BURGERS 方程的守恒型格式求解

廖钰蕾

数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所
电子邮箱: liaoyulei19@mails.ucas.ac.cn

1. 问题描述

对下述 Burgers 方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad x \in [-1,1], \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x + \pi), \\ \text{periodic } B.C. \text{ for } x, \end{cases} \tag{1.1}$$

使用不同的守恒型格式求解. 包括 Lax-Friedrichs, Roe(迎风), Engquist-Osher 格式, Godunov 格式, 和 Lax-Wendroff 格式.

- 计算各个格式在 $t = 0.15$ 时的误差和收敛阶.
- 画出 $t = 0.5$ 时的精确解和数值解对比图.

2. 关键算法和格式

2.1. 精确解求解方法.

利用特征线可以计算守恒律方程的精确解. Burgers 方程 (1.1)的特征线如图 1所示.

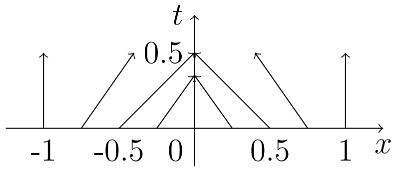

图 1. Burger 方程 1.1的特征线

时间: 2019 年 11 月 30 日.

命题 2.1. *Burgers 方程 (1.1)仅在 $x = 0$ 处出现激波, 无稀疏波.*

证明. 考虑过点 $(x_0, 0)$ 的特征线 $x = x_0 - \sin(\pi x_0)t$ 与 $x = 0$ 交于 $t = x_0/\sin(\pi x_0)$ 处. 令

$$f(x_0) := \frac{x_0}{\sin(\pi x_0)}, \quad x_0 \in [-1, 1],$$

求导得

$$f'(x_0) = \frac{\sin(\pi x_0) - \pi x_0 \cos(\pi x_0)}{\sin^2(\pi x_0)}.$$

令

$$g(x_0) := \sin(\pi x_0) - \pi x_0 \cos(\pi x_0),$$

求导得

$$g'(x_0) = \pi^2 x_0 \sin(\pi x_0) \geq 0, \quad x_0 \in [-1, 1].$$

由 $g(0) = 0$ 知, $f(x_0)$ 在 $x_0 \in (-1, 0)$ 单调递减, 在 $x_0 \in (0, 1)$ 单调递增. 故特征线仅在 $x_0 = 0$ 处相交. □

若点 (x, t) 处精确解为 u, 则过该点的特征线 $x' = x + u(t' - t)$ 交 $t_0 = 0$ 于点 $x_0 = x - ut$ 处, 且在 $(x_0, 0)$ 处的精确解 $u_0(x - ut) = -\sin(\pi(x - ut))$. 故点 (x, t) 处精确解 u 满足方程

$$f(u) := u + \sin(\pi(x - ut)) = 0.$$

我们采用 Newton 迭代法计算点 (x, t) 处精确解 u, 迭代初值设为 $-\mathrm{sgn}(x)$, 其中 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 具体过程见算法 1.

算法 1 计算精确解算法

输入: 空间坐标 $x[1:n]$, 时间坐标 t, 精度 tgv.
输出: 精确解 $u[1:n]$.

```
function ExSolu(x, t, tgv)
    设置初值 u ← −sgn(x)
    待求 f(u) ← u + sin(π(x − ut)) 的零点
    while ‖ f(u) ‖∞ > tgv do
        进行一次 Newton 迭代 u ← u − f(u)/f′(u)
        f(u) ← u + sin(π(x − ut))
    end while
    return u
end function
```

2.2. 数值解计算格式.

我们采用守恒型格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}\right)$$

计算数值解. 对于不同的守恒型格式, 通量 $\hat{f}_{j+1/2}$ 不同.

Burgers 方程 (1.1)不含 $x = \pm 1$ 的边值条件. 由于 $t = 0$ 的初值条件是周期的, 当网格划分均匀时, 每个时间层计算的数值解也是周期的, 即 $u[n] = u[1], u[n+1] = u[2], \ldots$. 可由此计算边界的数值解, 具体算法如 2, 其中 $\hat{f}_{j+1/2}$ 为上述通量.

算法 2 计算数值解算法

输入: 初值 $u_0[1:n]$, 空间坐标 $x[1:n]$, 空间间隔 dx, 时间间隔 dt, 时间层 nt, 通量函数 $\hat{f}_{j+1/2}(u)$.

