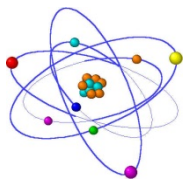


# 通信原理基础

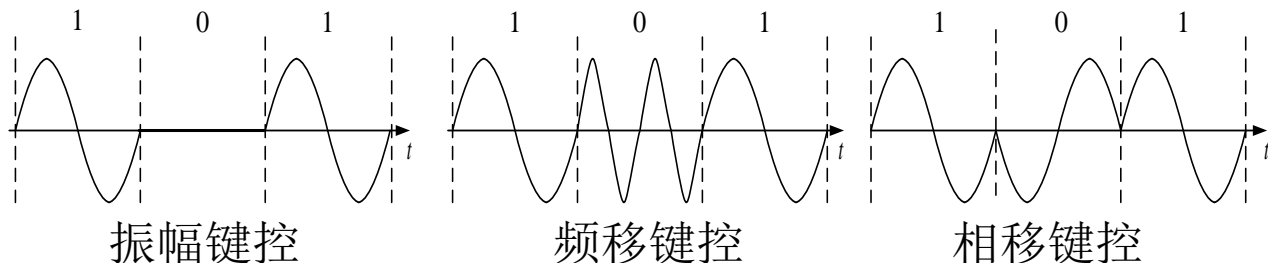
## 数字带通传输系统



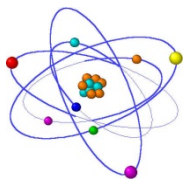
# 第5章 数字带通传输系统

## ● 概述

- 数字调制：把数字基带信号变换为数字带通信号（已调信号）的过程。
- 数字带通传输系统：通常把包括调制和解调过程的数字传输系统。
- 数字调制技术有两种方法：
  - ◆ 利用模拟调制的方法去实现数字式调制；
  - ◆ 通过开关键控载波，通常称为**键控法**。
  - ◆ 基本键控方式：振幅键控、频移键控、相移键控



- 数字调制可分为二进制调制和多进制调制。



# 第5章 数字带通传输系统

## ● 5.1 二进制数字调制原理

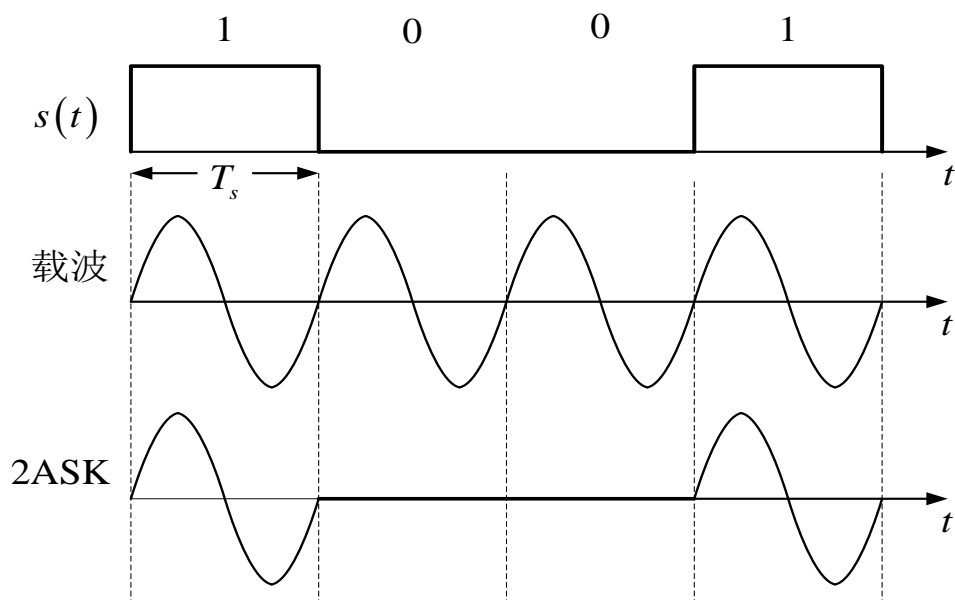
### ■ 5.1.1 二进制振幅键控(2ASK)

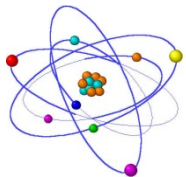
#### ◆ 基本原理:

#### □ “通-断键控(OOK)”信号表达式

$$e_{\text{OOK}}(t) = \begin{cases} A\cos\omega_c t, & \text{以概率 } P \text{ 发送“1”时} \\ 0, & \text{以概率 } 1-P \text{ 发送“0”时} \end{cases}$$

#### □ 波形





# 第5章数字带通传输系统

- ◆ 2ASK信号的一般表达式

$$e_{2\text{ASK}}(t) = s(t) \cos \omega_c t$$

其中

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$$

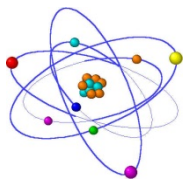
$T_s$  — 码元持续时间;

$g(t)$  — 持续时间为 $T_s$ 的基带脉冲波形, 通常假设是高度为1, 宽度等于 $T_s$ 的矩形脉冲;

$a_n$  — 第 $N$ 个符号的电平取值, 若取

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{概率为 } P \\ 0, & \text{概率为 } 1 - P \end{cases}$$

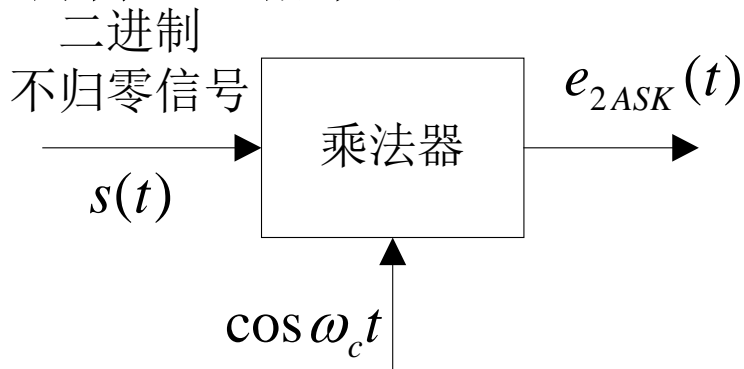
则相应的2ASK信号就是OOK信号。



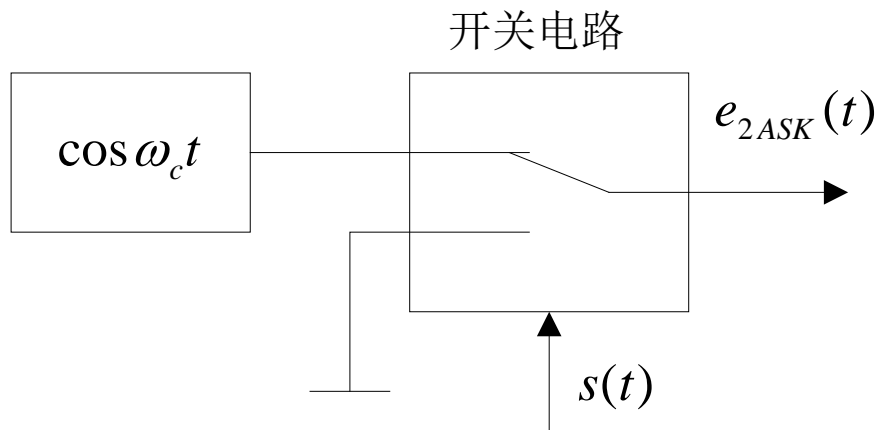
# 第5章 数字带通传输系统

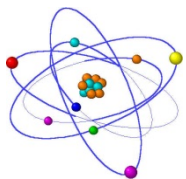
## ◆ 2ASK信号产生方法

### ➤ 模拟调制法（相乘法法）



### ➤ 键控法

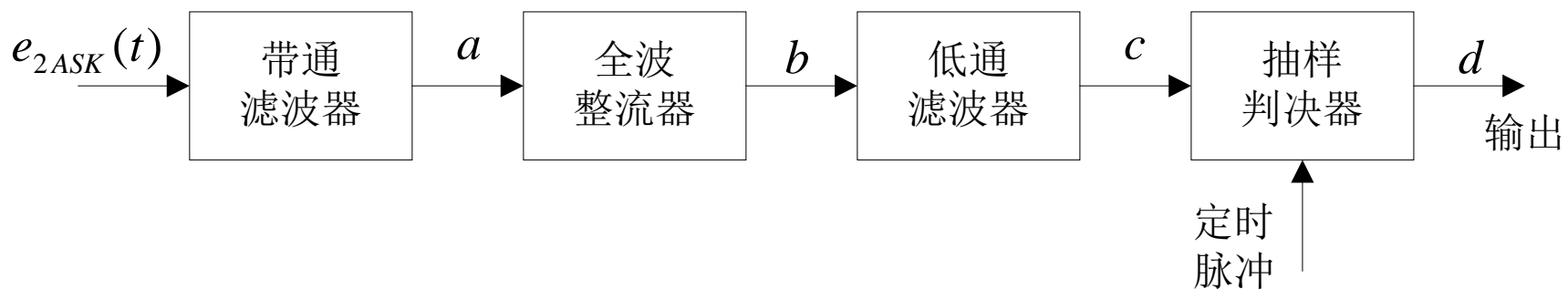




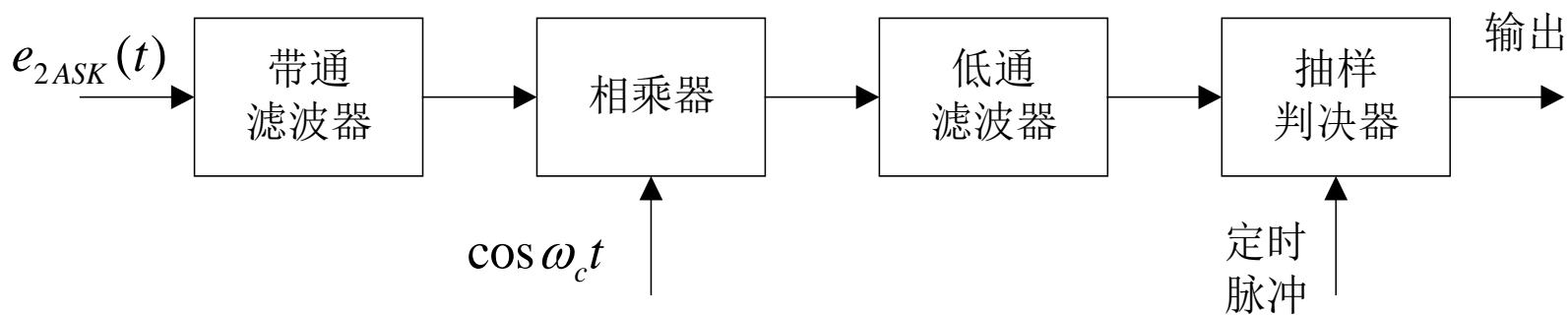
# 第5章 数字带通传输系统

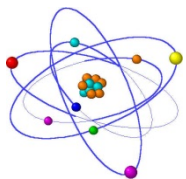
## ◆ 2ASK信号解调方法

### ▣ 非相干解调(包络检波法)



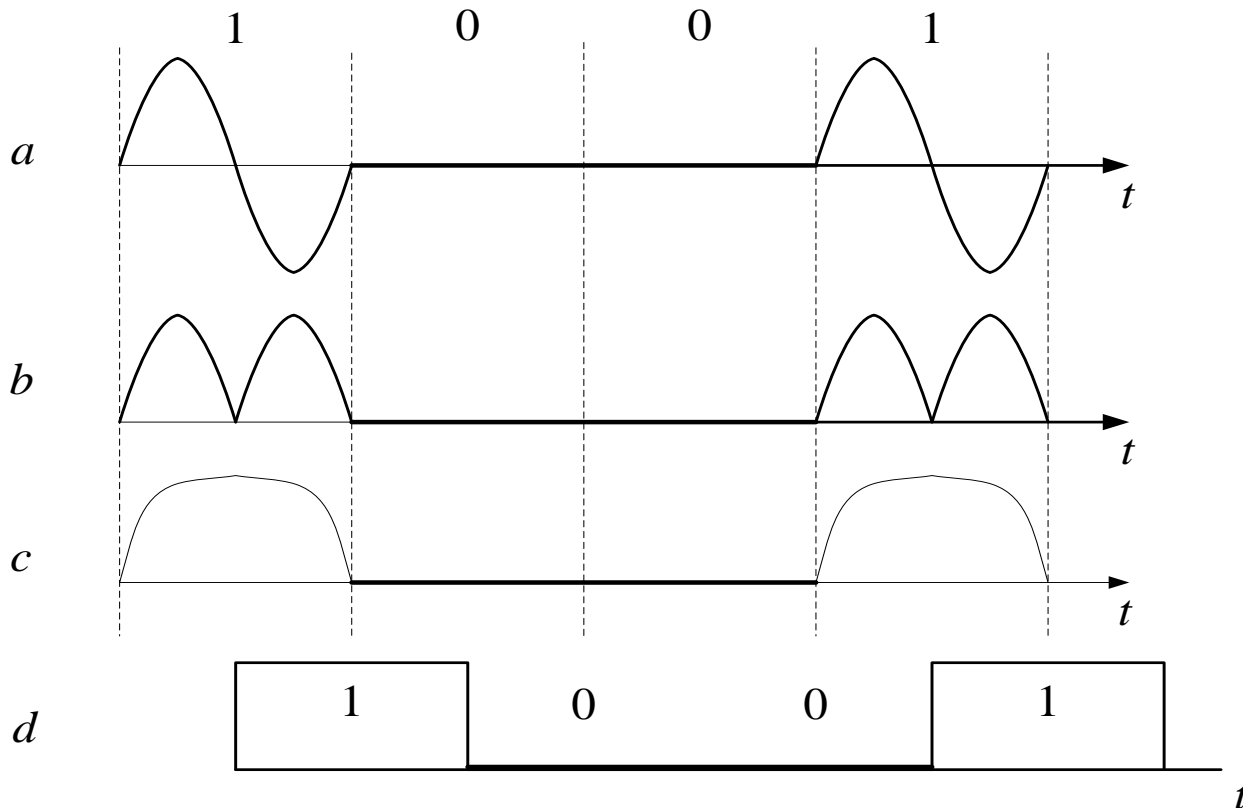
### ▣ 相干解调(同步检测法)

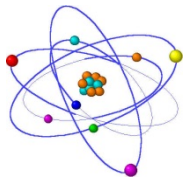




# 第5章 数字带通传输系统

## □ 非相干解调过程的时间波形





# 第5章 数字带通传输系统

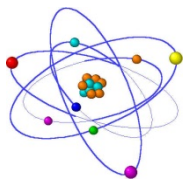
## ■ 5.1.2 二进制频移键控（2FSK）

### ◆ 基本原理

- 表达式：在2FSK中，载波的频率随二进制基带信号在 $f_1$ 和 $f_2$ 两个频率点间变化。故其表达式为

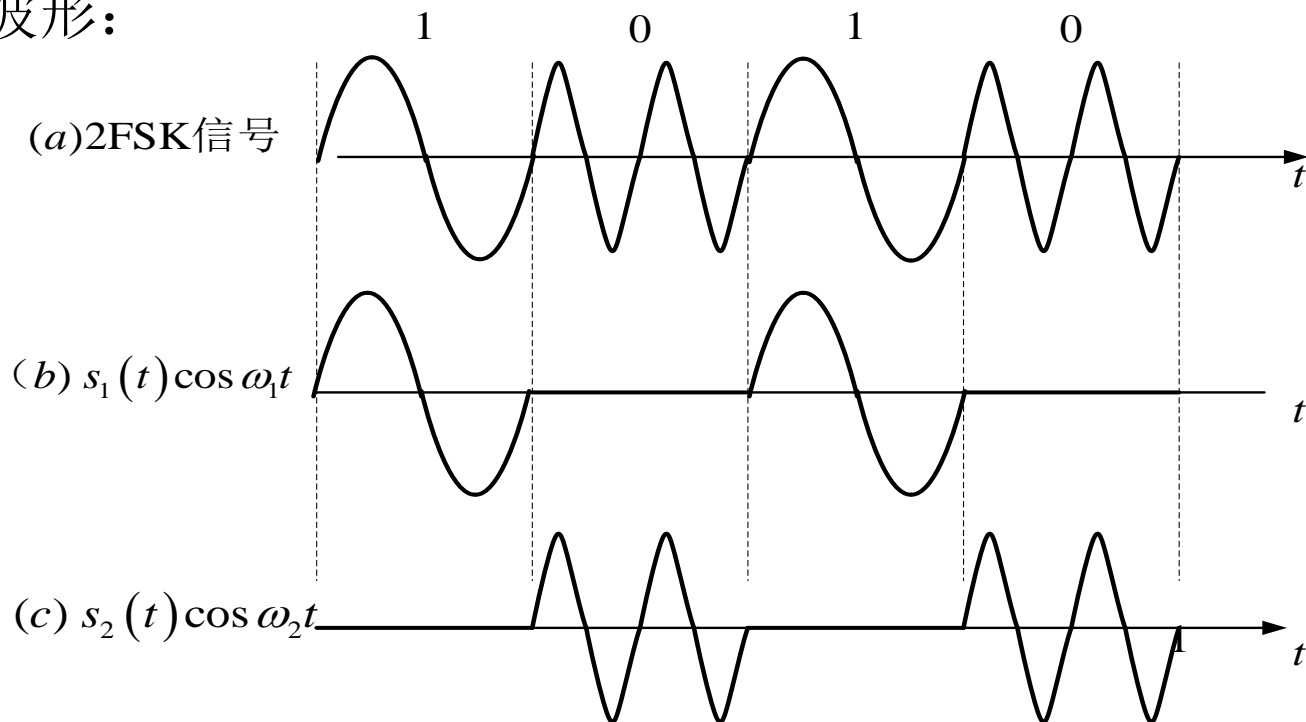
$$e_{2\text{FSK}}(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t + \varphi_n), & \text{发送“1”时} \\ A \cos(\omega_2 t + \theta_n), & \text{发送“0”时} \end{cases}$$



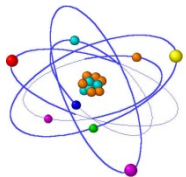


# 第5章 数字带通传输系统

□ 典型波形：



□ 由图可见，**2FSK** 信号的波形(a)可以分解为波形(b)和波形(c)，也就是说，一个**2FSK**信号可以看成是两个不同载频的**2ASK**信号的叠加。因此，**2FSK**信号的时域表达式又可写成



# 第5章数字带通传输系统

$$e_{2\text{FSK}}(t) = \left[ \sum_n a_n g(t - nT_s) \right] \cos(\omega_1 t + \varphi_n) + \left[ \sum_n \bar{a}_n g(t - nT_s) \right] \cos(\omega_2 t + \theta_n)$$

式中  $g(t)$  — 单个矩形脉冲,

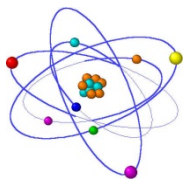
$T_s$  — 脉冲持续时间;

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{概率为 } P \\ 0, & \text{概率为 } 1 - P \end{cases}$$

$$\bar{a}_n = \begin{cases} 1, & \text{概率为 } 1 - P \\ 0, & \text{概率为 } P \end{cases}$$

$\varphi_n$ 和 $\theta_n$ 分别是第 $n$ 个信号码元（1或0）的初始相位，通常可令其为零。因此，2FSK信号的表达式可简化为

$$e_{2\text{FSK}}(t) = s_1(t) \cos \omega_1 t + s_2(t) \cos \omega_2 t$$



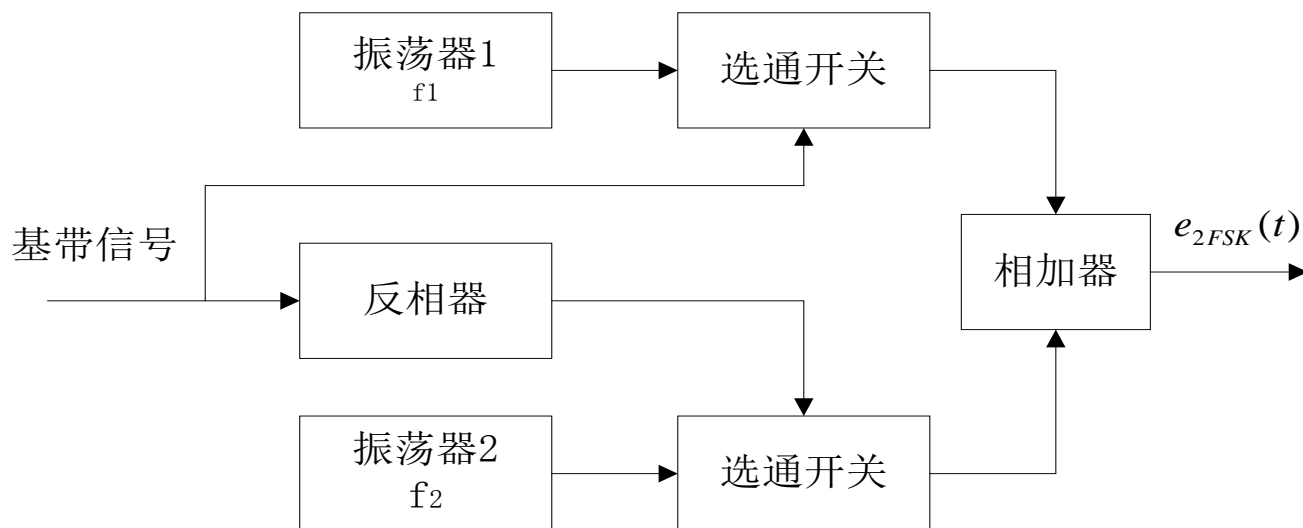
# 第5章 数字带通传输系统

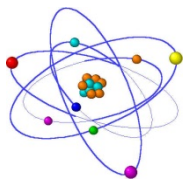
$$e_{2\text{FSK}}(t) = s_1(t)\cos\omega_1t + s_2(t)\cos\omega_2t$$

$$\text{式中 } s_1(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s) \quad s_2(t) = \sum_n \bar{a}_n g(t - nT_s)$$

## ◆ 2FSK信号的产生方法

- 采用模拟调频电路来实现：信号在相邻码元之间的相位是连续变化的。
- 采用键控法来实现：相邻码元之间的相位不一定连续。

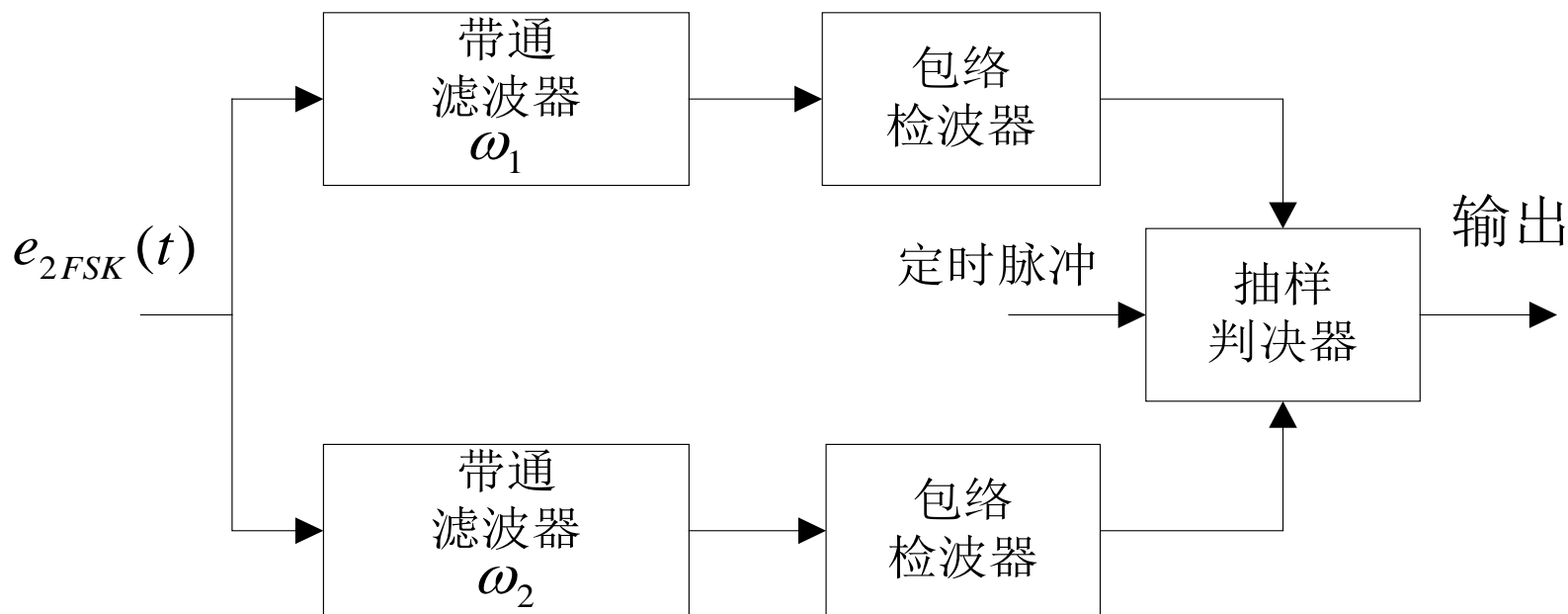


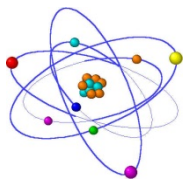


# 第5章 数字带通传输系统

## ◆ 2FSK信号的解调方法

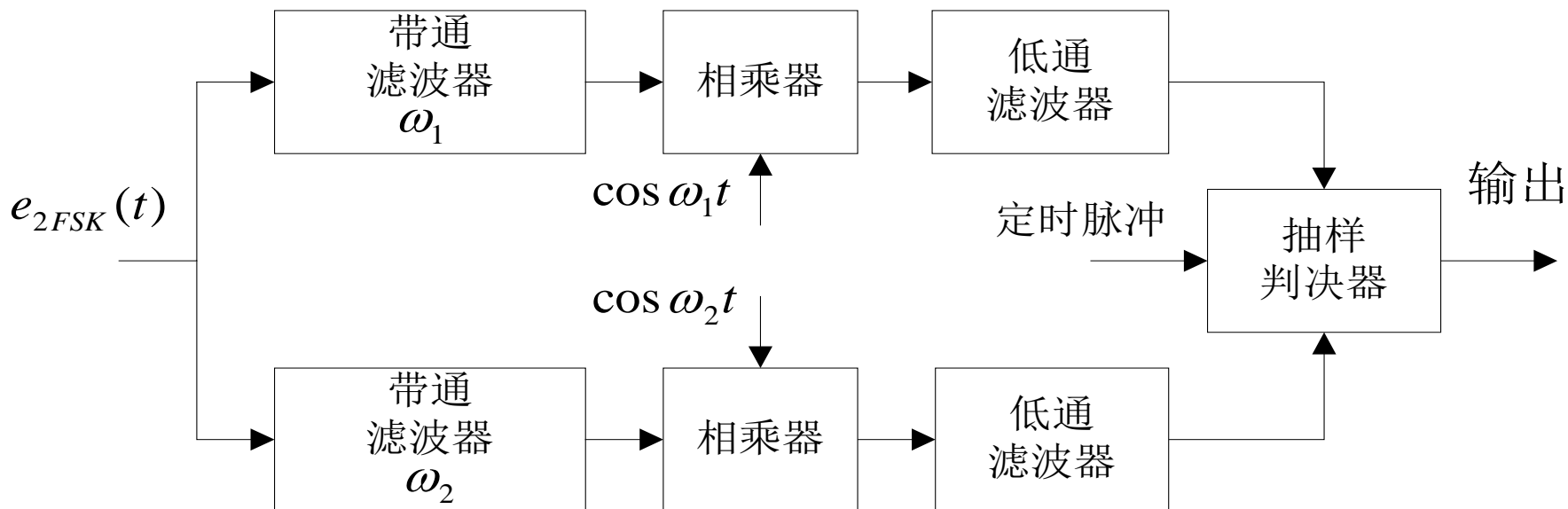
### □ 非相干解调

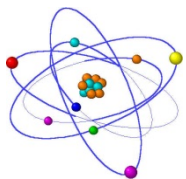




# 第5章 数字带通传输系统

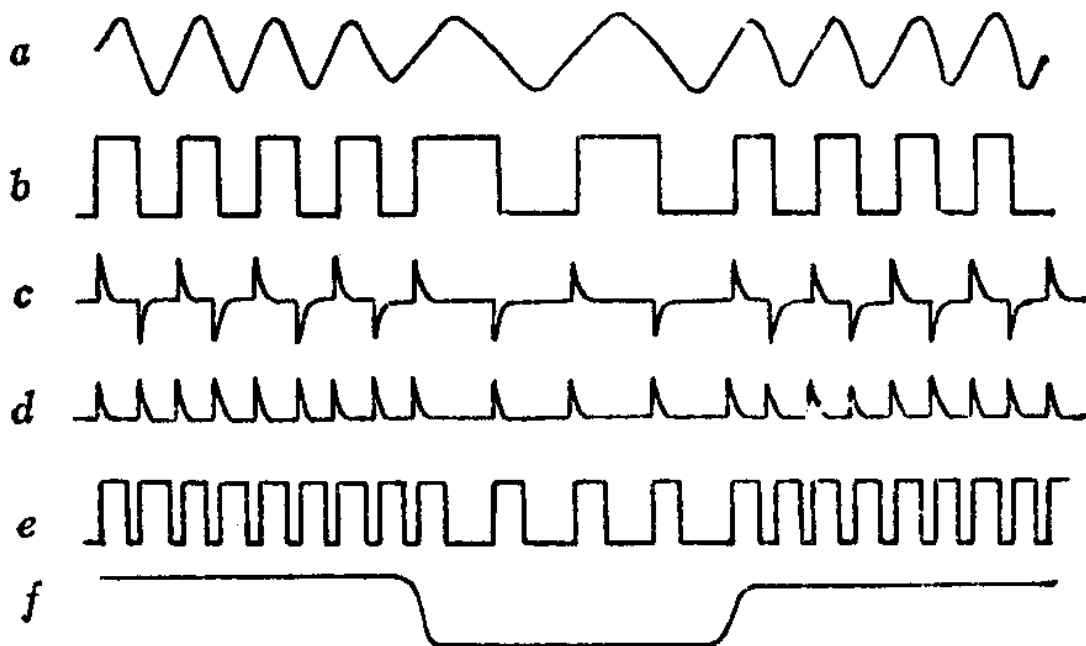
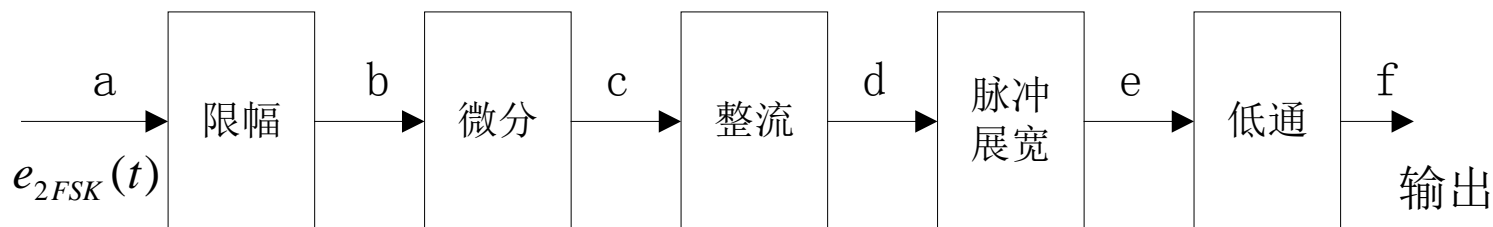
## □ 相干解调

