

BURGERS 方程的 TVD 格式求解

廖钰蕾

数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所

电子邮箱: liaoyulei19@mails.ucas.ac.cn

1. 问题描述

对无粘的 Burgers 方程的

$$u_t + (u^2/2)_x = 0,$$

考虑两种初值:

(1) 光滑初值 $u_1(x) = \sin(\pi x), x \in [0, 2]$, 周期边界条件.

(2) 间断初值:

$$u_2(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -0.5, & x > 0. \end{cases}$$

分别使用

- (1) Lax-Friedrichs 格式,
- (2) Godunov 格式,
- (3) 无 $f'(u) \geq 0$ 条件假设的 MUSCL 格式,
- (4) Kurganov-Tadmor 格式 (推广的 MUSCL 格式)

求解.

- (1) 计算各个格式分别对光滑解和间断解的 L^1 收敛阶数.
- (2) 对于解出现间断的情况, 选一个合适的网格大小和迭代终止时刻, 将精确解和数值解画在同一个图中进行直观比较.

时间: 2019 年 12 月 11 日.

2. 关键算法和格式

2.1. 第一种初值精确求解方法.

利用特征线可以计算 Burgers 方程的精确解. 第一种初值问题的解仅在 $x = 1$ 处出现激波, 无稀疏波, 特征线如图 1 所示.

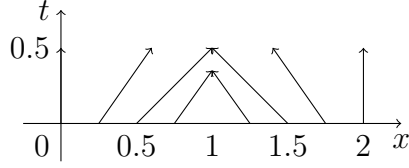


图 1. 第一种初值的特征线

若点 (x, t) 处精确解为 u , 则过该点的特征线 $x' = x + u(t' - t)$ 交 $t_0 = 0$ 于点 $x_0 = x - ut$ 处, 且在 $(x_0, 0)$ 处的精确解 $u_1(x - ut) = \sin(\pi(x - ut))$. 故点 (x, t) 处精确解 u 满足方程

$$f(u) := u - \sin(\pi(x - ut)) = 0.$$

我们采用 Newton 迭代法计算点 (x, t) 处精确解 u . 由图 1 特征线可以看出, 对于给定 $t \geq 0.5$ 时,

$$\{x_0 = x - ut \mid 0 \leq x \leq 2\} \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

因此算法中迭代初值选用

$$(2.1) \quad u(x, t) = \begin{cases} \sin(\pi x), & t < 0.5, \\ \operatorname{sgn}(1 - x) \sin(\pi x/2), & t \geq 0.5. \end{cases}$$

其中 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 为符号函数.

2.2. 第二种初值精确解.

利用特征线可以计算 Burgers 方程的精确解. 第二种初值问题的解在 $x = t/4$ 处出现激波, 方程的解为

$$u(x, t) \begin{cases} 1, & x \leq t/4, \\ -0.5, & x > t/4. \end{cases}$$

2.3. 数值解计算格式.

定义

$$\text{minmod}(a, b) := \begin{cases} a, & |a| \leq |b|, ab > 0, \\ b, & |b| < |a|, ab > 0, \\ 0, & ab \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{minmod}(a, b, c) := \text{minmod}(a, \text{minmod}(b, c)).$$

对于 Burgers 方程 $f(u) = u^2/2$, 数值格式如下:

- Lax-Friedrichs:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} u_j^2 + \frac{1}{2} u_{j+1}^2 - (u_{j+1} - u_j) \right), \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2} \right). \end{aligned}$$

由于 $\max |f'| = 1$.

- Godunov:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \min(u_j^2, u_{j+1}^2)/2, & u_j < u_{j+1} \text{ 且 } u_j u_{j+1} > 0, \\ \max(u_j^2, u_{j+1}^2)/2, & u_j \geq u_{j+1}, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2} \right).$$

- MUSCL: 定义迭代算子

$$G_j(u) := u_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) - \hat{f}(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+) \right),$$

其中 $\hat{f}(\uparrow, \downarrow)$ 为单调通量,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &:= \frac{1}{2} \text{minmod}(u_{j+1} - u_j, u_j - u_{j-1}), \\ u_{j+1/2}^- &:= u_j + \tilde{u}_j, \quad u_{j+1/2}^+ := u_{j+1} - \tilde{u}_{j+1}, \end{aligned}$$

采用 2 阶 Runge-Kutta 格式

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= G(u^n), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2} (u^n + G(u^{(1)})). \end{aligned}$$

- Kurganov-Tadmor: 定义迭代算子

$$G_j(u) := u_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}(u_{j+1/2}^{-,mod}, u_{j+1/2}^{+,mod}) - \hat{f}(u_{j-1/2}^{-,mod}, u_{j-1/2}^{+,mod}) \right),$$

