

二维周期多层介电材料的稳定散射矩阵公式

安德森, 迈克尔; 谢伯格, 丹尼尔

2025

文档版本：出版商的 PDF，也称为记录版本

出版物链接

已发表版本引用（APA格式）：Andersson, M., & Sjöberg, D. (2025). 二维周期多层介电材料的稳定散射矩阵公式。 (技术报告；第 TEAT-2783 卷)。

Total number of authors:

2

一般权利

除非另有特定的再使用权说明，否则适用以下一般权利：

在公共门户中可访问的出版物的版权和道德权利由作者和/或其他版权持有人保留，访问这些出版物的前提条件是用户承认并遵守与这些权利相关的法律要求。

- 用户可以从公共门户下载并打印任何出版物的一个副本，用于个人学习或研究目的。
- 您不得进一步分发该材料或将其用于任何盈利活动或商业用途
- 您可以自由分发在公共门户中标识该出版物的 URL

阅读更多关于知识共享许可证的信息：<https://creativecommons.org/licenses/>

下架政策

如果您认为此文档侵犯了版权，请联系我们并提供详细信息，我们将立即移除该作品的访问权限并调查您的申诉。

(T
E
A
T
-
7
2
8
3
)
/
1
-
2
8
/
(
2
0
2
5
)

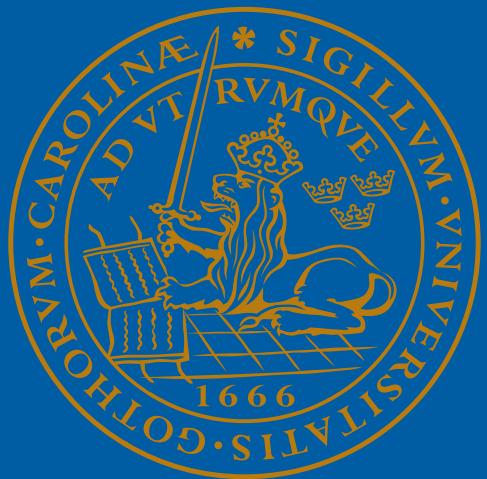
M
A
n
d
e
r
s
s
o
n
-
S
t
a
b
i
z
a
t
i
o
n
o
f
e
v
a
n
e
s
c
e
n
t

W
a
v
e
p
r
o
p
a
g
a
t
i
o
n
o
p
e
r
a
t
o
r
s

二维周期多层介电材料的稳定散射矩阵公式

迈克尔·安德森和丹尼尔·谢伯格

瑞典隆德大学电气与信息技术学院电磁理论系



Michael Andersson michael.a
andersson@eit.lth.se

瑞典隆德大学 电气与信息技术系 电磁理论 邮政信箱
118 221 00 隆德

This is an author produced preprint version as part of a technical report series from the Electromagnetic Theory group at Lund University, Sweden. Homepage <http://www.eit.lth.se> and <https://portal.research.lu.se>.

摘要

本文提出了一种适用于由折射率中低的各向异性周期光栅制成的介电材料的新型半解析傅里叶模方法，该方法适用于从传统介电三维打印材料到陶瓷材料的各种材料。所提出的方法与基于散射矩阵的经典严格耦合波分析密切相关，但一个关键区别在于，该新方案依赖于最近提出的稳定化波传播算子概念，从而在存在如渐逝波的更广泛结构下提高了数值稳定性和精度。利用Redheffer星形积的耗散特性，可以以稳定方式处理多层结构，通过级联散射矩阵，从中导出整个结构的反射和透射。对实际应用具有参考价值的数值示例以及对未来发展的重要性展示了该方法的

1 引言

随着对高性能设备需求的增长，二维周期多层介电器件在微波工程、光子学以及雷达罩封闭的传感器应用等领域变得越来越重要。准确地模拟其行为对于设计高性能器件至关重要。

依赖于电磁场的傅里叶展开以及例如介电常数和磁导率等光栅参数的数值技术通常被称为傅里叶模方法（FMM）[30]。例如，[35]中提出的严格耦合波分析（RCWA）方法是一种众所周知的FMM技术，常用于光学领域。多年来，研究人员提出了FMM和RCWA的各种改进方法，以解决特定的挑战，如收敛性和数值稳定性问题。关于这一发展的更详尽的综述可参见[30]。

本文的目标是开发和评估一种替代的FMM方法，该方法适用于分析基于一维或二维周期多层介电材料构建的功能器件。所提出的方法与基于散射矩阵的经典RCWA方法密切相关[46, 50, 58]。然而，一个关键的区别在于，这一新方案依赖于最近提出的稳定化波传播算子概念[3]，该概念增强了数值稳定性，使得可以分析更广泛类型的二维周期多层介电材料，例如存在消逝波的情况。所建议的方案可以处理由一般各向异性材料制成的表面纹理光栅，并且利用Redheffer星形乘积的耗散特性稳定地处理多层结构，从而推导出整个结构的反射和透射特性[46]。

对一般各向异性材料的适应为未来的发展和推广做准备，例如，为了将该方法应用于更复杂的光栅

几何结构。然而，本研究的主要目标是评估使用所提出的技术在具有中低折射率对比的周期性多层介质器件中的适用性，例如在微波频段内用于宽带梯度雷达罩的电气设计[43]。本文仅限于考虑替代的FMM（傅里叶模态法）公式，而未引入额外的技术，例如基于法向量法的因式分解技术或自适应空间分辨率。该限制至少对于本文考虑的数值示例而言，并未显示出严重性。文章还包括一个关于所提出方法潜在扩展的单独部分，旨在介绍在未来开发中可用于提高效率和精度的适当技术。

本文的组织结构如下：第2节详细介绍了所提出的方案，第3节讨论了潜在的扩展。在第4节中，验证了新公式的数值准确性、效率以及稳定性，并给出了若干具有实际意义和对未来发展重要的示例。最后，第5节对本文进行了总结和归纳。

2 稳定的多模态散射矩阵公式

经典的RCWA适用于周期性功能表面的分析，例如光栅，其中电磁场以及材料参数都在平面波基中展开 [31, 35, 36, 37]。所提出的方法与基于散射矩阵构建的RCWA密切相关 [46, 50, 58]。与RCWA类似，所提出的公式完全基于矢量，并且严格意义上没有对麦克斯韦方程进行任何近似。三维结构被分为若干在纵向上不变的平面层，如图1所示，并且由于傅里叶展开，麦克斯韦方程被转化为矩阵形式，以描述一维波传播的常微分方程(ODE)系统。

麦克斯韦方程在每个层中通常通过分解为弗洛凯-布洛赫模式来求解，但弗洛凯-布洛赫模式的传播受基本传播方程的推广所支配 [25, 第10章]。这种推广包括将傅里叶空间中的基本传播方程扩展为一个无限方程组。通过这种方法，基本方程的形式得以保留，从而可以更容易地利用 [3] 中报道的技术将矩阵方程重新表述为稳定的散射矩阵形式。本节详细介绍了稳定散射矩阵公式的多模形式扩展。

假设入射波为具有谐波时间依赖的单色平面波，且所有介质都是非导电且线性的，一般由完全各向异性张量描述。各向异性情况主要是为了将来的发展和推广做准备，以处理更一般的情况，例如，与边界不对齐的光栅几何情况。

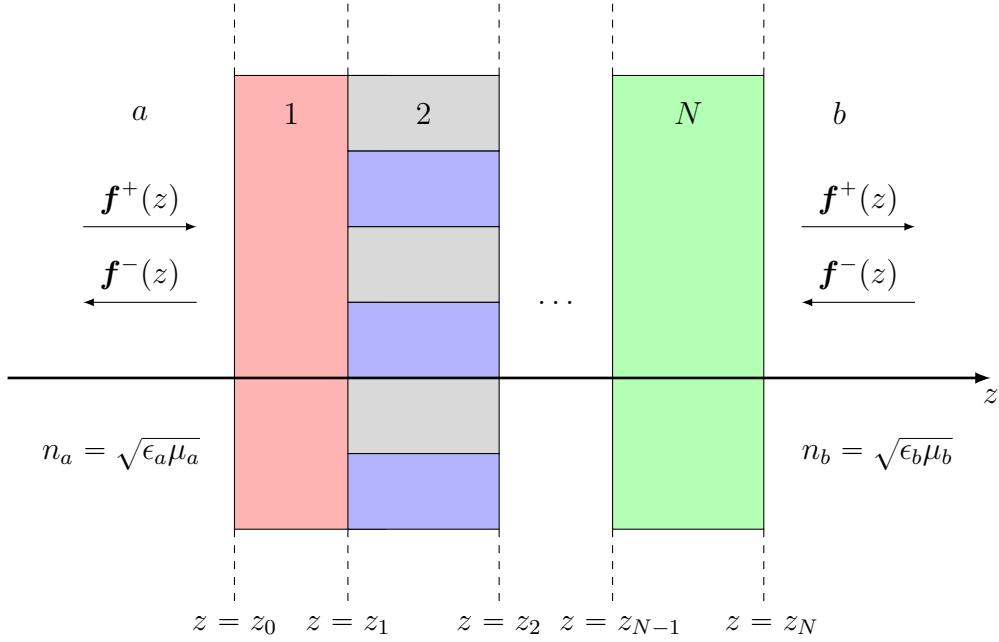


图1：表示左向和右向传播模态分裂场 \mathbf{f} 在区域 a 和 b 中的符号表示法，位于分层区域之外。区域2描绘了一个在 xy 平面上二维周期性而在纵向 z 方向上不变的平板。区域 a 和 b 中的介质是任意线性均匀各向同性介质，分别由折射率 n_a 和 n_b 表征。

参考晶胞，参见例如 [16, 21, 28]。为此，散射矩阵形式还有一个优点，即如 [46] 所指出的，其他方法可以更容易地被纳入散射矩阵的一般框架中。

2.1 散射配置

感兴趣的散射结构如图1所示，描述了一个多层器件，其以平面分层结构的形式呈现，其中一个或多个层板在 xy 平面上可以是二维周期性的，同时在纵向 z 方向上保持不变。对平面分层结构的分析不限于时间谐波平面波入射，因为场可以分解为平面波谱，例如，参见 [7, 25]。本文采用时间约定 $e^{-i\omega t}$ 。

