含所有波型的格林函数, 将贝塞尔函数写成 Hankel 函数的差, 积分限变换为 $(-\infty, \infty)$, 然后求 (153) 式的留数可以得到 (129) 式和 (130) 式所示的 Rayleigh 波或 Love 波的格林函数 (Aki and Richards, 2002)。

根据弹性动力学干涉理论, (153) 式可以写为:

$$\phi_{ij}(r, \omega) \approx -2s(\omega)\text{Im}[G(\omega, r)] = -2s(\omega) \int_0^\infty \text{Im}[g_{ij}]J_{ij}(kr)kdk \quad (158)$$

其逆变换为:

$$-2s(\omega)\text{Im}[g_{ij}(k, \omega)] \approx \int_0^\infty \phi_{ij}(r, \omega)J_{ij}(k, r)rdr \quad (159)$$

式中, $g_{ij}(k, \omega)$ 取 (154) 式或 (155) 式对应的 Rayleigh 或 Love 波的积分核, 其分母为零对应 Rayleigh 波或 Love 波的特征方程, 此时 (159) 式取得极值, 因此可以利用背景噪声互相关得到的空间自相关系数 $\phi_{ij}(\omega, r)$, 通过 (159) 式的逆 Hankel 变换提取多模面波的特征值。

5.3.2 利用 ZZ 或 RZ (ZR) 分量空间相关提取多模面波特征值

将 (146) 式的 $\phi_{ZZ}^{\text{Ray}}(\omega, r)$ 分量代入 (159) 式, 并考虑到 (154) 式和 (155) 式 [注: 对于逆变换, 应将 (155) 式或 (157) 式中的贝塞尔函数与波数 k 的乘积, 变成与距离 r 的乘积, 下同], 有:

$$I_{ZZ}^{\text{Ray}}(k, \omega) = -2s(\omega)\text{Im}\left[\frac{N_{ZZ}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)}\right] \approx \int_0^\infty \phi_{ZZ}^{\text{Ray}}(\omega, r)J_0(kr)rdr \quad (160)$$

根据前面的讨论, 左端分母 $D_R(k, \omega) = 0$ 对应的极大值, 在物理上对应由该方程确定的 Rayleigh 波特征值, 即 Rayleigh 波频散曲线, 无疑, 根据 (160) 式得到 (ω, r) 域的能谱, 可以提取基阶和高阶 Rayleigh 波的频散曲线。

另外, 上述过程也可以利用贝塞尔函数的正交关系从数学上得到解释。背景噪声时域互相关函数对应的频率域 SPAC 系数 $\phi_{ZZ}^{\text{Ray}}(\omega, r) = S(\omega)\bar{\phi}_{ZZ}^{\text{Ray}}(\omega, r) = S(\omega)J_0(kr)$ 是已知的 [见 (149) 式], 将其代入 (160) 式, 可以得到:

$$I_{ZZ}^{\text{Ray}}(k, \omega) = -2s(\omega)\text{Im}\left[\frac{N_{ZZ}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)}\right]$$

$$\approx \frac{s(\omega)}{4cuI}UU \int_0^\infty J_0(k_Rr)J_0(kr)rdr \quad (161)$$

贝塞尔函数满足正交关系 (Morse and Feshbach, 1953, P943):

$$\int_0^\infty J_m(kr)J_m(k'r)rdr = \frac{\delta(k-k')}{\sqrt{kk'}} \quad (162)$$

因此, (161) 式可以写为:

$$I_{ZZ}^{\text{Ray}}(k, \omega) = -2s(\omega)\text{Im}\left[\frac{N_{ZZ}^{\text{Ray}}(k, \omega)}{D_R(k, \omega)}\right] \approx \frac{s(\omega)}{4c_Ru_RI_R}UU \frac{\delta(k-k_R)}{k_R} \quad (163)$$

由于互相关系数中的主要成份是面波, (163) 式中的波数 k_R 对应 Raleigh 面波波数, 只有在 $k = k_R$ 时, 上式有极大值, 且对应分母 $D_R(k, \omega) = 0$ 确

定的面波的特征值。(160)式的积分可以通过数值积分 (Wang et al., 2019) 或者快速 Hankel 变换计算 (Mohsen and Hashish, 1994)。

Hu 等 (2020) 将上述方法推广到交叉分量, 并用于提取 Love 波频散曲线和 Rayleigh 波 ZH 幅度比。将交叉分量 $\phi_{RZ}^{\text{Ray}}(\omega, r)$ 或 $\phi_{ZR}^{\text{Ray}}(\omega, r)$ 代入 (159) 式, 有:

$$I_{RZ}^{\text{Ray}}(k, \omega) = \int_0^{\infty} \phi_{RZ}^{\text{Ray}}(\omega, r) J_1(kr) r dr$$

$$I_{ZR}^{\text{Ray}}(k, \omega) = \int_0^{\infty} \phi_{ZR}^{\text{Ray}}(\omega, r) J_1(kr) r dr \quad (164)$$

由于 $\phi_{RZ}^{\text{Ray}}(\omega, r) = -\phi_{ZR}^{\text{Ray}}(\omega, r)$, 有:

$$I_{ZR}^{\text{Ray}}(k, \omega) = -I_{RZ}^{\text{Ray}}(k, \omega) \quad (165)$$

Hu 等 (2020) 利用 (164) 式的线性组合以降低噪声的影响, 记为:

$$I_{ZR,RZ}^{\text{Ray}}(k, \omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\phi_{RZ}^{\text{Ray}}(\omega, r) - \phi_{ZR}^{\text{Ray}}(\omega, r)] J_1(kr) r dr$$

$$= \frac{s(\omega)}{4c_R u_R I_R} U V \frac{\delta(k - k_R)}{k_R} \quad (166)$$

可以发现, 利用 (166) 式与 (163) 式的比可以得到水平与垂直特征函数的比值 V/U 。

5.3.3 利用 RR 和 TT 分量空间相关提取多模面波特征值

根据 (151) 式和 (159) 式, 积分核同时包含与 Rayleigh 和 Love 面波相关的物理量, 在做逆变换时, ZZ 和 RZ 或 ZR 分量只存在 Rayleigh 波中, 得到的频率—波数域的图像极大值可以直接指示 Rayleigh 波特征值, 但对于 RR 和 TT 分量来说, 它们同时存在于 Rayleigh 和 Love 面波中, 单独由实际记录的 RR 或 TT 分量的逆变换很难给出相应面波的特征值。基于贝塞尔函数的正交关系, Hu 等 (2020) 采用 RR 与 TT 分量的线性组合来计算其频率—贝塞尔谱。

实际记录到的 RR 和 TT 分量包含两种成份的面波, 根据 (149) 式和 (150) 式, 它们的和与差可以表示为:

$$\phi_{RR} + \phi_{TT} = \phi_{RR}^{\text{Ray}} + \phi_{RR}^{\text{Lov}} + \phi_{TT}^{\text{Ray}} + \phi_{TT}^{\text{Lov}}$$

$$= \frac{s(\omega)}{4c_R u_R I_R} V V \cdot J_0(k_R r) + \frac{s(\omega)}{4c_L u_L I_L} W W \cdot J_0(k_L r)$$

$$\phi_{RR} - \phi_{TT} = \phi_{RR}^{\text{Ray}} + \phi_{RR}^{\text{Lov}} - \phi_{TT}^{\text{Ray}} - \phi_{TT}^{\text{Lov}}$$

$$= -\frac{s(\omega)}{4c_R u_R I_R} V V \cdot J_2(k_R r) + \frac{s(\omega)}{4c_L u_L I_L} W W \cdot J_2(k_L r) \quad (167)$$

根据 (162) 式的正交关系, 有 (Hu et al., 2020):

$$I^+ = \int_0^{\infty} [\phi_{RR} + \phi_{TT}] J_0(kr) r dr$$

$$= \frac{s(\omega)}{4c_R u_R I_R} V V \frac{1}{k_R} \delta(k - k_R) + \frac{s(\omega)}{4c_L u_L I_L} W W \frac{1}{k_L} \delta(k - k_L)$$

$$I^- = \int_0^{\infty} [\phi_{RR} - \phi_{TT}] J_2(kr) r dr$$

$$= -\frac{s(\omega)}{4c_R u_R I_R} V V \frac{1}{k_R} \delta(k - k_R) + \frac{s(\omega)}{4c_L u_L I_L} W W \frac{1}{k_L} \delta(k - k_L) \quad (168)$$

可以发现:

$$I_{RR}(k, \omega) = \frac{1}{2} (I^+ - I^-) = \frac{s(\omega)}{4c_R u_R I_R} V V \frac{1}{k_R} \delta(k - k_R) \quad (169)$$

$$I_{TT}(k, \omega) = \frac{1}{2} (I^+ + I^-) = \frac{s(\omega)}{4c_L u_L I_L} W W \frac{1}{k_L} \delta(k - k_L) \quad (170)$$

Hu 等 (2020) 基于数值模拟和实际地震台阵记录, 验证了上述方法的有效性, 并讨论了它们的远场近似。(160) 式、(166) 式和 (168) 式对距离 r 的积分从 0 到无穷远处, 由于可获得的数据总是有限的, 因此需要对积分进行离散化 (Wang et al., 2019; Hu et al., 2020) 并同时考虑空间域的采样, 以避免叠混现象。

