旋转变换

绕 z 轴旋转 ϑ 角——变换矩阵推导

若空间有一点 p，则其在坐标系{i}和坐标系{j}中

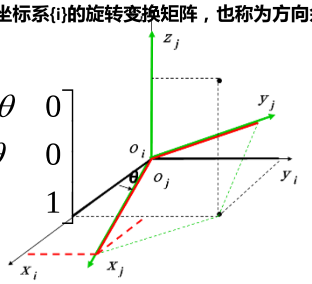
的坐标分量之间就有以下关系：

$$\begin{cases} x_i = x_j\cdot\cos\theta - y_j\cdot\sin\theta \\ y_i = x_j\cdot\sin\theta + y_j\cdot\cos\theta \\ z_i = z_j \end{cases}$$

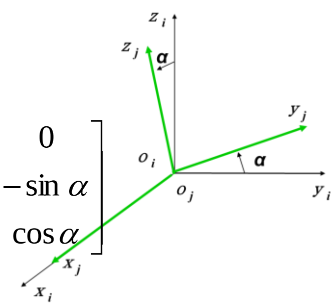
坐标旋转方程 $\vec{r}_i = \vec{p}_{ij} + R_{ij}\cdot\vec{r}_j$

$R_{ij}^{z,\theta}$ **——坐标系{j}变换到坐标系{i}的旋转变换矩阵，也称为方向余弦矩阵。**

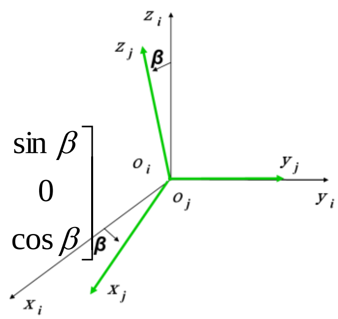
$$R_{ij}^{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_{ij}^{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



$$R_{ij}^{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{R_{ij}^{z,-\theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\cos\theta} & \boldsymbol{\sin\theta} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-\sin\theta} & \boldsymbol{\cos\theta} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

$$(R_{ij}^{z,\theta})^{-1} = (R_{ij}^{z,\theta})^T$$

先平移变换，后旋转变换 $\begin{bmatrix} \vec{r}_i \\ 1 \end{bmatrix} = M_{ij}\cdot\begin{bmatrix} \vec{r}_j \\ 1 \end{bmatrix}$

先旋转变换，后平移变换 $\vec{r}_i = R_{ij}\cdot(\vec{p}_{ij} + \vec{r}_j)$

齐次坐标 (x', y', z', k) $\quad x = \dfrac{x'}{k}, y = \dfrac{y'}{k}, z = \dfrac{z'}{k}$

D-H 矩阵

$$\vec{r}_i = R_{ij}^{z,\theta}\cdot\vec{r}_j \qquad \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{ij}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n_x} & \boldsymbol{o_x} & \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{n_y} & \boldsymbol{o_y} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{p_y} \\ \boldsymbol{n_z} & \boldsymbol{o_z} & \boldsymbol{a_z} & \boldsymbol{p_z} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R_{ij}} & \boldsymbol{\vec{p}_{ij}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

$$M_{0n} = M_{01}\cdot M_{12}\cdots M_{i-1i}\cdots M_{n-1n}$$

Ⅰ.若坐标系之间的变换是始终*相对于*原来的参考坐标系，则齐次坐标变换矩阵左乘；

Ⅱ.若坐标系之间的变换是*相对于*当前新的坐标系，则齐次坐标变换矩阵右乘。

逆变换

$$M_{ji} = M_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{ij}^T & -R_{ij}^T\cdot\vec{p}_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\vec{p}\cdot\vec{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\vec{p}\cdot\vec{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{p}\cdot\vec{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$