其中 $\hat{f}(\uparrow, \downarrow)$ 为单调通量,

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^- &:= -\frac{1}{6}u_{j-1} + \frac{5}{6}u_j + \frac{1}{3}u_{j+1}, \\ u_{j+1/2}^+ &:= \frac{1}{3}u_j + \frac{5}{6}u_{j+1} - \frac{1}{6}u_{j+2}, \\ \tilde{u}_j^{mod} &:= \minmod(u_{j+1/2}^- - u_j, u_{j+1} - u_j, u_j - u_{j-1}), \\ \tilde{u}_j^{mod} &:= \minmod(u_j - u_{j-1/2}^+, u_{j+1} - u_j, u_j - u_{j-1}), \\ u_{j+1/2}^{-,mod} &:= u_j + \tilde{u}_j^{mod}, \quad u_{j+1/2}^{+,mod} := u_{j+1} - \tilde{u}_{j+1}^{mod}, \end{aligned}$$

采用 3 阶 Runge-Kutta 格式

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= G(u^n), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}G(u^{(1)}), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}G(u^{(2)}). \end{aligned}$$

待求问题为初值问题, 不含边界条件. 因此在第 $n+1$ 次迭代中, 将第 n 次数值解 $u_j^n, j = 1, \dots, N$ 延拓到 $u_j^n, j = -1, 0, 1, \dots, N, N+1, N+2$. 具体地, 对于第一种初值, 由初值的周期性可知每层数值解也是周期的, 即 $u_{-1} = u_{N-2}, u_0 = u_{N-1}, u_{N+1} = u_2, u_{N+2} = u_3$. 对于第二种初值, 当激波没有超出边界时, $u_{-1} = u_0 = 1, u_{N+1} = u_{N+2} = -0.5$.

3. 数值实验

实验使用 GNU Octave v5.1.0¹实现, 运行系统为 Windows10-x64. 第一种初值选取区域 $x \in [0, 2]$, 第二种初值选取区域 $x \in [-1, 1]$.

¹<https://www.gnu.org/software/octave/doc/v5.1.0/>

由于 $\max |f'| = \max |\partial_1 \hat{f}| = \max |\partial_2 \hat{f}| = 1$, 实验中我们取 $\Delta t / \Delta x = 1/4$. 计算精确解 u 时, Newton 迭代法的终止条件为 $\|f(u)\|_\infty \leq 1e-10$. MUSCL 与 Kurganov-Tadmor 格式的单调通量选用 Lax-Friedrichs 通量

$$\hat{f}(u^-, u^+) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(u^-)^2 + \frac{1}{2}(u^+)^2 - (u^+ - u^-) \right).$$

3.1. 第一个数值实验.

我们计算 $t = 0.15$ 时上述五种 TVD 格式的 L^1 误差和收敛阶, 第一种初值实验结果见表 1, 其中表头为网格细度 Δx 的值. 由表中结果可以看出, 对于光滑初值问题, Lax-Friedrichs, Godunov 的误差较大, 收敛阶为 1. MUSCL, Kurganov-Tadmor 的误差较小, 其中 MUSCL 收敛阶为 2, Kurganov-Tadmor 的实验收敛阶为 2.2. Kurganov-Tadmor 格式收敛阶没有到 3, 我们认为原因是其格式用小区间的平均值代替格点值, 这里会有 2 阶精度损失.

表 1. 第一种初值 L^1 误差和收敛阶, 表头为 Δx 的值

1/20	1/40	1/80	1/160	1/320	1/640
Lax-Friedrichs					
4.924e-2	2.514e-2	1.269e-2	6.371e-3	3.192e-3	1.597e-3
rate	0.97	0.99	0.99	1.00	1.00
Godunov					
3.201e-2	1.797e-2	9.572e-3	4.947e-3	2.516e-3	1.269e-3
rate	0.83	0.91	0.95	0.98	0.99
MUSCL					
7.770e-3	2.113e-3	5.997e-4	1.623e-4	4.308e-5	1.131e-5
rate	1.88	1.82	1.89	1.91	1.93
Kurganov-Tadmor					
3.308e-3	7.779e-4	1.723e-4	3.655e-5	7.738e-6	1.708e-6
rate	2.09	2.17	2.24	2.24	2.18

第二种初值实验结果见表 2, 其中表头为网格细度 Δx 的值. 由表中结果可以看出, 对于间断初值问题, Lax-Friedrichs, Godunov, MUSCL, Kurganov-Tadmor 四种格式收敛阶均为 1, 其中 Godunov 格式误差最小, MUSCL, Kurganov-Tadmor 选用 Lax-Friedrichs 通量, 误差相比 Lax-Friedrichs 小.