6 衰减介质中的空间相干表示

6.1 模型假设

考虑介质衰减时, (23) 式所示的波动方程变为 (Nakahara, 2012):

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^2 u \quad (171)$$

式中, α 为衰减系数, 相应的频域波动方程为:

$$[\nabla^2 + (k_0 - i\alpha)^2] u = 0 \quad (172)$$

令 $k = k_0 - i\alpha$, 则有:

$$(\nabla^2 + k^2 u) = 0 \quad (173)$$

其解为:

$$u = A e^{-ikr} e^{i\omega t} = A e^{-i(k_0 - i\alpha)r} e^{i\omega t} \quad (174)$$

式中, 波数 $k_0 = \omega/c_0$, ω 为角频率。

如图 15 所示, 在半径为 R 的圆周上, 均匀分布着一系列源 (图中只给出了单个源)。a、b 为两个接收点的位置, 其空间坐标用矢量 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 表示。相对接收位置 a、b 来说, $R \rightarrow \infty$ 时, 每一个源激发的波可以看成如 (174) 式所示的平面波, 因此, 对于单个激发源, a、b 两点接收到的平面波可表示为:

$$Q_a = A e^{i\omega t} e^{-ik \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})} = A e^{i\omega t} e^{-\alpha \hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})} e^{-ik_0 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})} \quad (175)$$

$$Q_b = A e^{i\omega t} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_2 - R)} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - R)} \quad (176)$$

同时, 假定各个源激发的平面波互不相关, 即:

$$\langle A(\varphi)A(\varphi') \rangle = A^2 \delta(\varphi - \varphi') \quad (177)$$

这里波矢量 $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}} = (k_0 - i\alpha)\hat{\mathbf{k}} = k_0 - i\alpha\hat{\mathbf{k}}$. $\hat{\mathbf{k}}$ 为波传播方向的单位矢量, 远场近似下, 与 \mathbf{R} 的方向相反, $\hat{\mathbf{k}} = -\mathbf{R}/|\mathbf{R}|$, $A(\varphi)$ 为波的幅度, φ 为方位角, $\langle \rangle$ 表示对时间的整体平均.

对于脉冲源或瞬态源, 计算两个台站之间的互相关函数时, 通常先计算由同一个源激发的互相关函数, 然后再将不同源激发的互相关函数进行叠加, 相关和叠加的顺序不能交换, 因为对于脉冲或者瞬态源, 两个台站接收到的信号是相干的, 交换相关和叠加顺序将出现非物理的交叉项 (Wapenaar et al., 2010). 当计算位于背景噪声场中的两个台站的互相关函数时, 由于台站接收到的信号是不同源激发的波场的叠加, 且噪声源的信息无法获得, 因此我们得到的互相关函数是先叠加后相关的结果. 由于噪声源通常是互不相关的, 交换相关和叠加顺序不会引起非物理的交叉项. 但在衰减介质中, 叠加和相关顺序不同, 得到的表达式也不尽相同. 因此, 我们分为先叠加后相关和先相关后叠加两种情况来讨论 (王凯明等, 2016, 2018).

6.2 先叠加后相关

对于先叠加后相关的情况, 如图 15 所示, 假定源位于 \mathbf{R} 处, \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 两点的信号为从 \mathbf{R} 处传播的波的叠加, 即以 $|\mathbf{R}|$ 为半径的整个圆上的源的叠加, 远场近似下, 源上每一点发出的是平面波, 则台站 a、b 两点的叠加波场可以表示为:

$$P_a = \int_0^{2\pi} A(\varphi) e^{i\omega t} e^{-ik \cdot (r_1 - R)} d\varphi \\ = \int_0^{2\pi} A(\varphi) e^{i\omega t} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R)} e^{-ik_0 \cdot (r_1 - R)} d\varphi \quad (178)$$

$$P_b = \int_0^{2\pi} A(\varphi') e^{i\omega t} e^{-\alpha \hat{k}' \cdot (r_2 - R')} e^{-ik'_0 \cdot (r_2 - R')} d\varphi' \quad (179)$$

a、b 两点之间的互相关可以表示为:

$$P_a^* P_b = \int_0^{2\pi} A(\varphi) e^{-i\omega t} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R)} e^{ik_0 \cdot (r_1 - R)} d\varphi \cdot \\ \int_0^{2\pi} A(\varphi') e^{i\omega t} e^{-\alpha \hat{k}' \cdot (r_2 - R')} e^{-ik'_0 \cdot (r_2 - R')} d\varphi' \quad (180)$$

注意到 (180) 式的积分变量 φ 、 φ' 是相互独立的, 其整体平均可以写为:

$$\langle P_a^* P_b \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle A(\varphi) A(\varphi') \rangle e^{-ik_0 \cdot R + ik'_0 \cdot R'} e^{-ik'_0 \cdot r_2 + ik_0 \cdot r_1} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R) - \alpha \hat{k}' \cdot (r_2 - R')} d\varphi d\varphi' \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \delta(\varphi - \varphi') e^{-ik_0 \cdot R + ik'_0 \cdot R'} e^{-ik'_0 \cdot r_2 + ik_0 \cdot r_1} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R) - \alpha \hat{k}' \cdot (r_2 - R')} d\varphi d\varphi' \\ = \int_0^{2\pi} A^2 e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot [(r_1 - R) + (r_2 - R)]} d\varphi \quad (181)$$

(181) 式中, $\varphi = \varphi'$ 意味着 $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$. 两点各自的自相关为:

$$\langle P_a^* P_a \rangle = \int_0^{2\pi} A^2 e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R)} d\varphi \quad (182)$$

$$\langle P_b^* P_b \rangle = \int_0^{2\pi} A^2 e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_2 - R)} d\varphi \quad (183)$$

对于三种不同的归一化因子, 可以得到空间相干的三种定义:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)} = \frac{\langle P_a^* P_b \rangle}{\sqrt{\langle P_a^* P_a \rangle} \sqrt{\langle P_b^* P_b \rangle}} \quad (184)$$

$$\hat{R}_{ab}^{(2)} = \frac{\langle P_a^* P_b \rangle}{\langle P_a^* P_a \rangle} \quad (185)$$

$$\hat{R}_{ab}^{(3)} = \frac{\langle P_a^* P_b \rangle}{\langle P_b^* P_b \rangle} \quad (186)$$

将 (181) 式、(182) 式、(183) 式代入 (184) 式, 得到:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot [(r_1 - R) + (r_2 - R)]} d\varphi}{\sqrt{\left(\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R)} d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_2 - R)} d\varphi \right)}} \quad (187)$$

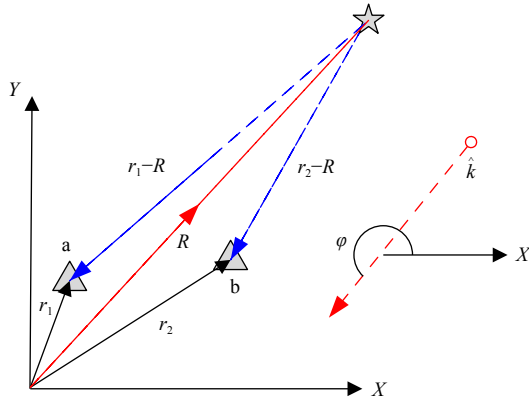


图 15 源沿半径为 R 的圆周均匀分布和圆周内任意两点 a 、 b 的位置坐标关系 (图中仅给出了单个源)

Fig. 15 The source is uniformly distributed along the circle containing two stations (a and b) with radius R (only a single source is shown in the figure)

考虑远场近似, $\hat{k} = -R/|R|$, (187) 式可以写为:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ab}^{(1)} &= \frac{e^{-2\alpha|R|} \int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{e^{-2\alpha|R|} \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_1} d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_2} d\varphi' \right)}} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{\sqrt{\left(\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_1} d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_2} d\varphi' \right)}} \quad (188) \end{aligned}$$

同理, 可以得到 $\hat{R}_{ab}^{(2)}$ 和 $\hat{R}_{ab}^{(3)}$ 的表达式:

$$\hat{R}_{ab}^{(2)} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_1} d\varphi} \quad (189)$$

$$\hat{R}_{ab}^{(3)} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_2} d\varphi} \quad (190)$$

由于衰减介质中, 空间自相关的系数依赖于坐标原点的选择, 我们分两种情况来讨论, 一是坐标原点位于 a 点; 另一种选择将坐标原点置于 a 、 b 连线的中点.