2.2 二维周期结构与倒易基矢

许多功能表面可以通过二维周期性来描述，这里通过一个相对介电常数函数 $\epsilon(\mathbf{r})$ 来说明，假设其在 xy 平面上呈周期性，如图 1 所示，即，

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r} + p\mathbf{a}_1 + q\mathbf{a}_2) \quad (2.1)$$

\mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 是晶格向量，而 p 和 q 是整数， $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ 是位置向量。参考晶胞 Ω 由 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 在 xy 平面上生成，并在 z 方向上无限延伸。

由于参考晶胞的几何形状，展开最常以倒易单位矢量的概念进行；参见例如 [48, 第152–153页] 及其中的参考文献。倒易参考晶胞 Ω' 由倒易单位矢量所张成

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \hat{\mathbf{z}}}{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)} \quad \text{and} \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a}_1}{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)} \quad (2.2)$$

我们通常有 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$ ，其中 $\delta_{ii} = 1$ ， $\delta_{ij} = 0$ ，如果 $i \neq j$ 。在周期为 a 的最简单二次参考单元情况下，我们有 $\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\mathbf{b}_1 = (2\pi/a)\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{b}_2 = (2\pi/a)\hat{\mathbf{y}}$ 。

2.3 傅里叶展开：场与材料

类似于经典的RCWA，仅沿 x 和 y 进行傅里叶展开，而 z 变量保持不变。利用布洛赫定理 [48, 第153–154页]，我们根据空间谐波展开切向场

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \sum_{p,q} \mathbf{s}_t(p, q, z) e^{i\mathbf{k}_t(p, q) \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = \sum_{p,q} \mathbf{u}_t(p, q, z) e^{i\mathbf{k}_t(p, q) \cdot \boldsymbol{\rho}} \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{I}$ 是在 xy 平面上旋转 $\pi/2$ ， $\boldsymbol{\rho} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$ 是侧向位置向量，而 \mathbf{s}_t 和 \mathbf{u}_t 是由电场和磁场的空间谐波形成向量，并且

$$\mathbf{k}_t(p, q) = \mathbf{k}_t^{\text{inc}} + \mathbf{G}(p, q) = \mathbf{k}_t^{\text{inc}} + p\mathbf{b}_1 + q\mathbf{b}_2 \quad (2.4)$$

其中 \mathbf{b}_1 和 \mathbf{b}_2 是由 (2.2) 定义的倒易基矢。矢量 $\mathbf{k}_t^{\text{inc}}$ 定义了入射横波矢量，即入射场的线性传播相位，(2.3) 中的求和是对倒易晶格矢量 \mathbf{b}_1 和 \mathbf{b}_2 的所有整数组合进行的。横波矢量 $\mathbf{k}_t(p, q) = k_x(p, q)\hat{\mathbf{x}} + k_y(p, q)\hat{\mathbf{y}}$ 在堆叠结构的各层中都是相等的。材料的相应傅里叶展开，即相对介电常数和磁导率张量 ϵ 和 μ 是

$$\begin{cases} \epsilon(\mathbf{r}) = \sum_{p,q} e(p, q, z) e^{i\mathbf{G}(p, q) \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ \mu(\mathbf{r}) = \sum_{p,q} m(p, q, z) e^{i\mathbf{G}(p, q) \cdot \boldsymbol{\rho}} \end{cases} \quad (2.5)$$

如果所考虑的结构具有随 z 变化的电容率或磁导率分布，在实际中通常会根据阶梯式和锯齿式近似来近似材料参数，例如，见 [42]。然而，更

最近已经发表了一种处理更一般横截面形状变化的替代技术，见[60]。

模态波矢根据以下方式分解为横向和纵向部分

$$\mathbf{k}(p, q) = \mathbf{k}_t(p, q) + \hat{z}k_z(p, q) \quad (2.6)$$

其中 $p = -\infty, \dots, 2, 1, 0, 1, 2, \dots, \infty$, 以及 $q = -\infty, \dots, 2, 1, 0, 1, 2, \dots, \infty$ 。

假设入射介质为图1中所示的区域 a 。区域 a 是线性、均匀且各向同性的介质，其特征由折射率 $n_a = \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ 描述。此外，入射横波矢量分量 k_x^{inc} 和 k_y^{inc} 定义为

$$\begin{cases} k_x^{\text{inc}} = k_0 n_a \cos \phi \sin \theta \\ k_y^{\text{inc}} = k_0 n_a \sin \phi \sin \theta \end{cases} \quad (2.7)$$

其中 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 和 λ_0 是真空中的波长。因此，(2.7) 对应于整个模式集合在球坐标中由入射角 θ 和 ϕ 决定的三维倾斜。相应的纵向波数 $k_z(p, q)$ 由色散关系给出

$$k_z(p, q) = (k^2 - k_t(p, q))^2)^{1/2} = \begin{cases} k_0 \sqrt{n_a^2 - (k_t(p, q)/k_0)^2} & k > k_t \\ ik_0 \sqrt{(k_t(p, q)/k_0)^2 - n_a^2} & k < k_t \end{cases} \quad (2.8)$$

其中 $k = k_0 n_a$, $k_t(p, q) = |\mathbf{k}_t(p, q)|$ 是横向波矢的模。根据这个定义, k_z 适用于沿 $+z$ 方向传播的波, 而 $-k_z$ 适用于沿相反方向传播的波。

在数值计算中, 傅里叶展开式 (2.3) 和 (2.5) 的截断是不可避免的。为此, 模式指数 p 和 q 按照对称区间进行截断。

$$\begin{cases} p = -P, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, P \\ q = -Q, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, Q \end{cases} \quad (2.9)$$

由此得到的对称截断部分和的极限由每个维度的模式数 $M = 2P + 1$ 和 $N = 2Q + 1$ 分别定义。因此, 总的空间模式数为 $L = (4P + 2)(4Q + 2)$, 包括切向电场和磁场分量展开的所有模式 cf., (2.3)。

2.4 实空间中的时间谐波动力系统

将基本方程 [25, 第10章] 推广到傅里叶空间, 从描述实空间中切向时谐电磁场动力学的偏微分方程系统开始, 该系统由以下方程组支配

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, \omega)}{\eta_0 \mathbf{J} \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, \omega)} \right) = ik_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) \left(\frac{\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, \omega)}{\eta_0 \mathbf{J} \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, \omega)} \right) \quad (2.10)$$

哪里

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(\mathbf{r}, \omega) & \mathbf{M}_2(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{M}_3(\mathbf{r}, \omega) & \mathbf{M}_4(\mathbf{r}, \omega) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

是一个线性映射 $\mathbf{M} : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ 并且

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, \omega) = \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, \omega) \\ E_y(\mathbf{r}, \omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_0 \mathbf{J} \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, \omega) = \eta_0 \begin{pmatrix} -H_y(\mathbf{r}, \omega) \\ H_x(\mathbf{r}, \omega) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

系统 (2.10) 与基本方程 [25, 44] 具有相同的形式，只是 (2.10) 中的场量尚未关于横向坐标进行傅里叶变换。各向异性介质通常由相对介电常数和磁导率张量描述

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

并且 (2.11) 的各个区块表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i}{k_0} \begin{pmatrix} \partial_x(\epsilon_{zz}^{-1} \epsilon_{zx}) & \partial_x(\epsilon_{zz}^{-1} \epsilon_{zy}) \\ \partial_y(\epsilon_{zz}^{-1} \epsilon_{zx}) & \partial_y(\epsilon_{zz}^{-1} \epsilon_{zy}) \end{pmatrix} + \frac{i}{k_0} \begin{pmatrix} \mu_{yz}\mu_{zz}^{-1}\partial_y & -\mu_{yz}\mu_{zz}^{-1}\partial_x \\ -\mu_{xz}\mu_{zz}^{-1}\partial_y & \mu_{xz}\mu_{zz}^{-1}\partial_x \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_2(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{k_0^2} \begin{pmatrix} \partial_x(\epsilon_{zz}^{-1}\partial_x) & \partial_x(\epsilon_{zz}^{-1}\partial_y) \\ \partial_y(\epsilon_{zz}^{-1}\partial_x) & \partial_y(\epsilon_{zz}^{-1}\partial_y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{yz}\mu_{zz}^{-1}\mu_{zy} - \mu_{yy} & \mu_{yx} - \mu_{yz}\mu_{zz}^{-1}\mu_{zx} \\ \mu_{xy} - \mu_{xz}\mu_{zz}^{-1}\mu_{zy} & \mu_{xz}\mu_{zz}^{-1}\mu_{zx} - \mu_{xx} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_3(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{k_0^2} \begin{pmatrix} \partial_y(\mu_{zz}^{-1}\partial_y) & -\partial_y(\mu_{zz}^{-1}\partial_x) \\ -\partial_x(\mu_{zz}^{-1}\partial_y) & \partial_x(\mu_{zz}^{-1}\partial_x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{xz}\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz}\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{zy} - \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz}\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yx} & \epsilon_{yz}\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{zy} - \epsilon_{yy} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_4(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i}{k_0} \begin{pmatrix} \partial_y(\mu_{zz}^{-1}\mu_{zy}) & -\partial_y(\mu_{zz}^{-1}\mu_{zx}) \\ -\partial_x(\mu_{zz}^{-1}\mu_{zy}) & \partial_x(\mu_{zz}^{-1}\mu_{zx}) \end{pmatrix} + \frac{i}{k_0} \begin{pmatrix} \epsilon_{xz}\epsilon_{zz}^{-1}\partial_x & \epsilon_{xz}\epsilon_{zz}^{-1}\partial_y \\ \epsilon_{yz}\epsilon_{zz}^{-1}\partial_x & \epsilon_{yz}\epsilon_{zz}^{-1}\partial_y \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