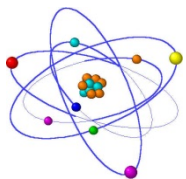




# 第5章 数字带通传输系统

- 其他解调方法：比如鉴频法、差分检测法、过零检测法等。下图给出了过零检测法的原理方框图及各点时间波形。





# 第5章数字带通传输系统

## ■ 5.1.3 二进制相移键控（2PSK）

### ◆ 2PSK信号的表达式：

在2PSK中，通常用初始相位0和 $\pi$ 分别表示二进制“1”和“0”。因此，2PSK信号的时域表达式为

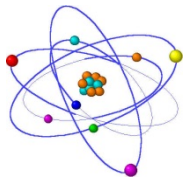
$$e_{2\text{PSK}}(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi_n)$$

式中， $\varphi_n$ 表示第 $n$ 个符号的绝对相位：

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{发送“0”时} \\ \pi, & \text{发送“1”时} \end{cases}$$

因此，上式可以改写为

$$e_{2\text{PSK}}(t) = \begin{cases} A \cos \omega_c t, & \text{概率为 } P \\ -A \cos \omega_c t, & \text{概率为 } 1-P \end{cases}$$



# 第5章数字带通传输系统

由于两种码元的波形相同，极性相反，故2PSK信号可以表述为一个双极性全占空矩形脉冲序列与一个正弦载波的相乘：

$$e_{2\text{PSK}}(t) = s(t)\cos\omega_c t$$

式中

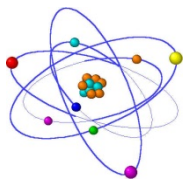
$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$$

这里， $g(t)$ 是脉宽为 $T_s$ 的单个矩形脉冲，而 $a_n$ 的统计特性为

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{概率为 } P \\ -1, & \text{概率为 } 1-P \end{cases}$$

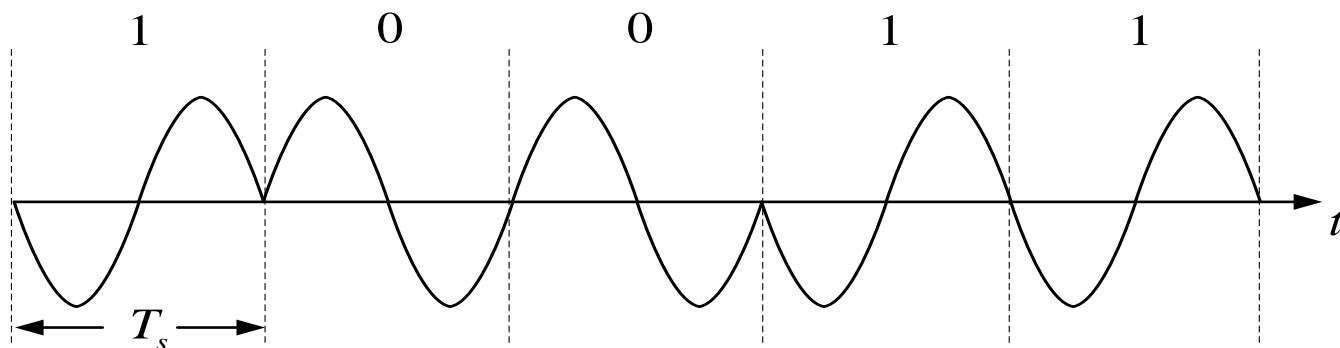
即发送二进制符号“0”时（ $a_n$ 取+1）， $e_{2\text{PSK}}(t)$ 取0相位；发送二进制符号“1”时（ $a_n$ 取-1）， $e_{2\text{PSK}}(t)$ 取 $\pi$ 相位。这种以载波的不同相位直接去表示相应二进制数字信号的调制方式，称为二进制**绝对相移**方式。

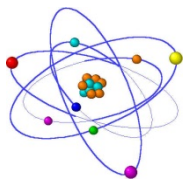




# 第5章 数字带通传输系统

## ◆ 典型波形

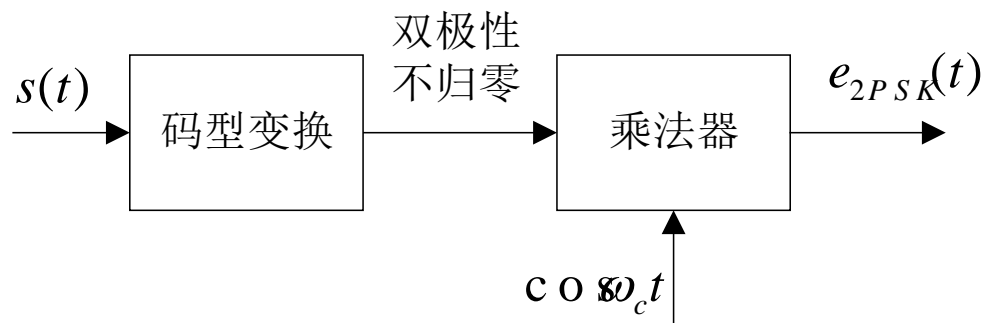




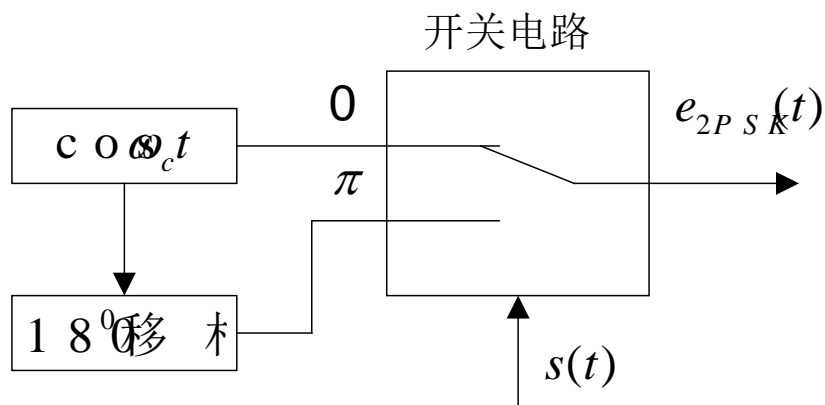
# 第5章 数字带通传输系统

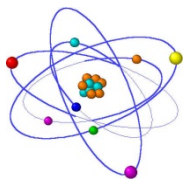
## ◆ 2PSK信号的调制器原理方框图

### □ 模拟调制的方法



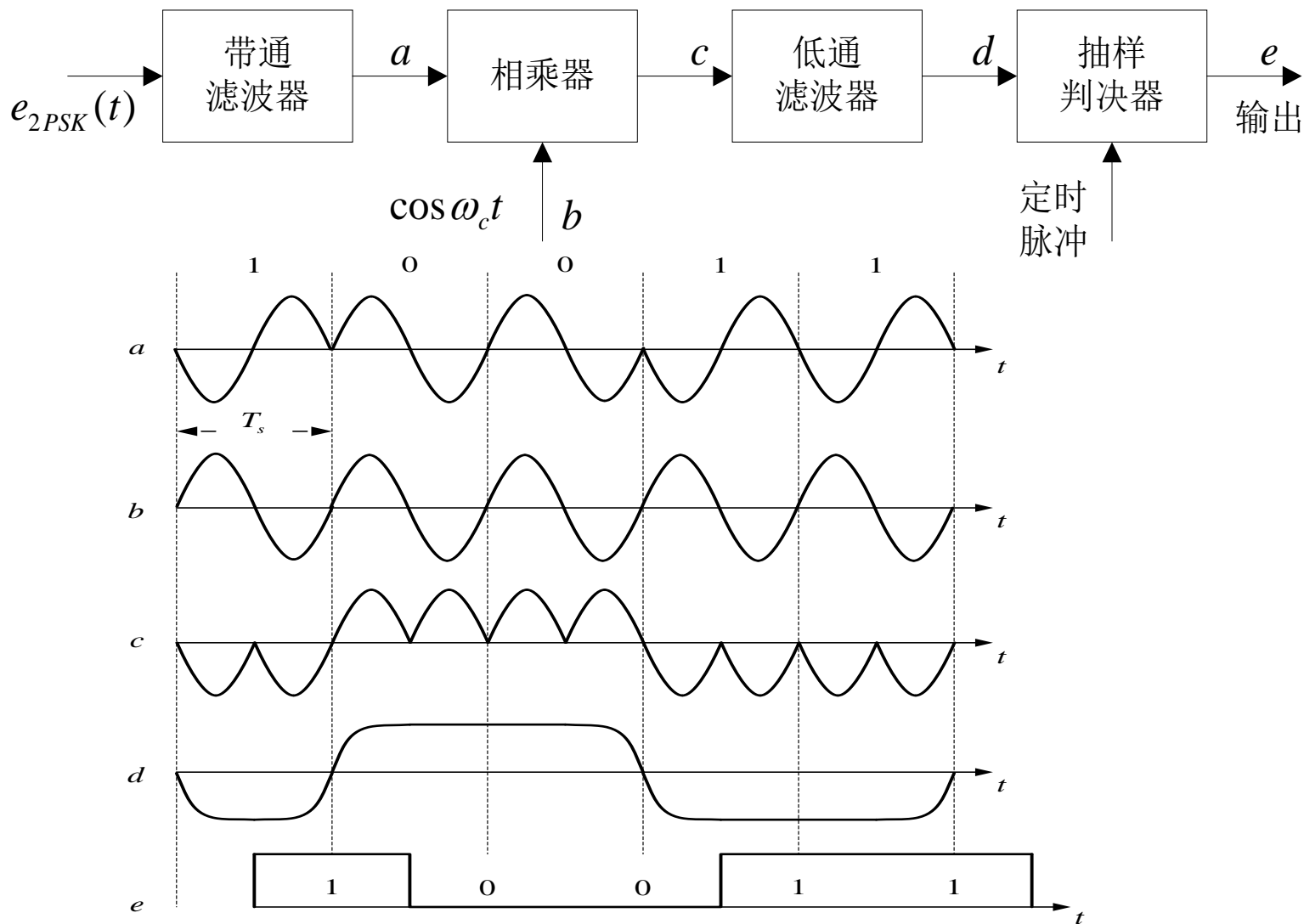
### □ 键控法

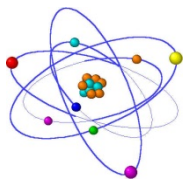




# 第5章 数字带通传输系统

## ◆ 2PSK信号的解调器原理方框图和波形图：

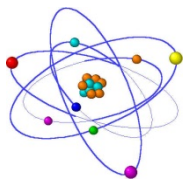




# 第5章 数字带通传输系统

波形图中，假设相干载波的基准相位与2PSK信号的调制载波的基准相位一致（通常默认为0相位）。但是，由于在2PSK信号的载波恢复过程中存在着的相位模糊，即恢复的本地载波与所需的相干载波可能同相，也可能反相，这种相位关系的不确定性将会造成解调出的数字基带信号与发送的数字基带信号正好相反，即“1”变为“0”，“0”变为“1”，判决器输出数字信号全部出错。这种现象称为2PSK方式的“倒 $\pi$ ”现象或“反相工作”。这也是2PSK方式在实际中很少采用的主要原因。另外，在随机信号码元序列中，信号波形有可能出现长时间连续的正弦波形，致使在接收端无法辨认信号码元的起止时刻。

为了解决上述问题，可以采用5.1.4节中将要讨论的差分相移键控（DPSK）体制。



# 第5章 数字带通传输系统

## ■ 5.1.4 二进制差分相移键控（2DPSK）

### ◆ 2DPSK原理

- 2DPSK是利用前后相邻码元的载波相对相位变化传递数字信息，所以又称**相对相移键控**。
- 假设 $\Delta\varphi$ 为当前码元与前一码元的载波相位差，定义数字信息与 $\Delta\varphi$ 之间的关系为

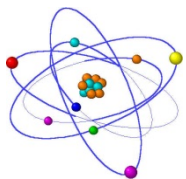
$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0, & \text{表示数字信息“0”} \\ \pi, & \text{表示数字信息“1”} \end{cases}$$

于是可以将一组二进制数字信息与其对应的2DPSK信号的载波相位关系示例如下：

二进制数字信息：      1   1   0   1   0   0   1   1   0

2DPSK信号相位： (0)  $\pi$    0   0    $\pi$     $\pi$     $\pi$    0    $\pi$     $\pi$

或                      ( $\pi$ ) 0    $\pi$     $\pi$    0   0   0    $\pi$    0   0



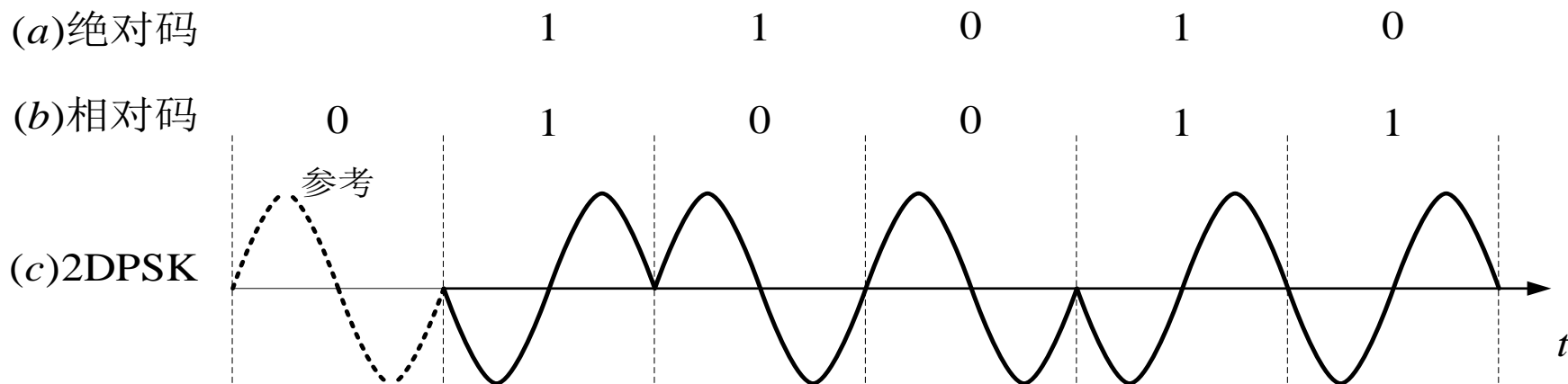
# 第5章 数字带通传输系统

二进制数字信息: 1 1 0 1 0 0 1 1 0

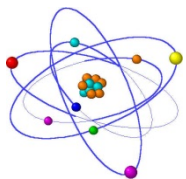
2DPSK信号相位: (0)  $\pi$  0 0  $\pi$   $\pi$   $\pi$  0  $\pi$   $\pi$

或 ( $\pi$ ) 0  $\pi$   $\pi$  0 0 0  $\pi$  0 0

相应的2DPSK信号的波形如下:



由此例可知, 对于相同的基带信号, 由于初始相位不同, 2DPSK信号的相位可以不同。即2DPSK信号的相位并不直接代表基带信号, 而前后码元的相对相位才决定信息符号。22



# 第5章 数字带通传输系统

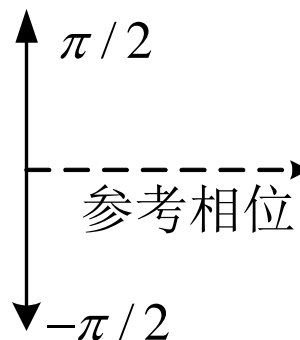
- 数字信息与 $\Delta\varphi$ 之间的关系也可定义为

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0, & \text{表示数字信息“1”} \\ \pi, & \text{表示数字信息“0”} \end{cases}$$

- 2DPSK信号的矢量图

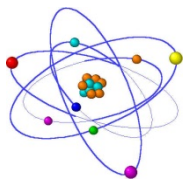


(a) A方式



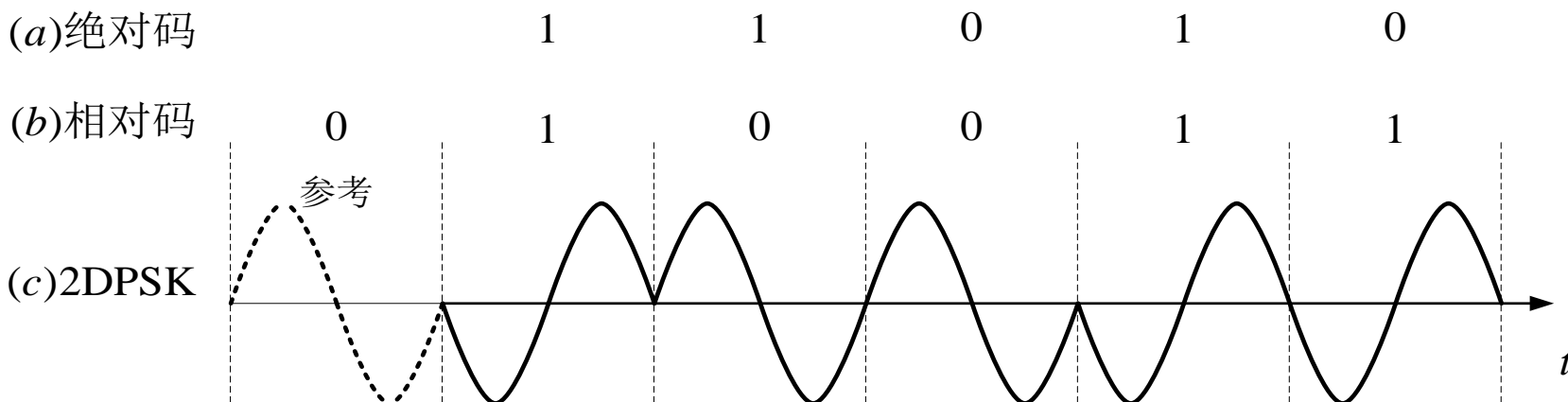
(b) B方式

在B方式中，当前码元的相位相对于前一码元的相位改变 $\pm\pi/2$ 。因此，在相邻码元之间必定有相位突跳。在接收端检测此相位突跳就能确定每个码元的起止时刻。



# 第5章 数字带通传输系统

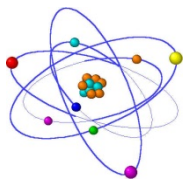
## ◆ 2DPSK信号的产生方法



由上图可见，先对二进制数字基带信号进行差分编码，即把表示数字信息序列的绝对码变换成**相对码（差分码）**，然后再根据相对码进行绝对调相，从而产生二进制差分相移键控信号。

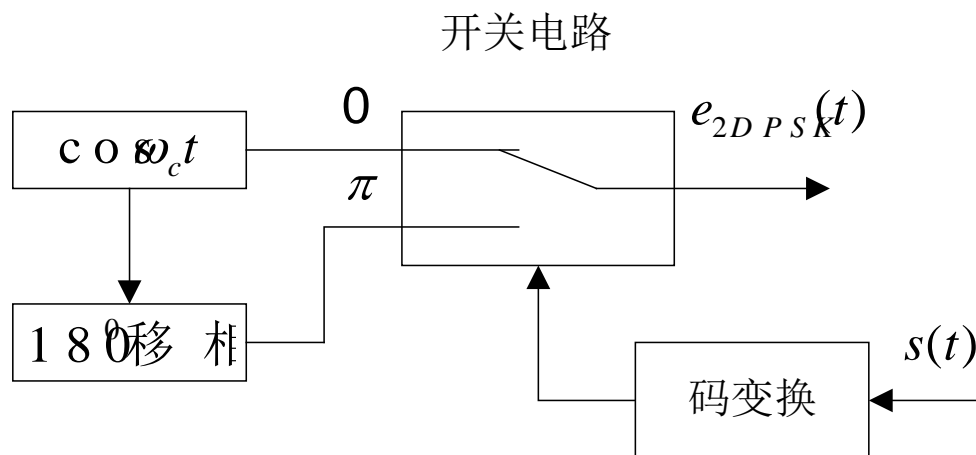
上图中使用的是传号差分码，即载波的相位遇到原数字信息“1”变化，遇到“0”则不变。





# 第5章 数字带通传输系统

## □ 2DPSK信号调制器原理方框图



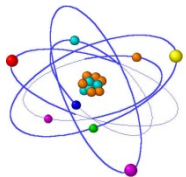
差分码可取传号差分码或空号差分码。其中，传号差分码的编码规则为

$$b_n = a_n \oplus b_{n-1}$$

式中， $\oplus$  为模2加， $b_{n-1}$  为  $b_n$  的前一码元，最初的  $b_{n-1}$  可任意设定。

上式的逆过程称为差分译码（码反变换），即

$$a_n = b_n \oplus b_{n-1}$$

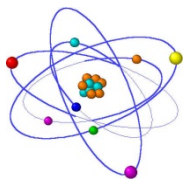


# 第5章 数字带通传输系统

## ◆ 2DPSK信号的解调方法之一

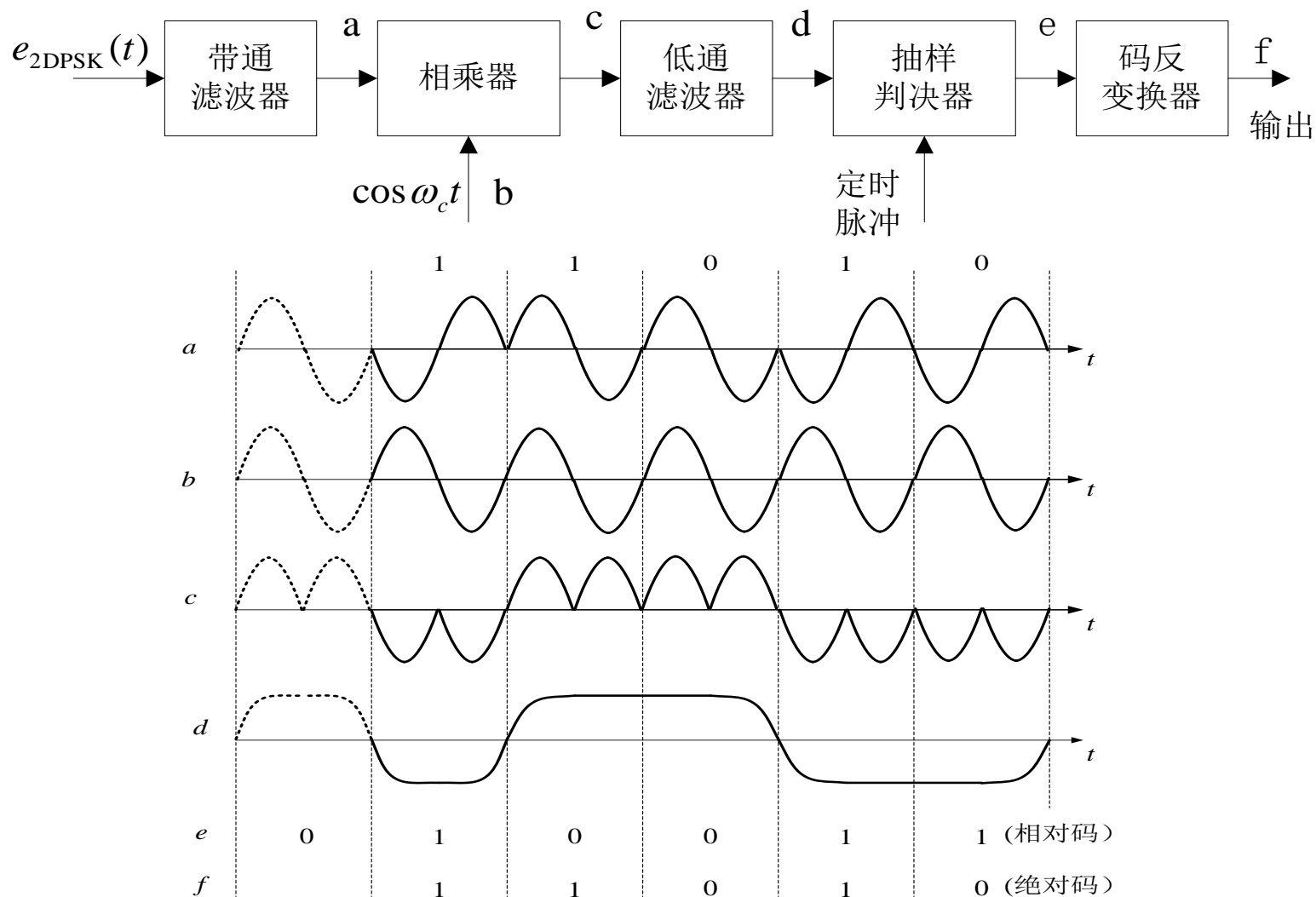
### ▣ 相干解调(极性比较法)加码反变换法

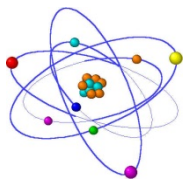
- 原理：先对2DPSK信号进行相干解调，恢复出相对码，再经码反变换器变换为绝对码，从而恢复出发送的二进制数字信息。在解调过程中，由于载波相位模糊性的影响，使得解调出的相对码也可能是“1”和“0”倒置，但经差分译码（码反变换）得到的绝对码不会发生任何倒置的现象，从而解决了载波相位模糊性带来的问题。



# 第5章 数字带通传输系统

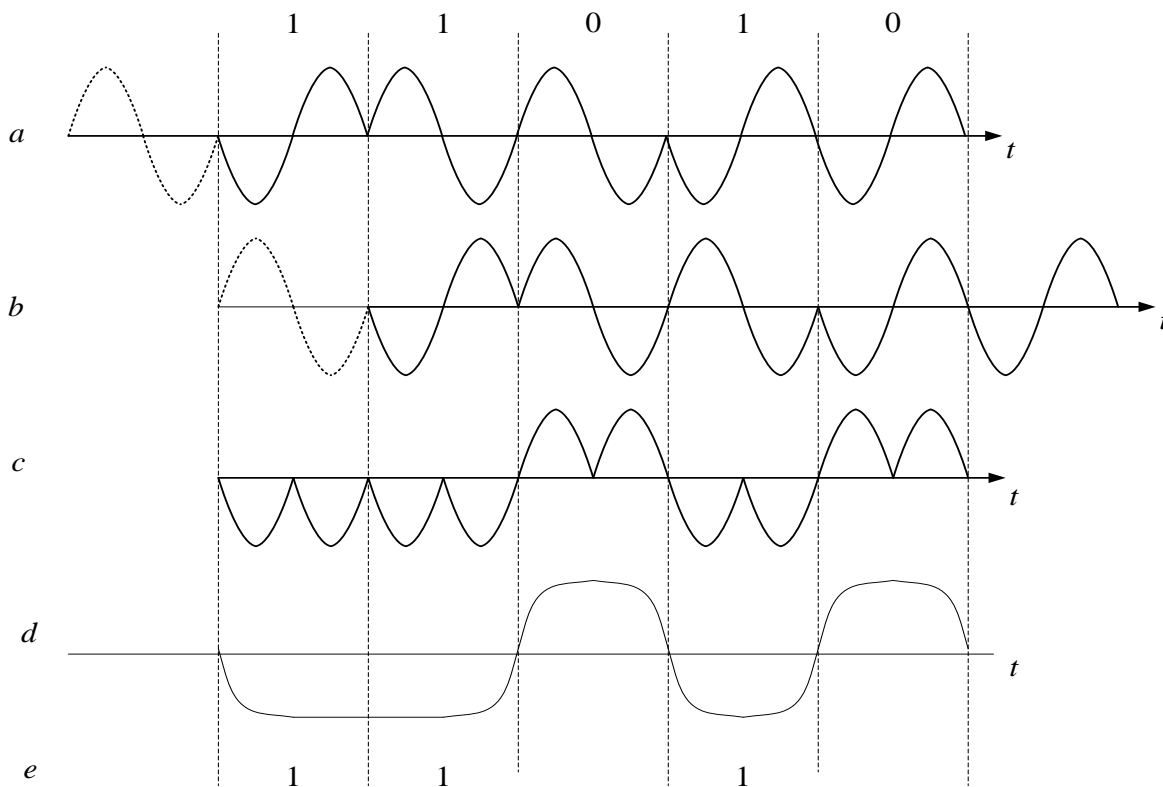
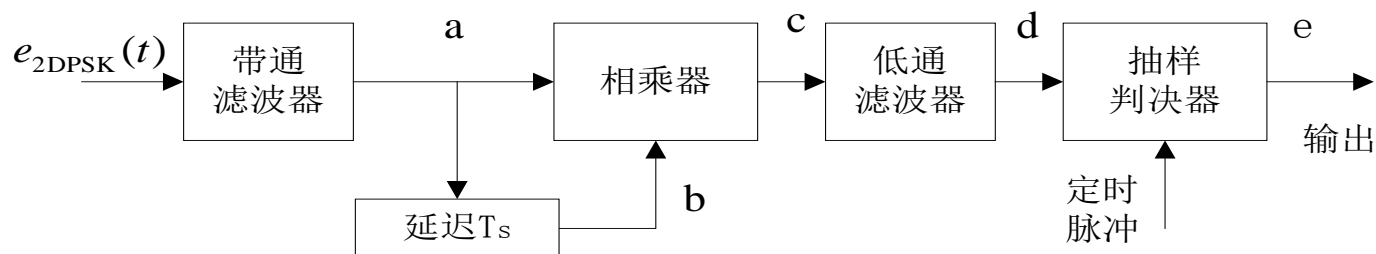
## 2DPSK的相干解调器原理图和各点波形