6.2.1 坐标原点位于 a 点

如图 16 所示, 如果坐标系的选择使得台站 a

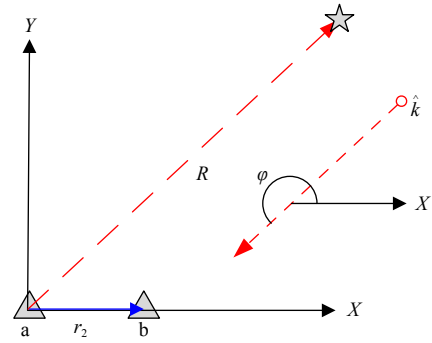


图 16 将图 15 的 a 点置于坐标原点

Fig. 16 The point a in Fig. 15 is taken as the origin of the coordinate

位于坐标原点, 台站 b 在 x 轴正向位置 r 处. 有 $r_1 = 0$, $r_2 = r$, $k_0 \cdot r_2 = rk_0 \cos\phi$, $\hat{k} \cdot r_2 = r \cos\phi$, (188) 式可以写为:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 r \cos\phi} e^{-\alpha r \cos\phi} d\varphi}{\sqrt{\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha r \cos\phi} d\varphi}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos\phi} d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2\alpha r \cos\phi} d\varphi}} \quad (191)$$

根据 Abramowitz (1964) 的 (9.6.16) 式:

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm z \cos\theta} d\theta \quad (192)$$

可知零阶修正贝塞尔函数 $I_0(z)$ 满足:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm z \cos\phi} d\varphi \quad (193)$$

将 (119) 式及 (193) 式代入 (191) 式, 可以得到:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)} = \frac{J_0(kr)}{\sqrt{I_0(2\alpha r)}} \quad (194)$$

如果将因果性和非因果性的源分开考虑, 与 4.1.1 节的讨论类似, 因果性部分的源对应 (188) 式对入射波方位在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 的积分:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)}(+)=\frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos\phi} d\varphi}{\sqrt{\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2\alpha r \cos\phi} d\varphi}} \quad (195)$$

根据 Watson (1966) 第 425 页, 修正的贝塞尔函数 $I_\nu(z)$ 和修正的 Struve 函数 $L_\nu(z)$ 满足关系:

$$I_\nu(ak) - L_\nu(ak) = \frac{2\left(\frac{1}{2}ak\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} e^{-ak\cos\theta} \sin^{2\nu}\theta d\theta \quad (196)$$

令 (196) 式 $\nu=0$, 且 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, 有:

$$I_0(ka) - L_0(ka) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-ka\cos\theta} d\theta \quad (197)$$

对 (197) 式做变量代换, 并考虑到 $I_0(-z) = -I_0(z)$, 及 $L_0(-z) = L_0(z)$, 可以得到:

$$\begin{aligned} I_0(ka) - L_0(ka) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ka\cos\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{ka\cos\theta} d\theta \\ I_0(ka) + L_0(ka) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ka\cos\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ka\cos\theta} d\theta \end{aligned} \quad (198)$$

将 (105) 式及 (198) 式代入 (195) 式, 有:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)}(+) = \frac{J_0(kr) - iH_0(kr)}{\sqrt{I_0(2ar) - L_0(2ar)}} \quad (199)$$

类似地, 非因果性部分对应 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 的积分, 利用 (106) 式及 (198) 式可以得到:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)}(-) = \frac{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ikr\cos\varphi} d\varphi}{\sqrt{\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2ar\cos\varphi} d\varphi}} = \frac{J_0(kr) + iH_0(kr)}{\sqrt{I_0(2ar) + L_0(2ar)}} \quad (200)$$

同理, 可以求得另外两种归一化条件 (189) 式和 (190) 式的结果:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ab}^{(2)} &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_1} d\varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr\cos\varphi} d\varphi = J_0(kr) \end{aligned} \quad (201)$$

$$\hat{R}_{ab}^{(2)}(+) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr\cos\varphi} d\varphi = J_0(kr) - iH_0(kr)$$

$$\hat{R}_{ab}^{(2)}(-) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ikr\cos\varphi} d\varphi = J_0(kr) + iH_0(kr) \quad (202)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ab}^{(3)} &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_2} d\varphi} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 r \cos\varphi} e^{-ar\cos\varphi} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-2ar\cos\varphi} d\varphi} = \frac{J_0(kr)}{I_0(2ar)} \end{aligned} \quad (203)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ab}^{(3)}(+) &= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ik_0 r \cos\varphi} e^{-ar\cos\varphi} d\varphi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2ar\cos\varphi} d\varphi} = \frac{J_0(kr) - iH_0(kr)}{I_0(2ar) - L_0(2ar)} \\ \hat{R}_{ab}^{(3)}(-) &= \frac{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ik_0 r \cos\varphi} e^{-ar\cos\varphi} d\varphi}{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2ar\cos\varphi} d\varphi} = \frac{J_0(kr) + iH_0(kr)}{I_0(2ar) + L_0(2ar)} \end{aligned} \quad (204)$$

6.2.2 坐标原点位于 a、b 两点之间的中点

如 Weaver (2011) 指出的, (177) 式意味着在坐标原点, 即 a 点的场是完全各向同性的, 如果将坐标原点置于 a、b 中间, 此时在 a 点的场不再是各向同性的. 与完全弹性介质情形不同, 对衰减介质而言, 改变坐标原点的位置, a、b 两点空间相干的表达是不同的. 如图 17 所示, 此时有 $r_2 = r/2$, $r_1 = -r/2$, $k_0 \cdot r = -rk_0 \cos\varphi$, $\hat{k} \cdot r_1 = r/2 \cos\varphi$, $\hat{k} \cdot r_2 = -r/2 \cos\varphi$, 将这些参数关系代入 (188) 式, 有:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 r \cos\varphi} d\varphi}{\sqrt{\left(\int_0^{2\pi} e^{-ar\cos\varphi} d\varphi\right) \left(\int_0^{2\pi} e^{ar\cos\varphi'} d\varphi'\right)}} \quad (205)$$

可以发现, 由于坐标原点选择的差异, 与 (191) 式不同, (205) 式的分子中出现的波数为 k_0 , 而不是 k , 这导致在分子中不含衰减系数 α . 将 (119) 式和 (193) 式代入 (205) 式, 有:

$$\hat{R}_{ab}^{(1)} = \frac{J_0(k_0 r)}{I_0(ar)} \quad (206)$$

类似前面的讨论, 其因果性部分对应 $[-\pi/2, \pi/2]$ 的积分:

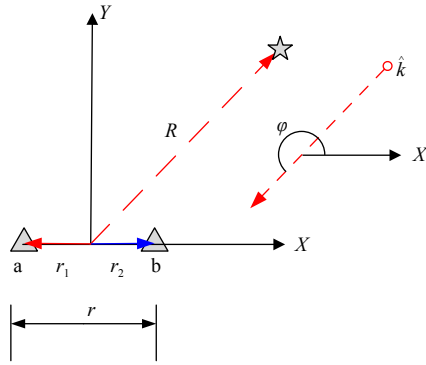


图 17 将坐标原点置于 a、b 两点连线的中点

Fig. 17 The midpoint between a and b is taken as the origin of the coordinates

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab}^{(1)}(+)&= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\sqrt{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\alpha r \cos \varphi} d\varphi \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\alpha r \cos \varphi'} d\varphi' \right)}} \\ &= \frac{J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)}{\sqrt{I_0^2(\alpha r) - L_0^2(\alpha r)}}\end{aligned}\quad (207)$$

非因果性对应 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 的积分:

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab}^{(1)}(-)&= \frac{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\sqrt{\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\alpha r \cos \varphi} d\varphi \right) \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\alpha r \cos \varphi'} d\varphi' \right)}} \\ &= \frac{J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)}{\sqrt{I_0^2(\alpha r) - L_0^2(\alpha r)}}\end{aligned}\quad (208)$$

同理, 可以求得另外两种归一化条件 (189) 式和 (190) 式的结果:

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab}^{(2)}&= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_1} d\varphi} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{\alpha r \cos \varphi} d\varphi} \\ &= \frac{J_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r)}\end{aligned}\quad (209)$$

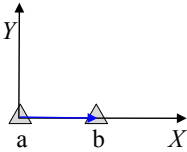
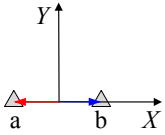
$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab}^{(2)}(+)&= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\alpha r \cos \varphi} d\varphi} = \frac{J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r) + L_0(\alpha r)} \\ \hat{R}_{ab}^{(2)}(-)&= \frac{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\alpha r \cos \varphi} d\varphi} = \frac{J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r) - L_0(\alpha r)}\end{aligned}\quad (210)$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab}^{(3)}&= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} e^{-\alpha \hat{k} \cdot (r_1 + r_2)} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot r_2} d\varphi} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{-\alpha r \cos \varphi} d\varphi} = \frac{J_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r)}\end{aligned}\quad (211)$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab}^{(3)}(+)&= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\alpha r \cos \varphi} d\varphi} = \frac{J_0(kr) - iH_0(kr)}{I_0(2\alpha r) - L_0(2\alpha r)} \\ \hat{R}_{ab}^{(3)}(-)&= \frac{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi}{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\alpha r \cos \varphi} d\varphi} = \frac{J_0(kr) + iH_0(kr)}{I_0(2\alpha r) + L_0(2\alpha r)}\end{aligned}\quad (212)$$

