維基百科

变分法

维基百科，自由的百科全书

变分法是处理泛函的数学领域，和处理函数的普通微积分相对。譬如，这样的泛函可以通过未知函数的积分和它的导数来构造。变分法最终寻求的是极值函数：它们使得泛函取得极大或极小值。有些曲线上的经典问题采用这种形式表达：一个例子是最速降线，在重力作用下一个粒子沿着该路径可以在最短时间从点A到达不直接在它底下的一点B。在所有从A到B的曲线中必须极小化代表下降时间的表达式。

变分法的关键定理是欧拉－拉格朗日方程。它对应于泛函的临界点。在寻找函数的极大和极小值时，在一个解附近的微小变化的分析给出一阶的一个近似。它不能分辨是找到了最大值或者最小值（或者都不是）。

变分法在理论物理中非常重要：在拉格朗日力学中，以及在最小作用量原理在量子力学的应用中。变分法提供了有限元方法的数学基础，它是求解边界值问题的强力工具。它们也在材料学中研究材料平衡中大量使用。而在纯数学中的例子有，黎曼在调和函数中使用狄利克雷原理。

同样的材料可以出现在不同的标题中，例如希尔伯特空间技术，莫尔斯理论，或者辛几何。变分一词用于所有极值泛函问题。微分几何中的测地线的研究是很显然的变分性质的领域。极小曲面（肥皂泡）上也有很多研究工作，称为普拉托问题。

目录

历史

变分法可能是从约翰·伯努利（1696）提出最速曲线（brachistochrone curve）问题开始出现的。[1]它立即引起了雅各布·伯努利和洛必达（Marquis de l'Hôpital）的注意。但欧拉首先详尽的阐述了这个问题。他的贡献始于1733年，他的《变分原理》（Elementa Calculi Variationum）寄予了这门科学这个名字。欧拉对这个理论的贡献非常大。

勒让德（1786）确定了一种方法，但在对极大和极小的区别不完全令人满意。牛顿和莱布尼茨也是在早期关注这一学科，对于这两者的区别Vincenzo Brunacci（1810）、高斯（1829）、泊松（1831）、Mikhail Ostrogradsky（1834）、和雅可比（1837）都曾做出过贡献。Sarrus（1842）的由柯西（1844）浓缩和修改的是一个重要的具有一般性的成就。Strauch（1849）、Jellett（1850）、Otto Hesse（1857）、Alfred Clebsch（1858）、和Carll（1885）写了一些其他有价值的论文和研究报告，但可能那个世纪最重要的成果是Weierstrass所取得的。他关于这个理论的著名教材是划时代的，并且他可能是第一个将变分法置于一个稳固而不容置疑的基础上的。1900年希尔伯特发表的23个问题中的第20和23个问题促进了其更深远的发展。

在20世纪希尔伯特、埃米·诺特、Leonida Tonelli、昂利·勒贝格和雅克·阿达马等人做出重要贡献。Marston Morse将变分法应用在莫尔斯理论中。Lev Pontryagin、Ralph Rockafellar和Clarke广义变分法最优控制理论发展了新的数学工具。

欧拉-拉格朗日方程

在理想情形下，一函数的极大值及极小值会出现在其导数为0的地方。同样地，求解变分问题时也可以先求解相关的欧拉-拉格朗日方程。以下以寻找连接平面上两点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)最短曲线的例子，说明求解的过程。曲线的长度为

$$A[f] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

其中

$$f'(x) = \frac{df}{dx},\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2\ 。$$