由 (2.13) 定义的所有材料参数通常都是空间位置的函数。请注意，损耗材料由复介质量描述，即 $\epsilon_{mn} = \epsilon'_{mn} + i\epsilon''_{mn}$ 和 $\mu_{mn} = \mu'_{mn} + i\mu''_{mn}$ ，其中 $m, n = x, y, z$ 。 (2.10) 的推导基于将麦克斯韦方程组及场量分解为相对于 xy 平面的横向和纵向分量，方法类似于 [11, 第10-11页] 所述。然而，也有一种考虑各向异性情况的替代方法，例如在 [40, 第249-256页] 中有所报道。

2.5 离散傅里叶空间中的基本方程

麦克斯韦方程在每个层中通常通过将电磁场和光栅参数展开为 Floquet-Bloch 模式分别解决，参见(2.3)和(2.5)。在本文中，保持了[3]中使用的基本方程的一般形式，并通过将场和参数展开代入实空间动力系统(2.10)，将问题转换为离散傅里叶空间，即空间频率域。

在将傅里叶展开式代入 (2.10) 后, 得到表示基本方程在离散傅里叶空间中的矩阵方程的最终形式。结果是

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_t \\ \mathbf{u}_t \end{pmatrix} = ik_0 \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_t \\ \mathbf{u}_t \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

与

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{s}_t \\ \mathbf{u}_t \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_x \quad \mathbf{s}_y \quad -\mathbf{u}_y \quad \mathbf{u}_x)^T \quad (2.16)$$

其中 \mathbf{s}_t 和 \mathbf{u}_t 分别是表示切向电场和磁场振幅向量 cf. (2.3), 而块矩阵 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ 和 \mathbf{M}_4 由波矢分量和卷积矩阵组成, 这些矩阵考虑了电场和磁场振幅向量之间的耦合。在实际操作中, 无限级数 (2.3) 和 (2.5) 被截断, 这限制了空间谐波的数量, 从而限制了计算中考虑的衍射阶数。矩阵 \mathbf{M} 变为一个线性映射 $\mathbf{M} : \mathbb{C}^{2M} \times \mathbb{C}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}^{2M} \times \mathbb{C}^{2N}$, 通过根据 (2.9) 在对称区间截取模态索引 p 和 q , 其中 $M = 2P + 1, N = 2Q + 1$, 因此空间谐波的总数为 $L = (4P+2)(4Q+2)$ 。块 $\mathbf{M}_i, i = 1, \dots, 4$ 的表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}, & \mathbf{M}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14} \\ \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{24} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_3 &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} \\ \mathbf{M}_{41} & \mathbf{M}_{42} \end{pmatrix}, & \mathbf{M}_4 &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34} \\ \mathbf{M}_{43} & \mathbf{M}_{44} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

参见 (2.14)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{11} = -\mathbf{K}_x [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zx}^*] - [\mu_{yz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{M}_{12} = -\mathbf{K}_x [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zy}^*] + [\mu_{yz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{M}_{21} = -\mathbf{K}_y [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zx}^*] + [\mu_{xz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{M}_{22} = -\mathbf{K}_y [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zy}^*] - [\mu_{xz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{M}_{13} = \mathbf{K}_x [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x + [\mu_{yz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zy}^*] - [\mu_{yy}^*] \\ \mathbf{M}_{14} = \mathbf{K}_x [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y - [\mu_{yz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zx}^*] + [\mu_{yx}^*] \\ \mathbf{M}_{23} = \mathbf{K}_y [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x - [\mu_{xz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zy}^*] + [\mu_{xy}^*] \\ \mathbf{M}_{24} = \mathbf{K}_y [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y + [\mu_{xz}^*] [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zx}^*] - [\mu_{xx}^*] \\ \mathbf{M}_{31} = \mathbf{K}_y [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y + [\epsilon_{xz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zx}^*] - [\epsilon_{xx}^*] \\ \mathbf{M}_{32} = -\mathbf{K}_y [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x + [\epsilon_{xz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zy}^*] - [\epsilon_{xy}^*] \\ \mathbf{M}_{41} = -\mathbf{K}_x [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y + [\epsilon_{yz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zx}^*] - [\epsilon_{yx}^*] \\ \mathbf{M}_{42} = \mathbf{K}_x [\mu_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x + [\epsilon_{yz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} [\epsilon_{zy}^*] - [\epsilon_{yy}^*] \\ \mathbf{M}_{33} = -\mathbf{K}_y [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zy}^*] - [\epsilon_{xz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{M}_{34} = \mathbf{K}_y [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zx}^*] - [\epsilon_{xz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{M}_{43} = \mathbf{K}_x [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zy}^*] - [\epsilon_{yz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{M}_{44} = -\mathbf{K}_x [\mu_{zz}^*]^{-1} [\mu_{zx}^*] - [\epsilon_{yz}^*] [\epsilon_{zz}^*]^{-1} \mathbf{K}_y \end{array} \right. \quad (2.18)$$

在(2.18)中, 矩阵 \mathbf{K}_i , $i = x, y$ $MN \times MN$ 是缩放波矢分量的对角矩阵 $k_i(p, q)/k_0$, $i = x, y$, 而 $[\epsilon_{ij}^*]$ 和 $[\mu_{ij}^*]$, $i, j = x, y, z$ 是所有相应相对介电常数和磁导率傅里叶系数 $e_{ij}(p, q, z)$ 和 $m_{ij}(p, q, z)$ 的 $MN \times MN$ 卷积矩阵, 参见(2.5)。需要注意的是, $[\epsilon_{zz}^{-1}]$ 和 $[\mu_{zz}^{-1}]$ 已经分别根据[39, 第1777页]被替换为 $[\epsilon_{zz}^*]^{-1}$ 和 $[\mu_{zz}^*]^{-1}$ 。否则, (2.16)中M块矩阵的外观实际上类似于例如[45]和[40, 第256页]中报告的相应块的形式。针对各向异性以及双各向异性光栅的替代公式也可见于例如[16, 21, 28, 32, 38, 41, 53]。

2.6 关于收敛性和截断的一些说明

光栅内部的材料性质以及电磁场在横向方向和跨越可能的跳变不连续处进行傅里叶展开。在这些边界处, 近似的材料性质和电磁场会表现出互补的跳变, 这可能导致数值伪影和方法的收敛速度变慢。如文献[33]所示, 具有同时跳变不连续的两个函数的卷积是收敛缓慢的一个原因。在其原始公式中, FMM 对于一维和二维、低至中等折射率分布的介电结构提供了非常快速的收敛, 但由于吉布斯现象, 即不连续函数的弗洛奎效-傅里叶展开的振荡行为, 对于高折射率对比度的分布 (尤其是金属-介电结构), 收敛性较差[57]。关于FMM在金属中应用的更多说明, 参见文献[34, 第2242–2243页]及其中引用的参考文献。例如, 若干专业

此外, 第3节讨论了原始公式在更广泛适用性所需的额外技术。这些可能的扩展旨在提高在高折射率对比剖面以及更复杂几何结构下的效率和准确性。

2.7 散射矩阵下的散射谐波

在傅里叶空间中, 寻找作为基本方程 (2.15) 解的散射空间谐波。为此, 将文献 [3] 中报道的技术扩展, 以处理任意数量的空间谐波。这意味着原则上多模传播子形式被转换为相应的散射矩阵形式, 从中入射场与左右出射空间谐波相连, 即散射谐波。

2.7.1 模态波传播算子

在平面分层结构中，总的切向电场和磁场波模式在界面上都是连续的，这意味着传播算子可以扩展到多模态设置。因此，模态基本方程 (2.15) 的解形式上写为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_t(z) \\ \mathbf{u}_t(z) \end{pmatrix} = \mathbf{P}(\mathbf{k}_t, z, z_0) \begin{pmatrix} \mathbf{s}_t(z_0) \\ \mathbf{u}_t(z_0) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

其中传播算子 \mathbf{P} 是一个 $(4P \times 4Q) \times (4P \times 4Q)$ 复值矩阵，将切向电场和磁场幅值向量从 z_1 映射到 z 。

2.7.2 简单媒质中的模态波分裂

在[3]中给出的相对波阻抗算子 \mathbf{Z}_r 同样可以应用于模态环境，其中它关联在均匀线性各向同性介质中沿 $\pm z$ 方向传播的电场和磁场模态，即通过简单介质

$$\mathbf{u}_t(z) = \mp \mathbf{Z}_r(\mathbf{k}_t)^{-1} \mathbf{s}_t(z) \quad (2.20)$$

类似于在例如 [25, 44] 中使用的波分裂，总切向电场和磁场谐波 \mathbf{s}_t 和 \mathbf{u}_t 分别与沿 $\pm z$ 方向传播的前向和后向谐波集合 \mathbf{f} 相关。因此，在简单介质中，该关系由模态波分裂给出。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_t(z) \\ \mathbf{u}_t(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_r^{-1} & \mathbf{Z}_r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^+(z) \\ \mathbf{f}^-(z) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

带逆

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^+(z) \\ \mathbf{f}^-(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_r \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_t(z) \\ \mathbf{u}_t(z) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

矩阵 \mathbf{Z}_r^{-1} 和 \mathbf{Z}_r 表示为

$$\mathbf{Z}_r^{-1}(\mathbf{k}_t) = \frac{1}{\eta} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,x}^2 & \mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,x} \mathbf{K}_{t,y} \\ \mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,y} \mathbf{K}_{t,x} & \mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,y}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,y}^2 & -\mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,y} \mathbf{K}_{t,x} \\ -\mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,x} \mathbf{K}_{t,y} & \mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,x}^2 \end{pmatrix} \right] \quad (2.23)$$

和

$$\mathbf{Z}_r(\mathbf{k}_t) = \eta \left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,x}^2 & \mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,x} \mathbf{K}_{t,y} \\ \mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,y} \mathbf{K}_{t,x} & \mathbf{K}_z \mathbf{K}_{t,y}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,y}^2 & -\mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,y} \mathbf{K}_{t,x} \\ -\mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,x} \mathbf{K}_{t,y} & \mathbf{K}_z^{-1} \mathbf{K}_{t,x}^2 \end{pmatrix} \right] \quad (2.24)$$