(206) 式和 (207) 式与 Tsai (2011) 中的 (25) 式和 (29) 式一致 (注意我们采用了不同的傅里叶变换习惯). Tsai (2011) 基于均匀分布的远场面波模型 (uniform distribution of far-field surface waves) 和单边远场面波模型 (one-side far-field surface waves) 得出了同样的结果, 这与本文考虑的模型一样, 虽然该模型假定源在半径 R 很大的圆周上均匀分布, 由于介质的衰减, 圆周内部各点波场的大小并不是完全相同的. 当采用如图 14 所示的坐标系时, (177) 式的定义表明各向同性的场位于 a、b 之间沿 x 轴连线的中点. 另一方面, 从源的分布角度考虑, 两种坐标原点的选择, 意味着源相对 a、b 两点具有不同的方位分布. 其相干表达式不同表明在衰减介质中, 源的分布影响空间相干的表达. 表 3 给出了先叠加后相关情况下, 不同坐标系

表 3 先叠加后相关情况下, 不同坐标系下的 (不同归一化条件) 空间自相关系数 \hat{R}_{ab} Table 3 The SPAC expressions \hat{R}_{ab} at different coordinate systems for attenuating media

	$\hat{R}_{ab}^{(1)}$ $\hat{R}_{ab}^{(1)(+)}$ $\hat{R}_{ab}^{(1)(-)}$	$\hat{R}_{ab}^{(2)}$ $\hat{R}_{ab}^{(2)(+)}$ $\hat{R}_{ab}^{(2)(-)}$	$\hat{R}_{ab}^{(3)}$ $\hat{R}_{ab}^{(3)(+)}$ $\hat{R}_{ab}^{(3)(-)}$
	$\frac{J_0(kr)}{\sqrt{I_0(2\alpha r)}}$ $\frac{J_0(kr) - iH_0(kr)}{\sqrt{I_0(2\alpha r) - L_0(2\alpha r)}}$ $\frac{J_0(kr) + iH_0(kr)}{\sqrt{I_0(2\alpha r) + L_0(2\alpha r)}}$	$J_0(kr)$ $J_0(kr) - iH_0(kr)$ $J_0(kr) + iH_0(kr)$	$\frac{J_0(kr)}{I_0(2\alpha r)}$ $\frac{J_0(kr) - iH_0(kr)}{I_0(2\alpha r) - L_0(2\alpha r)}$ $\frac{J_0(kr) + iH_0(kr)}{I_0(2\alpha r) + L_0(2\alpha r)}$
	$\frac{J_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r)}$ $\frac{J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)}{\sqrt{I_0^2(\alpha r) - L_0^2(\alpha r)}}$ $\frac{J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)}{\sqrt{I_0^2(\alpha r) - L_0^2(\alpha r)}}$	$\frac{J_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r)}$ $\frac{J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r) + L_0(\alpha r)}$ $\frac{J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r) - L_0(\alpha r)}$	$\frac{J_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r)}$ $\frac{J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r) - L_0(\alpha r)}$ $\frac{J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)}{I_0(\alpha r) + L_0(\alpha r)}$

注: $J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数, $I_0(x)$ 为第一类零阶修正的贝塞尔函数, $H_0(x)$ 为零阶 Struve 函数, $L_0(x)$ 为 0 阶修正的 Struve 函数, 复波数 $k = k_0 - i\alpha$, α 为介质衰减因子, \hat{R}_{ab} 中的上标 (1) (2) (3) 表示不同的归一化因子选择, (+) 和 (-) 表示对应单边正向 (因果性格林函数部分) 和单边反向 (非因果性格林函数部分) 分布的源. 傅里叶变换习惯为 $f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的互相关定义为 $C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt$.

下的 (不同归一化条件) 空间自相关系数 \hat{R}_{ab} .

6.3 先相关后叠加

对于脉冲源或者瞬态主动源, 相关和叠加的次序是重要的. 为了避免交叉项的产生, 需要对单个激发源, 求取 a、b 两点的互相关, 然后将所有源的互相关结果叠加. 对于先相关后叠加的情况, 由 (175) 式、(176) 式可知, a、b 两点之间的互相关为:

$$Q_a^* Q_b = A^2 e^{-\alpha \hat{k} \cdot [(r_1 - R) + (r_2 - R)]} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} \quad (213)$$

a、b 两点之间的自相关分别为:

$$Q_a^* Q_a = A^2 e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R)} \quad (214)$$

$$Q_b^* Q_b = A^2 e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_2 - R)} \quad (215)$$

单个平面波的互相关进行归一化操作, 然后在把所有的互相关结果进行叠加. 考虑三种不同的归一化因子, 此时相干的定义也有三种不同的形式, 分别为:

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q_a^* Q_b}{\sqrt{Q_a^* Q_a} \sqrt{Q_b^* Q_b}} d\varphi \quad (216)$$

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q_a^* Q_b}{Q_a^* Q_a} d\varphi \quad (217)$$

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q_a^* Q_b}{Q_b^* Q_b} d\varphi \quad (218)$$

将 (213) 式、(214) 式、(215) 式代入以上三式, 可以得到:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha \hat{k} \cdot [(r_1 - R) + (r_2 - R)]} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)}}{\sqrt{e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_1 - R)}} e^{-2\alpha \hat{k} \cdot (r_2 - R)}} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} d\varphi \end{aligned} \quad (219)$$

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_2} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)}}{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_1}} d\varphi \quad (220)$$

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_1} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)}}{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_2}} d\varphi \quad (221)$$

6.3.1 坐标原点位于 a 点

类似前述讨论, 根据图 16 的坐标关系, 容易得出:

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi = J_0(k_0 r) \quad (222)$$

因果性部分对应 $[-\pi/2, \pi/2]$ 的积分:

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(1)(+)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)] \quad (223)$$

非因果性部分应 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 的积分:

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(1)(-)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)] \quad (224)$$

对 (220) 式和 (221) 式的归一化因子, 有:

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_2} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)}}{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_1}} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = J_0(kr) \quad (225)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(2)}(+)&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)] \\ \hat{\gamma}_{ab}^{(2)}(-)&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)] \end{aligned} \quad (226)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_1} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)}}{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_2}} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k_0 + i\alpha)r \cos \varphi} d\varphi = J_0(k_0 r + i\alpha r) \end{aligned} \quad (227)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(3)}(+)&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i(k_0 + i\alpha)r \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) - iH_0(k_0 r + i\alpha r)] \\ \hat{\gamma}_{ab}^{(3)}(-)&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-i(k_0 + i\alpha)r \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) + iH_0(k_0 r + i\alpha r)] \end{aligned} \quad (228)$$

6.3.2 坐标原点位于 a、b 两点的中点

对于如图 17 的坐标选择, 则有:

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi = J_0(k_0 r) \quad (229)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(1)}(+)&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)] \\ \hat{\gamma}_{ab}^{(1)}(-)&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ik_0 r \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)] \end{aligned} \quad (230)$$

$$\hat{\gamma}_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_2} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)}}{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_1}} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = J_0(kr) \quad (231)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(2)}(+)&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(kr) - iH_0(kr)] \\ \hat{\gamma}_{ab}^{(2)}(-)&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} [J_0(kr) + iH_0(kr)] \end{aligned} \quad (232)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(3)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_1} e^{-ik_0 \cdot (r_2 - r_1)}}{e^{-\alpha \hat{k} \cdot r_2}} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k_0 + i\alpha)r \cos \varphi} d\varphi = J_0(k_0 r + i\alpha r) \end{aligned} \quad (233)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ab}^{(3)}(+)&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i(k_0 + i\alpha)r \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) - iH_0(k_0 r + i\alpha r)] \\ \hat{\gamma}_{ab}^{(3)}(-)&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-i(k_0 + i\alpha)r \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) + iH_0(k_0 r + i\alpha r)] \end{aligned} \quad (234)$$

表 4 给出了先相关后叠加情况下, 不同坐标系下的 (不同归一化条件) 空间自相关系数 $\hat{\gamma}_{ab}$.

表 4 先相关后叠加中不同坐标系下的 $\hat{\gamma}_{ab}$

Table 4 The SPAC expressions $\hat{\gamma}_{ab}$ at different coordinate systems for attenuating media

	$\hat{\gamma}_{ab}^{(1)}$ $\hat{\gamma}_{ab}^{(1)}(+)$ $\hat{\gamma}_{ab}^{(1)}(-)$	$\hat{\gamma}_{ab}^{(2)}$ $\hat{\gamma}_{ab}^{(2)}(+)$ $\hat{\gamma}_{ab}^{(2)}(-)$	$\hat{\gamma}_{ab}^{(3)}$ $\hat{\gamma}_{ab}^{(3)}(+)$ $\hat{\gamma}_{ab}^{(3)}(-)$
	$J_0(k_0 r)$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)]$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)]$	$J_0(kr)$ $\frac{1}{2} [J_0(kr) - iH_0(kr)]$ $\frac{1}{2} [J_0(kr) + iH_0(kr)]$	$J_0(k_0 r + i\alpha r)$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) - iH_0(k_0 r + i\alpha r)]$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) + iH_0(k_0 r + i\alpha r)]$
	$J_0(k_0 r)$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r) - iH_0(k_0 r)]$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r) + iH_0(k_0 r)]$	$J_0(kr)$ $\frac{1}{2} [J_0(kr) - iH_0(kr)]$ $\frac{1}{2} [J_0(kr) + iH_0(kr)]$	$J_0(k_0 r + i\alpha r)$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) - iH_0(k_0 r + i\alpha r)]$ $\frac{1}{2} [J_0(k_0 r + i\alpha r) + iH_0(k_0 r + i\alpha r)]$

注: 表中各变量说明同表 3.