输出: 数值解 $u[1:n]$.

```
function NuSolu(u_0, x, dx, dt, nt)
    由周期性扩展初值 u ← [u_0, u_0[2]]
    for it = 1 : nt do
        hatf[j] ← f̂_{j+1/2}(u),    j = 1, ..., n
        u[2 : n] ← u[2 : n] − dt/dx ∗ (hatf[2 : n] − hatf[1 : n − 1])
        u[1] ← u[n]
        u[n + 1] ← u[2]
    end for
    return u
end function
```

Burgers 方程 (1.1)中 $f(u) = u^2/2$, 对应的不同格式通量如下:

- Lax-Friedrichs:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_j^2 + \frac{1}{2}u_{j+1}^2 - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(u_{j+1} - u_j\right)\right).$$

- Roe:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \begin{cases} u_j^2/2, & u_j + u_{j+1} \geq 0, \\ u_{j+1}^2/2, & u_j + u_{j+1} < 0. \end{cases}$$

- Engquist-Osher:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\max(u_j, 0)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\min(u_{j+1}, 0)\right)^2.$$

- Godunov:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \min(u_j^2, u_{j+1}^2)/2, & u_j < u_{j+1} \text{ 且} u_j u_{j+1} > 0, \\ \max(u_j^2, u_{j+1}^2)/2, & u_j \geq u_{j+1}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

- Lax-Wendroff:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(u_j^2 + u_{j+1}^2) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(u_j + u_{j+1}\right)\left(u_{j+1}^2 - u_j^2\right)\right).$$

3. 数值实验

我们的实验使用 GNU Octave v5.1.0 [1]实现, 运行系统为 Windows10-x64.

守恒型格式的稳定性必要条件为 $(\Delta t/\Delta x)\max_u |f'(u)| \leq 1$, 其中 Burgers 方程 (1.1)的 $f(u) = u^2/2$. 由于 $\max_u |f'(u)| = 1$, 实验中我们取 $\Delta t/\Delta x = 1$. 计算精确解 u 时, Newton 迭代法的终止条件为 $\| f(u) \|_\infty \leq$ 1e-10.

3.1. 第一个数值实验.

我们计算 $t = 0.15$ 时上述五种守恒型格式的误差和收敛阶, 实验结果见表 1, 其中表头为网格细度 $\Delta t = \Delta x$ 的值. 可以看出 Lax-Friedrichs, Roe, Engquist-Osher, Godunov 的收敛阶为 1, 其中 Lax-Friedrichs 解的精度更低, 验证了其相比迎风格式有更大耗散性的特点. Lax-Wendroff 的收敛阶为 2, 解有更高的精度.

3.2. 第二个数值实验.

我们绘制了 $t = 0.5$ 时精确解和上述五种守恒型格式数值解对比图如下, 其中网格细度 $\Delta t = \Delta x = 1/256$. 可以看出 Lax-Friedrichs, Roe, Engquist-Osher, Godunov 保持总变差不增, 符合单调格式的特点. Lax-Wendroff 格式精度与收敛阶更高, 但在间断附近会产生震荡.

[1] `https://www.gnu.org/software/octave/doc/v5.1.0/`

表 1. $t = 0.15$ 时的误差和收敛阶, 表头为 $\Delta t = \Delta x$ 的值

1/40	1/80	1/160	1/320	1/640	1/1280
Lax-Friedrichs					
2.450e-2	1.249e-2	6.317e-3	3.177e-3	1.594e-3	7.982e-4
rate	0.97	0.98	0.99	1.00	1.00
Roe					
9.130e-3	5.002e-3	2.634e-3	1.354e-3	6.865e-4	3.457e-4
rate	0.87	0.93	0.96	0.98	0.99
Engquist-Osher					
9.130e-3	5.002e-3	2.634e-3	1.354e-3	6.865e-4	3.457e-4
rate	0.87	0.93	0.96	0.98	0.99
Godunov					
9.130e-3	5.002e-3	2.634e-3	1.354e-3	6.865e-4	3.457e-4
rate	0.87	0.93	0.96	0.98	0.99
Lax-Wendroff					
1.519e-3	3.904e-4	9.858e-5	2.477e-5	6.204e-6	1.553e-6
rate	1.96	1.99	1.99	2.00	2.00