其中 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 和 $k = k_0 n$ 分别是相对波阻抗和波数，而

$$\mathbf{K}_{t,i} = \text{diag}\left(\frac{k_{t,i}(p, q)}{|\mathbf{k}_t(p, q)|}\right), \quad i = x, y \quad (2.25)$$

以及 $\mathbf{K}_z = \text{diag}(k_z(p, q)/k)$, $\mathbf{K}_z^{-1} = \text{diag}(k/k_z(p, q))$ 。纵向波数 $k_z(p, q)$ 定义如式 (2.8) 所示。

2.7.3 多模散射矩阵形式

将公式 (2.19) 与波分裂关系 (2.21) 和 (2.22) 结合, 对于左侧的任意材料 a 和右侧的材料 b, 得到散射关系

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^+(z_N) \\ \mathbf{f}^-(z_N) \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^+(z_0) \\ \mathbf{f}^-(z_0) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

哪里

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_{r,b} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z}_{r,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_{r,a}^{-1} & \mathbf{Z}_{r,a}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

为了便于根据入射波场轻松识别向左和向右传播的散射空间谐波, 可以将关系式 (2.26) 方便地重新表述为由以下定义的散射矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^-(z_0) \\ \mathbf{f}^+(z_N) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^+(z_0) \\ \mathbf{f}^-(z_N) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

然而, 当存在衰减波时, (2.26) 并不一定在数值上稳定, 这意味着需要将 (2.28) 重新表述为一个条件良好的形式 [3]。

2.8 秒 表格多模态散射矩阵

表格

在周期性器件的散射问题中, 消逝波场通常存在, 这意味着需要一个数值稳定的公式[8, 10, 58]。文献[3]提出了一种利用传播算子的谱分解来分离指数增长和衰减项的方案, 以得到一个条件良好的公式。本节回顾了文献[3]中使用的技术, 从中得到了稳定的广义多模态散射矩阵。

2.8.1 光谱分解

基本矩阵 \mathbf{M} 具有特征向量和特征值 $\{\mathbf{v}_m, n_m\}$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_m = n_m \mathbf{v}_m \quad (2.29)$$

其中特征值 n_m 是传播模式的折射率, 其极化由特征向量 \mathbf{v}_m 给出。传播算符具有与特征值相同的特征向量和传播因子

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_m = e^{ik_0 d n_m} \mathbf{v}_m \quad (2.30)$$

其中 d 是板材的厚度, 数量 $d n_m$ 通常被称为光学厚度。

根据文献[3]中报道的技术，我们使用由 $\mathbf{u}_m^* \cdot \mathbf{P} = e^{ik_0 d n_m} \mathbf{u}_m^*$ 定义的左特征向量 \mathbf{u}_m ，而不是右特征向量 \mathbf{v}_m 。对 \mathbf{P} 进行谱分解，得到

$$\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^\dagger \quad (2.31)$$

其中 \mathbf{U} 是一个矩阵，其列为左特征向量， \dagger 表示埃尔米特转置， \mathbf{D} 是一个包含特征值的对角矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{ik_0 d n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{ik_0 d n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{ik_0 d n_n} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

关于传播算子 \mathbf{P} 的谱分解的更多细节可以参考 [25, 页 663–669]。请注意，特征向量 \mathbf{U}^\dagger 和特征值 n_m 是通过 \mathbf{M} 的特征问题 (2.29) 计算得出的，而 \mathbf{P} 从未被显式计算过。

2.8.2 条件良好的多模态散射矩阵形式

本节考虑了最近报道的无条件稳定散射矩阵公式 [3] 向多模态形式的一个直接推广。文献 [11, 第 4–5 页] 报道了一种类似技术，将传输矩阵方法重新构造成数值稳定的散射矩阵公式。

因此，通过对图 1 所示由两个均匀各向同性半空间 a 和 b 包围的结构的模态波散射关系 (2.26) 进行重新表述，得出了散射矩阵形式 (2.28)。重新表述的关系为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_{r,b}^{-1} & \mathbf{Z}_{r,b}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b^+ \\ \mathbf{f}_b^- \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_{r,a}^{-1} & \mathbf{Z}_{r,a}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^+ \\ \mathbf{f}_a^- \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$\mathbf{Z}_{r,a}^{-1}$ 和 $\mathbf{Z}_{r,b}^{-1}$ 可从 (2.23) 中得到，而 $\mathbf{f}_a^\pm = \mathbf{f}^\pm(z_1)$ 、 $\mathbf{f}_b^\pm = \mathbf{f}^\pm(z_N)$ 以及 $\mathbf{P} = \mathbf{P}(z_N, z_1)$ 已为简便而引入。

类似于 [3] 中的方法，结构两侧的模态分布字段可以用激励场 \mathbf{f}_a^+ 和 \mathbf{f}_b^- 以及散射矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^+ \\ \mathbf{f}_a^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^+ \\ \mathbf{f}_b^- \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^+ \\ \mathbf{f}_b^- \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_b^+ \\ \mathbf{f}_b^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^+ \\ \mathbf{f}_b^- \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^+ \\ \mathbf{f}_b^- \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

将这些表达式代入 (2.33) 得到一个矩阵方程

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Z}_{r,b}^{-1} \end{pmatrix} - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{r,a}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z}_{r,a}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{r,b}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

对于任意激励 \mathbf{f}_a^+ 和 \mathbf{f}_b^- 。从这个方程可以直接求解散射矩阵 \mathbf{S} ，但这只会导致如详细探讨那样的不稳定性

在 [3] 中。相反，我们使用谱分解 (2.31)，它可以分离指数增长和衰减项，从而获得良态的公式，参见 (2.32)。按照 [3, 第33–34页] 中的技术，得到的广义多模散射矩阵为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} = \left[\mathbf{D}_- \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Z}_{r,b}^{-1} \end{pmatrix} - \mathbf{D}_+ \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{r,a}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\mathbf{D}_+ \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z}_{r,a}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \mathbf{D}_- \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{r,b}^{-1} \end{pmatrix} \right] \quad (2.37)$$

其中 \mathbf{D}_- 和 \mathbf{D}_+ 是通过识别既大又小的传播因子得到的对角矩阵，这些传播因子可能对应任意数量的模态。为了清晰起见，我们假设 $|e^{ik_0 d n_m}| >$ 对于 $m < k$ 等于 1，即，

$$\mathbf{D}_- = \begin{pmatrix} e^{-ik_0 d n_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{-ik_0 d n_{k-1}} & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

和

$$\mathbf{D}_+ = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & e^{ik_0 d n_k} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & e^{ik_0 d n_n} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

因此，通过除以可能很大的指数函数，所有系数都具有有限幅度，从而得到一个条件良好的散射矩阵形式。

本节中的技术能够在所有层中以稳定且数值上稳健的方式计算散射矩阵，即使存在衰减波场时亦然。多层结构可以利用 Redheffer 星积的耗散特性，以稳定的方式处理级联散射矩阵，更多细节请参见 [3]。

2.9 反射与透射

散射矩阵的各个区块，例如 (2.37)，按定义与反射矩阵和透射矩阵对应

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

根据散射关系 (2.28), 我们用 (2.40) 表示反射和透射的分裂场。因此, 假设仅从左侧入射, 即 $\mathbf{f}^-(z_N) = \mathbf{0}$, 我们得到

$$\begin{cases} \mathbf{f}^-(z_0) = \mathbf{S}_{11}\mathbf{f}^+(z_0) \\ \mathbf{f}^+(z_N) = \mathbf{S}_{21}\mathbf{f}^+(z_0) \end{cases} \quad (2.41)$$

通过将 (2.22) 与 (2.20) 结合, 可以发现分裂场 \mathbf{f} 实际上可以与电谐波 \mathbf{s}_t 对应。结果是

$$\mathbf{f}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_t \mp \mathbf{Z}_r \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_t + \mathbf{s}_t) = \mathbf{s}_t \quad (2.42)$$

因此, (2.41) 可以根据电谐波重新写成

$$\begin{cases} \mathbf{s}_t^{\text{ref}}(z_0) = \mathbf{S}_{11}\mathbf{s}_t^{\text{inc}}(z_0) \\ \mathbf{s}_t^{\text{trn}}(z_N) = \mathbf{S}_{21}\mathbf{s}_t^{\text{inc}}(z_0) \end{cases} \quad (2.43)$$

其中 $\mathbf{s}_t^{\text{inc}}$ 表示入射电场源的空间谐波。

假设位于图1所示结构左侧的源产生一个源场, 该源场表现为沿方向 $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}(0, 0)/|\mathbf{k}(0, 0)|$ ($|\theta| < 90^\circ$) 传播的单一单色平面波, 在平面 $z = z_0$ 上的单位幅度极化为 \mathbf{E}_0 , 因此

$$\mathbf{s}_t^{\text{inc}} = \begin{pmatrix} E_{0,x} \boldsymbol{\delta}_{00,pq} \\ E_{0,y} \boldsymbol{\delta}_{00,pq} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\delta}_{00,pq} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_{00,pq} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

其中列向量 $\boldsymbol{\delta}_{00,pq}$ 的长度为 $(2P+1)(2Q+1)$, 而 $\delta_{00,pq}$ 表示克罗内克 δ 。极化向量可以根据极化角 χ ($\chi = 0$ TE 和 $\chi = \pi/2$ TM) 表示为

$$\mathbf{E}_0(z_0) = E_0(z_0)(\hat{\mathbf{e}}_\perp \cos \chi + \hat{\mathbf{e}}_\parallel \sin \chi) \quad (2.45)$$

其中 $|\mathbf{E}_0(z_0)| = 1$, $\hat{\mathbf{e}}_\perp = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}}(0, 0)$, 以及 $\hat{\mathbf{e}}_\parallel = \hat{\mathbf{k}}(0, 0) \times \hat{\mathbf{e}}_\perp$, 而 $\hat{\mathbf{k}}(0, 0) = \mathbf{k}(0, 0)/|\mathbf{k}(0, 0)|$ 与 \mathbf{k} 从 (2.6) 中得到。在法向入射的情况下, $\hat{\mathbf{z}}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}(0, 0)$ 是平行的, 然后 $\hat{\mathbf{e}}_\perp$ 被任意设为 $\hat{\mathbf{y}}$ 。应注意, 经典 RCWA 公式的扩展已经被提出, 以处理更一般的源场, 从而可以在一次计算中传播多个输入模式, 见 [7]。对于任意线性均匀各向同性介质, 左侧为 a, 右侧为 b, 参见图 1, 我们表示入射、反射和