6.4 源的分布对背景噪声提取介质衰减的影响

背景噪声相干的振幅受衰减、背景噪声源分布、散射等因素影响 (Lawrence et al., 2013), 是否可以由背景噪声的空间自相关来提取介质衰减, 仍然是有争议的. Tsai (2011) 和 Weaver (2011) 认为, 相干的方位平均高度依赖于噪声源的分布, 并不足以提取可靠的衰减系数. 主要争论在于, 由背景噪声提取介质衰减, 很大程度上依赖于背景噪声场的强度, 地球的背景噪声源并不是均匀分布的. 实际操作中, 背景噪声的归一化和归一之后的方位平均, 被认为可以缓和背景噪声场的方向性.

不同的源的分布对应不同的空间相干表示, 这表明没有一种模型能很好地模拟衰减地球介质中的背景噪声相干模型. Walker (2012) 指出衰减不可避免地引起平面波的非均匀性, 因此其空间相干依赖于归一化因子的选择及源的分布, 从而导致相应的结果依赖参考系的选择. 这意味着, 利用类似的模型来描述地球介质的衰减并不是完美的, 地球背景噪声模型不能完全用分布在二维平面的上源来模拟, 可能需要考虑源的体积分布. 另一方面, 提醒我们在利用噪声互相关技术提取介质衰减时, 需要更加谨慎.

7 结论与讨论

在时间域中, 扩散场任意两点记录的互相关可以给出系统的格林函数, 即其中一点为虚拟源, 另一点为虚拟接收的脉冲响应. 这一思想等价于 Aki 在 1957 年提出的频率域中归一化的背景噪声自相关系数等于零阶贝塞尔函数这一结论. 最近的研究表明, 它们只是同一物理现象在不同域中的描述. 对于固定频率的单色波, SPAC 是零延迟时间的 NCF. 本文基于平面波模型, 在频率域中对弹性介质的 SPAC 进行了回溯性推导和讨论, 给出了弹性介质中不同维度和不同的源分布特征下 SPAC 的表达式. 由于 NCF 和 SPAC 理论的等价性, 频率域对 SPAC 的讨论, 可对 NCF 在实际地震层析成像中遇到的一些问题进行分析.

(1) 基于简单的平面波模型, 给出了不同维度下, 源或台站对方位均匀分布时的空间自相关系数 SPAC 的表达式, 对时域波动方程格林函数 GF 和互相关函数 NCF 的关系, 以及频率域亥姆霍兹方程的格林函数和 SPAC 系数的关系进行了总结.

(2) 给出声源和 (或) 交叉台站方位分布不均匀时的互相关表示, 指出这种非均匀性对方位的依赖关系, 与弱各向异性介质中面波速度的方位依赖关系类似. 因此, 非均匀源的影响在反演时可能会映射到面波方位各向异性结果中.

(3) 时间域中两点信号的互相关, 等价于频率域中两个信号的相乘, 其中一个信号取复共轭. 基于对一维简单情形的讨论, 指出在频率域中计算互相关, 取复共轭的那一点对应脉冲响应 (格林函数) 的虚拟源. 或者, 在时间域中, 不取时间延迟的那一点为虚拟源. 理解这一点, 对于利用背景噪声互相关函数的非对称性分析背景噪声源的方位分布至关重要.

(4) 对于二维情形, 单个平面波入射, 对台站对进行方位平均, 等价于单个台站对, 对各个方向入射的平面波进行方位平均. 这意味着, 如果记录足够长, 可以认为源在各个方向均匀分布, 这样可以利用长时间的平均来代替对圆周上不同台站对的方位平均, 这为非传统布置的 SPAC 方法提供了理论依据. 传统 SPAC 方法, 一个圆形台阵排列, 给出一次测量, 且是台站下方介质的平均效应, 利用时间平均代替台站的方位平均, 一个台站对就给出一个路径的独立测量结果, 因此, 可以很方便地将 NCF 技术中的三维成像方法用于 SPAC 中, 或者反过来, 将 SPAC 提取频散曲线的方法用于 NCF 技术中.

(5) 对于圆周上不同方位的源进行定量积分, 可以分别获得因果性和非因果性互相关函数的表示, 它由零阶的贝塞尔函数和 Struve 函数表示, 其远场表达式与 Boschi 和 Weemstra (2015) 利用稳相积分得到的结果一致, 这个精确积分可用于分析互相关函数在提取频散曲线时的相移, 也有作者利用其它方法研究过类似的相移问题.

(6) 在频率域中, NCF 正比于格林函数的实部或虚部 (取决于格林函数的定义习惯), 而 NCF 是 SPAC 在时间域中的等价描述, 利用这一关系和已知包含近场的面波格林张量的表示, 给出了交叉分量的 SPAC 表示, 交叉分量的 SPAC 系数可以在反演中提供独立的约束, 也可用于体波和面波的分离. 上述关系也意味着, 可以通过台阵背景噪声记录, 利用频率—贝塞尔变换提取多模面波的特征值.

(7) 在衰减介质中, 对于不同的归一化因子, 频率域中的空间相干表示略微不同, 在某些定义下, 可能无法用于提取介质的衰减. 另外, 对于含有衰

减的情况, 将坐标原点置于两点的中点或取其中一个点为坐标原点, 其空间相干表示是不同的. 这是因为源的均匀分布是相对坐标原点定义的, 坐标原点的改变意味着源的分布变化, 衰减介质的这种性质表明利用 NCF 技术提取介质衰减的挑战.

致谢

感谢中国科学技术大学李俊伦教授、姚华建教授对本文的审阅, 并提出了建设性意见和建议, 这帮助作者完善和丰富了文章内容.

附录 A: 互相关定义与傅里叶变换习惯

在 1.1 中, 我们定义函数 $f(t)$ [傅里叶变换为 $F(\omega)$] 和 $g(t)$ [傅里叶变换为 $G(\omega)$] 的互相关为:

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)g(t+\tau)dt \quad (A1)$$

其中*为复共轭. 如果令 $t = t' - \tau$ 做变量代换, 有:

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t' - \tau)g(t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t - \tau)g(t)dt \quad (A2)$$

因此 (A2) 和 (A1) 式表示同一种互相关函数的定义. 正如 (6) 式所表达的, 在 (1) 式的傅里叶变换习惯下, $C_{fg}(\tau)$ 和 $F^*(\omega)G(\omega)$ 互为傅里叶变换, 时间域中的互相关对应频率域中的 (其中一个量取复共轭后的) 乘积.

对于实数来说, (A1) 式的复共轭并不会改变 $f(t)$ 的值, 对 (1) 式中第二式两端取复共轭有:

$$f^*(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \quad (A3)$$

令 (A3) 式中的 $t = -t'$, 有:

$$f(-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{i\omega t'}d\omega \quad (A4)$$

即, 对于实函数 $f(t)$ 来说, $f(-t)$ 与 $F^*(\omega)$ 互为傅里叶变换对, 时间域中的时间反转对应频率域中的复共轭.

一些作者采用如下的互相关定义 (例如, [Snieder and van Wijk, 2015](#)):

$$C'_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)g^*(t)dt \quad (A5)$$

将 (1) 式中的 $f(t)$ 和 (5) 式代入 (A5) 式:

$$\begin{aligned} C'_{fg}(\tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega(t+\tau)}d\omega \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G^*(\omega')e^{-i\omega't}d\omega' \right] dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G^*(\omega')e^{i(\omega-\omega')t}e^{i\omega\tau}d\tau d\omega d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G^*(\omega')\delta(\omega-\omega')e^{i\omega\tau}d\omega d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G^*(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \end{aligned} \quad (A6)$$

与 (6) 式类似, 在 (A5) 式的定义下, $C'_{fg}(\tau)$ 和 $F(\omega)G^*(\omega)$ 互为傅里叶变换. 在地震干涉的文献中, 有些在频率域讨论, 有些在时间域中讨论, 应注意各自的互相关定义和傅里叶变换习惯, 从而区分虚拟源和虚拟接收位置.

收位置.