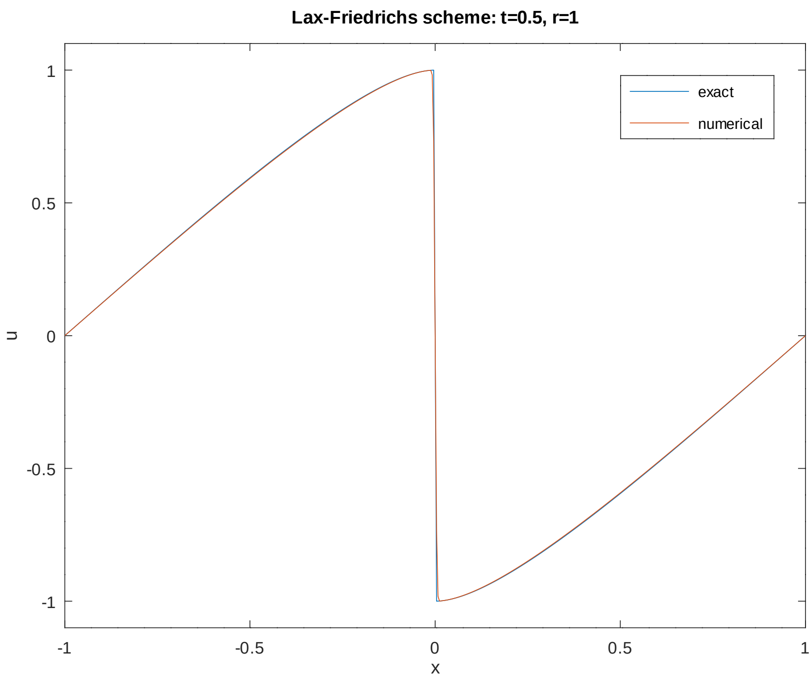

图 2. $t = 0.5$ 时 Lax-Friedrichs 格式对比图

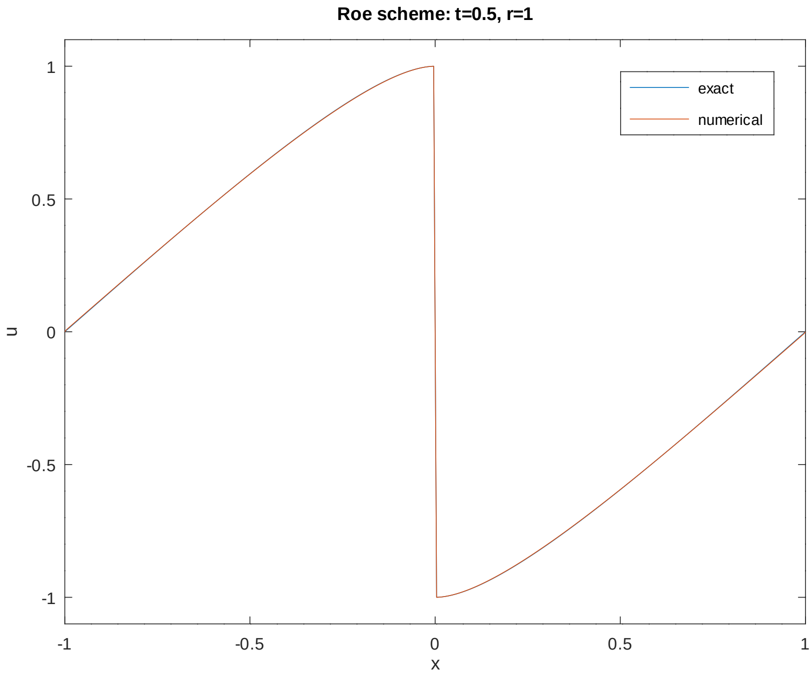

图 3. $t = 0.5$ 时 Roe 格式对比图

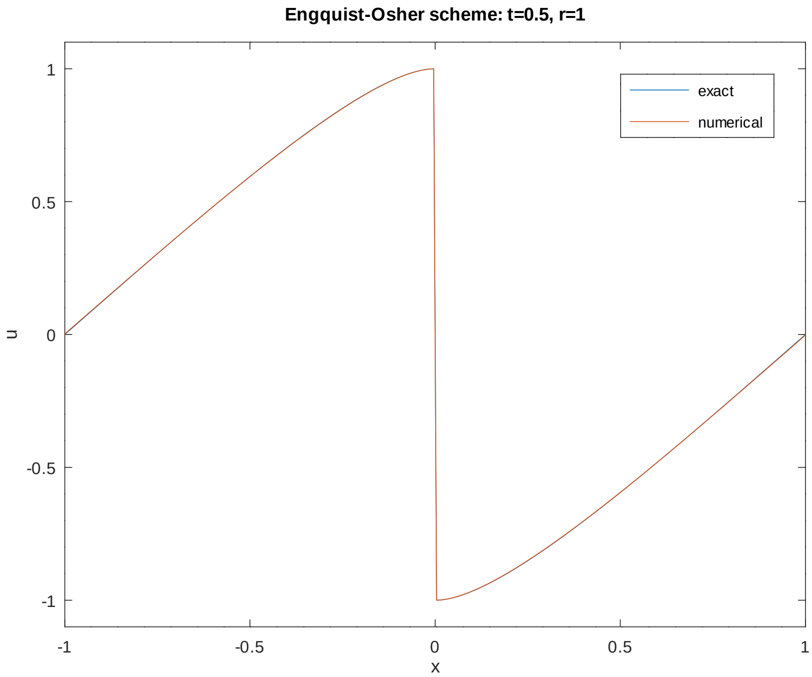

