

# 基于神经算子模型加速空腔流模拟——测试报告

孟旭辉

华中科技大学数学与应用学科交叉创新研究院

## 1 问题设置

Navier-Stokes 方程是流体力学的基本控制方程，发展针对该方程的快速求解器对流体力学的研究具有重要意义。本项研究将尝试采用神经算子模型实现对典型流动问题的快速求解，考虑的具体案例为不可压缩顶盖驱动方腔流，其控制方程如下：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u},\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{u} = (u, v)$  表示  $x$ - 和  $y$ - 方向的速度;  $x, y \in [0, L]$ ;  $P$  为流体压力;  $\nu$  为动理学粘度。在该流动问题中，除了上板外，其余边界均静止不动。上板拖动速度如下：

$$u = U \left( 1 - \frac{\cosh[r(x - \frac{L}{2})]}{\cosh(\frac{rL}{2})} \right), \quad v = 0,$$

其中  $U, r$  及  $L$  均为常数，且  $r = 10, L = 1$  表示方腔长度。

在该问题中，我们采用格子 Boltzmann 方法 (lattice Boltzmann method, LBM) [1] 生成了 100 个不同雷诺数 ( $Re = UL/\nu$ ) 时对应的流场，具体为  $Re \in [20, 2080]$ ，步长为 20，并以此为训练数据。随后我们在  $Re \in [100, 2080]$  范围内随机生成 10 个与训练数据不同的  $Re$ ，以此作为测试数据检验神经算子模型的精度与计算效率。**指南要求在计算精度相当时，相比于 LBM，神经算子模型计算效率提升达到 150% 以上。**

## 2 DeepONet 简介

在本次研究中，我们采用的神经算子模型为 Deep Operator Networks (DeepONet) [2]，其示意图如 1 所示。其中，DeepONet 由两个子网络组成，即 Branch 网络 (BN) 和 Trunk 网络 (TN)。其中，BN 的输入是由一系列在固定坐标处函数值  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  表示的函数，其输出为如下向量:  $[b_1, b_2, \dots, b_p]$ 。此外，TN 以  $\mathbf{x}$  为输入，输出为如下向量:  $[t_1, t_2, \dots, t_p]$ ；DeepONet 的输出为此两向量的点积，即  $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^p b_j t_j$ 。理论结果表明，该模型能近似任意非线性算子。

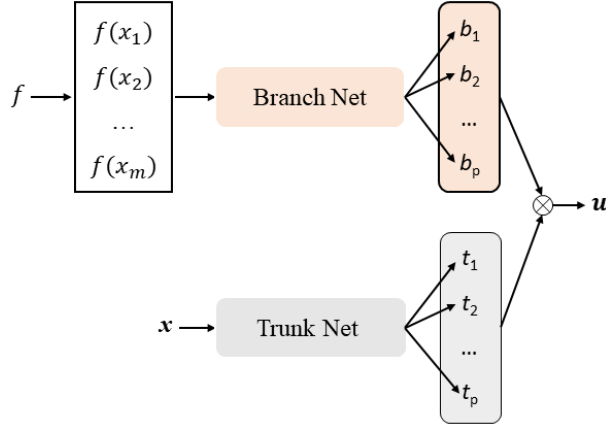


Figure 1: DeepONet 示意图。

在该研究中, 我们采用 DeepONet 近似空腔流中的上板边界条件到整个计算区域内流场的算子。具体而言, 我们采用 100 个不同  $Re$  下的边界条件作为 DeepONet 的输入, 整个计算区域内流场速度为输出。在训练完成后, 我们将测试数据集的边界条件作为输入, 预测测试数据中不同  $Re$  对应的流场。最后, 我们将采用 LBM 的计算结果验证 DeepONet 预测结果的准确性, 并比较两种方法的计算精度。

### 3 结果分析

我们首先采用 LBM 计算得到训练及测试数据, 在计算中采用  $256 \times 256$  的均匀网格。在 DeepONet 的训练和预测中, 为减少存储量, 我们从  $256 \times 256$  的网格中均匀选取  $64 \times 64$  的流场进行计算。其中, LBM 模拟和 DeepONet 的训练与预测均在以下硬件进行, CPU 型号: Intel (R) Xeon (R) Gold 6133 CPU @ 2.50GHZ (双核 40 线程)。DeepONet 的训练耗时约为 95 秒, 训练完成后预测 10 组不同  $Re$  对应的流场约为 0.03 秒; 而 LBM 计算测试数据集上 10 组  $Re$  耗时大于 3200 秒。此外, DeepONet 和 LBM 模拟在测试数据集上相对  $L_2$  误差约为 0.33%。

## References

- [1] Liang Wang, Jianchun Mi, Xuhui Meng, and Zhaoli Guo. A localized mass-conserving lattice boltzmann approach for non-newtonian fluid flows. *Communications in Computational Physics*, 17(4):908–924, 2015.
- [2] Lu Lu, Pengzhan Jin, Guofei Pang, Zhongqiang Zhang, and George Em Karniadakis. Learning nonlinear operators via deeponet based on the universal approximation theorem of operators. *Nature machine intelligence*, 3(3):218–229, 2021.