根据传输的时间平均功率流

$$\begin{cases} \mathcal{P}_z^{\text{inc}} = \frac{1}{2\eta_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_{z,a}^{\text{inc}}}{\mu_a k_0} \right\} |\mathbf{s}^{\text{inc}}(0, 0, z_0)|^2 \\ \mathcal{P}_z^{\text{ref}} = -\frac{1}{2\eta_0} \sum_{p,q} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_{z,a}(p, q)}{\mu_a k_0} \right\} |\mathbf{s}^{\text{ref}}(p, q, z_0)|^2 \\ \mathcal{P}_z^{\text{trn}} = \frac{1}{2\eta_0} \sum_{p,q} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_{z,b}(p, q)}{\mu_b k_0} \right\} |\mathbf{s}^{\text{trn}}(p, q, z_N)|^2 \end{cases} \quad (2.46)$$

哪里

$$\mathbf{s}^{\text{inc}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x^{\text{inc}} \\ \mathbf{s}_y^{\text{inc}} \\ \mathbf{s}_z^{\text{inc}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{\text{ref}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x^{\text{ref}} \\ \mathbf{s}_y^{\text{ref}} \\ \mathbf{s}_z^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{s}^{\text{trn}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x^{\text{trn}} \\ \mathbf{s}_y^{\text{trn}} \\ \mathbf{s}_z^{\text{trn}} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

沿纵向振幅矢量分量根据以下方法计算

$$\begin{cases} \mathbf{s}_z^{\text{inc}} = -\mathbf{K}_{z,a}^{-1} (\mathbf{K}_x \mathbf{s}_x^{\text{inc}} + \mathbf{K}_y \mathbf{s}_y^{\text{inc}}) \\ \mathbf{s}_z^{\text{ref}} = \mathbf{K}_{z,a}^{-1} (\mathbf{K}_x \mathbf{s}_x^{\text{ref}} + \mathbf{K}_y \mathbf{s}_y^{\text{ref}}) \\ \mathbf{s}_z^{\text{trn}} = -\mathbf{K}_{z,b}^{-1} (\mathbf{K}_x \mathbf{s}_x^{\text{trn}} + \mathbf{K}_y \mathbf{s}_y^{\text{trn}}) \end{cases} \quad (2.48)$$

哪里

$$\mathbf{K}_{z,r} = (\mu_r \epsilon_r \mathbf{I} - \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{K}_y^2)^{1/2}, \quad r = a, b \quad (2.49)$$

假设从左侧入射，参见图1，整体反射率和透射率为($|\mathbf{s}^{\text{inc}}|^2 = 1$)

$$\begin{cases} R = \sum_{p,q} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_{z,a}(p, q)}{k_{z,a}^{\text{inc}}} \right\} |\mathbf{s}^{\text{ref}}(p, q, z_0)|^2 \\ T = \sum_{p,q} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_a k_{z,b}(p, q)}{\mu_b k_{z,a}^{\text{inc}}} \right\} |\mathbf{s}^{\text{trn}}(p, q, z_N)|^2 \end{cases} \quad (2.50)$$

哪里

$$\begin{cases} |\mathbf{s}^{\text{ref}}|^2 = |\mathbf{s}_x^{\text{ref}}|^2 + |\mathbf{s}_y^{\text{ref}}|^2 + |\mathbf{s}_z^{\text{ref}}|^2 \\ |\mathbf{s}^{\text{trn}}|^2 = |\mathbf{s}_x^{\text{trn}}|^2 + |\mathbf{s}_y^{\text{trn}}|^2 + |\mathbf{s}_z^{\text{trn}}|^2 \end{cases} \quad (2.51)$$

对于每个 p, q 。 R 和 T 的总和必须为一，以保证无损光栅，即能量守恒应得到维持。这个条件对于无损结构是必要的，但不足以确保衍射效率的准确性，[36, 第 1 074–1076 页]。

因此，总反射率和透射率，即衍射效率由 (2.50) 定义，其中求和是对所有衍射阶进行的。相应的镜面反射率和透射率分别通过在 (2.50) 中仅取零阶项 ($p = q = 0$) 来求得。一般而言， (p, q) 阶的反射和透射衍射效率由下式给出

$$\begin{aligned} \text{DE}_R(p, q) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_{z,a}(p, q)}{k_{z,a}^{\text{inc}}} \right\} |\mathbf{s}^{\text{ref}}(p, q, z_0)|^2 \\ \text{DE}_T(p, q) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_a k_{z,b}(p, q)}{\mu_b k_{z,a}^{\text{inc}}} \right\} |\mathbf{s}^{\text{trn}}(p, q, z_N)|^2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

for fixed p and q .

3 个潜在扩展

FMM 通常是一类多用途且稳健的方法，非常适合处理光栅衍射问题。不幸的是，它需要求解一个特征值问题，而在二维交叉光栅的情况下，这一过程尤其代价高昂，因为相对于一维（1D）光栅，所保留的级数是平方关系。正如引言中提到的，过去几十年中，FMM 已经引入了若干改进，重点放在收敛性和精确度的提高上 [30]。

除了稳定性问题 [27, 37] 外，准确且快速收敛的方案的关键步骤，例如在 [33, 39] 中提出的正确分解规则和快速傅里叶分解的应用，进一步发展用于二维交叉光栅 [26] 以及各向异性材料光栅 [28, 32, 41]。通过使用自适应空间分辨率 (ASR) 技术重构 FMM 也获得了改进的收敛速率，如 [17] 对一维光栅所做，并随后推广到多层次轮廓 [51] 以及二维交叉光栅 [19]。在 [14] 中提出了一种可自动生成任意形状折射率轮廓的自适应坐标 (AC) 方法。AC 和 ASR 技术能够更准确地解析参考单元中小的几何特征和/或大的折射率对比。此外，分解规则还与法向量方法相结合，以便

此外，还考虑了基于多项式和非周期基函数展开的方法，作为提高稳定性和收敛速度的替代技术，[12, 13, 24, 59]。抑制 Gibbs 现象的另一种方法是将连续场分量在傅里叶空间中类似于传统算法处理，而不连续分量则如 [5] 所建议在实空间中计算。此外，[49] 最近提出了一种替代的界面条件处理方法，以克服 Gibbs 现象的影响，这对于准确的近场计算尤为关键。

因此，这些技术是基于已被证明有用的方法的潜在扩展，例如，为了处理在光学频段具有超高对比折射率分布的光栅 [17, 18, 51, 57] 或微波频率下的金属层状光栅 [22, 23] 以及等离子体共振 [56]。然而，本文仅限于考虑另一种 FMM 表述，该方法传统上利用电磁场的傅里叶展开和光栅参数，同时基于依赖于稳定化波传播算子的散射矩阵 [3]。这一新方案适用于具有中低折射率对比的分层和周期性介电元件。

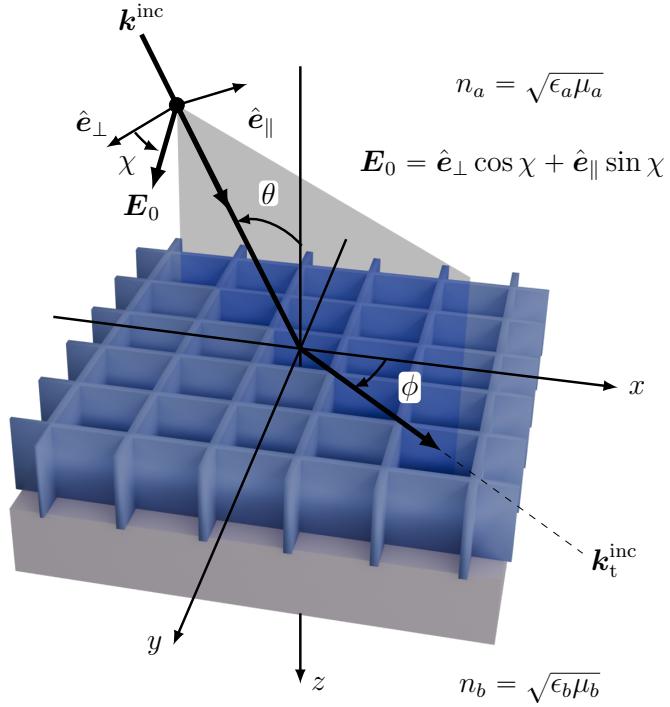


图 2：散射配置。入射平面由灰色阴影矩形表示。入射平面的法线与 \hat{e}_\perp 平行，场的偏振角为 χ 。对于 $\chi = 0$ (TE) 和 $\chi = \pi/2$ (TM)，电场和磁场分别垂直于入射平面。

4 数值例子

本节提供三个示例，用于验证和演示所提出方法的效率和准确性。如引言中所述，本文的主要关注点是由具有中等至低折射率对比的介电材料构成的周期性结构，这些结构在微波频段中具有应用兴趣，例如在宽带梯度雷达罩的电气设计中 [42]。为此，选择了具有中等和低折射率剖面的实际应用示例。最后一个示例考虑了对早前在 [16, 21, 28] 中提出的各向异性光栅进行分析的所提方法的基准测试。最后一个示例对于未来开发和推广具有重要意义，例如，为了将该方法适应于更复杂的配置。

在数值例中，如图2所示，一列线性偏振的时谐电磁平面波入射到二元介质光栅结构上。该波沿入射波矢量 $k^{\text{inc}} = k(0, 0)$ 的方向传播，见公式 (2.6)，入射角为 $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ ，方位角为 $\phi \in [0^\circ, 360^\circ]$ ，由 x 轴与入射波矢量 k^{inc} 在 xy 平面上的投影之间的夹角定义。电场矢量 E_0 与入射平面法线 \hat{e}_\perp 之间的偏振角用 χ 表示，见公式 (2.45) 及图2。