函数f至少需为一阶可微的函数。若f_0是一个局部最小值，而f_1是一个在端点x_1及x_2取值为零并且至少有一阶导数的函数，则可得到以下的式子

$$A[f_0] \le A[f_0 + \epsilon f_1]$$

其中ϵ为任意接近0的数字。

因此$A[f_0 + \epsilon f_1]$对ϵ的导数（$\mathbf{A}$的一阶导数）在$\epsilon = 0$时必为0：

$$\frac{d}{d\epsilon} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f_0'(x) + \epsilon f_1'(x)]^2} dx \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{(f_0'(x) + \epsilon f_1'(x)) f_1'(x)}{\sqrt{1 + [f_0'(x) + \epsilon f_1'(x)]^2}} \right|_{\epsilon=0} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f_0'(x) f_1'(x)}{\sqrt{1 + [f_0'(x)]^2}}\, dx = 0$$

此条件可视为在可微分函数的空间中，$A[f_0]$在各方向的导数均为0。若假设f_0二阶可微（或至少弱微分存在），则利用分部积分法可得

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{f_0'(x)}{\sqrt{1 + [f_0'(x)]^2}} \right] dx = 0,$$

其中f_1为在两端点皆为0的任意二阶可微函数。这是变分法基本引理的一个特例：

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) H(x) dx = 0\ ,$$

其中f_1为在两端点皆为0的任意可微函数。

若存在$x = \hat{x}$使$H(x) > 0$，则在$\hat{x}$周围有一区间的H也是正值。可以选择f_1在此区间外为0，在此区间内为非负值，因此$I > 0$，和前提不合。若存在$x = \hat{x}$使$H(x) < 0$，也可证得类似的结果。因此可得到以下的结论：

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f_0'(x)}{\sqrt{1 + [f_0'(x)]^2}} \right] = 0\ ,$$

由结论可推得下式：

$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} = 0\ ,$$

因此两点间最短曲线为一直线。

在一般情形下，则需考虑以下的计算式

$$A[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(x, f, f') dx\ ,$$

其中f需有二阶连续的导函数。在这种情形下，拉格朗日量L在极值f_0处满足欧拉-拉格朗日方程

$$-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}+\frac{\partial L}{\partial f}=0\,,$$

不过在此处，欧拉-拉格朗日方程只是有极值的必要条件，并不是充分条件。

费马原理

费马原理指出：光会沿着两端点之间所需光程最短的路径前进。假设$y=f(x)$为光的路径，则光程可以下式表示：

$$A[f]=\int_{x=x_0}^{x_1} n(x,f(x))\sqrt{1+f'(x)^2}dx\,,$$

其中折射率$n(x,y)$依材料特性而定。

若选择$f(x)=f_0(x)+\epsilon f_1(x)$，则$A$的一阶导数（$A$对$\epsilon$的微分）为：

$$\delta A[f_0,f_1]=\int_{x=x_0}^{x_1}\left[\frac{n(x,f_0)f_0'(x)f_1'(x)}{\sqrt{1+f_0'(x)^2}}+n_y(x,f_0)f_1\sqrt{1+f_0'(x)^2}\right]dx\,,$$

将括号中的第一项用分部积分处理，可得欧拉-拉格朗日方程

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{n(x,f_0)f_0'}{\sqrt{1+f_0'^2}}\right]+n_y(x,f_0)\sqrt{1+f_0'(x)^2}=0。$$

光线的路径可由上述的积分式而得。

斯乃尔定律

当光进入或离开透镜面时，折射率会有不连续的变化。考虑

$$n(x,y)=n_- \quad \text{if} \quad x<0\,,$$
$$n(x,y)=n_+ \quad \text{if} \quad x>0\,,$$

其中n_-和n_+是常数。在$x<0$或$x>0$的区域，欧拉-拉格朗日方程均和以上描述的相同。因为折射率在二个区域均为定值，在二个区域光都以直线前进。而在$x=0$的位置，f必须连续，不过f'可以不连续。在上述二个区域用分部积分的方式解欧拉-拉格朗日方程，则其变分量为

$$\delta A[f_0,f_1]=f_1(0)\left[n_-\frac{f_0'(0_-)}{\sqrt{1+f_0'(0_-)^2}}-n_+\frac{f_0'(0_+)}{\sqrt{1+f_0'(0_+)^2}}\right]。$$