附录 B: 形如 (54) 式 $J_0(x)$ 的积分计算

根据, [Watson \(1966\)](#) 第 20 页的 (5) 式:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{i(n\theta-z\sin\theta)}d\theta \quad (B1)$$

其中 α 为任意角. 令 $n=0$, 有:

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-iz\sin\theta}d\theta \quad (B2)$$

令 $\theta = \pi/2 - \varphi$ 做变量代换, 有:

$$J_0(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2-2\pi-\alpha} e^{-iz\cos\varphi}d\varphi \quad (B3)$$

由于 α 为任意角, 令 $\alpha = -3\pi/2 - \beta$, 其中 β 为任意角, 代入 (B3) 式, 有:

$$J_0(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi+\beta}^{\beta} e^{-iz\cos\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{2\pi+\beta} e^{-iz\cos\varphi}d\varphi \quad (B4)$$

通过类似的变量代换或考虑到 $J_0(-z) = J_0(z)$, 可以证明:

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{2\pi+\beta} e^{\pm iz\cos\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{2\pi+\beta} e^{\pm iz\sin\varphi}d\varphi \quad (B5)$$

附录 C: 贝塞尔函数 $J_0(kr)$ 的傅里叶变换

根据 (1) 式, 自变量为 kr 的零阶贝塞尔函数的傅里叶变换为:

$$\mathcal{F}[J_0(kr)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(kr)e^{i\omega t}d\omega \quad (C1)$$

作变量代换, 令 $kr = \omega \frac{r}{c} = x$, 有 $d\omega = \frac{c}{r}dx$, (C1) 式可以写为:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[J_0(kr)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(x)e^{i\frac{c}{r}xt}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{c}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(x)e^{i(\frac{c}{r}t)x}dx \end{aligned} \quad (C2)$$

将 (61) 式代入 (C2) 式, 在 $(\frac{c}{r}t)^2 < 1$ 时, 有:

$$\mathcal{F}[J_0(kr)] = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{r} \frac{2}{\sqrt{1-(\frac{c}{r}t)^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{\sqrt{c^2 - t^2}} \quad (C3)$$

即得 (62) 式.

附录 D: (86) 式 0 阶第一类球贝塞尔函数的傅里叶逆变换

根据我们采用的傅里叶变换习惯 (1) 式, (频率域表示的) 球贝塞尔函数的傅里叶逆变换可以表示为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j_0(kr)e^{i\omega t}d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kr}{kr}e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0}}{2i\omega t_0}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{4t_0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{i\omega}e^{i\omega(t+t_0)}d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{i\omega}e^{i\omega(t-t_0)}d\omega \right] \end{aligned} \quad (D1)$$

式中, $t_0 = r/c$. 根据前述傅里叶变换习惯, 时间域中的符号函数 $\text{sgn}(t)$ 的

傅里叶变换是 $2/i\omega$, 根据傅里叶变换时移性质, 若 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$, 则 $f(t-t_0)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)e^{-i\omega t_0}$, 因此有:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j_0(kr)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{4t_0} [\text{sgn}(t+t_0) - \text{sgn}(t-t_0)] \quad (\text{D2})$$

这里 $\text{sgn}(x)$ 为符号函数, 有:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{D3})$$

它与 (30) 式定义的单位阶跃函数 $H(x)$ 的关系为:

$$\text{sgn}(x) = 2H(x) - 1 \quad (\text{D4})$$

(D4) 代入 (D2) 式可以得到 (86) 式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j_0(kr)e^{i\omega t} d\omega = \frac{c}{2r} \left[H\left(t + \frac{r}{c}\right) - H\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \quad (\text{D5})$$

附录 E: 格林函数重建的 $G + G^*$ 形式

在 3.3 和表 1 中, 我们建立了空间自相关系数 $\hat{\phi}_{ab}$ 和 $G - G^*$ 的关系, 在有些文献中 $\hat{\phi}_{ab}$ 和 $G + G^*$ 相关, 比如 Wapenaar 等 (2006, 2010), 这主要取决于我们考虑的是质点的位移还是速度 (Wapenaar and Fokkema, 2006; Snieder et al., 2007), 在时间域中, 位移格林函数 G_u 和速度格林函数 G_v 的关系为:

$$G_v = \frac{\partial}{\partial t} G_u \quad (\text{E1})$$

根据我们的傅里叶变换习惯, 在频率域中有:

$$G_v = i\omega G_u \Rightarrow G_u = \frac{1}{i\omega} G_v \quad (\text{E2})$$

将 (E2) 式代入 (95) 式、(96) 式和 (97) 式, 可以得到不同维度下, 速度格林函数和 $\hat{\phi}_{ab}$ 的关系为:

$$1\text{D}: \hat{\phi}_{ab}(x, \omega) = \cos kx = -ik \frac{1}{i\omega} [G_v(x, \omega) + G_v^*(x, \omega)] = \frac{1}{2c} \text{Re}[G_v(x, \omega)] \quad (\text{E3})$$

$$2\text{D}: \hat{\phi}_{ab}(r, \omega) = J_0(kr) = -2i \frac{1}{i\omega} [G_v(r, \omega) + G_v^*(r, \omega)] = -\frac{2}{\omega} \text{Re}[G_v(r, \omega)] \quad (\text{E4})$$

$$3\text{D}: \hat{\phi}_{ab}(r, \omega) = j_0(kr) = -\frac{2\pi i}{k} \frac{1}{i\omega} [G_v(r, \omega) + G_v^*(r, \omega)] = -\frac{4\pi}{k\omega} \text{Re}[G_v(r, \omega)] \quad (\text{E5})$$

注意, 这里我们假定速度和位移具有相同的平面波表达形式, 即具有相同的 $\hat{\phi}_{ab}$.

附录 F: 形如 (123) 式积分的计算

根据 Gradshteyn 和 Ryzhik (2007) 中第 725 页 (6.683.8) 式有:

$$\int_0^{\pi/2} J_\nu(z \sin \theta) (\sin \theta)^{\nu+1} (\cos \theta)^{-2\nu} d\theta = 2^{-\nu} \frac{z^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \sin z \quad (\text{F1})$$

式中, $-1 < \text{Re} \nu < 1/2$, $\Gamma(x)$ 为伽玛函数, 有 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, 将 $\nu = 0$ 代入上式, 有:

$$\int_0^{\pi/2} J_0(z \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin z}{z} \quad (\text{F2})$$

References

Abramowitz M, Stegun I A. 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables[M]. Massachusetts: Courier Corporation

- Aki K. 1957. Space and time spectra of stationary stochastic waves with special reference to microtremors[J]. Bulletin of the Earthquake Research Institute, 35: 415-456.
- Aki K, Richards P G. 2002. Quantitative Seismology[M]. Sausalito: University Science Books.
- Arfken G B, Weber H J. 2005. Mathematical Methods for Physicists, sixth edition[M]. Amsterdam: Elsevier Academic Press.
- Asten M. 2006. On bias and noise in passive seismic data from finite circular array data processed using SPAC methods[J]. Geophysics, 71: 153-162.
- Bateman H. 1954. Tables of Integral Transforms[M]. New York: McGraw-Hill.
- Ben-Menahem A, Singh S J. 1968. Multipolar elastic fields in a layered half space[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 58(5): 1519-1572.
- Ben-Menahem A, Singh S J. 1981. Seismic Waves and Sources[M]. New York: Seismic Waves and Sources. Springer.
- Bensen G D, Ritzwoller M H, Barmin M P, et al. 2007. Processing seismic ambient noise data to obtain reliable broad-band surface wave dispersion measurements[J]. Geophysical Journal International, 169: 1239-1260.
- Berg E M, Lin F -C, Allam A, et al. 2018. Tomography of southern California via Bayesian joint inversion of Rayleigh wave ellipticity and phase velocity from ambient noise cross-correlations[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 123(11): 9933-9949.
- Boschi L, Weemstra C, Verbeke J, et al. 2013. On measuring surface wave phase velocity from station-station cross-correlation of ambient signal[J]. Geophysical Journal International, 192: 346-358.
- Boschi L, Weemstra C. 2015. Stationary-phase integrals in the cross correlation of ambient noise[J]. Reviews of Geophysics, 53: 411-451.
- Brooks L A, Gerstoft P. 2007. Ocean acoustic interferometry[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 121: 3377.
- Buckingham M J. 2011. On the two-point cross-correlation function of anisotropic, spatially homogeneous ambient noise in the ocean and its relationship to the Green's function[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 129(6): 3562-3576.
- Campillo M, Paul A. 2003. Long-range correlations in the diffuse seismic coda[J]. Science, 299: 547.
- Chavez-Garcia F, Luzon F. 2005. On the correlation of seismic microtremors[J]. Journal of Geophysical Research, 110: B11313.
- Chavez-Garcia F, Rodriguez M, Stephenson W. 2005. An alternative approach to the SPAC analysis of microtremors: Exploiting stationarity of noise[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 95(1): 277-293.
- Chavez-Garcia F, Rodriguez M, Stephenson W. 2006. Subsoil structure using SPAC measurements along a line[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 96(2): 729-736.
- Chen X. 1999. Seismogram synthesis in multi-layered half-space Part I. Theoretical formulations[J]. Earthquake Research in China, 13(2): 149-174.
- Chen Y-T. 1974. Seismic Waves in multilayered elastic half-space(I)[J]. Chinese Journal of Geophysics, 17(1): 20-43 (in Chinese).
- Cox H. 1973. Spatial correlation in arbitrary noise fields with application to ambient sea noise[J]. Journal of the Acoustical Society of