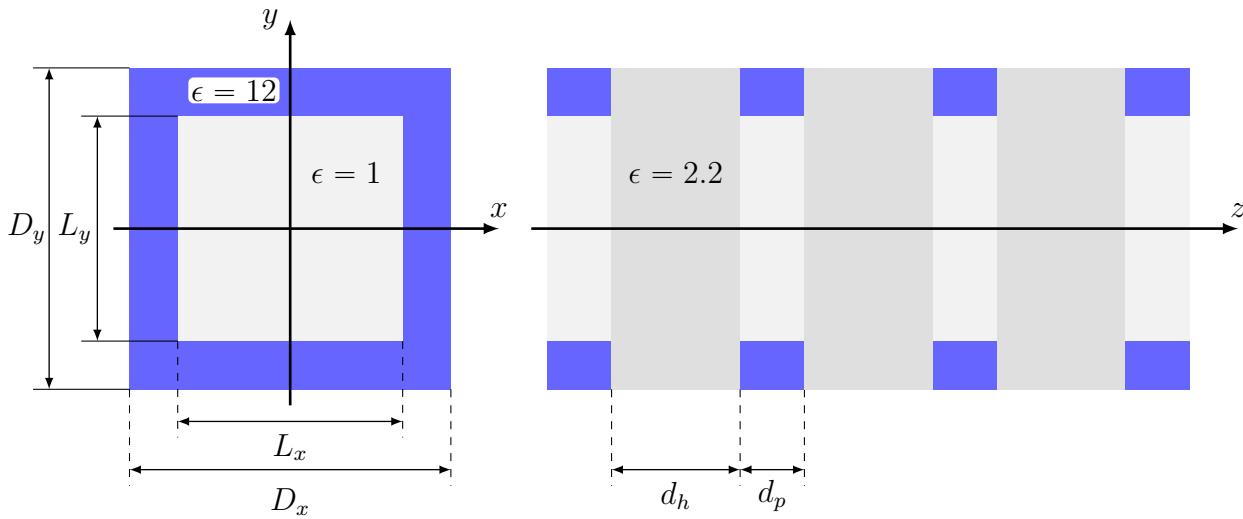


图3：七层二元光栅的几何结构 [6, 54, 55]。三个灰色阴影的板块表示厚度为 $d_h = 4$ 毫米、相对介电常数为 $\epsilon = 2.2$ 的均匀层，而其他板块表示由相对介电常数为 $\epsilon = 12$ 的材料制成、厚度为 $d_p = 2$ 毫米的二维周期层，用蓝色阴影表示。参考单元为矩形，周期为 $D_x = D_y = 10$ 毫米，中央为边长为 $L_x = L_y = 7$ 毫米的方形空气孔。

4.1 多层二元交叉光栅

所考虑的器件是一个七层无损介电二进制交叉光栅，先前在[6, 54, 55]中已有介绍。更具体地说，如图3所示的结构，由三层相同的均匀层和四层相同的二维周期光栅层组成。使用所提出的FMM公式计算的衍射效率如图4所示。结果与采用频域有限元法（FEM）的HFSS参考解吻合良好。然而，在图4中可以观察到频率响应的轻微偏移，这表明对于 $P = Q = 9$ ，解尚未完全收敛。在图5中也可以看到轻微偏差，该图展示了固定频率9.0 GHz下的收敛速度和相对误差。使用截断阶数 $P = Q = 9$ 并在MATLAB中实现的FMM公式计算时间大约比相应的HFSS FEM解快10倍。计算时间作为截断阶数的函数

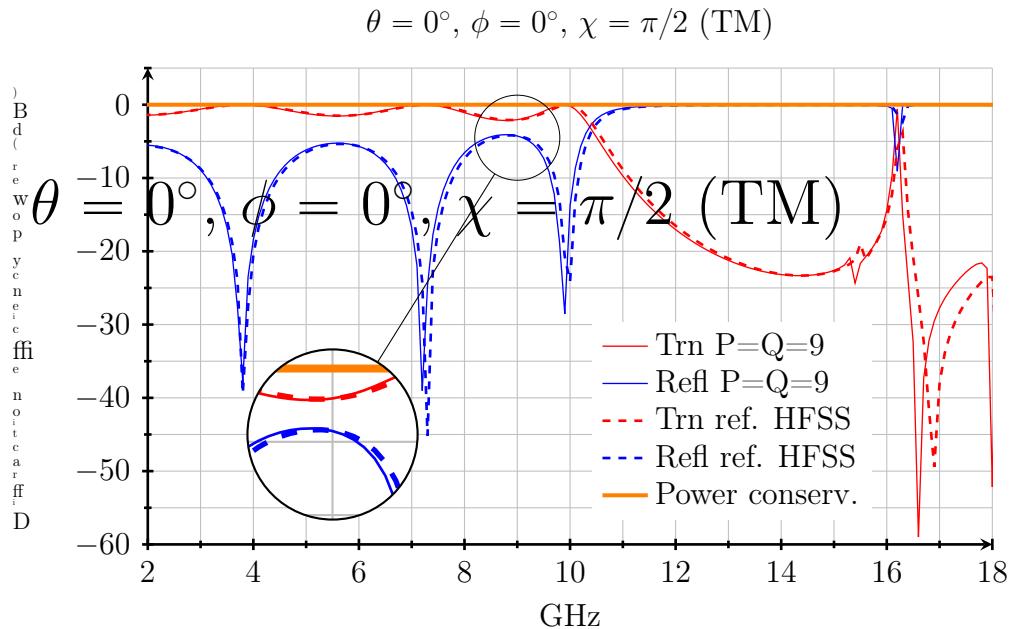


图4: 七层二元光栅的衍射效率 (2.50) [54]。入射TM偏振 ($\chi = \pi/2$) 在法向入射角下, 即 $\theta = 0^\circ$ 和 $\phi = 0^\circ$ 。

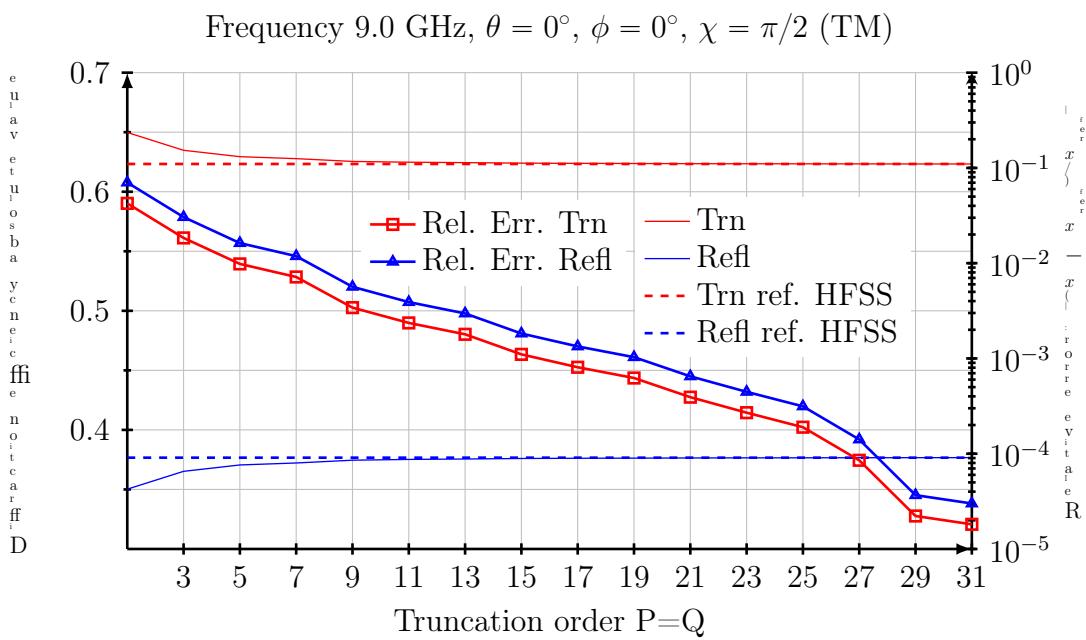


图5: 7层二元光栅在9 GHz下衍射效率 (2.50) 的收敛速率和相对误差。参考值已由Ansys HFSS计算得到。

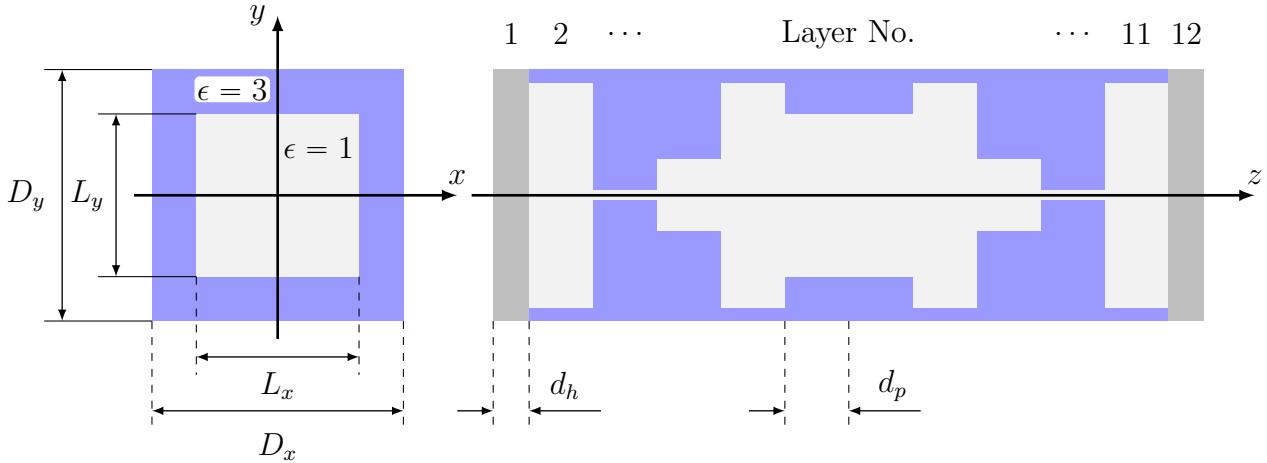


图6：梯度雷达罩的几何结构。灰色阴影层（第1层和第12层）表示具有介电常数 $\epsilon = 3.50$ 且厚度为 $d_h = 1$ 毫米的均匀层，包围内部的二维周期性层堆叠（第2层至第11层）。参考单元由介电常数为 $\epsilon = 3$ 、周期为 $D_x = D_y = 7.00$ 毫米的材料制成。单元中有边长为 $L_x = L_y$ 的充气方孔，具体尺寸见表1。二维周期层的厚度均相同，均为 $d_p = 1.78$ 毫米。