图 4. $t = 0.5$ 时 Engquist-Osher 格式对比图

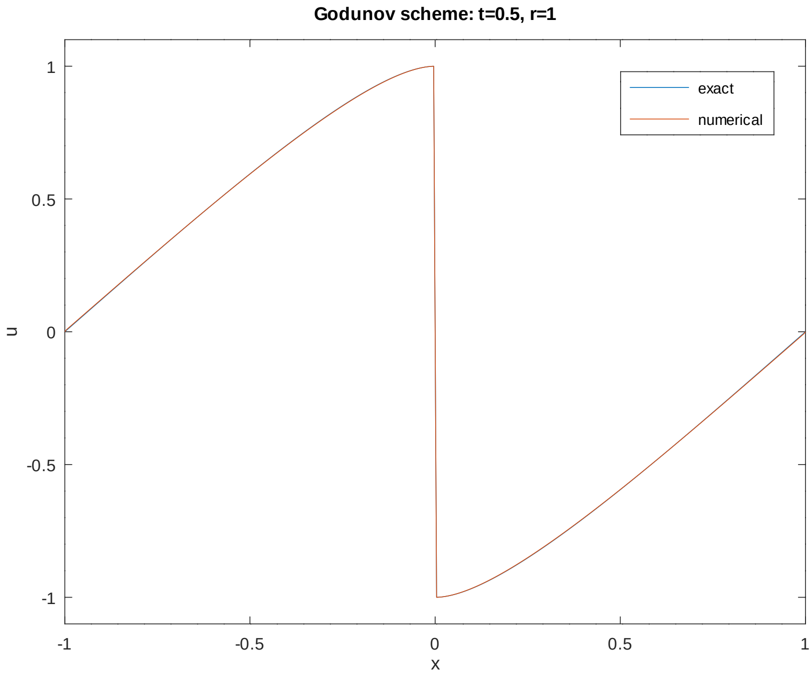

图 5. $t = 0.5$ 时 Godunov 格式对比图

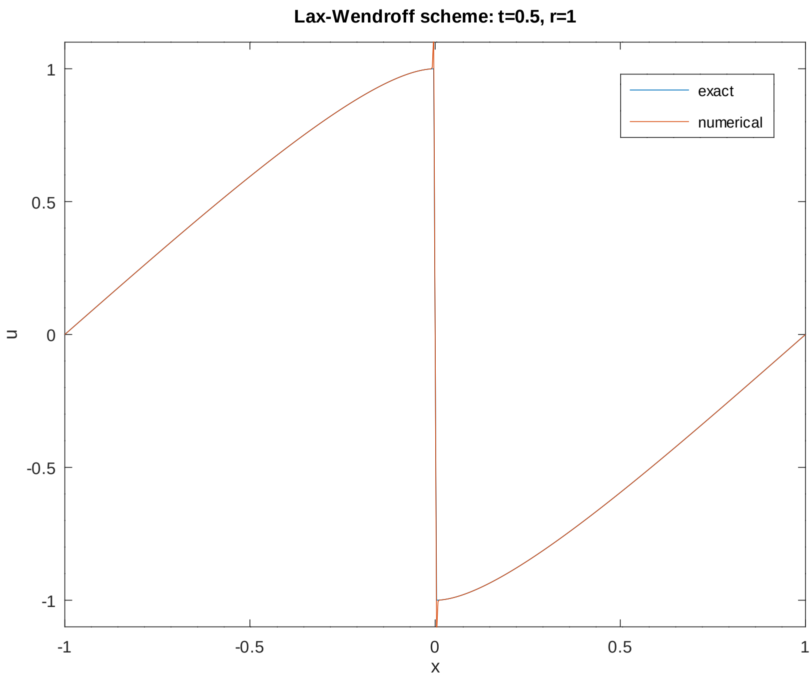

图 6. $t = 0.5$ 时 Lax-Wendroff 格式对比图