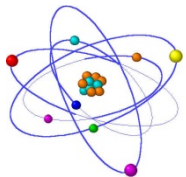




# 第5章 数字带通传输系统

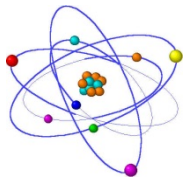
## ◆ 2DPSK信号的解调方法之二：差分相干解调(相位比较)法





# 第5章 数字带通传输系统

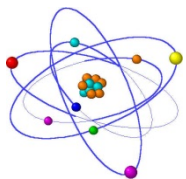
- 用这种方法解调时不需要专门的相干载波，只需由收到的2DPSK信号延时一个码元间隔，然后与2DPSK信号本身相乘。相乘器起着相位比较的作用，相乘结果反映了前后码元的相位差，经低通滤波后再抽样判决，即可直接恢复出原始数字信息，故解调器中不需要码反变换器。
- ◆ 2DPSK系统是一种实用的数字调相系统，但其抗加性白噪声性能比2PSK的要差。



# 第5章数字带通传输系统

## ● 5.2 二进制数字调制系统的抗噪声性能（选学）

- ◆ 通信系统的抗噪声性能是指系统克服加性噪声影响的能力。在数字通信系统中，信道噪声有可能使传输码元产生错误，错误程度通常用误码率来衡量。因此，与分析数字基带系统的抗噪声性能一样，分析数字调制系统的抗噪声性能，也就是求系统在信道噪声干扰下的总误码率。
- ◆ 分析条件：假设信道特性是恒参信道，在信号的频带范围内具有理想矩形的传输特性(可取其传输系数为 $K$ )；信道噪声是加性高斯白噪声。并且认为噪声只对信号的接收带来影响，因而分析系统性能是在接收端进行的。

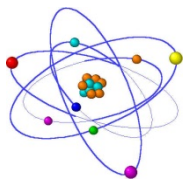


# 第5章 数字带通传输系统

## ● 5.3 二进制数字调制系统的性能比较

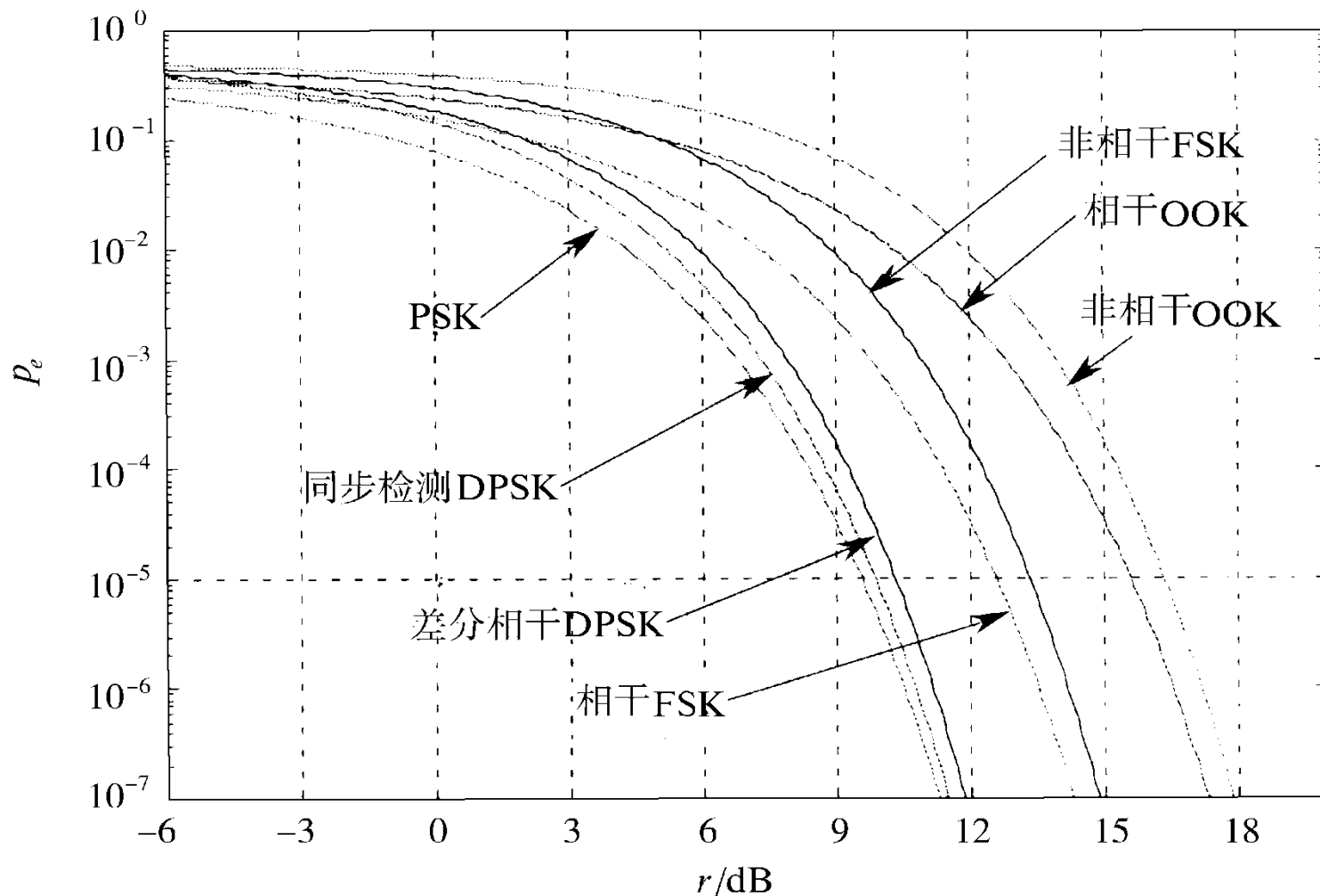
### ■ 误码率

	相干解调	非相干解调
2ASK	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right)$	$\frac{1}{2} e^{-r/4}$
2FSK	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$	$\frac{1}{2} e^{-r/2}$
2PSK	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$	
2DPSK	$\operatorname{erfc}(\sqrt{r})$	$\frac{1}{2} e^{-r}$

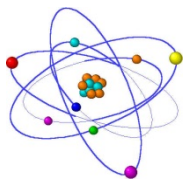


# 第5章数字带通传输系统

## ■ 误码率曲线







# 第5章 数字带通传输系统

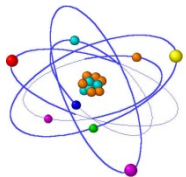
## ■ 频带宽度

- ◆ 2ASK系统和2PSK(2DPSK)系统的频带宽度

$$B_{2ASK} = B_{2PSK} = \frac{2}{T_s}$$

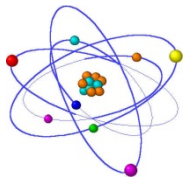
- ◆ 2FSK系统的频带宽度

$$B_{2FSK} = |f_2 - f_1| + \frac{2}{T_s}$$



# 第5章 数字带通传输系统

- 对信道特性变化的敏感性
  - ◆ 在2FSK系统中，判决器是根据上下两个支路解调输出样值的大小来作出判决，不需要人为地设置判决门限，因而对信道的变化不敏感。
  - ◆ 在2PSK系统中，判决器的最佳判决门限为零，与接收机输入信号的幅度无关。因此，接收机总能保持工作在最佳判决门限状态。
  - ◆ 对于2ASK系统，判决器的最佳判决门限与接收机输入信号的幅度有关，对信道特性变化敏感，性能最差。



# 第5章数字带通传输系统

## ● 5.4多进制数字调制原理

### ■ 概述

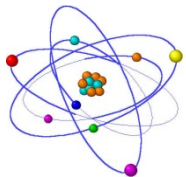
- ◆ 为了提高频带利用率，最有效的办法是使一个码元传输多个比特的信息。
- ◆ 由5.3节中的讨论得知，各种键控体制的误码率都决定于信噪比 $r$ ：
$$r = a^2 / 2\sigma_n^2$$

它还可以改写为码元能量 $E$ 和噪声单边功率谱密度 $n_0$ 之比：

- ◆ 设多进制码元的进制数为 $M$ ，码元能量为 $E$ ，一个码元中包含信息 $k$ 比特，则有 $k = \log_2 M$
- ◆ 若码元能量 $E$ 平均分配给每个比特，则每比特的能量 $E_b$ 等于 $E / k$ 。故有

$$\frac{E_b}{n_0} = \frac{E}{k n_0} = \frac{r}{k} = r_b$$

- ◆ 在研究不同 $M$ 值下的误码率时，适合用 $r_b$ 为单位来比较不同体制的性能优劣。

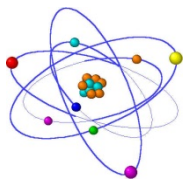


# 第5章 数字带通传输系统

## ■ 5.4.1 多进制振幅键控(MASK)

### ◆ 概述

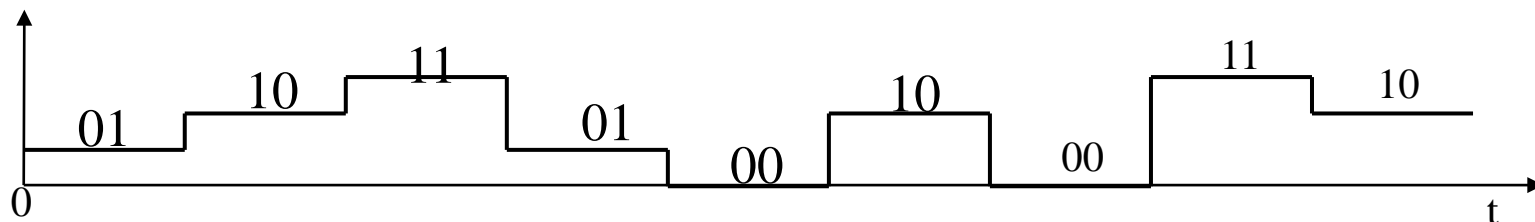
- 多进制振幅键控又称多电平调制
- 优点：MASK信号的带宽和2ASK信号的带宽相同，故单位频带的信息传输速率高，即频带利用率高。



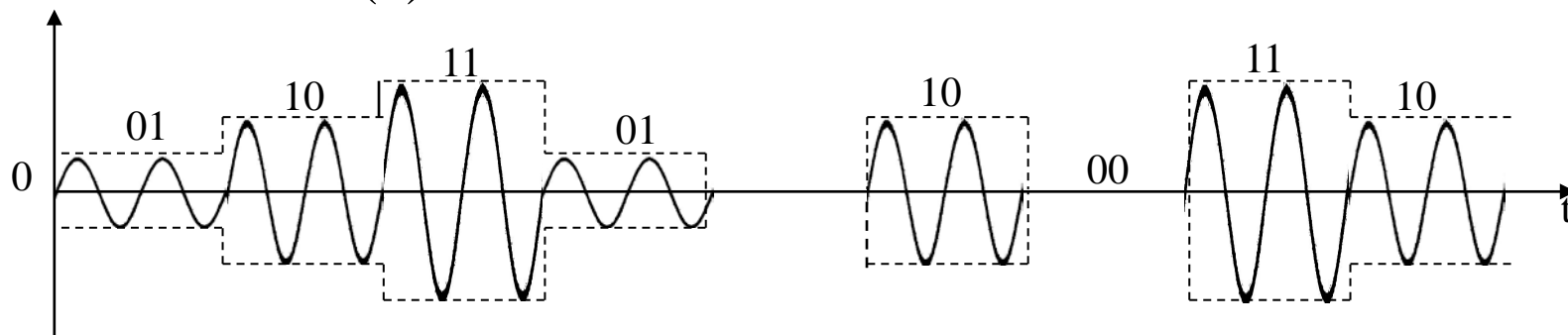
# 第5章 数字带通传输系统

## ◆ 举例

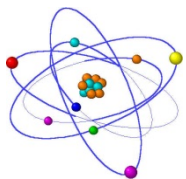
▣ 基带信号是多进制单极性不归零脉冲



(a) 基带多电平单极性不归零信号



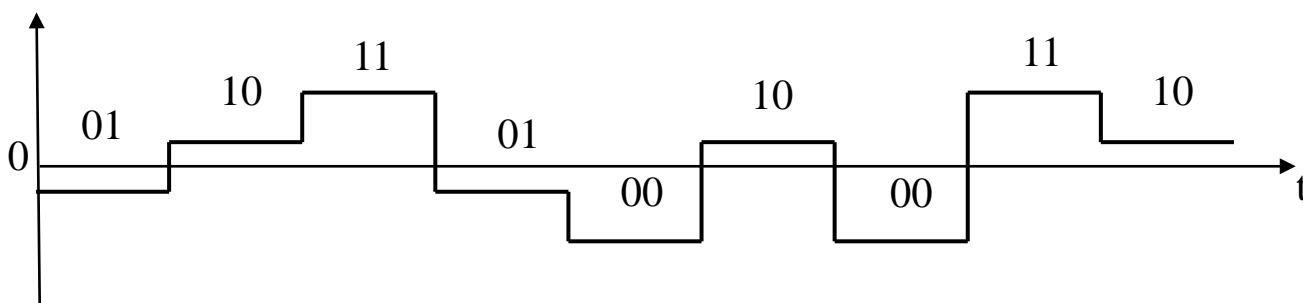
(b) MASK信号



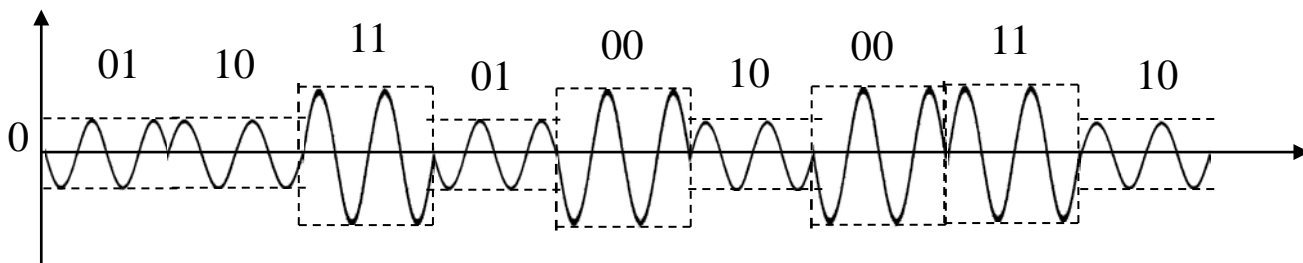
# 第5章 数字带通传输系统

■ 基带信号是多进制双极性不归零脉冲

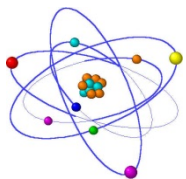
二进制抑制载波双边带信号就是2PSK信号。



(c) 基带多电平双极性不归零信号



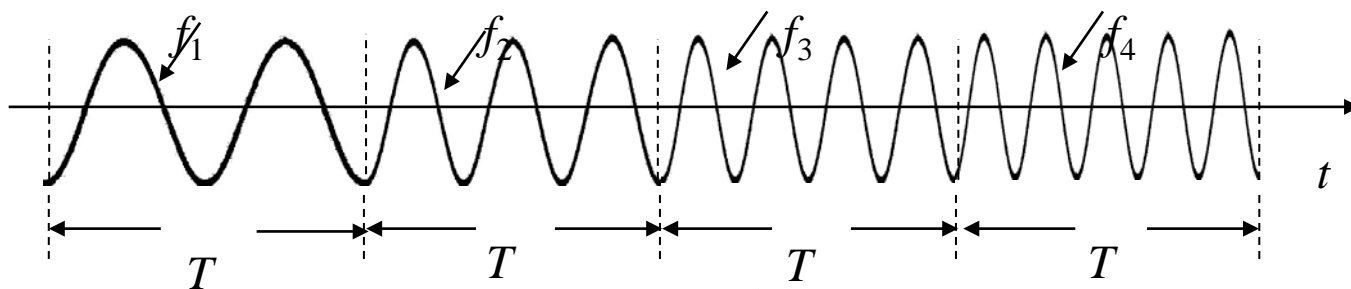
(d) 抑制载波MASK信号



# 第5章数字带通传输系统

## ■ 5.4.2 多进制频移键控(MFSK)

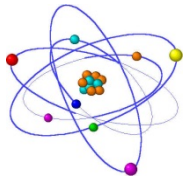
### ◆ 4FSK信号波形举例



(a) 4FSK信号波形

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
00	01	10	11

(b) 4FSK信号的取值



# 第5章 数字带通传输系统

- ◆ MFSK信号的带宽:

$$B = f_M - f_1 + \Delta f$$

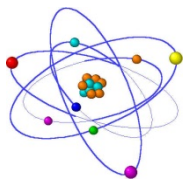
式中

$f_1$  — 最低载频

$f_M$  — 最高载频

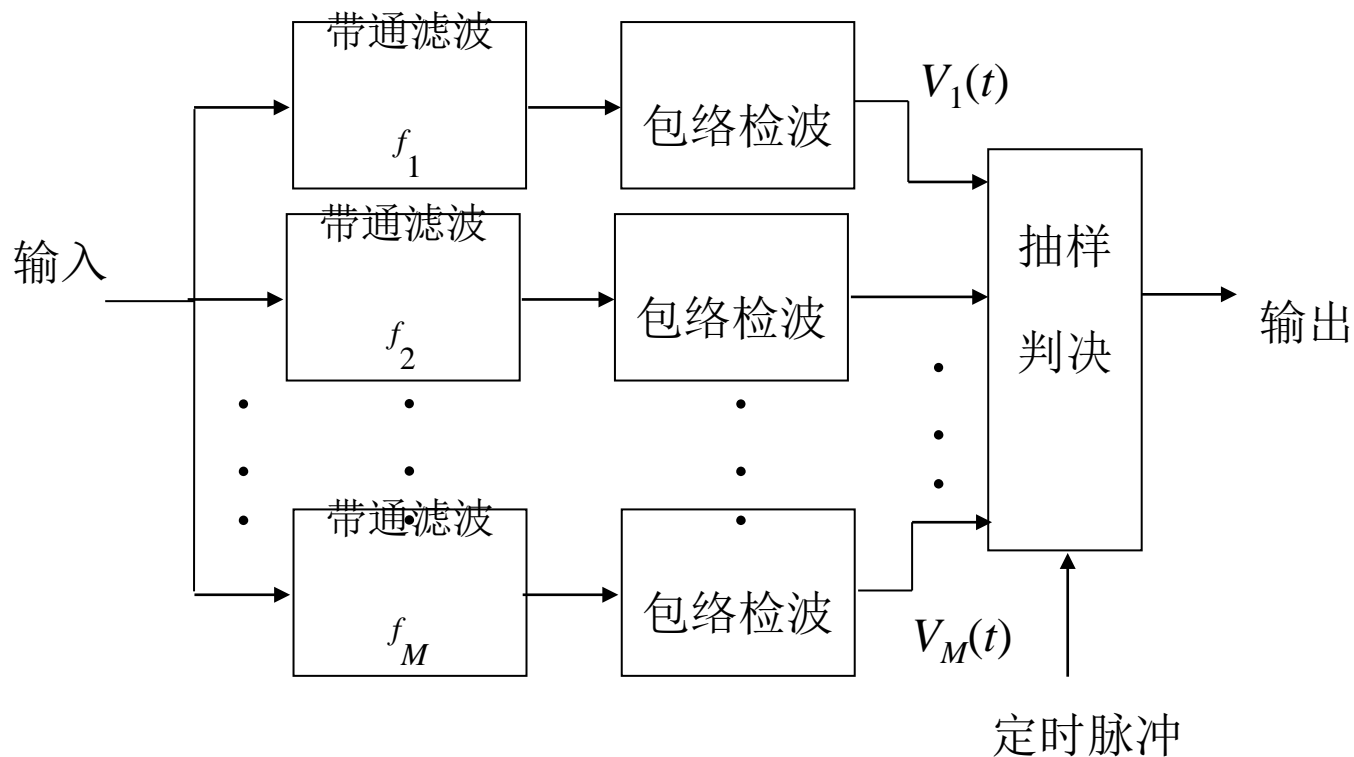
$\Delta f$  — 单个码元的带宽

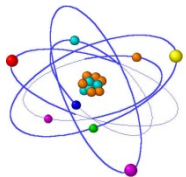




# 第5章 数字带通传输系统

## ◆ MFSK非相干解调器的原理方框图





# 第5章 数字带通传输系统

## ■ 5.4.3 多进制相移键控(MPSK)

### ◆ 基本原理

一个MPSK信号码元可以表示为

$$s_k(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_k) \quad k = 1, 2, \dots, M$$

式中,  $A$  — 常数,

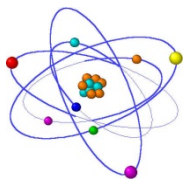
$\theta_k$  — 一组间隔均匀的受调制相位

它可以写为

$$\theta_k = \frac{2\pi}{M}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, M$$

通常 $M$ 取2的某次幂:

$$M = 2^k, \quad k = \text{正整数}$$



# 第5章 数字带通传输系统

在下图中示出当 $k = 3$ 时， $\theta_k$ 取值的一例。图中示出当发送信号的相位为 $\theta_1 = 0$ 时，能够正确接收的相位范围在 $\pm\pi/8$ 内。对于多进制PSK信号，不能简单地采用一个相干载波进行相干解调。例如，若用 $\cos 2\pi f_0 t$ 作为相干载波时，因为 $\cos \theta_k = \cos(2\pi - \theta_k)$ ，使解调存在模糊。这时需要用两个正交的相干载波解调。

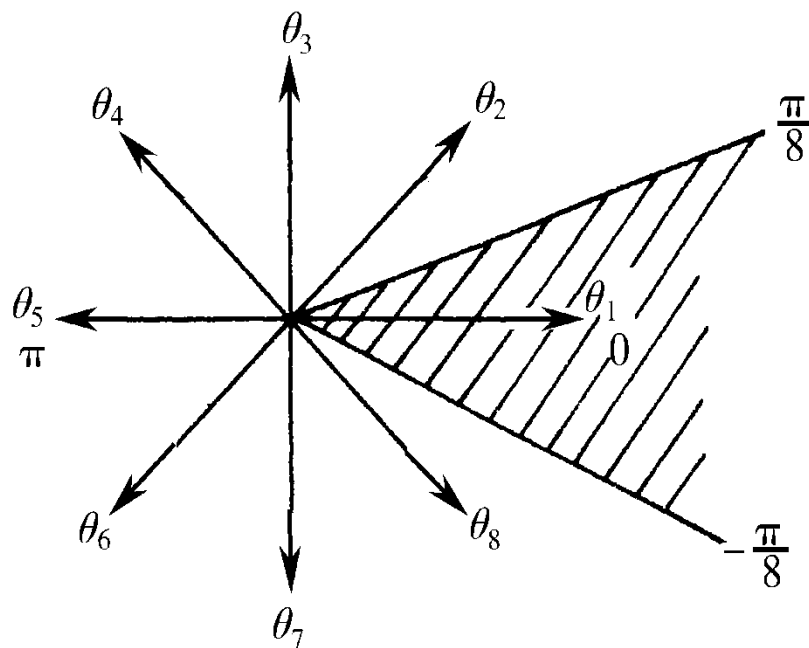
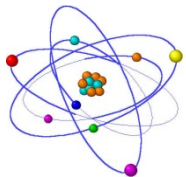


图7-34 8PSK信号相位



# 第5章数字带通传输系统

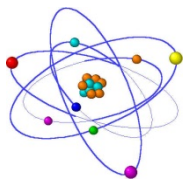
可以将MPSK信号码元表示式展开写成

$$\begin{aligned}s_k(t) &= \cos(\omega_0 t + \theta_k) \\ &= a_k \cos \omega_0 t - b_k \sin \omega_0 t\end{aligned}$$

式中  $a_k = \cos \theta_k$        $b_k = \sin \theta_k$

上式表明，MPSK信号码元 $s_k(t)$ 可以看作是由正弦和余弦两个正交分量合成的信号，并且 $a_k^2 + b_k^2 = 1$ 。因此，其带宽和MASK信号的带宽相同。

本节下面主要以 $M = 4$ 为例，对4PSK作进一步的分析。



# 第5章 数字带通传输系统

## ■ 正交相移键控(QPSK)

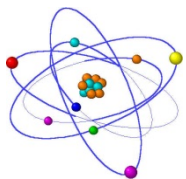
- ◆ 4PSK常称为正交相移键控(QPSK)

- ◆ 格雷(Gray)码

- 4PSK信号每个码元含有2 比特的信息，现用 $ab$ 代表这两个比特。
- 两个比特有4种组合，即00、01、10和11。它们和相位 $\theta_k$ 之间的关系通常都按格雷码的规律安排，如下表所示。

QPSK信号的编码

$a$	$b$	$\theta_k$
0	0	$90^\circ$
0	1	$0^\circ$
1	1	$270^\circ$
1	0	$180^\circ$



# 第5章数字带通传输系统

## □ QPSK信号矢量图

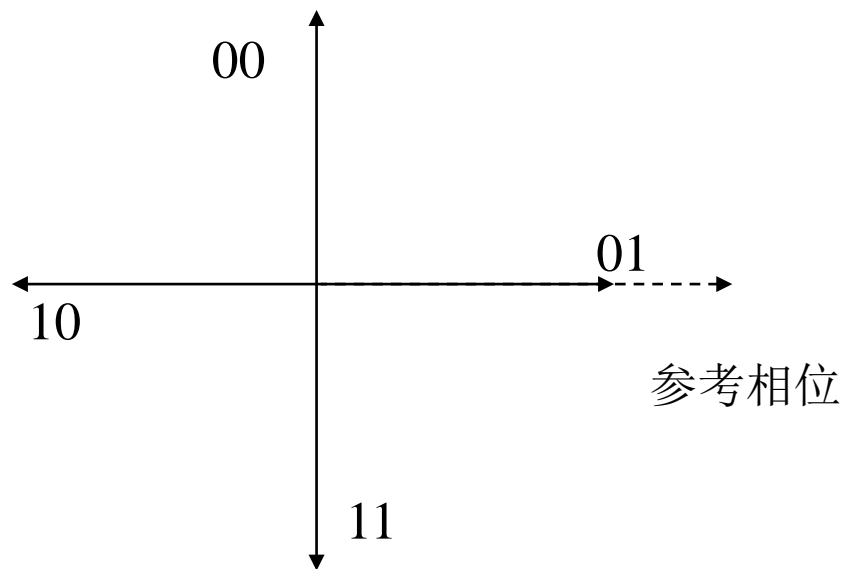
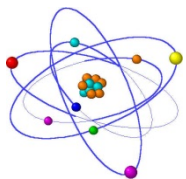


图7-35 QPSK信号的矢量图

- 格雷码的好处在于相邻相位所代表的两个比特只有一位不同。由于因相位误差造成错判至相邻相位上的概率最大，故这样编码使之仅造成一个比特误码的概率最大。



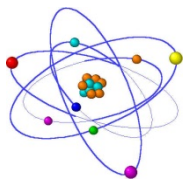
# 第5章 数字带通传输系统

## □ 多位格雷码的编码方法：

表5.4.2 格雷码编码规则

序号	格雷码	二进制
0	0 0 0 0	0000
1	0 0 0 1	0001
2	0 0 1 1	0010
3	0 0 1 0	0011
4	0 1 1 0	0100
5	0 1 1 1	0101
6	0 1 0 1	0110
7	0 1 0 0	0111
8	1 1 0 0	1000
9	1 1 0 1	1001
10	1 1 1 1	1010
11	1 1 1 0	1011
12	1 0 1 0	1100
13	1 0 1 1	1101
14	1 0 0 1	1110
15	1 0 0 0	1111

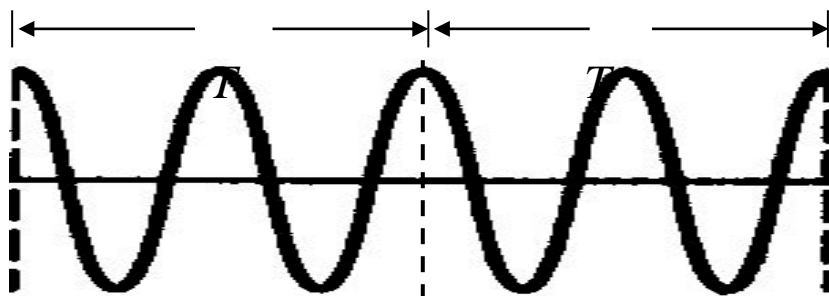
格雷码又称反射码。



# 第5章 数字带通传输系统

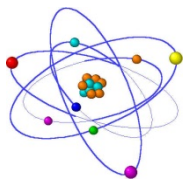
## ◆ 码元相位关系

- $\theta_k$ 称为初始相位，常简称为相位，而把 $(\omega_0 t + \theta_k)$ 称为信号的瞬时相位。
- 当码元中包含整数个载波周期时，初始相位相同的相邻码元的波形和瞬时相位才是连续的，如下图：



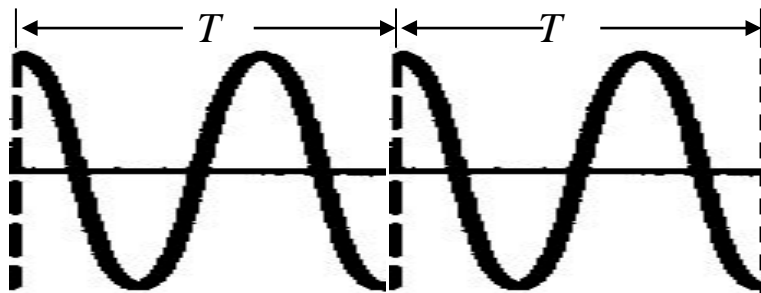
(a) 波形和相位连续





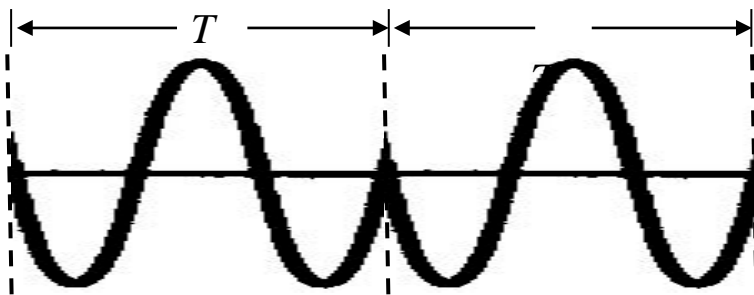
# 第5章 数字带通传输系统

- 若每个码元中的载波周期数不是整数，则即使初始相位相同，波形和瞬时相位也可能不连续，如下图

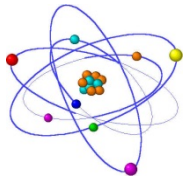


(b) 波形和相位不连续

或者波形连续而相位不连续，如下图

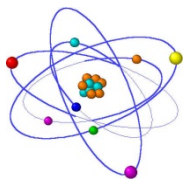


(c) 波形连续相位不连续



# 第5章 数字带通传输系统

- 在码元边界，当相位不连续时，信号的频谱将展宽，包络也将出现起伏。
- 在后面讨论各种调制体制时，还将遇到这个问题。并且有时将码元中包含整数个载波周期的假设隐含不提，认为PSK信号的初始相位相同，则码元边界的瞬时相位一定连续。