4.2 宽带梯度雷达罩

本例考虑了一种基于介电二维周期梯度结构且具有宽带特性的梯度罩 [43]。所考虑的罩设计由两层均质材料组成，包围着内部的二维周期介电二元交叉光栅层堆叠。在本例中，所有材料均假设为无损。罩的结构和设计参数如图6和表1所示。请注意，这是一个相关的数值例子，但关于优化技术以及实现方面（例如通过3D打印技术）的任何讨论都不在本文的范围内。图7显示了梯度罩的衍射效率。

如图7所示，即使在相对低阶截断（v11 5）的情况下，使用所提方法计算的结果也与参考解非常吻合。相应的收敛性能如图8所示。

从图8可以看出，TE偏振情况下传输和反射的相对误差是相同的，这是因为根据图7，在8.5 GHz时，两者的反射和传输水平都大约在5-dB（假设所有材料无损）处重合。然而，TM偏振情况下情况并非如此，反射水平大约比相应的传输数据低10 dB（参见图7），这意味着反射数据相对于相应传输数据的相对误差更大，如图8中清楚显示的那样。

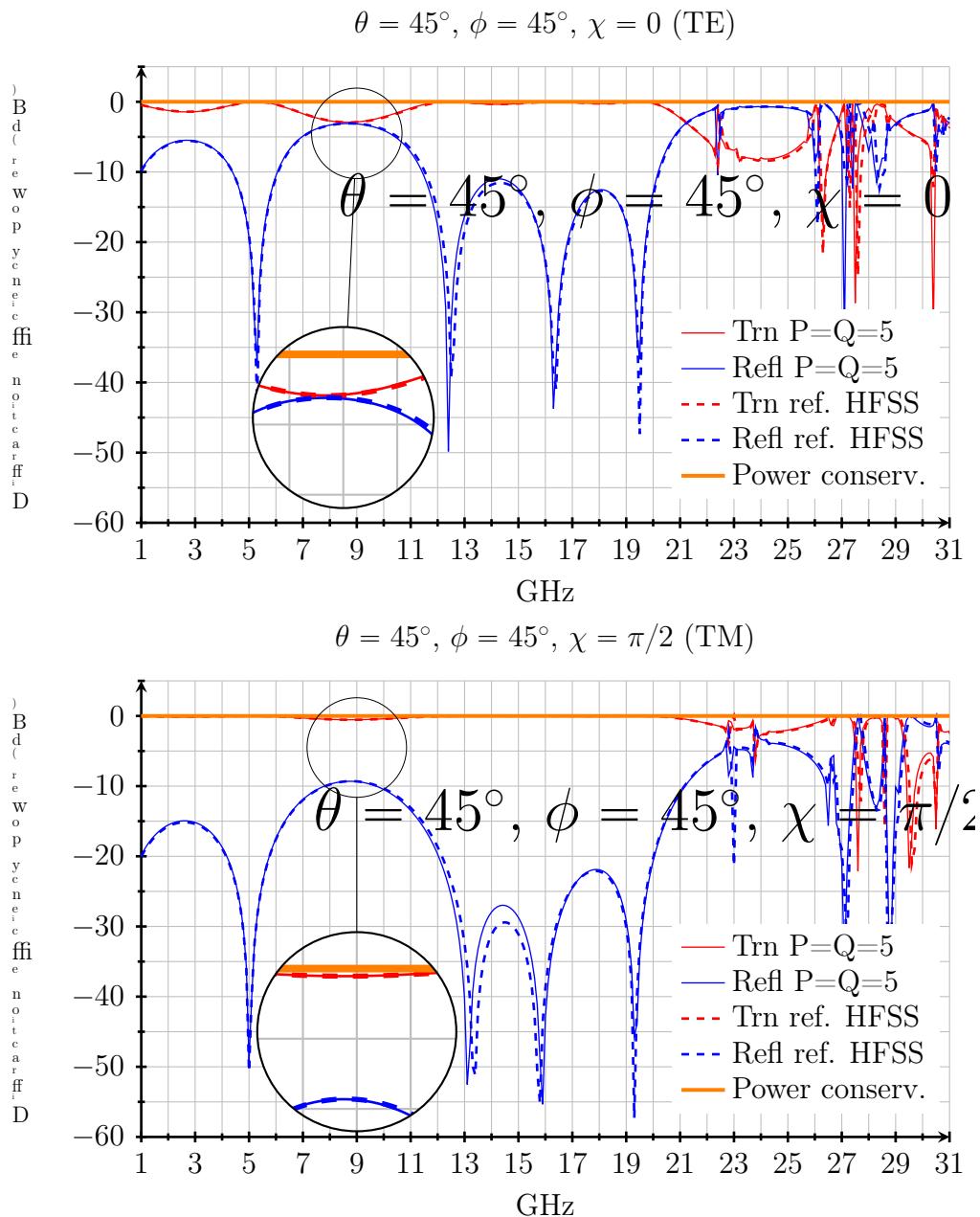


图7: 图6和表1中定义的宽带梯度罩的衍射效率 (2.50)。入射TE ($\chi = 0$) 和TM偏振 ($\chi = \pi/2$)，分别在入射角 $\theta = 45$ 和 $\phi = 45$ 时。

Layer No.	$L_x = L_y$ [mm]	Remark	Layer No.	$L_x = L_y$ [mm]	Remark
1	-	Hom.	7	4.53	2D-per.
2	6.25	2D-per.	8	6.25	2D-per.
3	0.25	2D-per.	9	2.00	2D-per.
4	2.00	2D-per.	10	0.25	2D-per.
5	6.25	2D-per.	11	6.25	2D-per.
6	4.53	2D-per.	12	-	Hom.

表1：介电方形二进制交叉光栅层的边长 $L_x = L_y$, 即第 241 层。第 1 层和第 12 层是梯度雷达罩的包围均匀层, 参见图6。

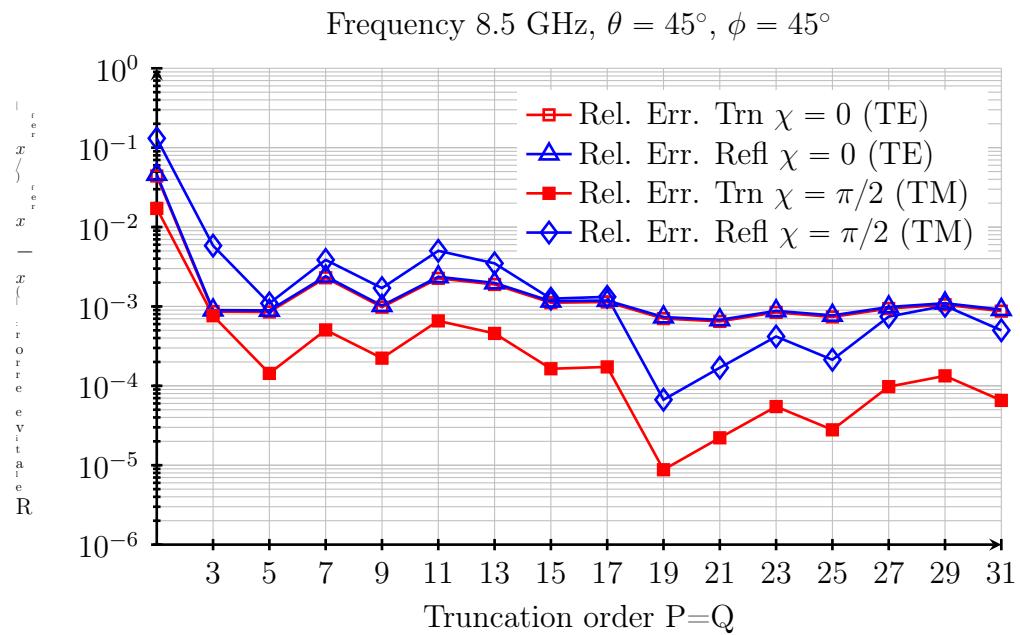


图8：梯度雷达罩在 8.5 GHz 下的衍射效率 (2.50) 相对误差。参考值由 Ansys HFS S 计算得出。

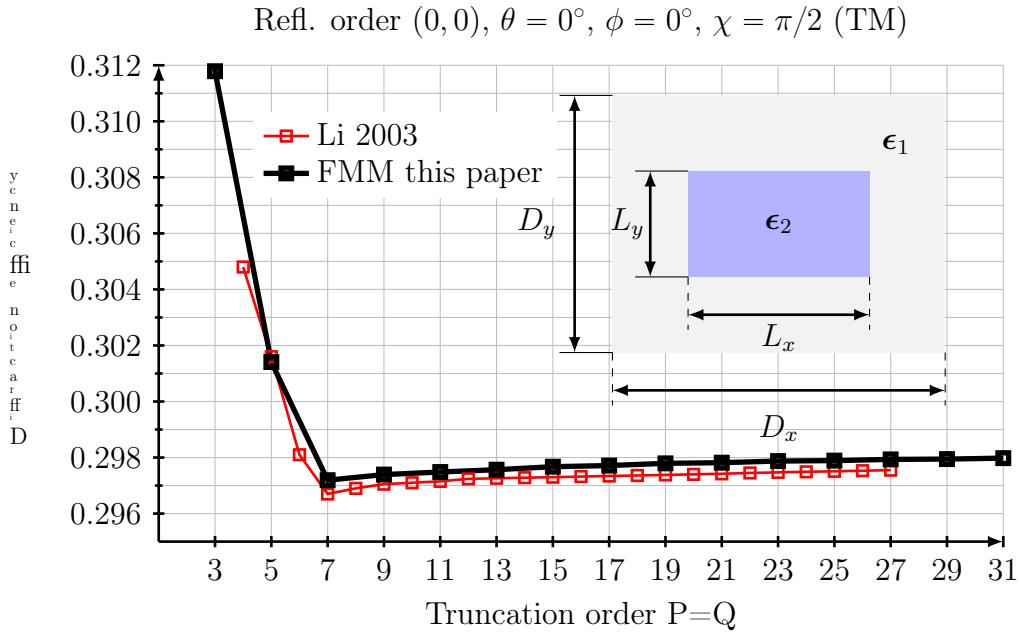


图9: 各向异性交叉光栅在式(2.52)中零级衍射效率 $DE_R(0, 0)$ 的收敛速度, 光栅参数为 $D_x = 2.4\lambda_0$ 、 $D_y = 1.4\lambda_0$ 、 $L_x/D_x = L_y/D_y = 0.5$, 厚度为 λ_0 (任意自由空间波长), 具体参见[28, 第352页]。偏振为 TM ($\chi = \pi/2$), 入射角为法向 $\theta = 0^\circ$ 和 $\phi = 0^\circ$, 即入射电场矢量沿 x 轴对齐, 参见图2。