- America*, 54(5): 1289-1301.
- Cron B F, Sherman C H. 1962. Spatial-correlation functions for various noise models[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34(11): 1732-1736.
- Cron B F, Hassell B C, Keltonic F J. 1965. Comparison of theoretical and experimental values of spatial correlation[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 37(3): 523-529.
- Debayle E, Sambridge M. 2004. Inversion of massive surface wave data sets: Model construction and resolution assessment[J]. *Journal of Geophysical Research*, 109: B02316.
- Ditmar P G, Yanovskaya T B. 1987. A generalization of the Backus-Gilbert method for estimation of lateral variations of surface wave velocity[J]. *Izvestiya-Physics of the Solid Earth*, 23(61): 470-477.
- Ekstrom G, Abers G, Webb S. 2009. Determination of surface-wave phase velocities across USArray from noise and Aki's spectral formulation[J]. *Geophysical Research Letters*, 36: L18301.
- Fang H, Yao H, Zhang H, et al. 2015. Direct inversion of surface wave dispersion for three-dimensional shallow crustal structure based on ray tracing: methodology and application[J]. *Geophysical Journal International*, 201(3): 1251-1263.
- Friederich W, Wielandt E, Stange S. 1993. Multiple forward scattering of surface waves: Comparison with an exact solution and Born single-scattering methods[J]. *Geophysical Journal International*, 112: 264-275.
- Froment B, Campillo M, Roux P, et al. 2010. Estimation of the effect of nonisotropically distributed energy on the apparent arrival time in correlations[J]. *Geophysics*, 75(5): SA85-SA93.
- Gallot T, Catheline S, Roux P, et al. 2011. Passive elastography: Shear-wave tomography from physiological-noise correlation in soft tissues[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 58(6): 1122-1126.
- Gerstoft P, Tanimoto T. 2007. A year of microseisms in southern California[J]. *Geophysical Research Letters*, 34(20): L20304.
- Gradshteyn I S, Ryzhik I M. 2007. Table of Integrals, Series, and Products[M], Elsevier Inc: Academic Press.
- Haney M M, Mikesell T D, Van Kasper W. 2012. Extension of the spatial autocorrelation (SPAC) method to mixed-component correlations of surface waves[J]. *Geophysical Journal International*, 191: 189-206.
- Haney M M, Nakahara H. 2014. Surface-wave Green's tensors in the near field[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 104(2): 1578-1586.
- Harkrider D G. 1964. Surface waves in multilayered elastic media I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(2): 627-679.
- Harmon N, Forsyth D, Webb S. 2007. Using ambient seismic noise to determine short-period phase velocities and shallow shear velocities in young oceanic lithosphere[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 97(6): 2009-2023.
- Harmon N, Gerstoft P, Rychert C, et al. 2008. Phase velocities from seismic noise using beamforming and cross correlation in Costa Rica and Nicaragua[J]. *Geophysical Research Letters*, 35: L19303.
- Harmon N, Rychert C, Gerstoft P. 2010. Distribution of noise sources for seismic interferometry[J]. *Geophysical Journal International*, 183: 1470-1484.
- Hasselmann K. 1963. A statistical analysis of the generation of microseisms[J]. *Reviews of Geophysics*, 1(2): 177-210.
- Hu S, Luo S, Yao H. 2020. The frequency-Bessel spectrograms of multicomponent cross-correlation functions from seismic ambient noise[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 125: e2020JB019630.
- Jacobsen F, Roisin T. 2000. The coherence of reverberant sound fields[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(1): 204-210.
- Jacobson M J. 1962. Space-time correlation in spherical and circular noise fields[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34(7): 971-978.
- Kastle E, Soomro R, Weemstra C, et al. 2016. Two-receiver measurements of phase velocity: cross-validation of ambient-noise and earthquake-based observations[J]. *Geophysical Journal International*, 207: 1493-1512.
- Lawrence J F, Prieto G A. 2011. Attenuation tomography of the western United States from ambient seismic noise[J]. *Journal of Geophysical Research*, 116(B6): B06302.
- Lawrence J F, Denolle M, Seats K J, et al. 2013. A numeric evaluation of attenuation from ambient noise correlation functions[J]. *Journal of Geophysical Research*, 118(12): 6134-6145.
- Lin F C, Moschetti M P, Ritzwoller M H. 2008. Surface wave tomography of the western United States from ambient seismic noise: Rayleigh and Love wave phase velocity maps[J]. *Geophysical Journal International*, 173(1): 281-298.
- Lin F C, Ritzwoller M H, Shen W. 2011. On the reliability of attenuation measurements from ambient noise cross-correlations[J]. *Geophysical Research Letters*, 38(11): L11303.
- Lin F C, Schmandt B. 2014. Upper crustal azimuthal anisotropy across the contiguous U.S. determined by Rayleigh wave ellipticity[J]. *Geophysical Research Letters*, 41(23): 8301-8307.
- Liu Q H, Lu L Y, Wang K M. 2015a. Review on the active and passive surface wave exploration method for the near surface structure[J]. *Progress in Geophysics*, 30(6): 2906-2922 (in Chinese).
- Liu X, Ben-Zion Y. 2013. Theoretical and numerical results on effects of attenuation on correlation functions of ambient seismic noise[J]. *Geophysical Journal International*, 194(3): 1966-1983.
- Liu X, Ben-Zion Y, Zigone D. 2015. Extracting seismic attenuation coefficients from cross-correlations of ambient noise at linear triplets of stations[J]. *Geophysical Journal International*, 203(2): 1149-1163.
- Lobkis O, Weaver R. 2001. On the emergence of the Green's function in the correlations of a diffuse field[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110: 3011-3017.
- Löer K, Riahi N, Saenger E H. 2018. Three-component ambient noise beamforming in the Parkfield area[J]. *Geophysical Journal International*, 213: 1478-1491.
- Longuet-Higgins M S, Jeffreys H. 1950. A theory of the origin of microseisms[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243(857): 1-35.
- Lu L, Zhang B. 2004. The analysis of dispersion curves of Rayleigh waves in frequency-wavenumber domain[J]. *Canadian Geotechnical*

- cal Journal, 41: 583-598.
- Lu L, Maupin V, Zeng R, Ding Z. 2008. Scattering of surface waves modelled by the integral equation method[J]. *Geophysical Journal International*, 174: 857-872.
- Lu L, Ding Z, Zeng R, He Z. 2011. Retrieval of Green's function and generalized optical theorem for the scattering of complete dyadic fields[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 129(4): 1935-1944.
- Lu L, Wang K, Ding Z. 2018. The effect of uneven noise source and/or station distribution on the estimation of azimuth anisotropy of surface waves[J]. *Earthquake Science*, 31(4): 175-186.
- Luo Y, Yang Y, Xu Y, et al. 2015. On the limitations of interstation distances in ambient noise tomography[J]. *Geophysical Journal International*, 201: 652-661.
- Maupin V. 2001. A multiple-scattering scheme for modelling surface wave propagation in isotropic and anisotropic three-dimensional structures[J]. *Geophysical Journal International*, 146: 332-348.
- Maupin V, Park J. 2007. Theory and Observations—Wave Propagation in Anisotropic Media. In: Dziewonski A M, Romanowicz B(ed) *Treatise on Geophysics, Vol 1: Seismology and Structure of the Earth*[M]. Elsevier, 289-321.
- Meier T, Dietrich K, Stöckhert B, Harjes H-P. 2004. One-dimensional models of shear wave velocity for the eastern Mediterranean obtained from the inversion of Rayleigh-wave phase velocities and tectonic implications[J]. *Geophysical Journal International*, 156(1): 45-58.
- Mohsen A A, Hashish E A. 1994. The fast Hankel transform[J]. *Geophysical Prospecting*, 42: 131-139.
- Montagner J P, Nataf H C. 1986. A simple method for inversion the azimuth anisotropy of surface waves[J]. *Journal of Geophysical Research*, 91(B1): 511-520.
- Morse P M, Feshbach H. 1953. *Methods of Theoretical Physics*[M]. McGraw Hill.
- Nakahara H. 2006. A systematic study of theoretical relations between spatial correlation and Green's function in one-, two- and three-dimensional random scalar wavefields[J]. *Geophysical Journal International*, 167: 1097-1105.
- Nakahara H. 2012. Formulation of the spatial autocorrelation (SPAC) method in dissipative media[J]. *Geophysical Journal International*, 190(3): 1777-1783.
- Nakata N, Gualtieri L, Fichtner A. 2019. *Sismic Ambient Noise*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Piessens R. 2000. *The Hankel Transform*[M]//Poularikas A D. *The Transforms and Applications Handbook: Second Edition*. Boca Raton: CRC Press LLC.
- Poli P, Campillo M, Pedersen H, LAPNET Working Group. 2012. Body-wave imaging of Earth's mantle discontinuities from ambient seismic noise[J]. *Science*, 38: 1063-1065.
- Prieto G A, Lawrence J F, Beroza G C. 2009. Anelastic Earth structure from the coherency of the ambient seismic field[J]. *Journal of Geophysical Research*, 114(B7): B07303.
- Prieto G A, Denolle M, Lawrence J F, et al. 2011. On amplitude information carried by the ambient seismic field[J]. *Comptes Rendus Geoscience*, 343(8): 600-614.
- Rafaely B. 2000. Spatial-temporal correlation of a diffuse sound field[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6): 3254-3258.
- Roux P, Sabra K G, Kuperman W A, et al. 2005. Ambient noise cross correlation in free space: Theoretical approach[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(1): 79-84.
- Roux P, Ben-Zion Y. 2017. Rayleigh phase velocities in southern California from beamforming short-duration ambient noise[J]. *Geophysical Journal International*, 211(1): 450-454.
- Sabra K, Winkel E, Bourgoyne D, et al. 2007. Using cross correlations of turbulent flow-induced ambient vibrations to estimate the structural impulse response. Application to structural health monitoring[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(4): 1987-1995.
- Sadeghisorkhani H, Gudmundsson Ó, Roberts R, Tryggvason A. 2017. Velocity-measurement bias of the ambient noise method due to source directivity: a case study for the Swedish National Seismic Network[J]. *Geophysical Journal International*, 209(3): 1648-1659.
- Sánchez-Sesma F, Campillo M. 2006. Retrieval of the Green's function from cross-correlation: The canonical elastic problem[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96: 1182-1191.
- Savage M K, Lin F-C, Townend J. 2013. Ambient noise cross-correlation observations of fundamental and higher-mode Rayleigh wave propagation governed by basement resonance[J]. *Geophysical Research Letters*, 40(14): 3556-3561.
- Schuster G. 2009. *Seismic Interferometry*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Slob E, Wapenaar K. 2007. Electromagnetic Green's function retrieval by cross-correlation and cross-convolution in media with losses[J]. *Geophysical Research Letters*, 34: L05307.
- Smith M L, Dahlen F A. 1973. The azimuth dependence of love and rayleigh wave propagation in a slightly anisotropic medium[J]. *Journal of Geophysical Research*, 78(17): 3321-3333.
- Snieder R. 2004. Extracting the Green's function from the correlation of coda waves: A derivation based on stationary phase[J]. *Physical Review E*, 69: 046610.
- Snieder R, afak E. 2006. Extracting the building response using seismic interferometry: Theory and application to the Millikan library in Pasadena, California[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96: 586-598.
- Snieder R, Wapenaar K, Wegler U. 2007. Unified Green's function retrieval by cross-correlation; connection with energy principles[J]. *Physical Review E*, 75: 036103.
- Snieder R, van Wijk K. 2015. *A Guided Tour of Mathematical Methods for the Physical Sciences*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Stehly L, Campillo M, Shapiro N M. 2006. A study of the seismic noise from its long-range correlation properties[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 111(B10): B10306.
- Takagi R, Nakahara H, Kono T, et al. 2014. Separating body and Rayleigh waves with cross terms of the cross-correlation tensor of ambient noise[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 119: 2005-2018.
- Tanimoto T. 2006. Excitation of normal modes by nonlinear interaction of ocean waves[J]. *Geophysical Journal International*, 168: 571-582.