# 第5章数字带通传输系统

## ◆ QPSK调制

▣ 两种产生方法:

➤ 相乘电路法

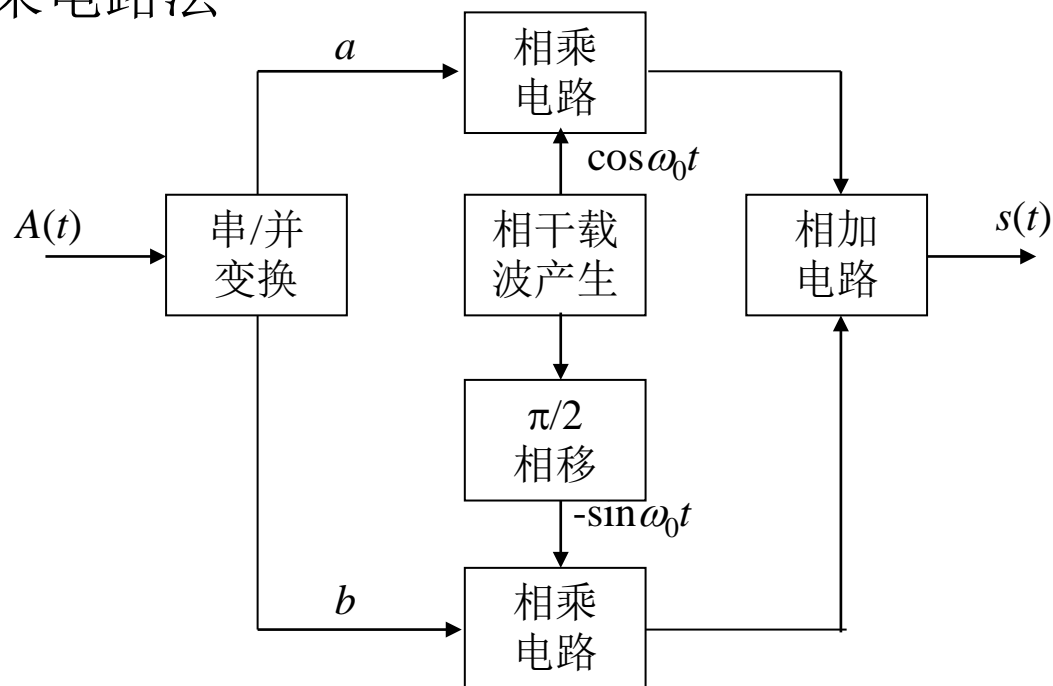
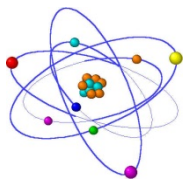


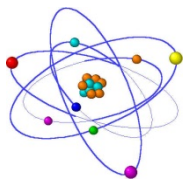
图7-37 第一种QPSK信号产生方法



# 第5章 数字带通传输系统

码元串并变换：





# 第5章数字带通传输系统

矢量图：

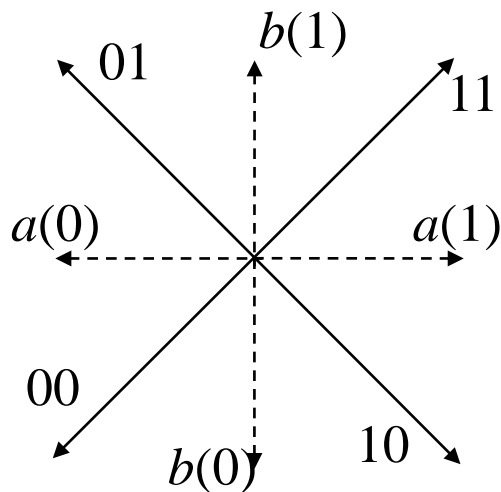


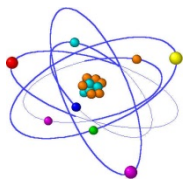
图7-39 QPSK矢量的产生

二进制信号码元“0”和“1”在相乘电路中与不归零双极性矩形脉冲振幅的关系如下：

二进制码元“1” → 双极性脉冲“+1”；

二进制码元“0” → 双极性脉冲“-1”。

符合上述关系才能得到第6章中的B方式编码规则。



# 第5章 数字带通传输系统

## ➤ 选择法

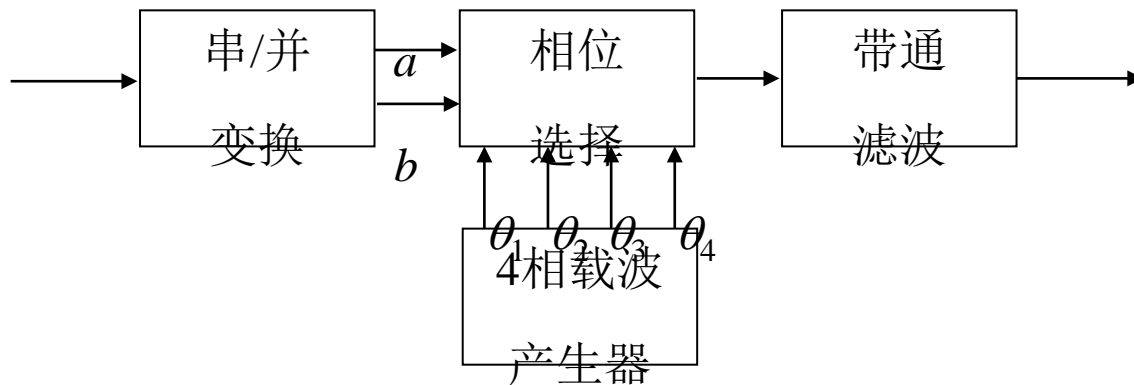
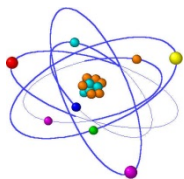


图7-40 选择法产生QPSK信号



# 第5章数字带通传输系统

## ◆ QPSK解调

### ▣ 原理方框图

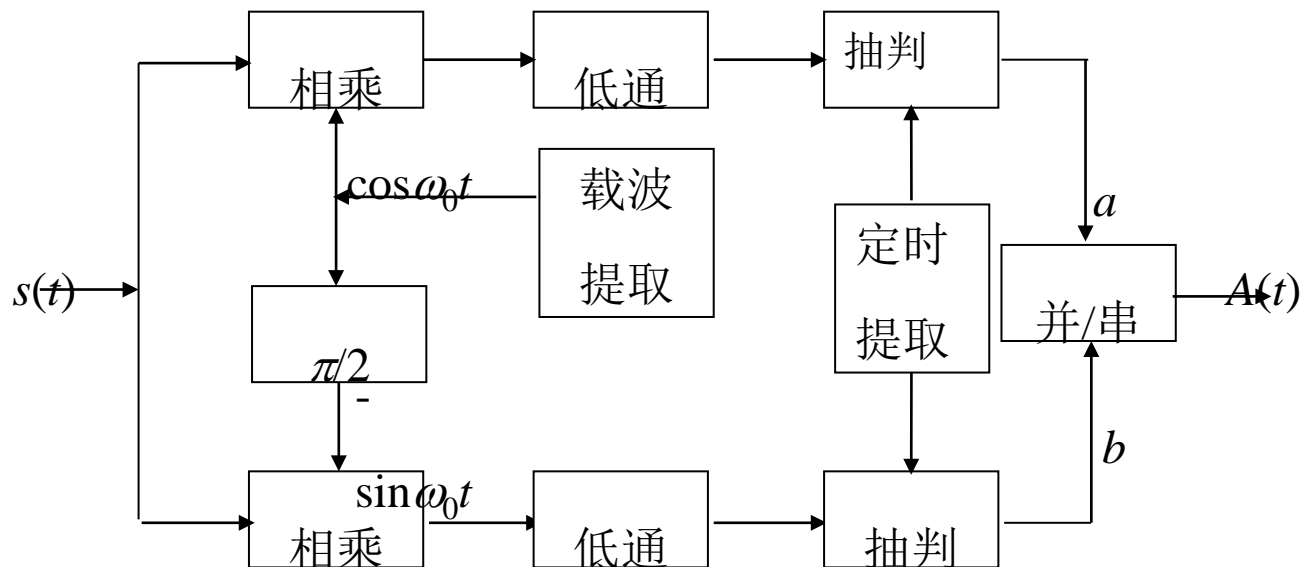
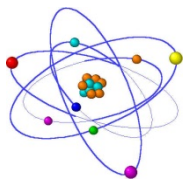


图7-41 QPSK信号解调原理方框图

- 用两路正交的相干载波去解调，可以很容易地分离这两路正交的2PSK信号。
- 相干解调后的两路并行码元 $a$ 和 $b$ ，经过并/串变换后，成为串行数据输出。



# 第5章数字带通传输系统

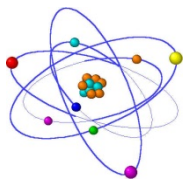
## ■ 偏置QPSK(OQPSK)

- ◆ QPSK体制的缺点：它的相邻码元最大相位差达到 $180^\circ$ ，这在频带受限的系统中会引起信号包络的很大起伏。
- ◆ 偏置QPSK的改进：为了减小此相位突变，将两个正交分量的两个比特 $a$ 和 $b$ 在时间上错开半个码元，使之不可能同时改变。这样安排后相邻码元相位差的最大值仅为 $90^\circ$ （见下表），从而减小了信号振幅的起伏。

$a$	$b$	$\theta_k$
0	0	$90^\circ$
0	1	$0^\circ$
1	1	$270^\circ$
1	0	$180^\circ$

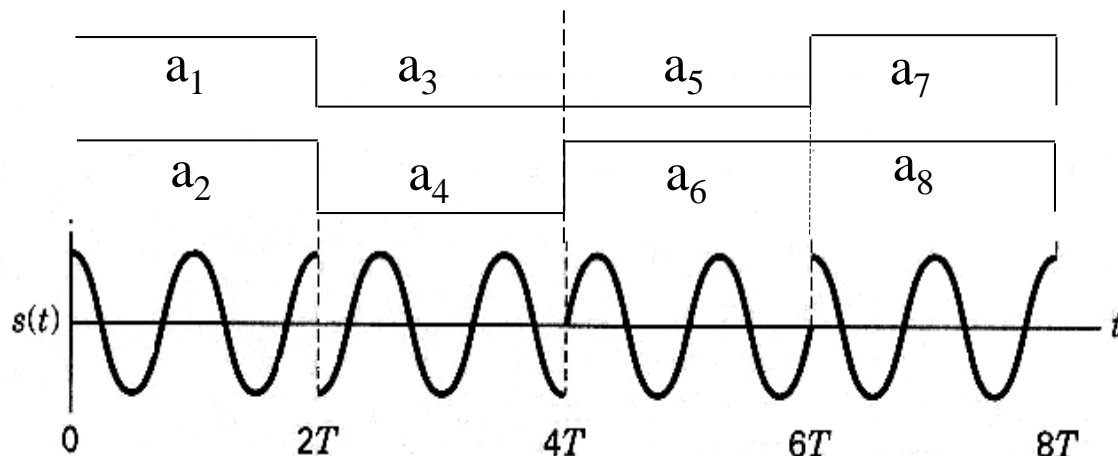
- ◆ OQPSK和QPSK的唯一区别在于：对于QPSK，上表中的两个比特 $a$ 和 $b$ 的持续时间原则上可以不同；而对于OQPSK， $a$ 和 $b$ 的持续时间必须相同。



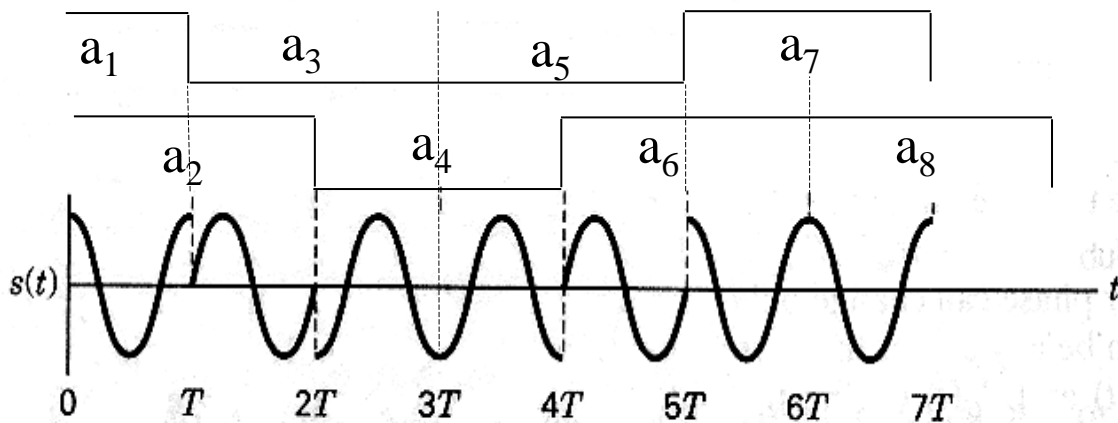


# 第5章数字带通传输系统

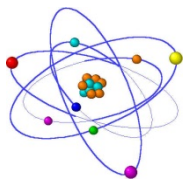
## ◆ OQPSK信号的波形与QPSK信号波形的比较



(a) QPSK



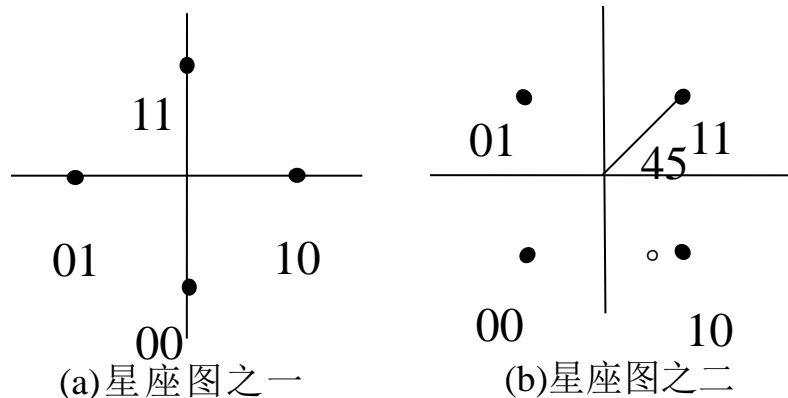
(b) OQPSK



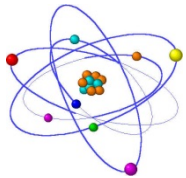
# 第5章数字带通传输系统

## ■ $\pi/4$ 相移QPSK

- ◆  $\pi/4$ 相移QPSK信号是由两个相差 $\pi/4$ 的QPSK星座图交替产生的，它也是一个4进制信号：

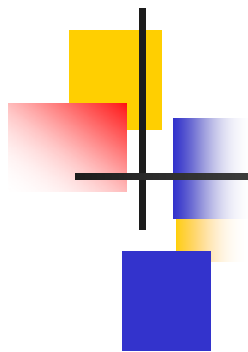


- ◆ 当前码元的相位相对于前一码元的相位改变 $\pm 45^\circ$  或 $\pm 135^\circ$ 。例如，若连续输入“11 11 11 11...”，则信号码元相位为“ $45^\circ 90^\circ 45^\circ 90^\circ \dots$ ”
- ◆ 优点：这种体制中相邻码元间总有相位改变、最大相移为 $\pm 135^\circ$ ，比QPSK的最大相移小。



# 第5章数字带通传输系统

- 5.5 多进制数字调制系统的抗噪声性能（**选学**）



# 通信原理基础

## 第6章 新型数字带通调制技术



## 第6章 新型数字带通调制技术

### • 6.1 正交振幅调制(QAM)

#### ■ 信号表示式:

这种信号的一个码元可以表示为

$$s_k(t) = A_k \cos(\omega_0 t + \theta_k) \quad kT < t \leq (k+1)T$$

式中,  $k = \text{整数}$ ;  $A_k$ 和 $\theta_k$ 分别可以取多个离散值。

上式可以展开为

$$s_k(t) = A_k \cos \theta_k \cos \omega_0 t - A_k \sin \theta_k \sin \omega_0 t$$

$$\text{令 } X_k = A_k \cos \theta_k \quad Y_k = -A_k \sin \theta_k$$

则信号表示式变为

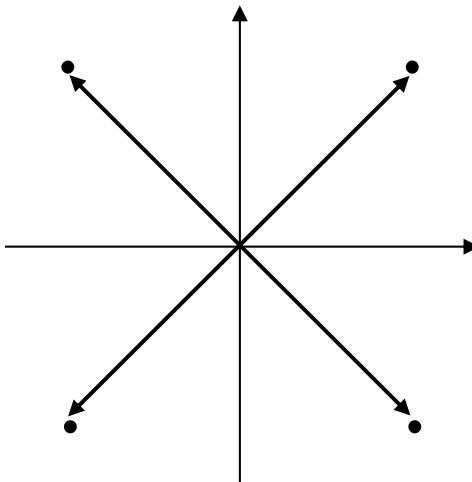
$$s_k(t) = X_k \cos \omega_0 t + Y_k \sin \omega_0 t$$

$X_k$ 和 $Y_k$ 也是可以取多个离散值的变量。从上式看出,  $s_k(t)$ 可以看作是两个正交的振幅键控信号之和。

## 第6章 新型数字带通调制技术

### ■ 矢量图

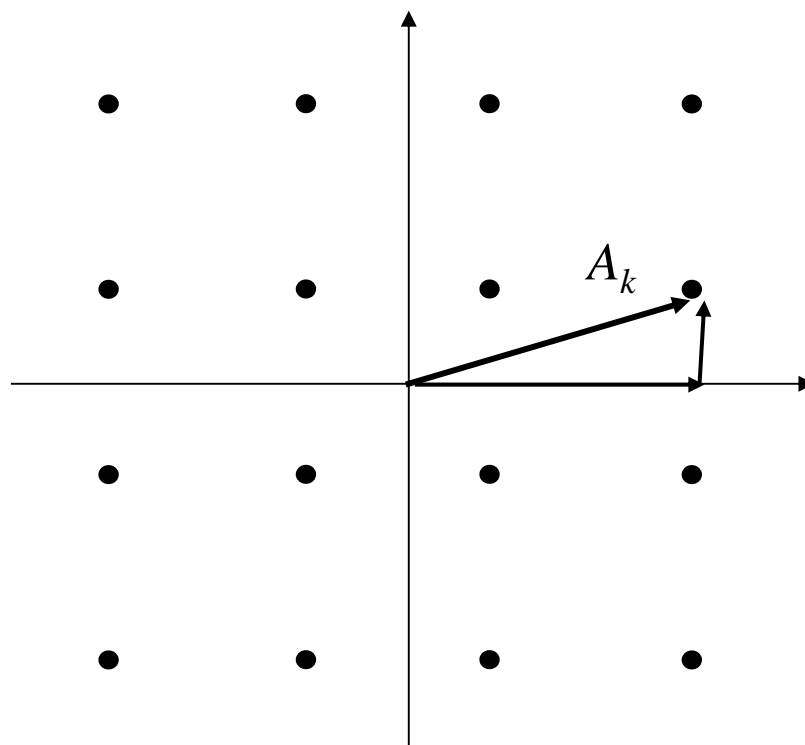
在信号表示式中，若 $\theta_k$ 值仅可以取 $\pi/4$ 和 $-\pi/4$ ， $A_k$ 值仅可以取 $+A$ 和 $-A$ ，则此QAM信号就成为QPSK信号，如下图所示：



所以，QPSK信号就是一种最简单的QAM信号。

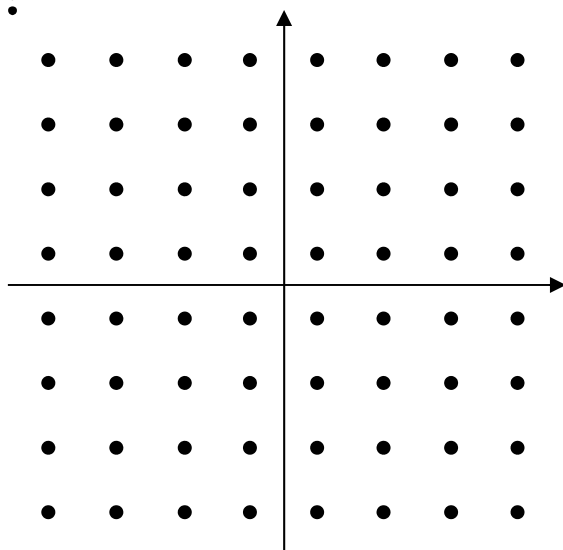
## 第6章 新型数字带通调制技术

有代表性的QAM信号是16进制的，记为**16QAM**，  
它的矢量图示于下图中：

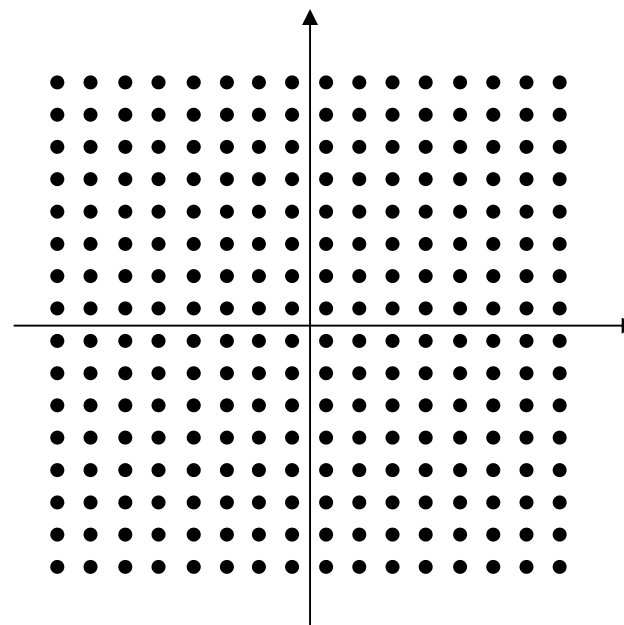


## 第6章 新型数字带通调制技术

类似地，有64QAM和256QAM等QAM信号，如下图所示：



64QAM信号矢量图



256QAM信号矢量图

它们总称为MQAM调制。由于从其矢量图看像是星座，故又称星座调制。

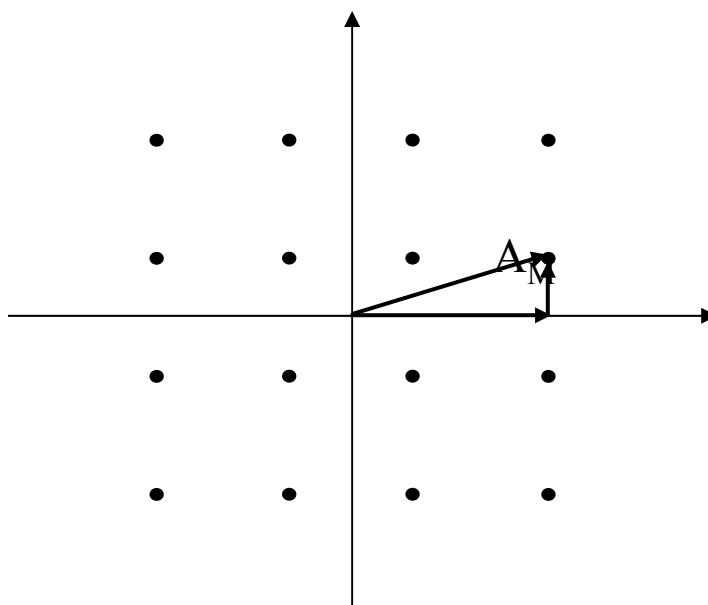


## 第6章 新型数字带通调制技术

### ■ 16QAM信号

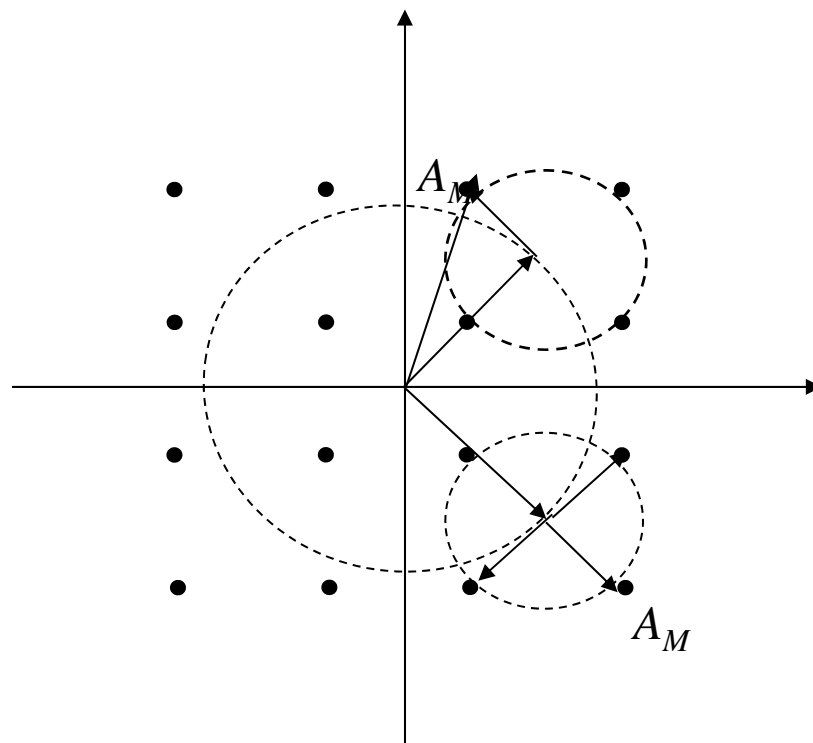
#### ◆ 产生方法

- 正交调幅法：用两路独立的正交4ASK信号叠加，形成16QAM信号，如下图所示。



## 第6章 新型数字带通调制技术

- 复合相移法：它用两路独立的QPSK信号叠加，形成16QAM信号，如下图所示。

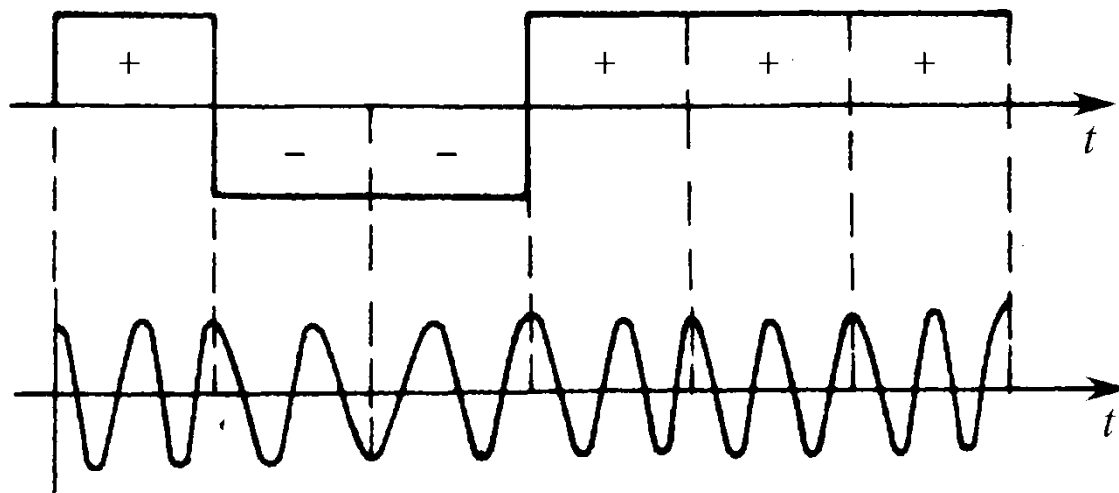


图中虚线大圆上的4个大黑点表示第一个QPSK信号矢量的位置。在这4个位置上可以叠加上第二个QPSK矢量，后者的位置用虚线小圆上的4个小黑点表示。

## 第6章 新型数字带通调制技术

### 6.2 最小频移键控和高斯最小频移键控

- 定义：最小频移键控（MSK）信号是一种包络恒定、相位连续、带宽最小并且严格正交的2FSK信号，其波形图如下：





## 第6章 新型数字带通调制技术

### 6.2.1 正交2FSK信号的最小频率间隔

假设2FSK信号码元的表示式为

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) & \text{当发送“1”时} \\ A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) & \text{当发送“0”时} \end{cases}$$

现在，为了满足正交条件，要求

$$\int_0^{T_s} [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] dt = 0$$

即要求

$$\frac{1}{2} \int_0^{T_s} \{ \cos[(\omega_1 + \omega_0)t + \varphi_1 + \varphi_0] + \cos[(\omega_1 - \omega_0)t + \varphi_1 - \varphi_0] \} dt = 0$$

上式积分结果为

$$\frac{\sin[(\omega_1 + \omega_0)T_s + \varphi_1 + \varphi_0]}{\omega_1 + \omega_0} + \frac{\sin[(\omega_1 - \omega_0)T_s + \varphi_1 - \varphi_0]}{\omega_1 - \omega_0} - \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{\omega_1 + \omega_0} - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{\omega_1 - \omega_0} = 0$$



## 第6章 新型数字带通调制技术

$$\frac{\sin[(\omega_1 + \omega_0)T_s + \varphi_1 + \varphi_0]}{\omega_1 + \omega_0} + \frac{\sin[(\omega_1 - \omega_0)T_s + \varphi_1 - \varphi_0]}{\omega_1 - \omega_0} - \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{\omega_1 + \omega_0} - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{\omega_1 - \omega_0} = 0$$

假设 $\omega_1 + \omega_0 \gg 1$ ，上式左端第1和3项近似等于零，则它可以化简为

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_0)\sin(\omega_1 - \omega_0)T_s + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)[\cos(\omega_1 - \omega_0)T_s - 1] = 0$$

由于 $\varphi_1$ 和 $\varphi_0$ 是任意常数，故必须同时有

$$\sin(\omega_1 - \omega_0)T_s = 0 \quad \cos(\omega_1 - \omega_0)T_s = 1$$

上式才等于零。

为了同时满足这两个要求，应当令 $(\omega_1 - \omega_0)T_s = 2m\pi$

即要求 $f_1 - f_0 = m/T_s$

所以，当取 $m = 1$ 时是最小频率间隔。故最小频率间隔等于 $1/T_s$ 。



## 第6章 新型数字带通调制技术

上面讨论中，假设初始相位 $\varphi_1$ 和 $\varphi_0$ 是任意的，它在接收端无法预知，所以只能采用非相干检波法接收。对于相干接收，则要求初始相位是确定的，在接收端是预知的，这时可以令 $\varphi_1 - \varphi_0 = 0$ 。于是，下式

