

Année Universitaire 2015–2016

2P042-CNED : Projet Numérique

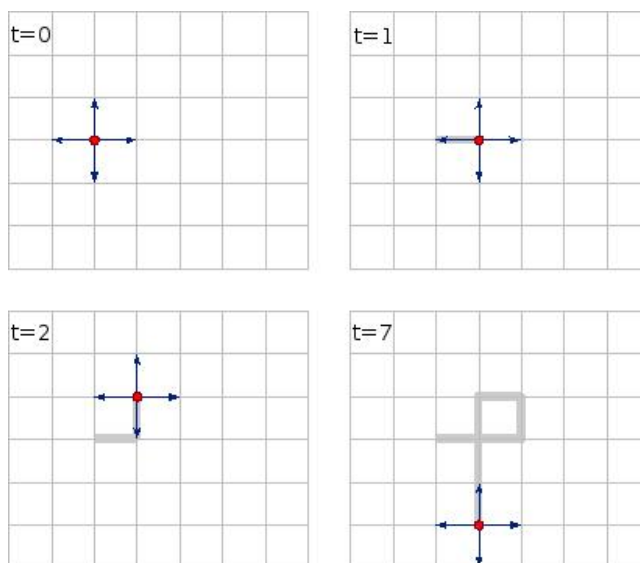
Mouvement Brownien et loi de Boltzman

Enseignant : J. Mozziconacci <mozziconacci@lptmc.jussieu.fr>

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen.

Le but de ce projet est d'étudier les propriétés statistiques de ce mouvement et de déterminer la position moyenne des particules lorsqu'elles sont soumises à un champ de gravitation en plus des chocs aléatoires.

Le mouvement des particules se fera sur une grille 2D de maille carrée et sera simplement modélisé par une probabilité de saut de $1/4$ sur chacun des quatre sites adjacents au site où se trouve chaque particule. Lorsqu'une particule rencontre une paroi, elle ne bouge pas si le mouvement déterminé aléatoirement la fait traverser cette paroi.



On se placera sur une grille et l'on placera au départ N particules au centre de la grille à la coordonnée $(0, 0)$. A chaque pas de temps, on fera évoluer la position des N particules.

1 — Comparer la répartition des particules au bout d'un temps t avec leur répartition théorique :

$$n(x, y, t) = A \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\right).$$

2 — Que valent A et σ ?

3 — Que se passe t'il lorsque t tend vers l'infini ?

4 — On se place dans ce dernier cas et l'on ajoute maintenant un champ de gravitation au système. Conjugué à la friction exercée par le liquide, ce champ a pour effet d'ajouter une vitesse constante dirigée vers le bas aux particules. Pour simuler cette situation, tous les n pas de temps on fait bouger toutes les particules d'un pas vers les y négatifs. Que se passe t'il lorsque t tend vers l'infini ? Faire varier n .

5 — Comparer alors la répartition des particules avec leur répartition théorique qui suit la loi de Boltzman :

$$n(y, t) = B \exp(-Cn^2).$$

6 — Que valent B et C ?