- Tsai V C. 2009. On establishing the accuracy of noise tomography travel-time measurements in a realistic medium[J]. *Geophysical Journal International*, 178: 1555-1564.
- Tsai V C. 2010. The relationship between noise correlation and the Green's function in the presence of degeneracy and the absence of equipartition[J]. *Geophysical Journal International*, 182: 1509-1514.
- Tsai V C. 2010. Moschetti M P, An explicit relationship between time-domain noise correlation and spatial autocorrelation (SPAC) results[J]. *Geophysical Journal International*, 182(1): 454-460.
- Tsai V C. 2011. Understanding the amplitudes of noise correlation measurements[J]. *Journal of Geophysical Research*, 116(B9): B09311.
- van Wijk K, Mikesell T D, Schulte-Pelkum V, et al. 2011. Estimating the Rayleigh-wave impulse response between seismic stations with the cross terms of the Green tensor[J]. *Geophysical Research Letters*, 38: L18301.
- Walker S C. 2012. A model for spatial coherence from directive ambient noise in attenuating, dispersive media[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 132(1): EL15-EL21.
- Wang J, Wu G, Chen X. 2019. Frequency-Bessel transform method for effective imaging of higher-mode Rayleigh dispersion curves from ambient seismic noise data[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 124: 3708-3723.
- Wang K M, Lu L Y, Liu Q H. 2016. On the spatial correlation of seismic noise in an attenuating medium[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 59(09): 3237-3247 (in Chinese).
- Wang K M, Lu L Y, Liu Q H, et al. 2018. Review on the research of earth's attenuation based on the ambient seismic noise crosscorrelation function[J]. *Progress in Geophysics*, 33(01): 0112-0124 (in Chinese).
- Wang K, Lu L, Maupin V, et al. 2020. Surface wave tomography of northeastern tibetan plateau using beamforming of seismic noise at a dense array[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 125: e2019JB018416.
- Wapenaar K, Fokkema J. 2006. Green's function representations for seismic interferometry[J]. *Geophysics*, 71: S133.
- Wapenaar K, Slob E, Snieder R. 2006. Unified Green's function retrieval by cross correlation[J]. *Physical Review Letters*, 97: 234301.
- Wapenaar K, Slob E, Snieder R, et al. 2010. Tutorial on seismic interferometry: Part 2- Underlying theory and new advances[J]. *Geophysics*, 75(5): 75A211-75A227.
- Watson A. 1966. *Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Weaver R L, Lobkis O I. 2001. Ultrasonics without a source: Thermal fluctuation correlations at mHz frequencies[J]. *Physical Review Letters*, 87: 134301.
- Weaver R L, Froment B, Campillo M. 2009. On the correlation of non-isotropically distributed ballistic scalar diffuse waves[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 126(4): 1817-1825.
- Weaver R L. 2011. On the amplitudes of correlations and the inference of attenuations, specific intensities and site factors from ambient noise[J]. *Comptes Rendus Geoscience*, 343(8): 615-622.
- Webb S C. 2007. The Earth's 'hum' is driven by ocean waves over the continental shelves[J]. *Nature*, 445(7129): 754-756.
- Weemstra C, Boschi L, Goertz A, et al. 2013. Seismic attenuation from recordings of ambient noise[J]. *Geophysics*, 78(1): Q1-Q14.
- Weemstra C, Westra W, Snieder R, et al. 2014. On estimating attenuation from the amplitude of the spectrally whitened ambient seismic field[J]. *Geophysical Journal International*, 197(3): 1770-1788.
- Wu H L, Chen X F, Pan L. 2019. S-wave velocity imaging of the Kanto basin in Japan using the frequency-Bessel transformation method[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 62(9): 3400-3407 (in Chinese).
- Yang Y, Ritzwoller M H. 2008. Characteristics of ambient seismic noise as a source for surface wave tomography[J]. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9: Q02008.
- Yang Z T, Chen X F, Pan L, et al. 2019. Multi-channel analysis of Rayleigh waves based on the Vector Wavenumber Transformation Method (VWTM)[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 62(1): 298-305 (in Chinese).
- Yao H, Van Der Hilst R D, De Hoop M V. 2006. Surface-wave array tomography in SE Tibet from ambient seismic noise and twostation analysis, I: phase velocity maps[J]. *Geophysical Journal International*, 166: 732-744.
- Yao H, Van Der Hilst R D. 2009. Analysis of ambient noise energy distribution and phase velocity bias in ambient noise tomography, with application to SE Tibet[J]. *Geophysical Journal International*, 179: 1113-1132.
- Yao H, Gouedard P, Collins J A, et al. 2011. Structure of young East Pacific Rise lithosphere from ambient noise correlation analysis of fundamental- and higher-mode Scholte-Rayleigh waves[J]. *Comptes Rendus Geoscience*, 343: 571-583.
- Yao Z X. 1979. Generalized reflection coefficients for a layered medium and asymmetrical source[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 22(02): 181-194 (in Chinese).
- Yokoi T, Margaryan S. 2008. Consistency of the spatial autocorrelation method with seismic interferometry and its consequence[J]. *Geophysical Prospecting*, 56: 435-451.

附中文参考文献

- 陈运泰. 1974. 多层弹性半空间中的地震波 (一)[J]. *地球物理学报*, 17(1): 20-43.
- 刘庆华, 鲁来玉, 王凯明. 2015. 主动源和被动源面波浅勘方法综述 [J]. *地球物理学进展*, 30 (6): 2906-2922.
- 王凯明, 鲁来玉, 刘庆华. 2016. 由地震背景噪声提取介质衰减: 衰减介质中的空间相干表示[J]. *地球物理学报*, 59(09): 3237-3247.
- 王凯明, 鲁来玉, 刘庆华, 等. 2018. 基于地震背景噪声互相关函数研究介质衰减综述[J]. *地球物理学进展*, 33(01): 0112-0124.
- 吴华礼, 陈晓非, 潘磊. 2019. 基于频率—贝塞尔变换法的关东盆地 S 波速度成像[J]. *地球物理学报*, 62(9): 3400-3407.
- 杨振涛, 陈晓非, 潘磊等. 2019. 基于矢量波数变换法 (VWTM) 的多道 Rayleigh 波分析方法[J]. *地球物理学报*, 62(1): 298-305.
- 姚振兴. 1979. 层状介质、非轴对称震源情况下的反射法[J]. *地球物理学报*, 22(02): 181-194.