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_0)\sin(\omega_1 - \omega_0)T_s + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)[\cos(\omega_1 - \omega_0)T_s - 1] = 0$$

可以化简为

$$\sin(\omega_1 - \omega_0)T_s = 0$$

因此，仅要求满足

$$f_1 - f_0 = n / 2T_s$$

所以，对于相干接收，保证正交的2FSK信号的最小频率间隔等于 $1 / 2T_s$ 。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### 6.2.2 MSK信号的基本原理

#### ◆ MSK信号的频率间隔

MSK信号的第 $k$ 个码元可以表示为

$$s_k(t) = \cos(\omega_s t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k) \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$$

式中， $\omega_s$  — 载波角载频；

$a_k = \pm 1$ （当输入码元为“1”时， $a_k = +1$ ；  
当输入码元为“0”时， $a_k = -1$ ）；

$T_s$  — 码元宽度；

$\varphi_k$  — 第 $k$ 个码元的初始相位，它在一个码元宽度中是不变的。



## 第6章 新型数字带通调制技术

$$s_k(t) = \cos(\omega_s t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k) \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$$

由上式可以看出，当输入码元为“1”时， $a_k = +1$ ，故码元频率 $f_1$ 等于 $f_s + 1/(4T_s)$ ；当输入码元为“0”时， $a_k = -1$ ，故码元频率 $f_0$ 等于 $f_s - 1/(4T_s)$ 。所以， $f_1$ 和 $f_0$ 的差等于 $1/(2T_s)$ 。在6.2.1节已经证明，这是2FSK信号的最小频率间隔。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ MSK码元中波形的周期数

$$s_k(t) = \cos(\omega_s t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k) \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$$

可以改写为

$$s_k(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_k), & \text{当 } a_k = +1 \\ \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k), & \text{当 } a_k = -1 \end{cases} \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$$

式中

$$f_1 = f_s + 1/(4T_s)$$

$$f_0 = f_s - 1/(4T_s)$$

由于MSK信号是一个正交2FSK信号，它应该满足正交条件，即

$$\frac{\sin[(\omega_1 + \omega_0)T_s + 2\varphi_k]}{\omega_1 + \omega_0} + \frac{\sin[(\omega_1 - \omega_0)T_s + \varphi_k]}{\omega_1 - \omega_0} - \frac{\sin(2\varphi_k)}{(\omega_1 + \omega_0)} - \frac{\sin(0)}{(\omega_1 - \omega_0)} = 0$$



## 第6章 新型数字带通调制技术

$$\frac{\sin[(\omega_1 + \omega_0)T_s + 2\varphi_k]}{\omega_1 + \omega_0} + \frac{\sin[(\omega_1 - \omega_0)T_s + \varphi_k]}{\omega_1 - \omega_0} - \frac{\sin(2\varphi_k)}{(\omega_1 + \omega_0)} - \frac{\sin(0)}{(\omega_1 - \omega_0)} = 0$$

上式左端4项应分别等于零，所以将第3项 $\sin(2\varphi_k) = 0$ 的条件代入第1项，得到要求

$$\sin(2\omega_s T_s) = 0$$

即要求  $4\pi f_s T_s = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

或  $T_s = n \frac{1}{4f_s} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

上式表示，MSK信号每个码元持续时间 $T_s$ 内包含的波形周期数必须是1 / 4周期的整数倍，即上式可以改写为

$$f_s = \frac{n}{4T_s} = \left(N + \frac{m}{4}\right) \frac{1}{T_s}$$

式中， $N$ — 正整数； $m = 0, 1, 2, 3$



## 第6章 新型数字带通调制技术

并有

$$f_1 = f_s + \frac{1}{4T_s} = \left(N + \frac{m+1}{4}\right) \frac{1}{T_s}$$

$$f_0 = f_s - \frac{1}{4T_s} = \left(N + \frac{m-1}{4}\right) \frac{1}{T_s}$$

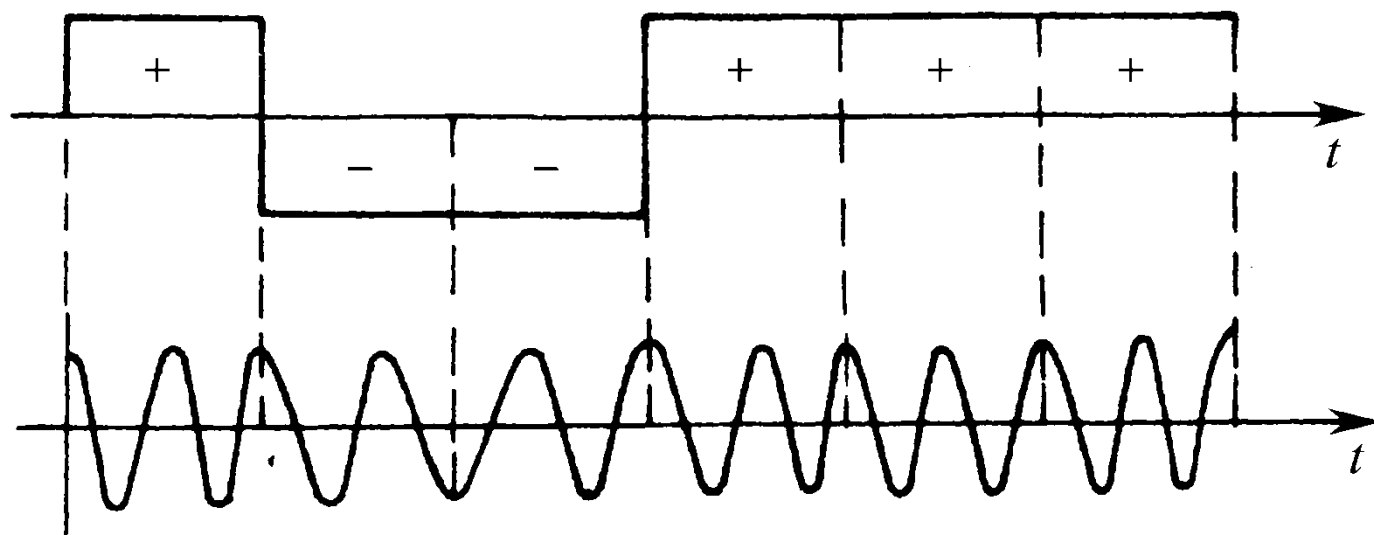
由上式可以得知：

$$T_s = \left(N + \frac{m+1}{4}\right) T_1 = \left(N + \frac{m-1}{4}\right) T_0$$

式中， $T_1 = 1 / f_1$ ； $T_0 = 1 / f_0$

上式给出一个码元持续时间 $T_s$ 内包含的正弦波周期数。由此式看出，无论两个信号频率 $f_1$ 和 $f_0$ 等于何值，这两种码元包含的正弦波数均相差1/2个周期。例如，当 $N=1$ ， $m=3$ 时，对于比特“1”和“0”，一个码元持续时间内分别有2个和1.5个正弦波周期。（见下图）

## 第6章 新型数字带通调制技术





## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ MSK信号的相位连续性

波形（相位）连续的一般条件是前一码元末尾的总相位等于后一码元开始时的总相位，即

$$\omega_s kT_s + \varphi_{k-1} = \omega_s kT_s + \varphi_k$$

这就是要求

$$\frac{a_k \pi}{2T} \cdot kT_s + \varphi_{k-1} = \frac{a_{k+1} \pi}{2T} \cdot kT_s + \varphi_k$$

由上式可以容易地写出下列递归条件

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{k\pi}{2}(a_{k-1} - a_k) = \begin{cases} \varphi_{k-1}, & \text{当 } a_k = a_{k-1} \text{ 时} \\ \varphi_{k-1} \pm k\pi, & \text{当 } a_k \neq a_{k-1} \text{ 时。} \end{cases}$$

由上式可以看出，第 $k$ 个码元的相位不仅和当前的输入有关，而且和前一码元的相位有关。这就是说，要求MSK信号的前后码元之间存在相关性。



## 第6章 新型数字带通调制技术

在用相干法接收时，可以假设 $\varphi_{k-1}$ 的初始参考值等于0。这时，由上式可知

$$\varphi_k = 0 \text{ 或 } \pi, \quad (\text{mod } 2\pi)$$

下式

$$s_k(t) = \cos(\omega_s t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k)$$

可以改写为

$$s_k(t) = \cos[\omega_s t + \theta_k(t)] \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$$

式中

$$\theta_k(t) = \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k$$

$\theta_k(t)$ 称作第 $k$ 个码元的附加相位。



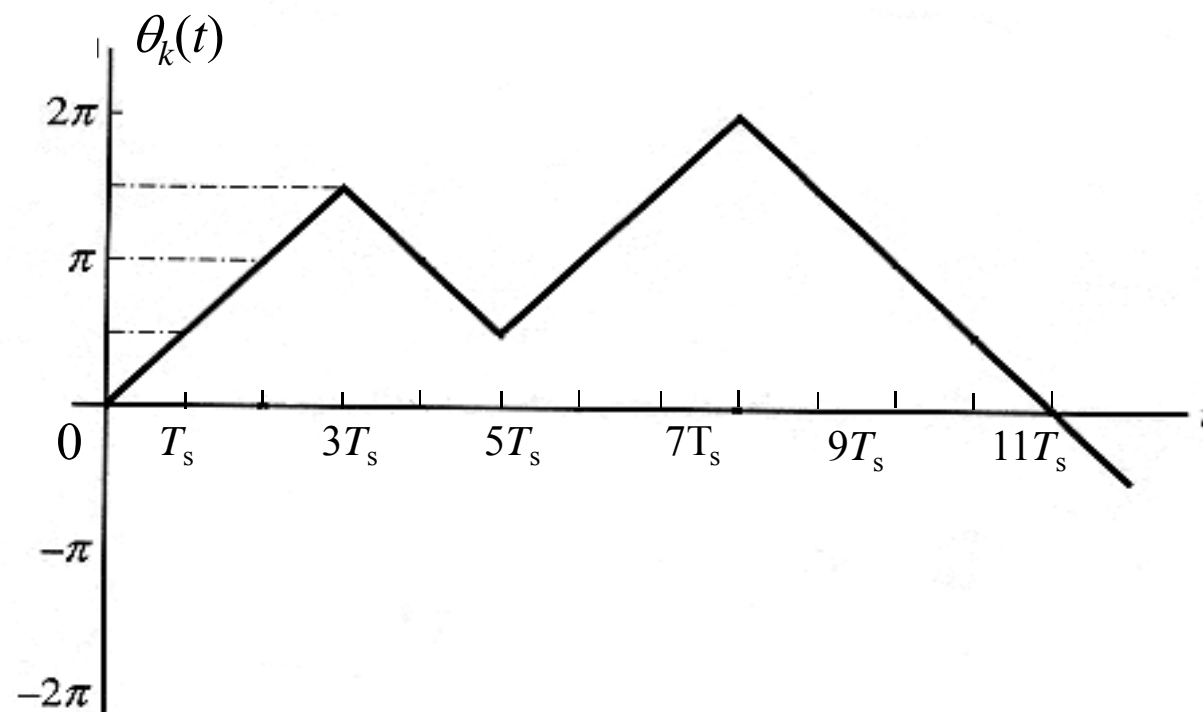
## 第6章 新型数字带通调制技术

$$\theta_k(t) = \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k$$

由上式可见，在此码元持续时间内它是 $t$ 的直线方程。并且，在一个码元持续时间 $T_s$ 内，它变化 $a_k \pi/2$ ，即变化 $\pm \pi/2$ 。按照相位连续性的要求，在第 $k-1$ 个码元的末尾，即当 $t = (k-1)T_s$ 时，其附加相位 $\theta_{k-1}(kT_s)$ 就应该是第 $k$ 个码元的初始附加相位 $\theta_k(kT_s)$ 。所以，每经过一个码元的持续时间，MSK码元的附加相位就改变 $\pm \pi/2$ ；若 $a_k = +1$ ，则第 $k$ 个码元的附加相位增加 $\pi/2$ ；若 $a_k = -1$ ，则第 $k$ 个码元的附加相位减小 $\pi/2$ 。按照这一规律，可以画出MSK信号附加相位 $\theta_k(t)$ 的轨迹图如下：

## 第6章 新型数字带通调制技术

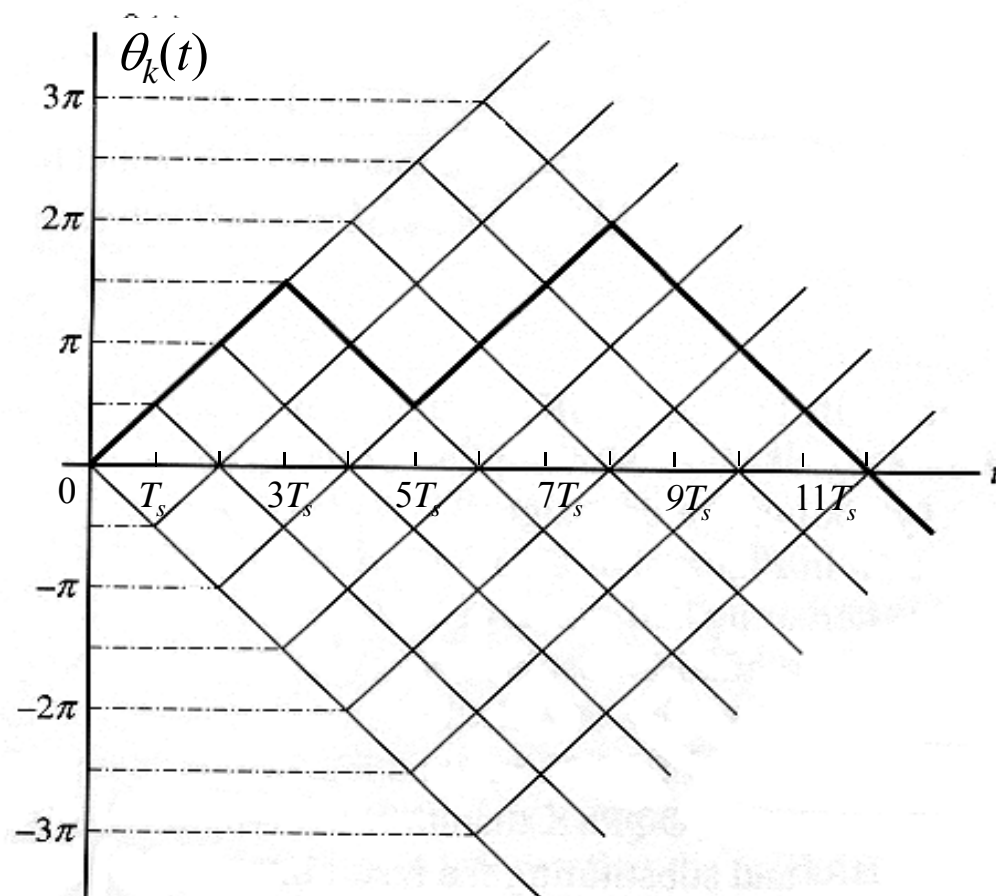
图中给出的曲线所对应的输入数据序列是： $a_k = +1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, -1, -1$





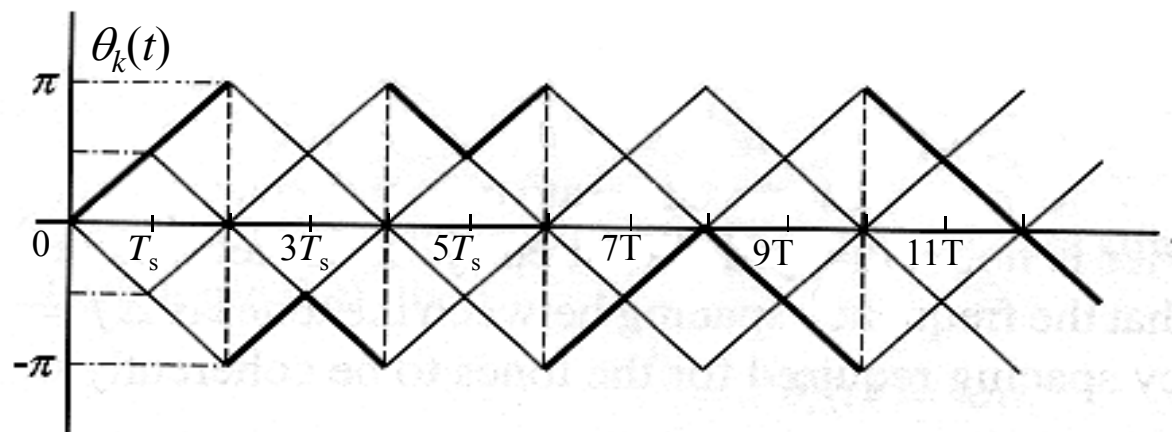
## 第6章 新型数字带通调制技术

附加相位的全部可能路径图：



## 第6章 新型数字带通调制技术

模 $2\pi$ 运算后的附加相位路径:





## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ MSK信号的正交表示法

下面将证明  $s_k(t) = \cos(\omega_s t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k)$

可以用频率为 $f_s$ 的两个正交分量表示。

将  $s_k(t) = \cos(\omega_s t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k) \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$

用三角公式展开：

$$\begin{aligned} s_k(t) &= \cos\left(\frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k\right) \cos \omega_s t - \sin\left(\frac{a_k \pi}{2T_s} t + \varphi_k\right) \sin \omega_s t \\ &= \left( \cos \frac{a_k \pi t}{2T_s} \cos \varphi_k - \sin \frac{a_k \pi t}{2T_s} \sin \varphi_k \right) \cos \omega_s t - \left( \sin \frac{a_k \pi t}{2T_s} \cos \varphi_k + \cos \frac{a_k \pi t}{2T_s} \sin \varphi_k \right) \sin \omega_s t \end{aligned}$$

## 第6章 新型数字带通调制技术

考虑到有  $\sin \varphi_k = 0$ ,  $\cos \varphi_k = \pm 1$

以及

$$a_k = \pm 1, \quad \cos \frac{a_k \pi}{2T_s} t = \cos \frac{\pi t}{2T_s}, \quad \text{及} \quad \sin \frac{a_k \pi}{2T_s} t = a_k \sin \frac{\pi t}{2T_s}$$

上式变成

$$s_k(t) = \cos \varphi_k \cos \frac{\pi t}{2T_s} \cos \omega_s t - a_k \cos \varphi_k \sin \frac{\pi t}{2T_s} \sin \omega_s t$$

$$= p_k \cos \frac{\pi t}{2T_s} \cos \omega_s t - q_k \sin \frac{\pi t}{2T_s} \sin \omega_s t \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$$

式中

$$p_k = \cos \varphi_k = \pm 1 \quad q_k = a_k \cos \varphi_k = a_k p_k = \pm 1$$

上式表示，此信号可以分解为同相（I）和正交（Q）分量两部分。I分量的载波为 $\cos \omega_s t$ ， $p_k$ 中包含输入码元信息， $\cos(\pi/2T_s)$ 是其正弦形加权函数；Q分量的载波为 $\sin \omega_s t$ ， $q_k$ 中包含输入码元信息， $\sin(\pi/2T_s)$ 是其正弦形加权函数。25



## 第6章 新型数字带通调制技术

虽然每个码元的持续时间为 $T_s$ ，似乎 $p_k$ 和 $q_k$ 每 $T_s$ 秒可以改变一次，但是 $p_k$ 和 $q_k$ 不可能同时改变。因为仅当 $a_k \neq a_{k-1}$ ，且 $k$ 为奇数时， $p_k$ 才可能改变。但是当 $p_k$ 和 $a_k$ 同时改变时， $q_k$ 不改变；另外，仅当，且 $k$ 为偶数时， $p_k$ 不改变， $q_k$ 才改变。换句话说，当 $k$ 为奇数时， $q_k$ 不会改变。所以两者不能同时改变。

此外，对于第 $k$ 个码元，它处于 $(k-1)T_s < t \leq kT_s$ 范围内，其起点是 $(k-1)T_s$ 。由于 $k$ 为奇数时 $p_k$ 才可能改变，所以只有在起点为 $2nT_s$  ( $n$ 为整数)处，即 $\cos(\pi t/2T_s)$ 的过零点处 $p_k$ 才可能改变。

同理， $q_k$ 只能在 $\sin(\pi t/2T_s)$ 的过零点改变。

因此，加权函数 $\cos(\pi t/2T_s)$ 和 $\sin(\pi t/2T_s)$ 都是正负符号不同的半个正弦波周期。这样就保证了波形的连续性。

## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ MSK信号举例

#### □ 取值表

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t$	$(-T_s, 0)$	$(0, T_s)$	$(T_s, 2T_s)$	$(2T_s, 3T_s)$	$(3T_s, 4T_s)$	$(4T_s, 5T_s)$	$(5T_s, 6T_s)$	$(6T_s, 7T_s)$	$(7T_s, 8T_s)$	$(8T_s, 9T_s)$
$a_k$	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1
$b_k$	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1
$\varphi_k$	0	0	0	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	0
$p_k$	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1
$q_k$	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1

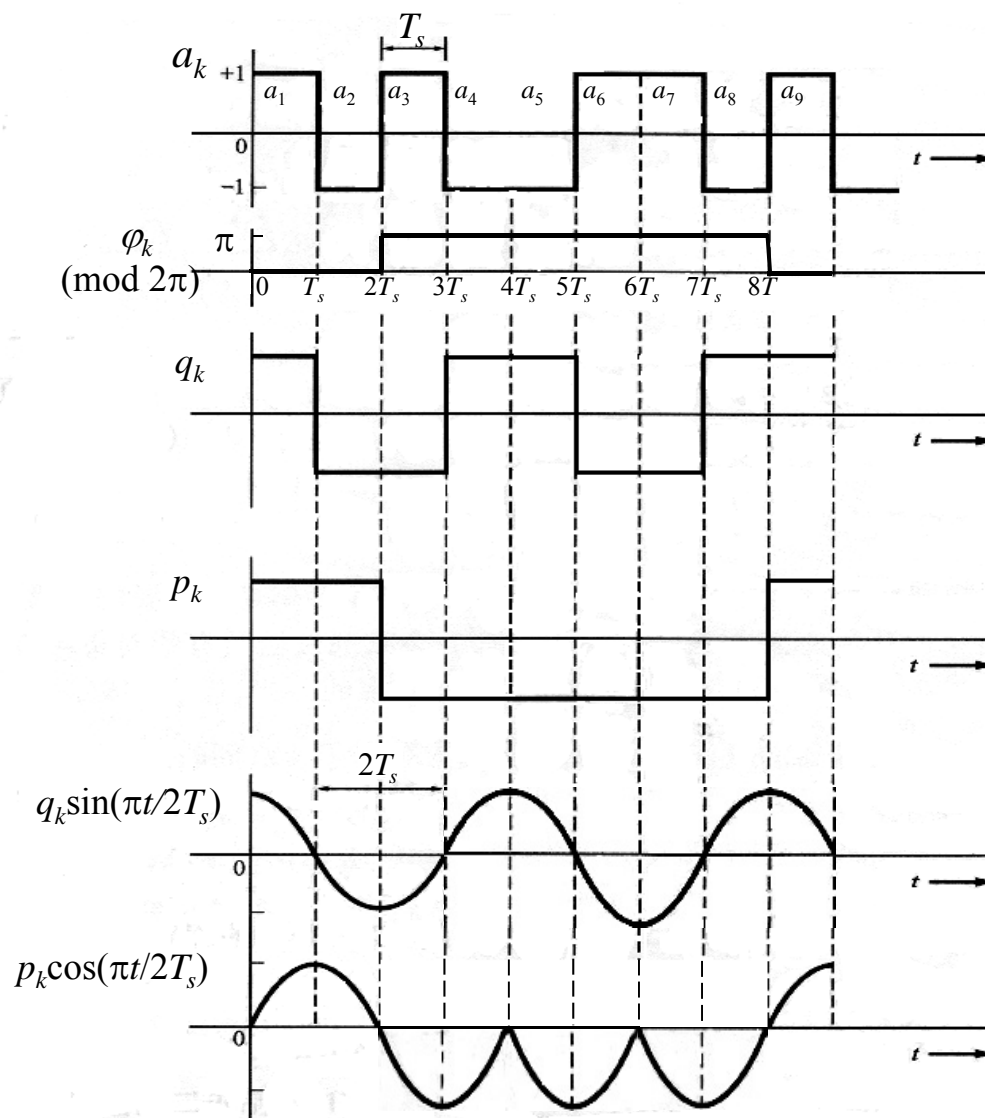
设 $k=0$ 时为初始状态，输入序列 $a_k$ 是：+1，-1，+1，-1，-1，+1，+1，-1，+1。

由此例可以看出， $p_k$ 和 $q_k$ 不可能同时改变符号。

## 第6章 新型数字带通调制技术

### □ 波形图

由此图可见，MSK信号波形相当于一种特殊的OQPSK信号波形，其正交的两路码元也是偏置的，特殊之处主要在于其包络是正弦形，而不是矩形。



## 第6章 新型数字带通调制技术

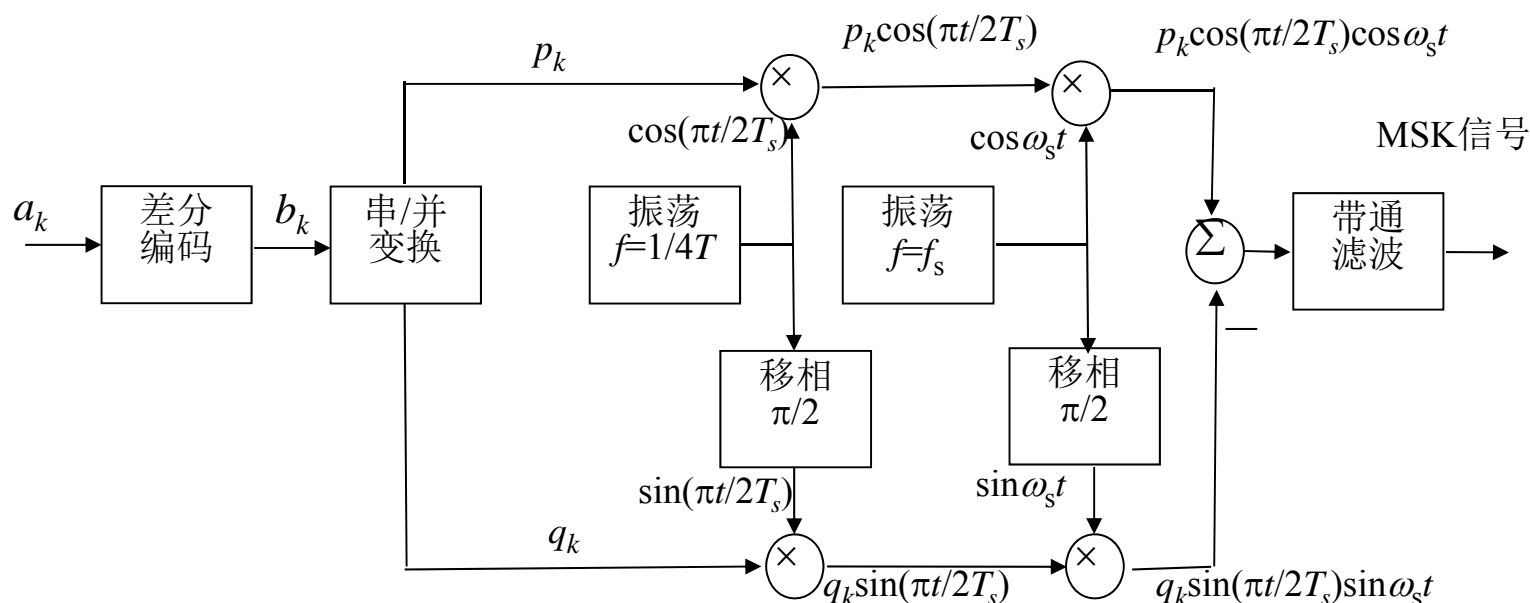
### ■ 6.2.3 MSK信号的产生和解调

#### ◆ MSK信号的产生方法

MSK信号可以用两个正交的分量表示：

$$s_k(t) = p_k \cos \frac{\pi t}{2T_s} \cos \omega_s t - q_k \sin \frac{\pi t}{2T_s} \sin \omega_s t \quad (k-1)T_s < t \leq kT_s$$

根据上式构成的方框图如下：







## 第6章 新型数字带通调制技术

方框图原理举例说明：

输入序列： $a_k = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots = +1, -1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, +1$

它经过差分编码器后得到输出序列：

$$b_k = b_1, b_2, b_3, b_4, \dots = +1, -1, -1, +1, -1, -1, -1, +1, +1$$

序列 $b_k$ 经过串/并变换，分成 $p_k$ 支路和 $q_k$ 支路：

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots = p_1, q_2, p_3, q_4, p_5, q_6, \dots$$

串/并变换输出的支路码元长度为输入码元长度的两倍，若仍然采用原来的序号 $k$ ，将支路第 $k$ 个码元长度仍当作为 $T_s$ ，则可以写成

$$b_1 = p_1 = p_2, \quad b_2 = q_2 = q_3, \quad b_3 = p_3 = p_4, \quad b_4 = q_4 = q_5, \dots$$

这里的 $p_k$ 和 $q_k$ 的长度仍是原来的 $T_s$ 。换句话说，因为 $p_1 = p_2 = b_1$ ，所以由 $p_1$ 和 $p_2$ 构成一个长度等于 $2T_s$ 的取值为 $b_1$ 的码元。 $p_k$ 和 $q_k$ 再经过两次相乘，就能合成MSK信号了。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ $a_k$ 和 $b_k$ 之间是差分编码关系的证明

因为序列 $b_k$ 由 $p_1, q_2, p_3, q_4, \dots, p_{k-1}, q_k, p_{k+1}, q_{k+2}, \dots$ 组成, 所以按照差分编码的定义, 需要证明仅当输入码元为“-1”时,  $b_k$ 变号, 即需要证明当输入码元为“-1”时,  $q_k = -p_k - 1$ , 或 $p_k = -q_k - 1$ 。

➤ 当 $k$ 为偶数时, 下式

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots = p_1, q_2, p_3, q_4, p_5, q_6, \dots$$