4.3 各向异性二元交叉光栅

最后这个例子考虑了之前在[28]中报道的一个二元交叉各向异性光栅。该光栅是非磁性的, 即 $\mu = \mathbf{I}$, 并且由两个旋光各向异性介电常数张量描述, 其形式为

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 2.25 & i0.5 & 0 \\ -i0.5 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 2.25 & -i0.5 & 0 \\ i0.5 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

包围光栅的左右半无限介质分别由折射率 $n_a = 1$ 和 $n_b = 1 + i5$ 描述, 参见图1或图2。

本文提出的公式用于光栅的收敛速度结果如图9所示。图9中的数值结果与文献[28, 第352页]中报道的未使用因式分解程序计算的相应情况非常一致, 且为方便起见在图9中重现。此外, 还可参见文献[21, 第1705页]中使用投影算子方法 (这是法向向量方法的一种变体) 以及文献[16, 第656–657页]中使用改进勒让德多项式的模态谱元法 (SEM) 分析二元交叉光栅的相应结果。

5 结论

所提出的多模态公式是一种半解析的FMM方法，传统上依赖于电磁场的平面波展开以及诸如电介质常数和磁导率等光栅参数。该新方法与基于散射矩阵的经典RCWA密切相关[46]，然而一个关键区别在于，所提出的方案依赖于最近报道的稳定波传播算子概念，从而提高了数值稳定性。

新的公式能够处理各向异性光栅以及由具有中到低折射率对比的周期性多层介电材料制成的功能器件，这些材料范围从传统的介电3D打印材料到陶瓷材料。通过数值示例已经证明，即使采用相对低阶的截断，所提出方法计算的结果与有限元法(FEM)计算的相应参考解也表现出优异的一致性，相对误差足够低，可以用于各种实际应用的设计过程。虽然FEM是一种通用方法，但所提出的半解析方法在计算效率方面具有显著优势。事实上，与文献中最近报道的相关方案相比，该方法在数值效率和精度上表现出类似的性能。此外，Redheffer星积的耗散特性还意味着多层器件可以

所提出的公式非常适合作为设计工具，与 MATLAB 或类似软件支持的任何优化工具箱结合使用。另一个应用可能是创建反射和透射数据的工具，用于表征任何二维周期性介质器件，并将其作为基于高频近似的求解器的输入，这种求解器适用于分析电学上大型结构的散射特性，例如在微波领域中常见，用于雷达罩的电气设计与优化 [1, 2]。

此外，通过引入诸如正确的分解规则、自适应空间分辨率或使用多项式和非周期基函数展开等技术，有可能进一步提高收敛速度和精度。这些扩展对于处理具有超高对比度介电常数分布的光栅（例如微波频率下的金属层状光栅）至关重要。然而，这些技术尚未在本文中引入。

最后，该方法由于是针对一般的各向异性介电二维光栅提出的，并且基于支持其他方法和技术整合的散射矩阵通用框架（如文献[46]所指出的），因此为进一步的发展做好了充分准备。

致谢

本文所报道的工作得到了瑞典林雪平萨博动力公司(Saab Dynamics AB)的资助，在此表示衷心的感谢。作者还要感谢萨博动力公司(Saab Dynamics AB)的Christer Larsson博士对本文内容提供的支持和有益的讨论。

参考文献

[1] M. Andersson. “高阶散射贡献在航电罩分析中的表面积分表示”。发表于：URSI GASS 2021，意大利罗马，2021年8月28日-9月4日。URSI，2021年。 [2] M . Andersson. “航电罩应用中的平面波谱”。发表于：2019国际高级应用电磁学会议 (ICEAA) 。IEEE，2019年，第0453–0458页。 [3] M. Andersson, D. Sjöberg , 和 G. Kristensson. “消逝波传播算子的稳定化”。《电磁学研究进展 B》101 (2 023): 第17–44页。 [4] B. Ani . “用于二维和三维光子晶体能带计算的傅里叶-伽莱金方法”。博士论文，卡尔斯鲁厄理工学院 (KIT) ，2013年。 [5] R. Antos 和 M. Veis. “采用改进边界条件的耦合波方法用于衍射光栅计算”。《日本应用物理学杂志》59 (SE) (2020): SEEB02。 [6] A. Attiya 和 A. Kishk. “二维介质光栅板在倾斜激励下的模态分析”

[10] N. Cotter, T. Preist, 和 J. Sambles. “多层衍射的散射矩阵方法”。JOSA A 12 (5) (1995): 页 1097–1103。

[11] P. S. Davids. “平面周期性光子结构的傅里叶模散射的法向量方法”。《光子学与纳米结构-基础与应用》43 (2021): 第100864页。

[12] K. Edee. “基于子分段Gegenbauer多项式展开的层状光栅模态方法”。JOSA A 28 (10) (2011): 页码2006–2013。

[13] K. Edee 和 J. Plumey. “基于子区间 Gegenbauer 多项式展开的模态法数值方案：应用于双周期二元光栅”。JOSA A 32 (3) (2015): 第 402–410 页。[14] S. Essig 和 K. Busch. “自适应坐标生成及其在傅里叶模态法中的应用”。光学快报 18 (2 2) (2010): 第 23258–23274 页。[15] P. Götz, T. Schuster, K. Frenner, S. Rafler, 和 W. Osten. “用于 RCWA 的法向矢量法及自动矢量场生成”。光学快报 16 (22) (2008) : 第 17295–17301 页。[16] G. Granet. “采用改进的勒让德多项式分析二元交叉光栅的模态谱元方法”。JOSA A 40 (4) (2023): 第 652–660 页。[17] G. Granet. “通过自适应空间分辨率概念重新表述层状光栅问题”。JOSA A 16 (10) (1999): 第 251 0–2516 页。[18] G. Granet, J. Chandezon, J.-P. Plumey, 和 K. Raniriharinosy. “通过概念改写坐标变换方法”

纳尔
光栅”。JOSA A 14 (7) (1997): 第1592–1598页。

- [27] 李力. “用于分层衍射光栅建模的两种递归矩阵算法的公式化与比较” . JOSA A 13 (5) (1996): 第1024–1035页. [28] 李力. “用于任意介电常数和磁导率张量交叉各向异性光栅的傅里叶模态方法” . Journal of Optics A: Pure and Applied Optics 5 (4) (2003): 第345页. [29] 李力. “衍射光栅模态方法中矩阵截断的合理性” . Journal o f Optics A: Pure and Applied Optics 1 (4) (1999): 第531页. [30] 李力. “关于光栅理论中傅里叶模态方法的数学反思” . 收录于: 光学科学中的数学建模. SIAM, 2001, 第1 11–139页. [31] 李力. “交叉表面起伏光栅傅里叶模态方法的新公式化” . JOSA A 1 4 (10) (1997): 第2758–2767页. [32] 李力. “由各向异性材料制成的表面起伏光栅傅里叶模态方法的重新公式化” . Journal of Modern Optics 45 (7) (1998): 第1313–1334 页. [33] 李力. “傅里叶s的应用

[42] E. Popov, M. Nevière, B. Gralak 和 G. Tayeb。 “任意形状光栅的阶梯逼近有效性”。 JOSA A 19 (1) (2002): 第33–42页。 [43] S Poulsen 和 P Bergander。 用于传输和/或反射电磁信号的梯度结构。 瑞典专利 SE 544 804 C2, 2022年11月。 [44] S. Rikte, G. Kristensson 和 M. Andersson。 “双各向异性介质中的传播——反射与透射”。 IEE Proc. Microwaves, Antennas and Propagation 148 (1) (2001): 第29–36页。 [45] K. Rokushima 和 J. Yamakita。 “各向异性介电光栅分析”。 JOSA 73 (7) (1983) : 第901–908页。 [46] R. C. Rumpf。 “半解析方法散射矩阵的改进公式，与公认惯例一致”。 Progress In Electromagnetics Research B 35 (2011): 第241–261页。 [47] T. Schuster, J. Ruoff, N. Kerwien, S. Rafler 和 W. Osten。 “使用RCWA改进交叉光栅收敛性的法向矢量方法”。 JOSA A 24 (9) (2007): 第2880–2890页。 [48] D

- [57] T. Weiss, G. Granet, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev 和 H. Giessen. “傅里叶模方法中的匹配坐标和自适应空间分辨率”. 光学快报 17 (10) (2009): 第8051–8061页. [58] D. Whittaker 和 I. Culshaw. “图案化多层光子结构的散射矩阵处理”. 物理评论 B 60 (4) (1999): 第2610页. [59] W.-L. Yeh 和 Y.-P. Chiou. “对几乎无损金属光栅的圆锥衍射的稳定方法”. 光学与量子电子学 47 (2015): 第535–543页. [60] Z. Zhu 和 C. Zheng. “VarRCWA: 一种自适应高阶严格耦合波分析方法”. ACS光子学 9 (10) (2022): 第3310–3317页.