表 2. 第二种初值 L^1 误差和收敛阶, 表头为 Δx 的值

1/20	1/40	1/80	1/160	1/320	1/640
Lax-Friedrichs					
7.302e-2	3.509e-2	1.673e-2	8.405e-3	4.203e-3	2.101e-3
rate	1.06	1.07	0.99	1.00	1.00
Godunov					
5.625e-2	1.954e-2	3.644e-3	1.822e-3	9.111e-4	4.556e-4
rate	1.53	2.42	1.00	1.00	1.00
MUSCL					
5.949e-2	1.347e-2	8.986e-3	4.493e-3	2.247e-3	1.123e-3
rate	1.34	1.39	1.00	1.00	1.00
Kurganov-Tadmor					
5.755e-2	2.088e-2	6.331e-3	3.165e-3	1.583e-3	7.913e-4
rate	1.46	1.72	1.00	1.00	1.00

3.2. 第二个数值实验.

我们绘制了 $t = 0.5$ 时精确解和 Lax-Friedrichs, Godunov, MUSCL, Kurganov-Tadmor 格式数值解对比图, 网格细度 $\Delta t = 1/256, \Delta x = 1/64$. 第一种初值对比图见图 2, 第二种初值对比图见图 3. 可以看出无论是对光滑初值还是间断初值, 四种格式保持总变差不增. Lax-Wendroff 格式相比其它格式误差略大.

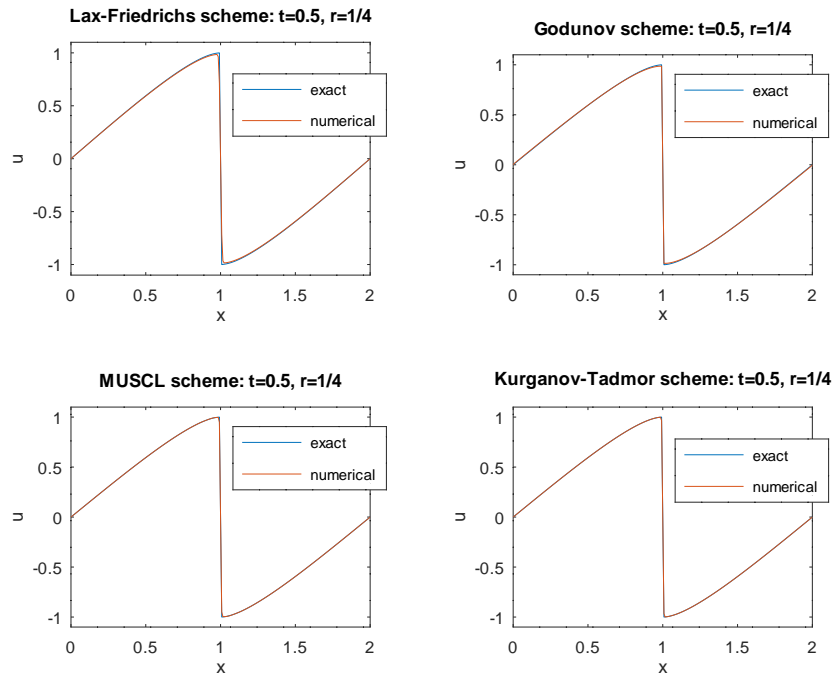


图 2. 第一种初值的对比图

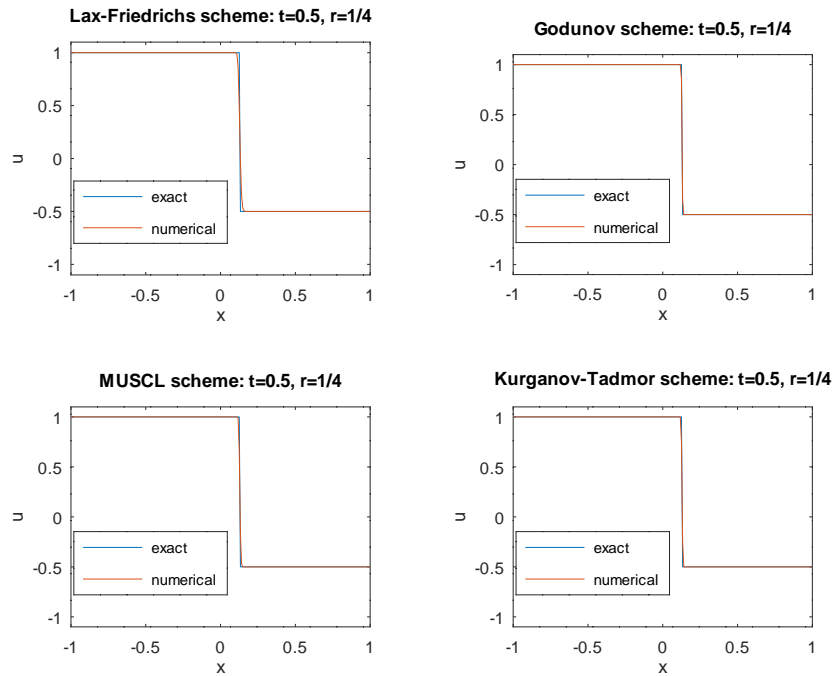


图 3. 第二种初值的对比图