右端中的码元为 $q_k$ 。由递归条件

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{k\pi}{2}(a_{k-1} - a_k) = \begin{cases} \varphi_{k-1}, & \text{当 } a_k = a_{k-1} \text{ 时} \\ \varphi_{k-1} \pm k\pi, & \text{当 } a_k \neq a_{k-1} \text{ 时。} \end{cases}$$

可知, 这时 $p_k = p_{k-1}$ , 将其代入

$$q_k = a_k \cos \varphi_k = a_k p_k = \pm 1$$

得到  $q_k = a_k p_k = a_k p_{k-1}$

所以, 当且仅当 $a_k = -1$ 时,  $q_k = -p_{k-1}$ , 即 $b_k$ 变号。 31



## 第6章 新型数字带通调制技术

➤ 当 $k$ 为奇数时，下式

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots = p_1, q_2, p_3, q_4, p_5, q_6, \dots$$

右端中的码元为 $p_k$ 。由递归条件

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{k\pi}{2}(a_{k-1} - a_k) = \begin{cases} \varphi_{k-1}, & \text{当 } a_k = a_{k-1} \text{ 时} \\ \varphi_{k-1} \pm k\pi, & \text{当 } a_k \neq a_{k-1} \text{ 时。} \end{cases}$$

可知，此时若 $a_k$ 变号，则 $\varphi_k$ 改变 $\pi$ ，即 $p_k$ 变号，否则 $p_k$ 不变号，故有

$$p_k = (a_k \cdot a_{k-1})p_{k-1} = a_k(a_{k-1}p_{k-1}) = a_k q_{k-1}$$

将 $a_k = -1$ 代入上式，得到

$$p_k = -q_{k-1}$$

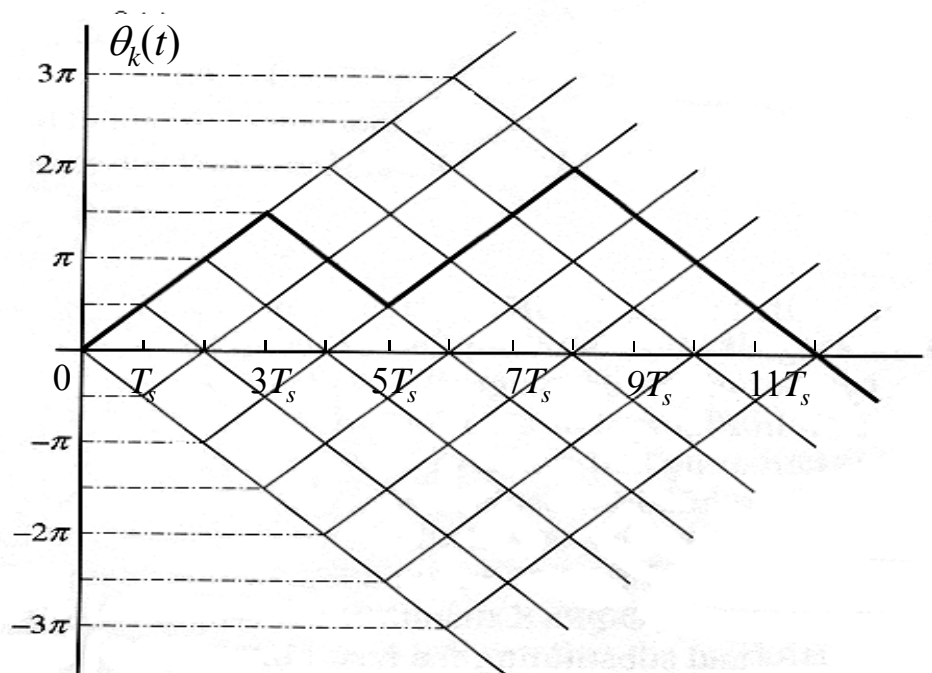
上面证明了 $a_k$ 和 $b_k$ 之间是差分编码关系。

## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ MSK信号的解调方法

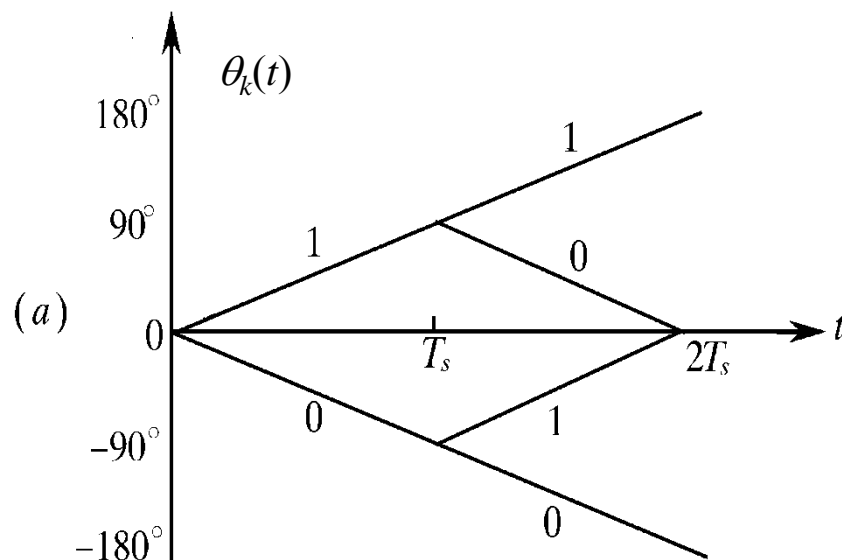
#### □ 延时判决相干解调法的原理

现在先考察 $k=1$ 和 $k=2$ 的两个码元。设 $\varphi_1(t)=0$ ，则由下图可知，



在 $t = 2T$ 时， $\theta_k(t)$ 的相位可能为0或 $\pm\pi$ 。将这部分放大画出如下：

## 第6章 新型数字带通调制技术



在解调时，若用 $\cos(\omega_s t + \pi/2)$ 作为相干载波与此信号相乘，则得到

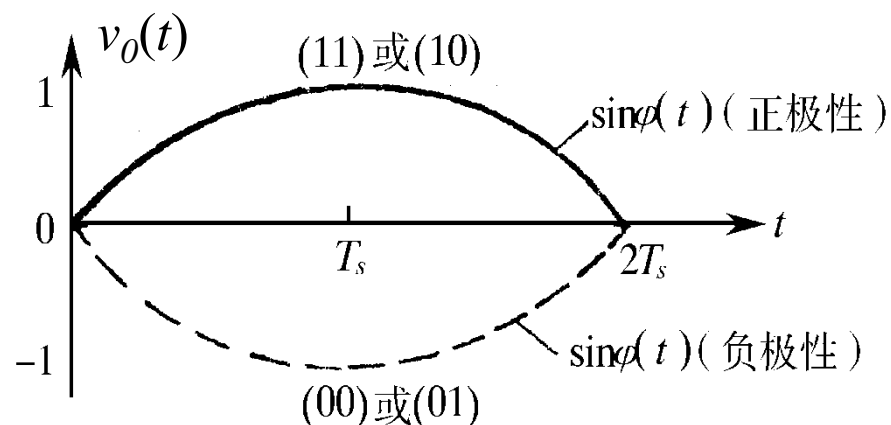
$$\cos[\omega_s t + \theta_k(t)] \cos(\omega_s t + \pi/2) = \frac{1}{2} \cos[\theta_k(t) - \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{2} \cos[2\omega_s t + \theta_k(t) + \frac{\pi}{2}]$$

上式中右端第二项的频率为 $2\omega_s$ 。将它用低通滤波器滤除，并省略掉常数(1/2)后，得到输出电压

$$v_0 = \cos[\theta_k(t) - \frac{\pi}{2}] = \sin \theta_k(t)$$

## 第6章 新型数字带通调制技术

按照输入码元 $a_k$ 的取值不同，输出电压 $v_0$ 的轨迹图如下：



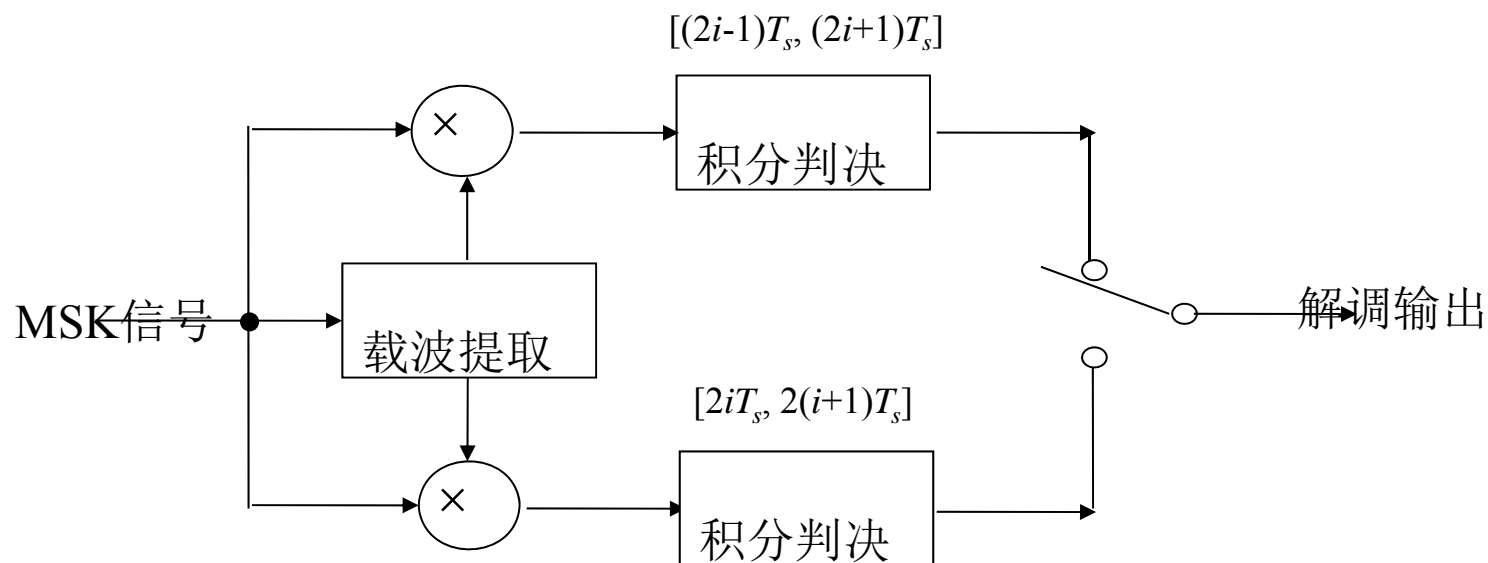
若输入的两个码元为“+1, +1”或“+1, -1”，则 $\theta_k(t)$ 的值在 $0 < t \leq 2T_s$ 期间始终为正。若输入的一对码元为“-1, +1”或“-1, -1”，则 $\theta_k(t)$ 的值始终为负。

因此，若在此 $2T_s$ 期间对上式积分，则积分结果为正值时，说明第一个接收码元为“+1”；若积分结果为负值，则说明第1个接收码元为“-1”。按照此法，在 $T_s < t \leq 3T_s$ 期间积分，就能判断第2个接收码元的值，依此类推。 35

## 第6章 新型数字带通调制技术

用这种方法解调，由于利用了前后两个码元的信息对于前一个码元作判决，故可以提高数据接收的可靠性。

### ■ MSK信号延迟解调法方框图



图中两个积分判决器的积分时间长度均为 $2T_s$ ，但是错开时间 $T_s$ 。上支路的积分判决器先给出第 $2i$ 个码元输出，然后下支路给出第 $(2i+1)$ 个码元输出。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### ■ 6.2.4 高斯最小频移键控

- ◆ 在进行MSK调制前将矩形信号脉冲先通过一个高斯型的低通滤波器。这样的体制称为**高斯最小频移键控(GMSK)**。
- ◆ 此高斯型低通滤波器的频率特性表示式为：

$$H(f) = \exp[-(\ln 2 / 2)(f / B)^2]$$

式中， $B$  — 滤波器的3 dB带宽。

将上式作逆傅里叶变换，得到此滤波器的冲激响应 $h(t)$ ：

$$h(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi}{\alpha} t\right)^2$$

式中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \frac{1}{B}$$

由于 $h(t)$ 为高斯特性，故称为高斯型滤波器。





## 第6章 新型数字带通调制技术

- ◆ GMSK信号的功率谱密度很难分析计算，用计算机仿真方法得到的结果也示于上图中。仿真时采用的 $BT_s = 0.3$ ，即滤波器的3 dB带宽 $B$ 等于码元速率的0.3倍。在GSM制的蜂窝网中就是采用 $BT_s = 0.3$ 的GMSK调制，这是为了得到更大的用户容量，因为在那里对带外辐射的要求非常严格。GMSK体制的缺点是有码间串扰。 $BT_s$ 值越小，码间串扰越大。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### • 6.3 正交频分复用

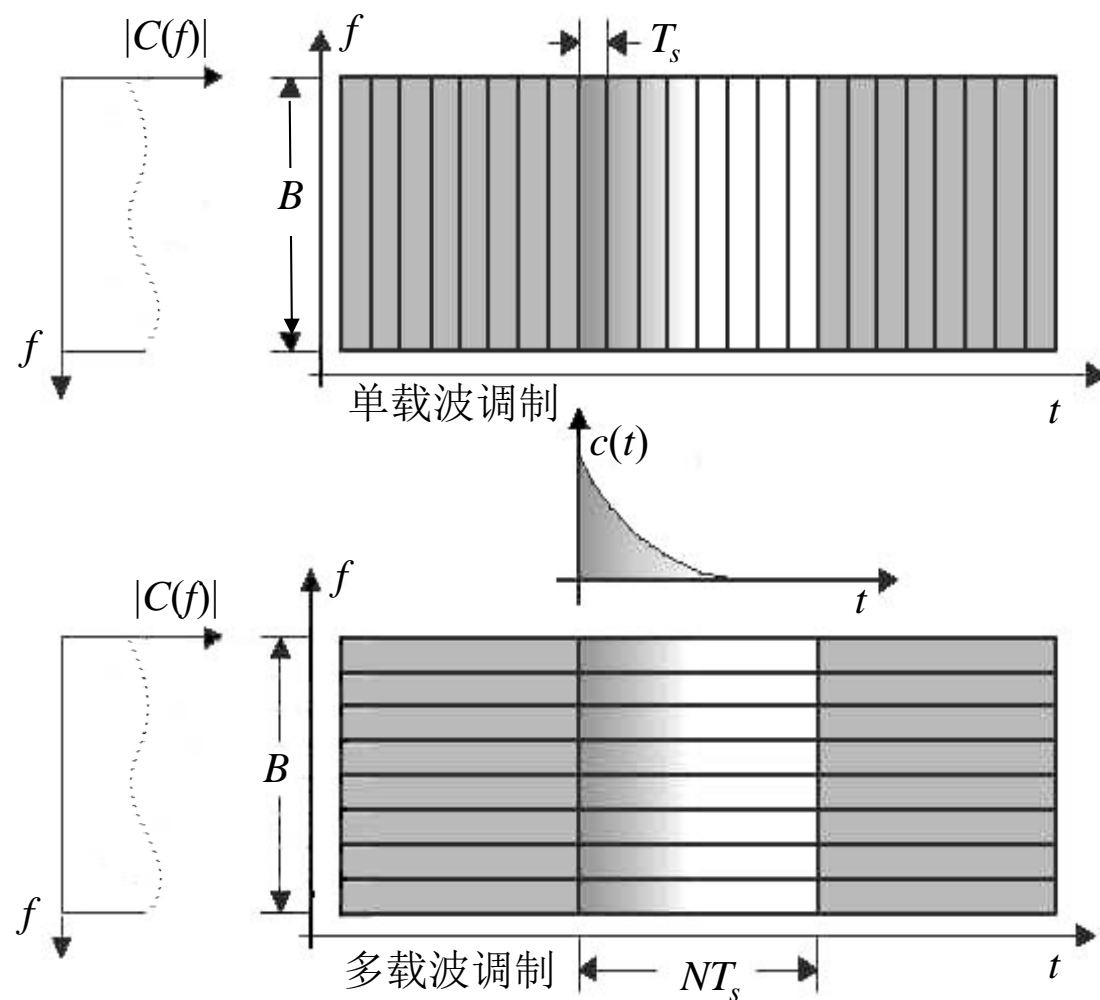
#### ■ 6.3.1 概述

##### ◆ 单载波调制和多载波调制比较

- 单载波体制：码元持续时间 $T_s$ 短，但占用带宽 $B$ 大；由于信道特性 $|C(f)|$ 不理想，产生码间串扰。
- 多载波体制：将信道分成许多子信道。假设有10个子信道，则每个载波的调制码元速率将降低至1/10，每个子信道的带宽也随之减小为1/10。若子信道的带宽足够小，则可以认为信道特性接近理想信道特性，码间串扰可以得到有效的克服。

# 第6章 新型数字带通调制技术

## ◆ 多载波调制原理



多载波调制原理



## 第6章 新型数字带通调制技术

- ◆ 正交频分复用(OFDM)：一类多载波并行调制体制

- OFDM的特点：

- 为了提高频率利用率和增大传输速率，各路子载波的已调信号频谱有部分重叠；
    - 各路已调信号是严格正交的，以便接收端能完全地分离各路信号；
    - 每路子载波的调制是多进制调制；
    - 每路子载波的调制制度可以不同，根据各个子载波处信道特性的优劣不同采用不同的体制。并且可以自适应地改变调制体制以适应信道特性的变化。

- OFDM的缺点：

- 对信道产生的频率偏移和相位噪声很敏感；
    - 信号峰值功率和平均功率的比值较大，这将会降低射频功率放大器的效率。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### 6.3.2 OFDM的基本原理

#### ◆ 表示式

设在一个OFDM系统中有 $N$ 个子信道，每个子信道采用的子载波为

$$x_k(t) = B_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

式中， $B_k$  — 第 $k$ 路子载波的振幅，它受基带码元的调制

$f_k$  — 第 $k$ 路子载波的频率

$\varphi_k$  — 第 $k$ 路子载波的初始相位

则在此系统中的 $N$ 路子信号之和可以表示为

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

上式可以改写成

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k e^{j2\pi f_k t + \varphi_k}$$



## 第6章 新型数字带通调制技术

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_k e^{j2\pi f_k t + \varphi_k}$$

式中， $\mathbf{B}_k$ 是一个复数，为第 $k$ 路子信道中的复输入数据。因此，上式右端是一个复函数。但是，物理信号 $s(t)$ 是实函数。所以若希望用上式的形式表示一个实函数，式中的输入复数据 $\mathbf{B}_k$ 应该使上式右端的虚部等于零。如何做到这一点，将在以后讨论。

## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ 正交条件

为了使这 $N$ 路子信道信号在接收时能够完全分离，要求它们满足正交条件。在码元持续时间 $T_s$ 内任意两个子载波都正交的条件是：

$$\int_0^T \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) dt = 0$$

上式可以用三角公式改写成

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(2\pi(f_k - f_i)t + \varphi_k - \varphi_i)] dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(2\pi(f_k + f_i)t + \varphi_k + \varphi_i)] dt = 0 \end{aligned}$$

它的积分结果为

$$\begin{aligned} & \frac{\sin[2\pi(f_k + f_i)T_s + \varphi_k + \varphi_i]}{2\pi(f_k + f_i)} + \frac{\sin[2\pi(f_k - f_i)T_s + \varphi_k - \varphi_i]}{2\pi(f_k - f_i)} - \\ & \frac{\sin(\varphi_k + \varphi_i)}{2\pi(f_k + f_i)} - \frac{\sin(\varphi_k - \varphi_i)}{2\pi(f_k - f_i)} = 0 \end{aligned}$$



## 第6章 新型数字带通调制技术

$$\frac{\sin [2\pi (f_k + f_i)T_s + \varphi_k + \varphi_i]}{2\pi (f_k + f_i)} + \frac{\sin [2\pi (f_k - f_i)T_s + \varphi_k - \varphi_i]}{2\pi (f_k - f_i)} - \frac{\sin (\varphi_k + \varphi_i)}{2\pi (f_k + f_i)} - \frac{\sin (\varphi_k - \varphi_i)}{2\pi (f_k - f_i)} = 0$$

令上式等于0的条件是：

$$(f_k + f_i)T_s = m \quad \text{和} \quad (f_k - f_i)T_s = n$$

其中 $m = \text{整数}$ 和 $n = \text{整数}$ ；并且 $\varphi_k$ 和 $\varphi_i$ 可以取任意值。

由上式解出，要求

$$f_k = (m + n)/2T_s, \quad f_i = (m - n)/2T_s$$

即要求子载频满足 $f_k = k/2T_s$ ，式中 $k = \text{整数}$ ；且要求子载频间隔 $\Delta f = f_k - f_i = n/T_s$ ，故要求的最小子载频间隔为

$$\Delta f_{\min} = 1/T_s$$

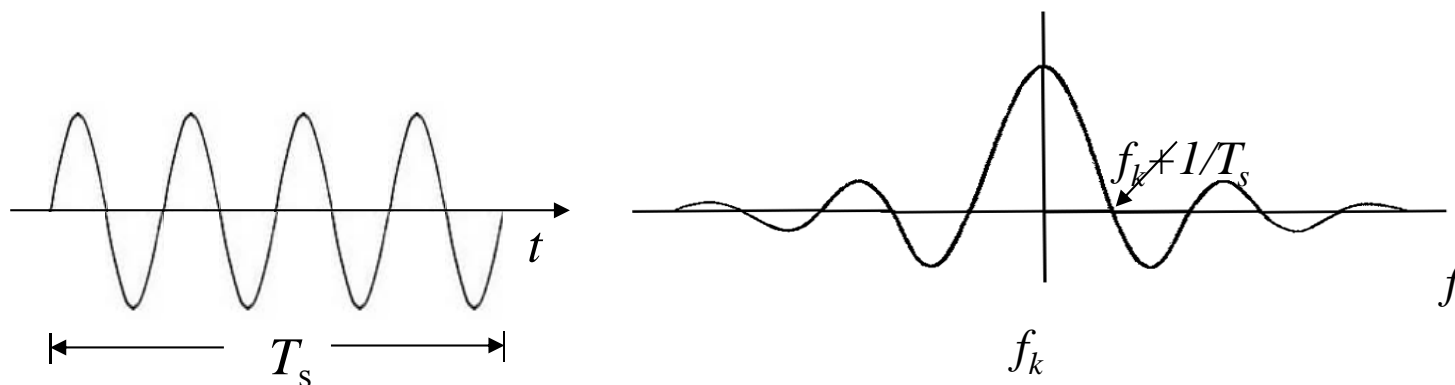
这就是子载频正交的条件。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ OFDM的频域特性

设在一个子信道中，子载波的频率为 $f_k$ 、码元持续时间为 $T_s$ ，则此码元的波形和其频谱密度画出如下图：

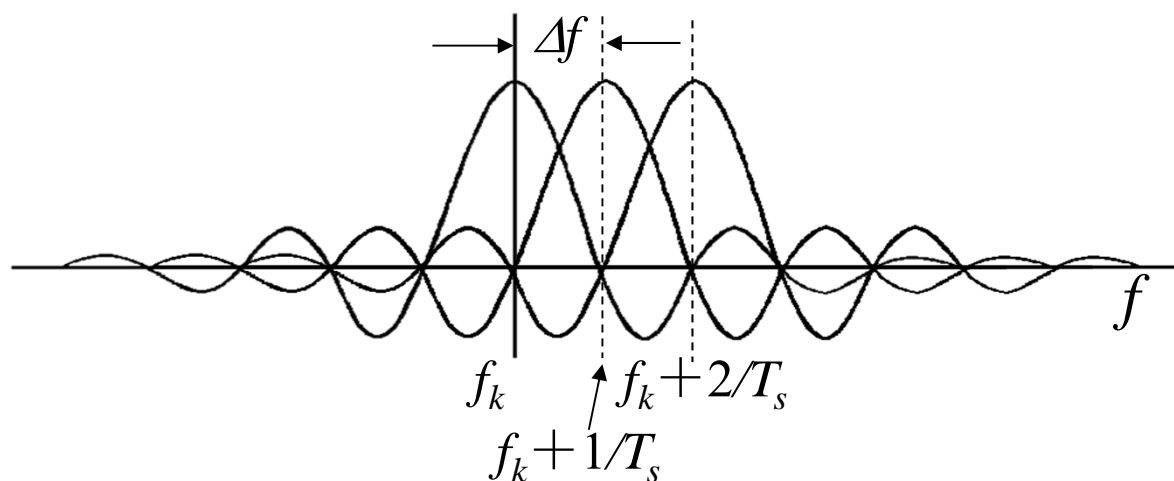


## 第6章 新型数字带通调制技术

在OFDM中，各相邻子载波的频率间隔等于最小容许间隔

$$\Delta f = 1/T_s$$

故各子载波合成后的频谱密度曲线如下图



虽然由图上看，各路子载波的频谱重叠，但是实际上在一个码元持续时间内它们是正交的。故在接收端很容易利用此正交特性将各路子载波分离开。采用这样密集的子载频，并且在子信道间不需要保护频带间隔，因此能够充分利用频带。这是OFDM的一大优点。



## 第6章 新型数字带通调制技术

在子载波受调制后，若采用的是BPSK、QPSK、4QAM、64QAM等类调制制度，则其各路频谱的位置和形状没有改变，仅幅度和相位有变化，故仍保持其正交性，因为 $\varphi_k$ 和 $\varphi_i$ 可以取任意值而不影响正交性。

各路子载波的调制制度可以不同，按照各个子载波所处频段的信道特性采用不同的调制制度，并且可以随信道特性的变化而改变，具有很大的灵活性。这是OFDM体制的又一个重要优点。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ OFDM体制的频带利用率

设一OFDM系统中共有 $N$ 路子载波，子信道码元持续时间为 $T_s$ ，每路子载波均采用 $M$ 进制的调制，则它占用的频带宽度等于

$$B_{OFDM} = \frac{N+1}{T_s}$$

频带利用率为单位带宽传输的比特率：

$$\eta_{B/OFDM} = \frac{N \log_2 M}{T_s} \cdot \frac{1}{B_{OFDM}} = \frac{N}{N+1} \log_2 M$$

当 $N$ 很大时， $\eta_{B/OFDM} \approx \log_2 M$

若用单个载波的 $M$ 进制码元传输，为得到相同的传输速率，则码元持续时间应缩短为 $(T_s/N)$ ，而占用带宽等于 $(2N/T_s)$ ，故频带利用率为

$$\eta_{B/M} = \frac{N \log_2 M}{T_s} \cdot \frac{T_s}{2N} = \frac{1}{2} \log_2 M$$

OFDM和单载波体制相比，频带利用率大约增至两倍。



## 第6章 新型数字带通调制技术

### 6.3.3 OFDM的实现：以MQAM调制为例

#### ◆ 复习DFT公式

设一个时间信号 $s(t)$ 的抽样函数为 $s(k)$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ ，则 $s(k)$ 的离散傅里叶变换(DFT)定义为：

$$S(n) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=0}^{K-1} s(k) e^{-j(2\pi/K)nk} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, K-1)$$

并且 $S(n)$ 的逆离散傅里叶变换(IDFT)为：

$$s(k) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n=0}^{K-1} S(n) e^{j(2\pi/K)nk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K-1)$$



## 第6章 新型数字带通调制技术

若信号的抽样函数 $s(k)$ 是实函数，则其 $K$ 点DFT的值 $S(n)$ 一定满足对称性条件：

$$S(K - k - 1) = S^*(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K - 1)$$

式中 $S^*(k)$ 是 $S(k)$ 的复共轭。

现在，令OFDM信号的 $\varphi_k = 0$ ，则式

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k e^{j2\pi f_k t + \varphi_k}$$

变为

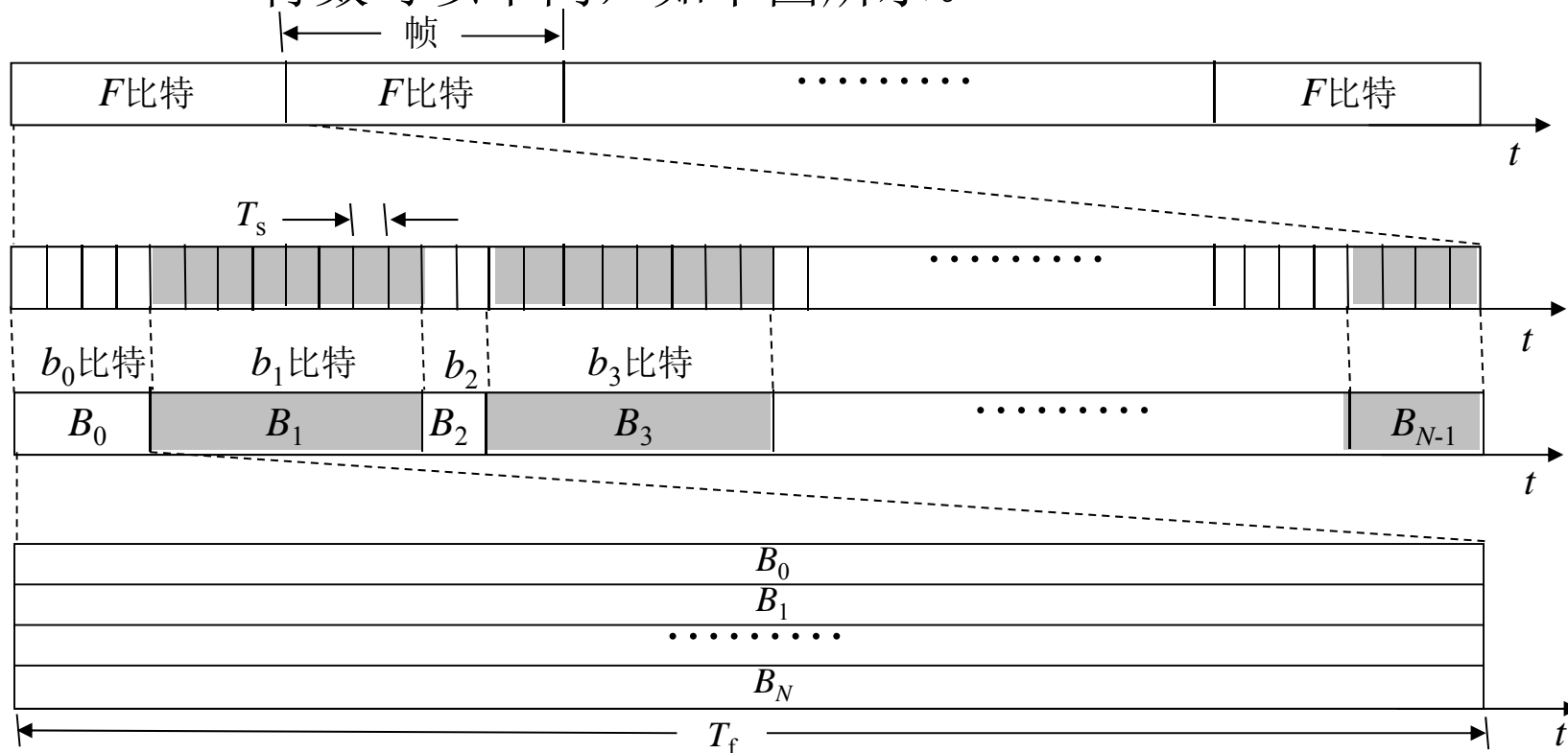
$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k e^{j2\pi f_k t}$$