和n_-相乘的系数是入射角的正弦值，和n_+相乘的系数则是折射角的正弦值。若依照斯涅尔定律，上述二项的乘积相等，因此上述的变分量为0。因此斯涅尔定律所得的路径也就是要求光程一阶变分量为0的路径。

费马原理在三维下的形式

费马原理可以用向量的形式表示：令$X=(x_1,x_2,x_3)$，而t为其参数，$X(t)$是曲线C参数化的表示，而令$\dot{X}(t)$为其法线向量。因此在曲线上的光程长为

$$A[C]=\int_{t=t_0}^{t_1} n(X)\sqrt{\dot{X}\cdot\dot{X}}dt。$$

上述积分和t无关，因此也和C的参数表示方式无关。使曲线最短的欧拉-拉格朗日方程有以下的对称形式

$$\frac{d}{dt}P = \sqrt{\dot{X}\cdot\dot{X}}\nabla n\text{，}$$

其中

$$P = \frac{n(X)\dot{X}}{\sqrt{\dot{X}\cdot\dot{X}}}\text{。}$$

依P的定义可得下式

$$P\cdot P = n(X)^2\text{。}$$

因此上述积分可改为下式

$$A[C] = \int_{t=t_0}^{t_1} P\cdot\dot{X}\,dt\text{。}$$

依照上式，若可以找到一个函数ψ，其梯度为P，则以上的积分A就可以由在积分端点上ψ的差求得。以上求解曲线使积分量不变的问题就和ψ的level surface有关。为了要找到满足此条件的函数ψ，需要对控制光线传动的波动方程进行进一步的研究。

和波动方程的关系

应用

最优控制的理论是变分法的一个推广。

参看

- 等周不等式
- 变分原理
- 费马原理
- 最小作用量原理
- 无穷维优化
- 泛函分析
- 微扰法

参考

1. Gelfand, I. M.; Fomin, S. V. Silverman, Richard A. , 编. Calculus of variations Unabridged repr. Mineola, N.Y.: Dover Publications. 2000: 3 [2013-05-22]. ISBN 978-0486414485.（原始内容存档于2019-05-03）.

- Fomin, S.V. and Gelfand, I.M.: Calculus of Variations, Dover Publ., 2000
- Lebedev, L.P. and Cloud, M.J.: The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics, World Scientific, 2003, pages 1-98
- Charles Fox: An Introduction to the Calculus of Variations, Dover Publ., 1987
- Forsyth, A.R.: Calculus of Variations, Dover, 1960
- Sagan, Hans: Introduction to the Calculus of Variations, Dover, 1992
- Weinstock, Robert: Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering, Dover, 1974
- Clegg, J.C.: Calculus of Variations, Interscience Publishers Inc., 1968
- Elsgolc, L.E.: Calculus of Variations, Pergamon Press Ltd., 1962

外部链接

- 变分法线上影音教学 (https://www.youtube.com/user/PengTitus#grid/user/C47FEEDB6F5FB460)页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20091017222525/http://www.youtube.com/user/PengTitus#grid/user/C47FEEDB6F5FB460)，存于互联网档案馆by PengTitus
- Chapter III: Introduction to the calculus of variations (https://web.archive.org/web/20060311033849/http://www.sm.luth.se/~johanb/applmath/chap3en/index.htm) by Johan Byström, Lars-Erik Persson, and Fredrik Strömberg
- PlanetMath.org: Calculus of variations (https://web.archive.org/web/20060525200908/http://planetmath.org/encyclopedia/CalculusOfVariations.html)
- Wolfram Research's MathWorld: Calculus of Variations (http://mathworld.wolfram.com/CalculusofVariations.html)页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20060308153002/http://mathworld.wolfram.com/CalculusofVariations.html)，存于互联网档案馆
- Example problems (https://web.archive.org/web/20170609215523/http://www.exampleproblems.com/wiki/index.php/Calculus_of_Variations) in the calculus of variations

---

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=变分法&oldid=63518095”