上式和IDFT式非常相似。若暂时不考虑两式常数因子的差异以及求和项数( $K$ 和 $N$ )的不同，则可以将IDFT式中的 $K$ 个离散值 $S(n)$ 当作是 $K$ 路OFDM并行信号的子信道中信号码元取值 $B_k$ ，而IDFT式的左端就相当上式左端的OFDM信号 $s(t)$ 。这就是说，可以用计算IDFT的方法来获得OFDM信号。下面就来讨论如何具体解决这个计算问题。

## 第6章 新型数字带通调制技术

### ◆ OFDM信号的产生

- 码元分组：先将输入码元序列分成帧，每帧中有 $F$ 个码元，即有 $F$ 比特。然后将此 $F$ 比特分成 $N$ 组，每组中的比特数可以不同，如下图所示。



码元的分组



## 第6章 新型数字带通调制技术

设第 $i$ 组中包含的比特数为 $b_i$ ，则有

$$F = \sum_{i=1}^N b_i$$

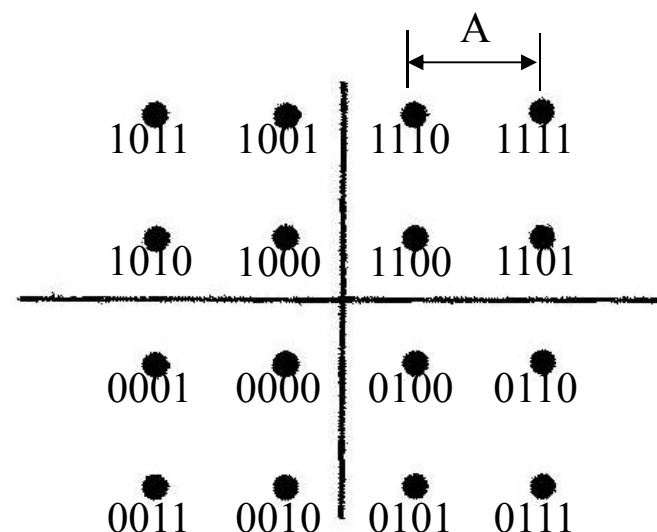
将每组中的 $b_i$ 个比特看作是一个 $M_i$ 进制码元 $B_i$ ，其中 $b_i = \log_2 M_i$ ，并且经过串/并变换将 $F$ 个串行码元 $b_i$ 变为 $N$ 个（路）并行码元 $B_i$ 。各路并行码元 $B_i$ 持续时间相同，均为一帧时间 $T_f = F \cdot T_s$ ，但是各路码元 $B_i$ 包含的比特数不同。这样得到的 $N$ 路并行码元 $B_i$ 用来对于 $N$ 个子载波进行不同的MQAM调制。这时的各个码元 $B_i$ 可能属于不同的 $M_i$ 进制，所以它们各自进行不同的MQAM调制。



## 第6章 新型数字带通调制技术

MQAM调制中一个码元可以用平面上的一个点表示。而平面上的一个点可以用一个矢量或复数表示。下面用复数 $B_i$ 表示此点。将 $M_i$ 进制的码元 $B_i$ 变成一一对应的复数 $B_i$ 的过程称为映射过程。例如，若有一个码元 $B_i$ 是16进制的，它由二进制的输入码元“1100”构成，则它应进行16QAM调制。设其星座图如下图所示，则此16进制码元调制后的相位应该为 $45^\circ$ ，振幅为 $A/2^{1/2}$ 。此映射过程就应当将输入码元“1100”映射为

$$B_i = (A/\sqrt{2})e^{j\pi/4}$$





## 第6章 新型数字带通调制技术

为了用IDFT实现OFDM，首先令OFDM的最低子载波频率等于0，以满足下式

$$s(k) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n=0}^{K-1} S(n) e^{j(2\pi/K)nk} \quad (k=0, 1, 2, \dots, K-1)$$

右端第一项（即 $n=0$ 时）的指数因子等于1。为了得到所需的已调信号最终频率位置，可以用上变频的方法将所得OFDM信号的频谱向上搬移到指定的高频上。



## 第6章 新型数字带通调制技术

其次，我们令 $K = 2N$ ，使IDFT的项数等于子信道数目 $N$ 的两倍，并用对称性条件：

$$S(K - k - 1) = S^*(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K - 1)$$

由 $N$ 个并行复数码元序列 $\{\mathbf{B}_i\}$ ，(其中 $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ )，生成 $K = 2N$ 个等效的复数码元序列 $\{\mathbf{B}_n'\}$ ，(其中 $n = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$ )，即令 $\{\mathbf{B}_n'\}$ 中的元素等于：

$$\mathbf{B}'_{K-n-1} = \mathbf{B}_n^*, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$\mathbf{B}'_{K-n-1} = \mathbf{B}_n, \quad n = N, N + 1, N + 2, \dots, 2N - 2$$

$$\mathbf{B}'_0 = \text{Re}(\mathbf{B}_0)$$

$$\mathbf{B}'_{K-1} = \mathbf{B}'_{2N-1} = \text{Im}(\mathbf{B}_0)$$

这样将生成的新码元序列 $\{\mathbf{B}_n'\}$ 作为 $S(n)$ ，代入IDFT公式，得到

$$s(k) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{B}'_n e^{j(2\pi/K)nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1$$



## 第6章 新型数字带通调制技术

$$s(k) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{B}'_n e^{j(2\pi/K)nk}$$

式中

$$s(k) = s(kT_f / K)$$

它相当于OFDM信号 $s(t)$ 的抽样值。故 $s(t)$ 可以表示为

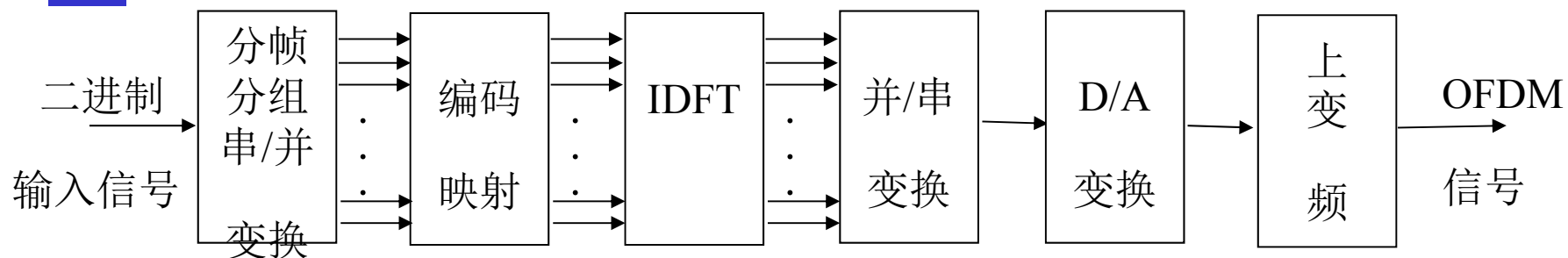
$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{B}'_n e^{j(2\pi/T_f)nt} \quad (0 \leq t \leq T_f)$$

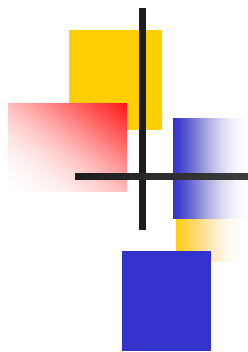
子载波频率 $f_k = n/T_f$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ )。

离散抽样信号 $s(k)$ 经过D/A变换后就得到上式的OFDM信号 $s(t)$ 。

# 第6章 新型数字带通调制技术

## ◆ OFDM调制原理方框图





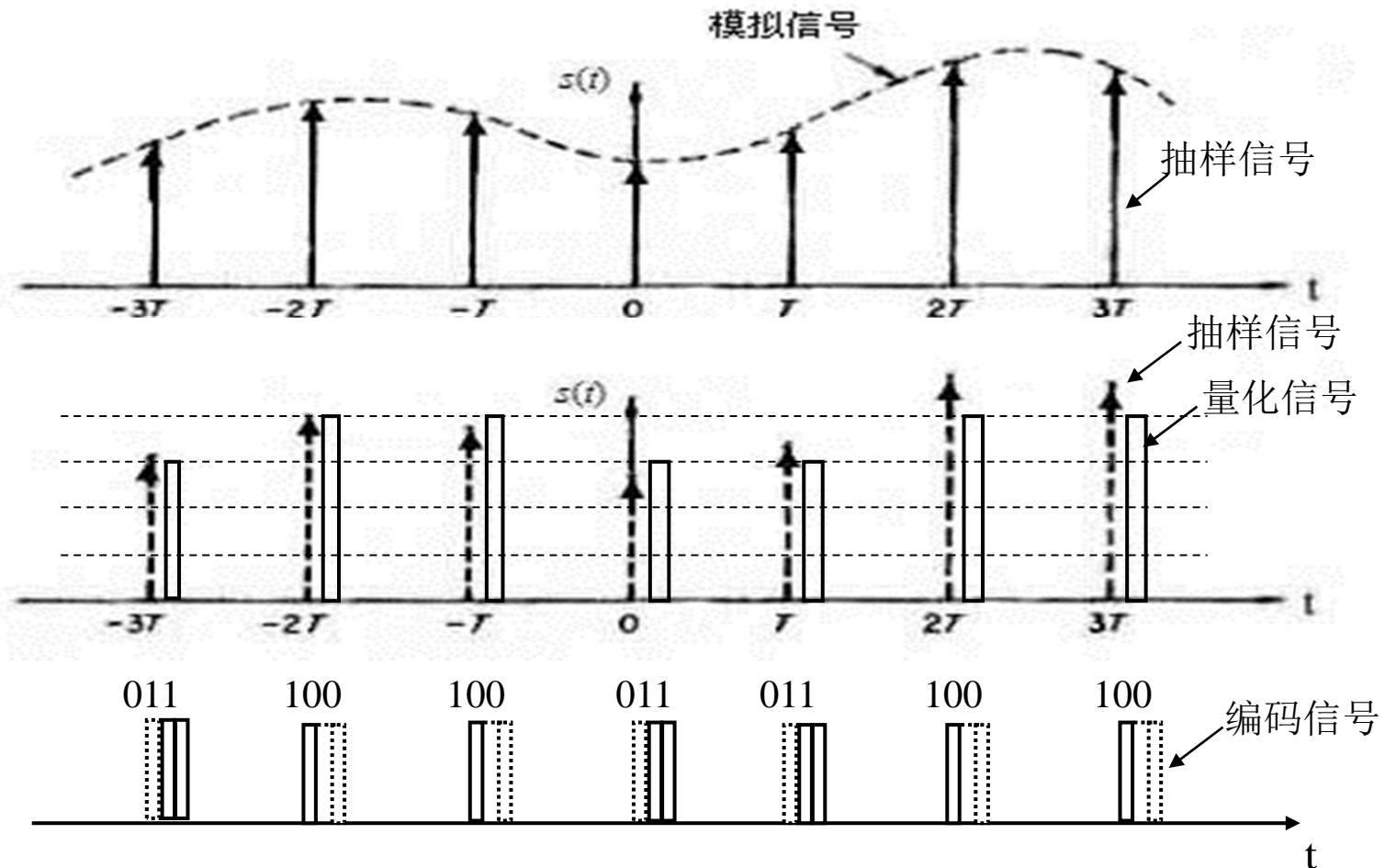
# 通信原理基础

## 第7章模拟信号的数字传输

# 第7章模拟信号的数字传输

## 7.1 引言

■ 数字化3步骤：抽样、量化和编码





# 第7章模拟信号的数字传输

## 7.2 模拟信号的抽样

### 7.2.1 低通模拟信号的抽样定理

- 抽样定理：设一个连续模拟信号 $m(t)$ 中的最高频率 $< f_H$ ，则以间隔时间为 $T \leq 1/2f_H$ 的周期性冲激脉冲对它抽样时， $m(t)$ 将被这些抽样值所完全确定。

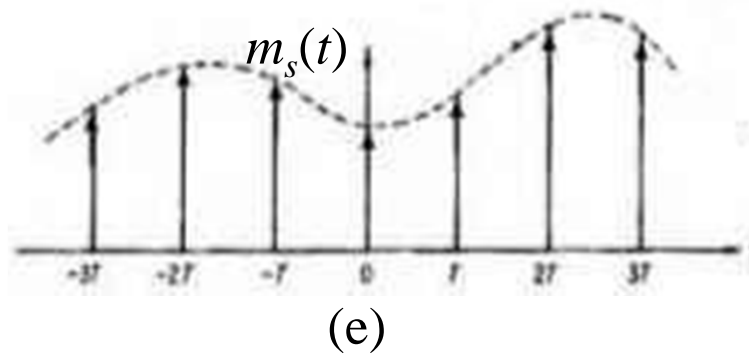
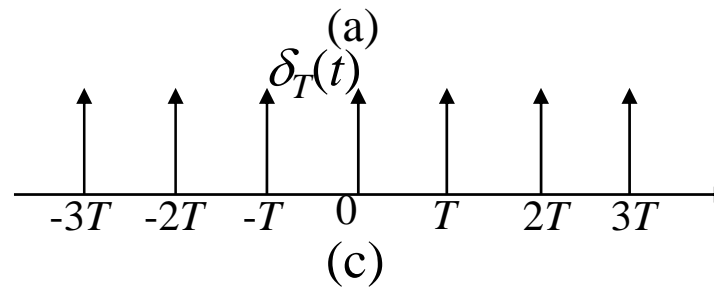
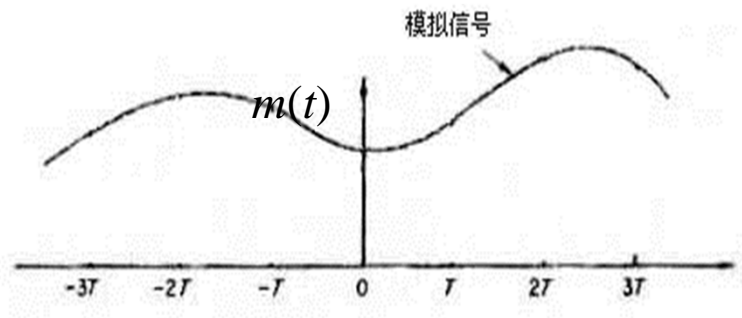
【证】设有一个最高频率小于 $f_H$ 的信号 $m(t)$ 。将这个信号和周期性单位冲激脉冲 $\delta_T(t)$ 相乘，其重复周期为 $T$ ，重复频率为 $f_s = 1/T$ 。乘积就是抽样信号，它是一系列间隔为 $T$ 秒的强度不等的冲激脉冲。这些冲激脉冲的强度等于相应时刻上信号的抽样值。现用 $m_s(t) = \sum m(kT)$ 表示此抽样信号序列。故有

$$m_s(t) = m(t)\delta_T(t)$$

用波形图示出如下：



# 第7章模拟信号的数字传输





## 第7章模拟信号的数字传输

令 $M(f)$ 、 $\Delta_{\Omega}(f)$ 和 $M_s(f)$ 分别表示 $m(t)$ 、 $\delta_T(t)$ 和 $m_s(t)$ 的频谱。按照频率卷积定理， $m(t)\delta_T(t)$ 的傅里叶变换等于 $M(f)$ 和 $\Delta_{\Omega}(f)$ 的卷积。因此， $m_s(t)$ 的傅里叶变换 $M_s(f)$ 可以写为：

$$M_s(f) = M(f) * \Delta_{\Omega}(f)$$

而 $\Delta_{\Omega}(f)$ 是周期性单位冲激脉冲的频谱，它可以求出等于：

$$\Delta_{\Omega}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

式中， $f_s = 1/T$

将上式代入 $M_s(f)$ 的卷积式，得到

$$M_s(f) = \frac{1}{T} \left[ M(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \right]$$



## 第7章模拟信号的数字传输

$$M_s(f) = \frac{1}{T} \left[ M(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \right]$$

上式中的卷积，可以利用卷积公式：

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

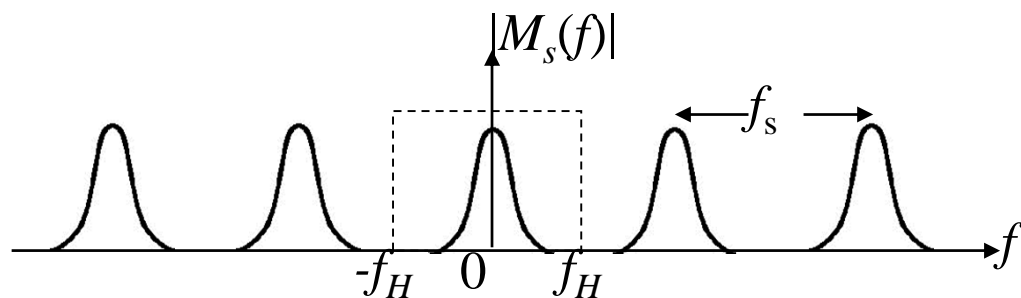
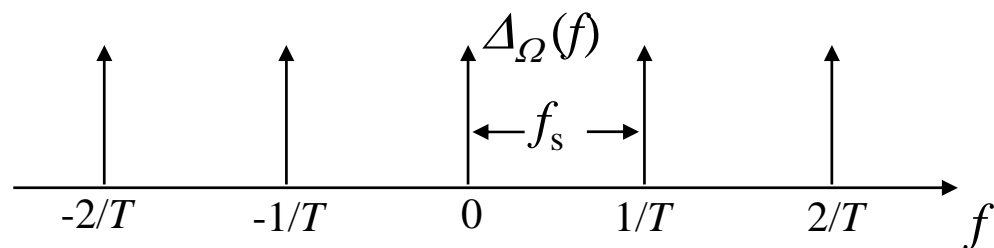
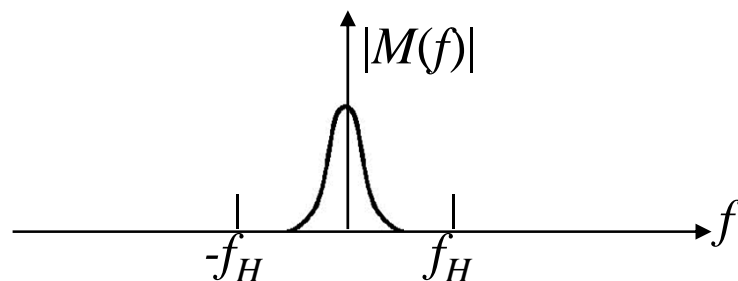
进行计算，得到

$$M_s(f) = \frac{1}{T} \left[ M(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(f - nf_s)$$

上式表明，由于 $M(f - nf_s)$ 是信号频谱 $M(f)$ 在频率轴上平移了 $nf_s$ 的结果，所以抽样信号的频谱 $M_s(f)$ 是无数间隔频率为 $f_s$ 的原信号频谱 $M(f)$ 相叠加而成。

用频谱图示出如下：

# 第7章模拟信号的数字传输





## 第7章模拟信号的数字传输

因为已经假设信号 $m(t)$ 的最高频率小于 $f_H$ ，所以若频率间隔 $f_s \geq 2f_H$ ，则 $M_s(f)$ 中包含的每个原信号频谱 $M(f)$ 之间互不重叠，如上图所示。这样就能够从 $M_s(f)$ 中用一个低通滤波器分离出信号 $m(t)$ 的频谱 $M(f)$ ，也就是能从抽样信号中恢复原信号。

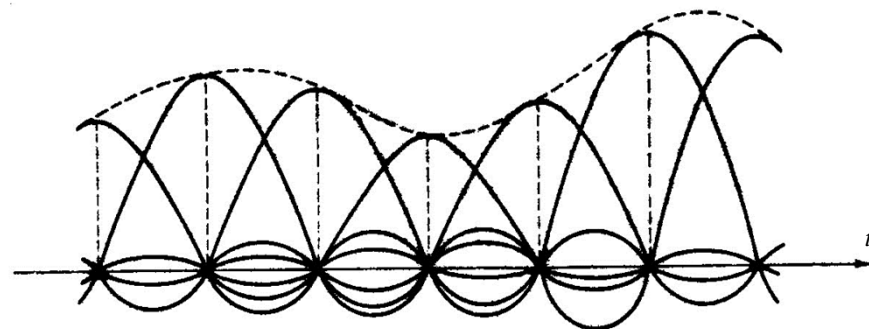
这里，恢复原信号的条件是：

$$f_s \geq 2f_H$$

即抽样频率 $f_s$ 应不小于 $f_H$ 的两倍。这一最低抽样速率 $2f_H$ 称为**奈奎斯特速率**。与此相应的最小抽样时间间隔称为**奈奎斯特间隔**。

# 第7章模拟信号的数字传输

恢复原信号的方法：从上图可以看出，当 $f_s \geq 2f_H$ 时，用一个截止频率为 $f_H$ 的理想低通滤波器就能够从抽样信号中分离出原信号。从时域中看，当用抽样脉冲序列冲激此理想低通滤波器时，滤波器的输出就是一系列冲激响应之和，如下图所示。这些冲激响应之和就构成了原信号。



理想滤波器是不能实现的。实用滤波器的截止边缘不可能做到如此陡峭。所以，实用的抽样频率 $f_s$ 必须比 $2f_H$ 大一些。

例如，典型电话信号的最高频率通常限制在3400 Hz，而抽样频率通常采用8000 Hz。



# 第7章模拟信号的数字传输

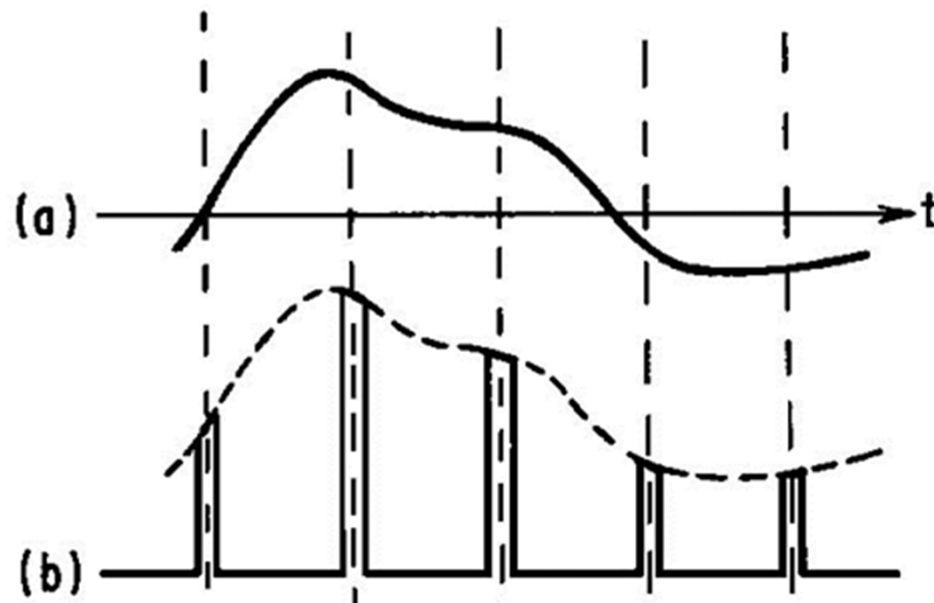
## 7.3 模拟脉冲调制

### ■ 模拟脉冲调制的种类

- ◆ 周期性脉冲序列有4个参量：脉冲重复周期、脉冲振幅、脉冲宽度和脉冲相位（位置）。
- ◆ 其中脉冲重复周期（抽样周期）一般由抽样定理决定，故只有其他3个参量可以受调制。
- ◆ 3种脉冲调制：
  - 脉冲振幅调制(PAM)
  - 脉冲宽度调制(PDM)
  - 脉冲位置调制(PPM)
- ◆ 仍然是模拟调制，因为其代表信息的参量仍然是可以连续变化的。

# 第7章模拟信号的数字传输

## ■ 模拟脉冲调制波形



(a) 模拟基带信号

(b) PAM信号





# 第7章模拟信号的数字传输

## PAM调制

### ◆ PAM调制信号的频谱

设：基带模拟信号的波形为 $m(t)$ ，其频谱为 $M(f)$ ；用这个信号对一个脉冲载波 $s(t)$ 调幅， $s(t)$ 的周期为 $T$ ，其频谱为 $S(f)$ ；脉冲宽度为 $\tau$ ，幅度为 $A$ ；并设抽样信号 $m_s(t)$ 是 $m(t)$ 和 $s(t)$ 的乘积。

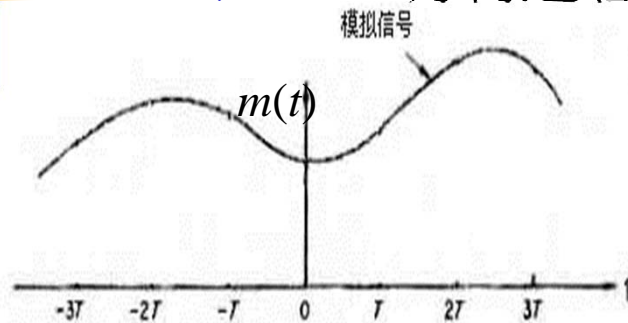
则抽样信号 $m_s(t)$ 的频谱就是两者频谱的卷积：

$$M_s(f) = M(f) * S(f) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau f_H) M(f - 2nf_H)$$

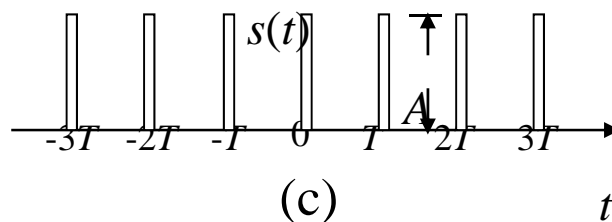
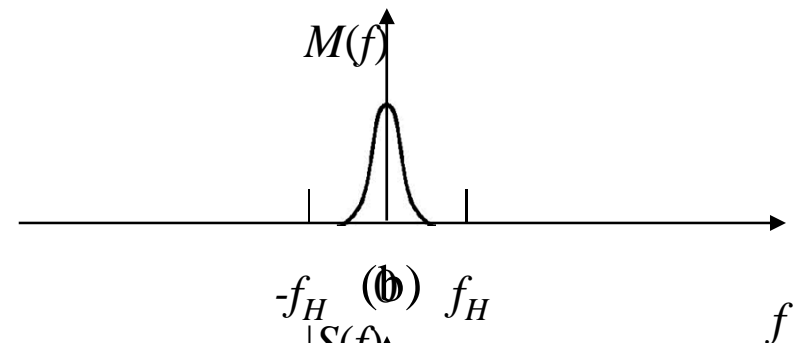
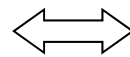
式中  $\text{sinc}(n\tau f_H) = \sin(n\tau f_H) / (n\tau f_H)$

# 第7章模拟信号的数字传输

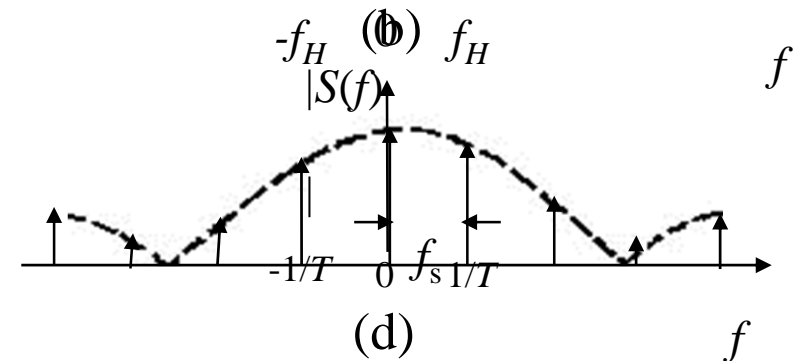
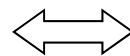
## ◆ PAM调制过程的波形和频谱图



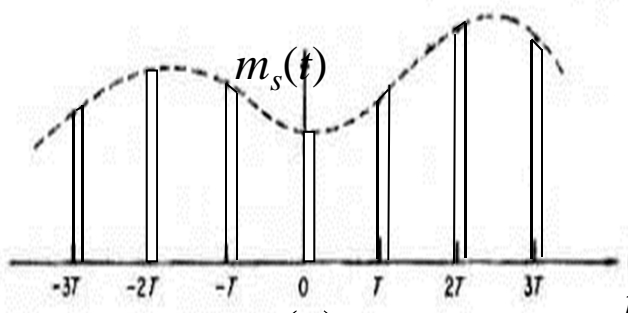
(a)



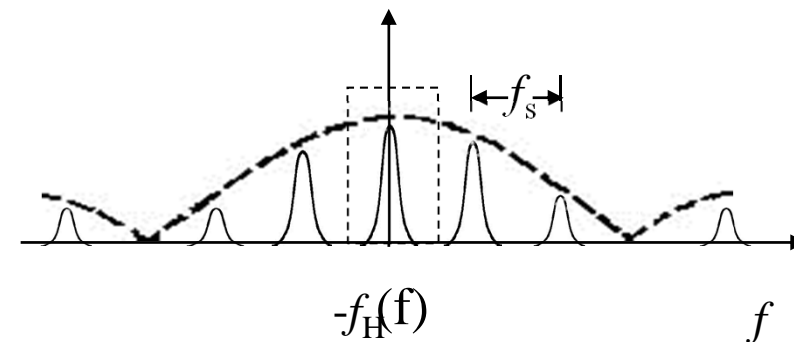
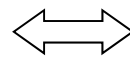
(c)



(d)



(e)

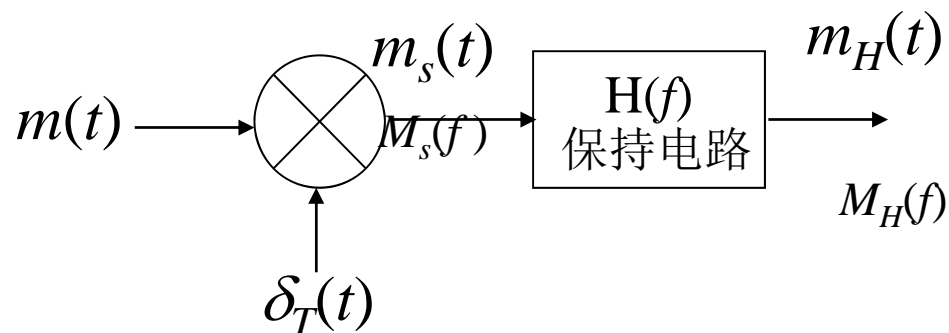


# 第7章模拟信号的数字传输

由上图看出，若 $s(t)$ 的周期 $T \leq (1/2f_H)$ ，或其重复频率 $f_s \geq 2f_H$ ，则采用一个截止频率为 $f_H$ 的低通滤波器仍可以分离出原模拟信号。

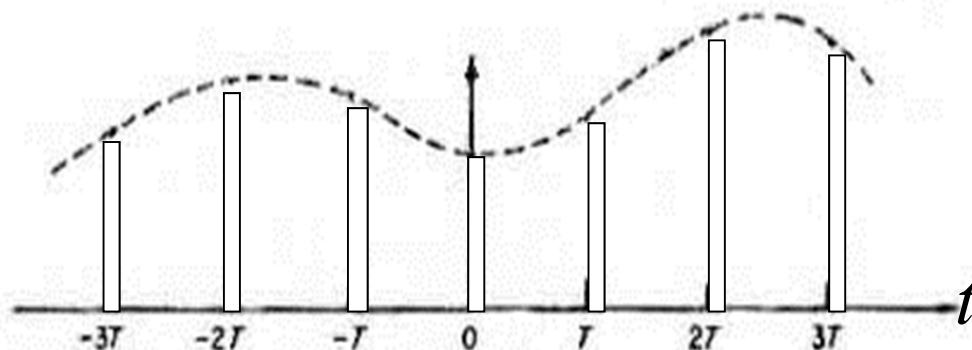
## ◆ 自然抽样和平顶抽样

- 在上述PAM调制中，得到的已调信号 $m_s(t)$ 的脉冲顶部和原模拟信号波形相同。这种PAM常称为自然抽样。在实际应用中，则常用“抽样保持电路”产生PAM信号。这种电路的原理方框图如右：



# 第7章模拟信号的数字传输

## □ 平顶抽样输出波形



## □ 平顶抽样输出频谱

设保持电路的传输函数为 $H(f)$ ，则其输出信号的频谱 $M_H(f)$ 为：

$$M_H(f) = M_s(f)H(f)$$

上式中的 $M_s(f)$ 用

$$M_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(f - nf_s)$$

代入，得到

$$M_H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f)M(f - nf_s)$$



## 第7章模拟信号的数字传输

$$M_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(f - nf_s)$$

$$M_H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f) M(f - nf_s)$$

比较上面的 $M_H(f)$ 表示式和 $M_s(f)$ 表示式可见，其区别在于和式中的每一项都被 $H(f)$ 加权。因此，**不能用低通滤波器恢复（解调）原始模拟信号了**。但是从原理上看，若在低通滤波器之前加一个传输函数为 $1/H(f)$ 的修正滤波器，就能无失真地恢复原模拟信号了。



# 第7章模拟信号的数字传输

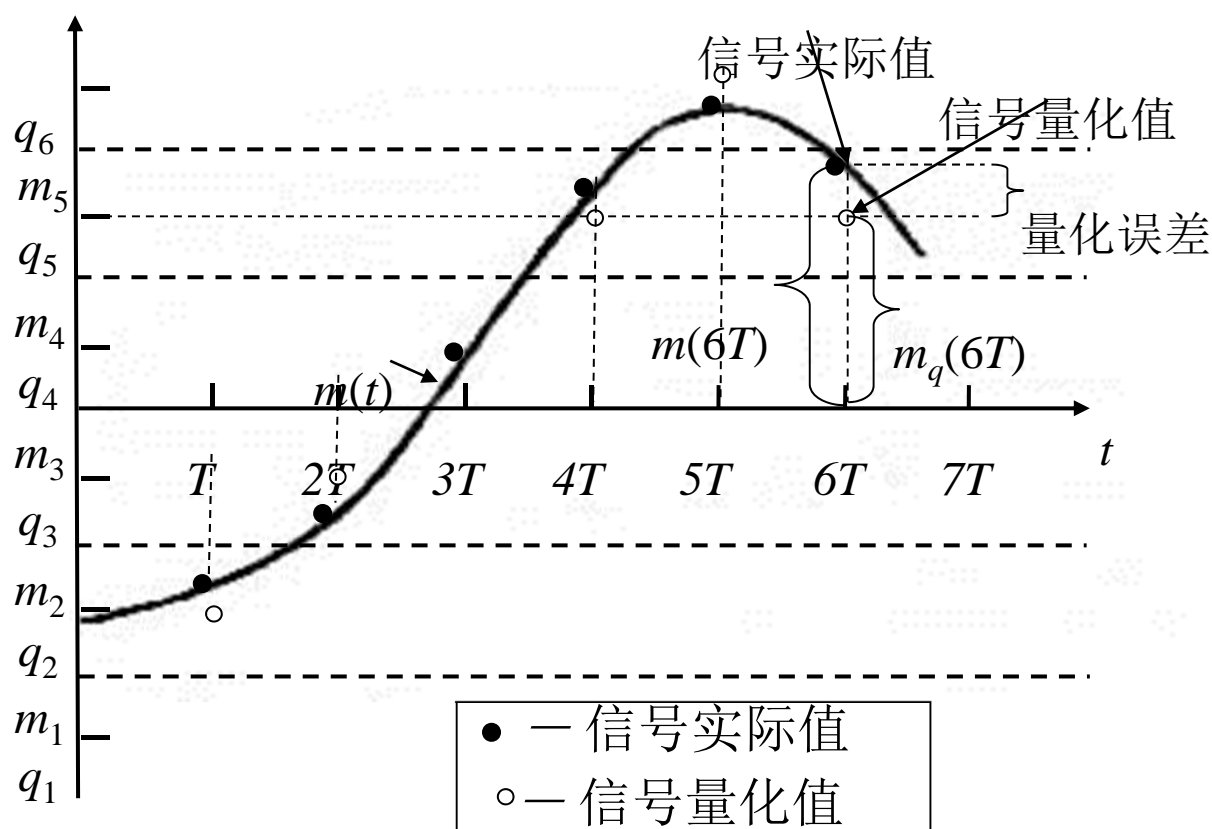
## • 7.4 抽样信号的量化

### ■ 7.4.1 量化原理

- ◆ 设模拟信号的抽样值为 $m(kT)$ ，其中 $T$ 是抽样周期， $k$ 是整数。此抽样值仍然是一个取值连续的变量。若仅用 $N$ 个不同的二进制数字码元来代表此抽样值的大小，则 $N$ 个不同的二进制码元只能代表 $M = 2^N$ 个不同的抽样值。因此，必须将抽样值的范围划分成 $M$ 个区间，每个区间用一个电平表示。这样，共有 $M$ 个离散电平，它们称为量化电平。用这 $M$ 个量化电平表示连续抽样值的方法称为量化。

# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 量化过程图



$M$ 个抽样值区间是等间隔划分的，称为**均匀量化**。 $M$ 个抽样值区间也可以不均匀划分，称为**非均匀量化**。



# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 量化一般公式

设： $m(kT)$ 表示模拟信号抽样值， $m_q(kT)$ 表示量化后的量化信号值， $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_6$ 是量化后信号的6个可能输出电平， $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_5$ 为量化区间的端点。

则可以写出一般公式：

$$m_q(kT) = q_i, \text{ 当 } m_{i-1} \leq m(kT) < m_i$$

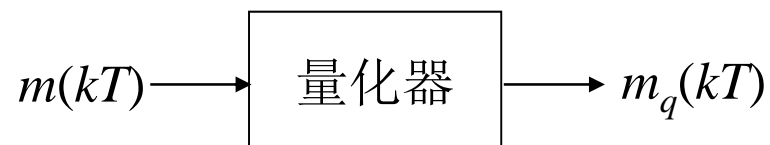
按照上式作变换，就把模拟抽样信号 $m(kT)$ 变换成了量化后的离散抽样信号，即量化信号。



# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 量化器

- 在原理上，量化过程可以认为是在一个量化器中完成的。量化器的输入信号为 $m(kT)$ ，输出信号为 $m_q(kT)$ ，如下图所示。



- 在实际中，量化过程常是和后续的编码过程结合在一起完成的，不一定存在独立的量化器。



# 第7章模拟信号的数字传输

## 7.4.2 均匀量化

### ◆ 均匀量化的表示式

设模拟抽样信号的取值范围在 $a$ 和 $b$ 之间，量化电平数为 $M$ ，则在均匀量化时的量化间隔为

$$\Delta v = \frac{b - a}{M}$$

且量化区间的端点为

$$m_i = a + i\Delta v \quad i = 0, 1, \dots, M$$

若量化输出电平 $q_i$ 取为量化间隔的中点，则

$$q_i = \frac{m_i + m_{i-1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

显然，量化输出电平和量化前信号的抽样值一般不同，即量化输出电平有误差。这个误差常称为量化噪声，并用信号功率与量化噪声之比衡量其对信号影响的大小<sub>21</sub>



# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 均匀量化的平均信号量噪比

在均匀量化时，量化噪声功率的平均值 $N_q$ 可以用下式表示

$$N_q = E[(m_k - m_q)^2] = \int_a^b (m_k - m_q)^2 f(m_k) dm_k = \sum_{i=1}^M \int_{m_{i-1}}^{m_i} (m_k - q_i)^2 f(m_k) dm_k$$

式中， $m_k$ 为模拟信号的抽样值，即 $m(kT)$ ；

$m_q$ 为量化信号值，即 $m_q(kT)$ ；

$f(m_k)$ 为信号抽样值 $m_k$ 的概率密度；

$E$ 表示求统计平均值；

$M$ 为量化电平数；

$$m_i = a + i\Delta v$$

$$q_i = a + i\Delta v - \frac{\Delta v}{2}$$



## 第7章模拟信号的数字传输

信号 $m_k$ 的平均功率可以表示为

$$S_0 = E(m_k^2) = \int_a^b m_k^2 f(m_k) dm_k$$

若已知信号 $m_k$ 的功率密度函数，则由上两式可以计算出平均信号量噪比。



# 第7章模拟信号的数字传输

## 7.4.3 非均匀量化

- ◆ 非均匀量化的目的：在实际应用中，对于给定的量化器，量化电平数 $M$ 和量化间隔 $\Delta v$ 都是确定的，量化噪声 $N_q$ 也是确定的。但是，信号的强度可能随时间变化（例如，语音信号）。当信号小时，信号量噪比也小。所以，这种均匀量化器对于小输入信号很不利。为了克服这个缺点，改善小信号时的信号量噪比，在实际应用中常采用非均匀量化。

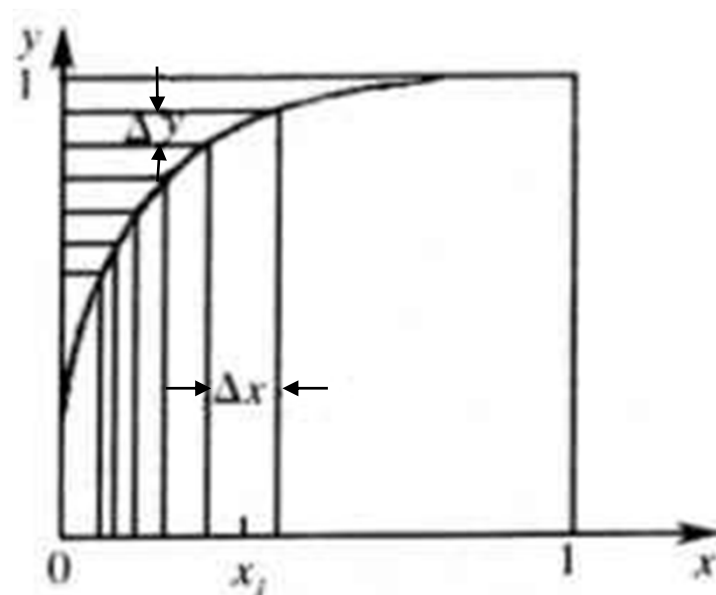
# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 非均匀量化原理

- 在非均匀量化时，量化间隔随信号抽样值的不同而变化。信号抽样值小时，量化间隔 $\Delta v$ 也小；信号抽样值大时，量化间隔 $\Delta v$ 也变大。
- 实际中，非均匀量化的实现方法通常是在进行量化之前，先将信号抽样值压缩，再进行均匀量化。这里的压缩是用一个非线性电路将输入电压 $x$ 变换成输出电压 $y$ ： $y = f(x)$

### □ 如右图所示：

图中纵坐标 $y$ 是均匀刻度的，横坐标 $x$ 是非均匀刻度的。所以输入电压 $x$ 越小，量化间隔也就越小。也就是说，小信号的量化误差也小。





# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 非均匀量化的数学分析

当量化区间划分很多时，在每一量化区间内压缩特性曲线可以近似看作为一段直线。因此，这段直线的斜率可以写为：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

并有

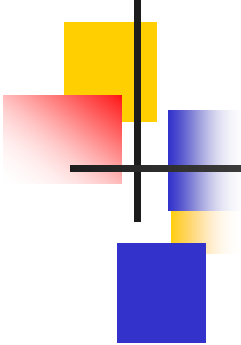
$$\Delta x = \frac{dx}{dy} \Delta y$$

设此压缩器的输入和输出电压范围都限制在0和1之间，即作归一化，且纵坐标 $y$ 在0和1之间均匀划分成 $N$ 个量化区间，则每个量化区间的间隔应该等于

$$\Delta y = \frac{1}{N}$$

将其代入上式，得到

$$\Delta x = \frac{dx}{dy} \Delta y = \frac{1}{N} \frac{dx}{dy} \quad \frac{dx}{dy} = N \Delta x$$



## 第7章模拟信号的数字传输

为了对不同的信号强度保持信号量噪比恒定，当输入电压 $x$ 减小时，应当使量化间隔 $\Delta x$ 按比例地减小，即要求

$$\Delta x \propto x$$

因此上式可以写成

$$\frac{dx}{dy} \propto x$$

或

$$\frac{dx}{dy} = kx$$

式中， $k$  — 比例常数。

上式是一个线性微分方程，其解为：

$$\ln x = ky + c$$





## 第7章模拟信号的数字传输

$$\ln x = ky + c$$

为了求出常数 $c$ ，将边界条件 (当 $x = 1$ 时， $y = 1$ )，代入上式，得到

$$k + c = 0$$

故求出

$$c = -k$$

将 $c$  的值代入上式，得到  $\ln x = ky - k$

即要求 $y = f(x)$ 具有如下形式：

$$y = 1 + \frac{1}{k} \ln x$$

由上式看出，为了对不同的信号强度保持信号量噪比恒定，在理论上要求压缩特性具有对数特性。但是，该式不符合因果律，不能物理实现，因为当输入 $x = 0$ 时，输出 $y = -\infty$ ，其曲线和上图中的曲线不同。所以，在实用中这个理想压缩特性的具体形式，按照不同情况，还要作适当修正，使当 $x = 0$ 时， $y = 0$ 。



## 第7章模拟信号的数字传输

关于电话信号的压缩特性，国际电信联盟(ITU)制定了两种建议，即A压缩律和 $\mu$ 压缩律，以及相应的近似算法 — 13折线法和15折线法。我国大陆、欧洲各国以及国际间互连时采用A律及相应的13折线法，北美、日本和韩国等少数国家和地区采用 $\mu$ 律及15折线法。下面将分别讨论这两种压缩律及其近似实现方法。



# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ A压缩律

□ A压缩律是指符合下式的对数压缩规律：

$$y = \begin{cases} \frac{Ax}{1 + \ln A}, & 0 < x \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln Ax}{1 + \ln A}, & \frac{1}{A} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

式中， $x$  — 压缩器归一化输入电压；

$y$  — 压缩器归一化输出电压；

$A$  — 常数，它决定压缩程度。

A 律是从前式修正而来的。它由两个表示式组成。第一个表示式中的 $y$ 和 $x$ 成正比，是一条直线方程；第二个表示式中的 $y$ 和 $x$ 是对数关系，类似理论上为保持信号量噪比恒定所需的理想特性的关系。

# 第7章模拟信号的数字传输

## □ A律的导出

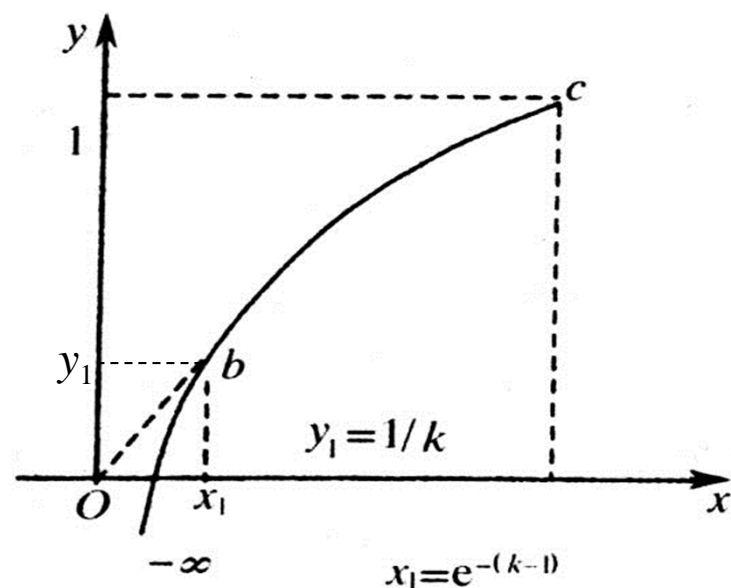
由式 
$$y = 1 + \frac{1}{k} \ln x$$

画出的曲线示于下图中。为了使此曲线通过原点，修正的办法是通过原点对此曲线作切线ob，用直线段ob代替原曲线段，就得到A律。此切点b的坐标 $(x_1, y_1)$ 为

$$(e^{1-k}, 1/k)$$

或  $(1/A, Ax_1/(1+\ln A))$

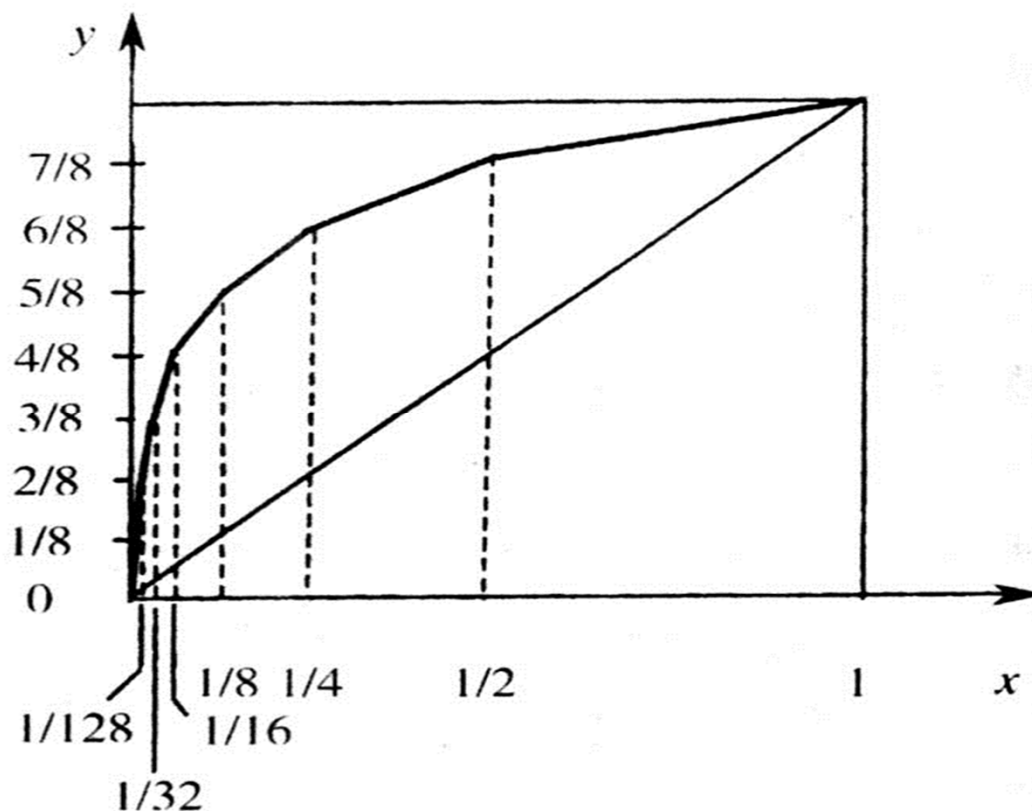
A律是物理可实现的。其中的常数A不同，则压缩曲线的形状不同，这将特别影响小电压时的信号量噪比的大小。在实用中，选择A等于87.6。



# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 13折线压缩特性 — A律的近似

- A律表示式是一条平滑曲线，用电子线路很难准确地实现。这种特性很容易用数字电路来近似实现。13折线特性就是近似于A律的特性。在下图中示出了这种特性曲线：





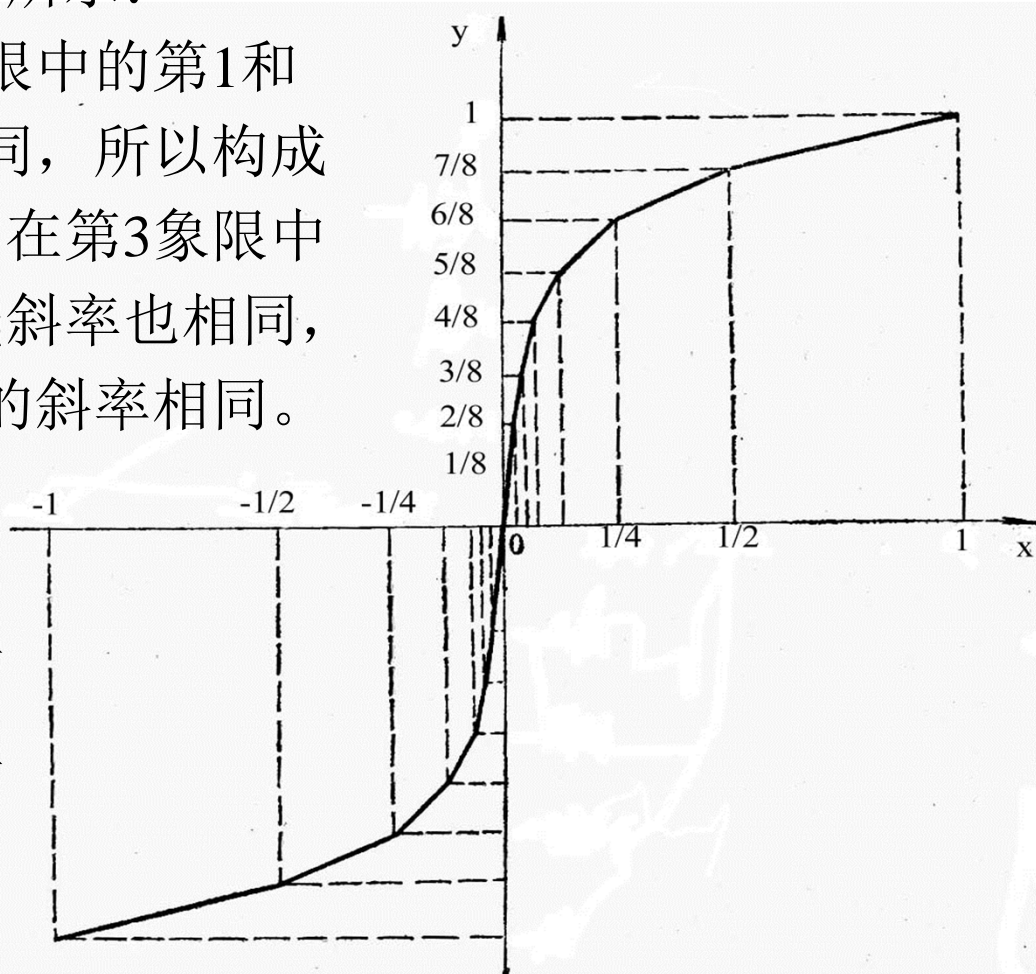
## 第7章模拟信号的数字传输

- 图中横坐标 $x$ 在0至1区间中分为不均匀的8段。1/2至1间的线段称为第8段；1/4至1/2间的线段称为第7段；1/8至1/4间的线段称为第6段；依此类推，直到0至1/128间的线段称为第1段。图中纵坐标 $y$ 则均匀地划分作8段。将与这8段相应的座标点 $(x, y)$ 相连，就得到了一条折线。由图可见，除第1和2段外，其他各段折线的斜率都不相同。在下表中列出了这些斜率：

折线段号	1	2	3	4	5	6	7	8
斜 率	16	16	8	4	2	1	1/2	1/4

# 第7章模拟信号的数字传输

- 因为语音信号为交流信号，所以，上述的压缩特性只是实用的压缩特性曲线的一半。在第3象限还有对原点奇对称的另一半曲线，如下图所示：
- 在此图中，第1象限中的第1和第2段折线斜率相同，所以构成一条直线。同样，在第3象限中的第1和第2段折线斜率也相同，并且和第1象限中的斜率相同。所以，这4段折线构成了一条直线。因此，共有13段折线，故称13折线压缩特性。





# 第7章模拟信号的数字传输

## □ 13折线特性和A律特性之间的误差

- 为了方便起见，仅在折线的各转折点和端点上比较这两条曲线的坐标值。各转折点的纵坐标y值是已知的，即分别为0, 1/8, 2/8, 3/8, ..., 1。
- 对于A律压缩曲线，当采用的A值等于87.6时，其切点的横坐标 $x_1$ 等于：

$$x_1 = \frac{1}{A} = \frac{1}{87.6} \approx 0.0114$$

将此 $x_1$ 值代入 $y_1$ 的表示式，就可以求出此切点的纵坐标 $y_1$ ：

$$y_1 = \frac{Ax_1}{1 + \ln A} = \frac{1}{1 + \ln 87.6} \approx 0.183$$

这表明，A律曲线的直线段在坐标原点和此切点之间，即(0, 0)和(0.0114, 0.183)之间。所以，此直线的方程可以写为：





## 第7章模拟信号的数字传输

$$x = \frac{1 + \ln A}{A} y = \frac{1 + \ln 87.6}{87.6} y \approx \frac{1}{16} y$$

- 13折线的第1个转折点纵坐标 $y = 1/8 = 0.125$ ，它小于 $y_I$ ，故此点位于A律的直线段，按上式即可求出相应的 $x$ 值为 $1/128$ 。

当 $y > 0.183$ 时，应按A律对数曲线段的公式计算 $x$ 值。此时，由下式可以推出 $x$ 的表示式：

$$y = \frac{1 + \ln Ax}{1 + \ln A} = 1 + \frac{1}{1 + \ln A} \ln x \quad y - 1 = \frac{\ln x}{1 + \ln A} = \frac{\ln x}{\ln(eA)}$$

$$\ln x = (y - 1)\ln(eA) \quad x = \frac{1}{(eA)^{1-y}}$$

按照上式可以求出在此曲线段中对应各转折点纵坐标 $y$ 的横坐标值。当用 $A = 87.6$ 代入上式时，计算结果见下表

# 第7章模拟信号的数字传输

I	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$y = 1 - i/8$	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
A律的 $x$ 值	0	1/128	1/60.6	1/30.6	1/15.4	1/7.79	1/3.93	1/1.98	1
13折线法的 $x = 1/2i$	0	1/128	1/64	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1
折线段号	1	2	3	4	5	6	7	8	
折线斜率	16	16	8	4	2	1	1/2	1/4	

- 从表中看出，13折线法和 $A = 87.6$ 时的A律压缩法十分接近。



# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ $\mu$ 压缩律和15折线压缩特性

在A律中，选用A等于87.6有两个目的：

1) 使曲线在原点附近的斜率等于16，使16段折线简化成仅有13段；

2) 使在13折线的转折点上A律曲线的横坐标 $x$ 值接近 $1/2^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 7$ )，如上表所示。

若仅为满足第二个目的，则可以选择更恰当的A值。由上表可见，当仅要求满足 $x = 1/2^i$ 时， $y = 1 - i/8$ ，则将此条件代入式

$$x = \frac{1}{(eA)^{1-y}}$$

得到：

$$\frac{1}{2^i} = \frac{1}{(eA)^{1-(1-i/8)}} = \frac{1}{(eA)^{i/8}} \quad 2^i = \left[(eA)^{1/8}\right]^i$$

$$(eA)^{1/8} = 2, \quad eA = 2^8 = 256$$



## 第7章模拟信号的数字传输

因此，求出

$$A = 256/e \approx 94.18$$

将此A值代入下式，得到：

$$y = \frac{1 + \ln(Ax)}{1 + \ln A} = \frac{\ln(eAx)}{\ln(eA)} = \frac{\ln 256x}{\ln 256}$$

若按上式计算，当 $x = 0$ 时， $y \rightarrow -\infty$ ；当 $y = 0$ 时， $x = 1/2^8$ 。而我们的要求是当 $x = 0$ 时， $y = 0$ ，以及当 $x = 1$ 时， $y = 1$ 。为此，需要对上式作一些修正。在 $\mu$ 律中，修正后的表示式如下：

$$y = \frac{\ln(1 + 255x)}{\ln(1 + 255)}$$

由上式可以看出，它满足当 $x = 0$ 时， $y = 0$ ；当 $x = 1$ 时， $y = 1$ 。

但是，在其他点上自然存在一些误差。不过，只在小电压( $x < 1/128$ )时，才有稍大误差。通常用参数 $\mu$ 表示上式中的常数255。这样，上式变成：



## 第7章模拟信号的数字传输

$$y = \frac{\ln(1 + \mu x)}{\ln(1 + \mu)}$$

这就是美国等地采用的 $\mu$ 压缩律的特性。

由于 $\mu$ 律同样不易用电子线路准确实现，所以目前实用中是采用特性近似的15折线代替 $\mu$ 律。这时，和A律一样，也把纵坐标 $y$ 从0到1之间划分为8等份。对应于各转折点的横坐标 $x$ 值可以按照下式计算：

$$y = \frac{\ln(1 + 255x)}{\ln(1 + 255)} \quad x = \frac{256^y - 1}{255} = \frac{256^{i/8} - 1}{255} = \frac{2^i - 1}{255}$$

计算结果列于下表中。

## 第7章模拟信号的数字传输

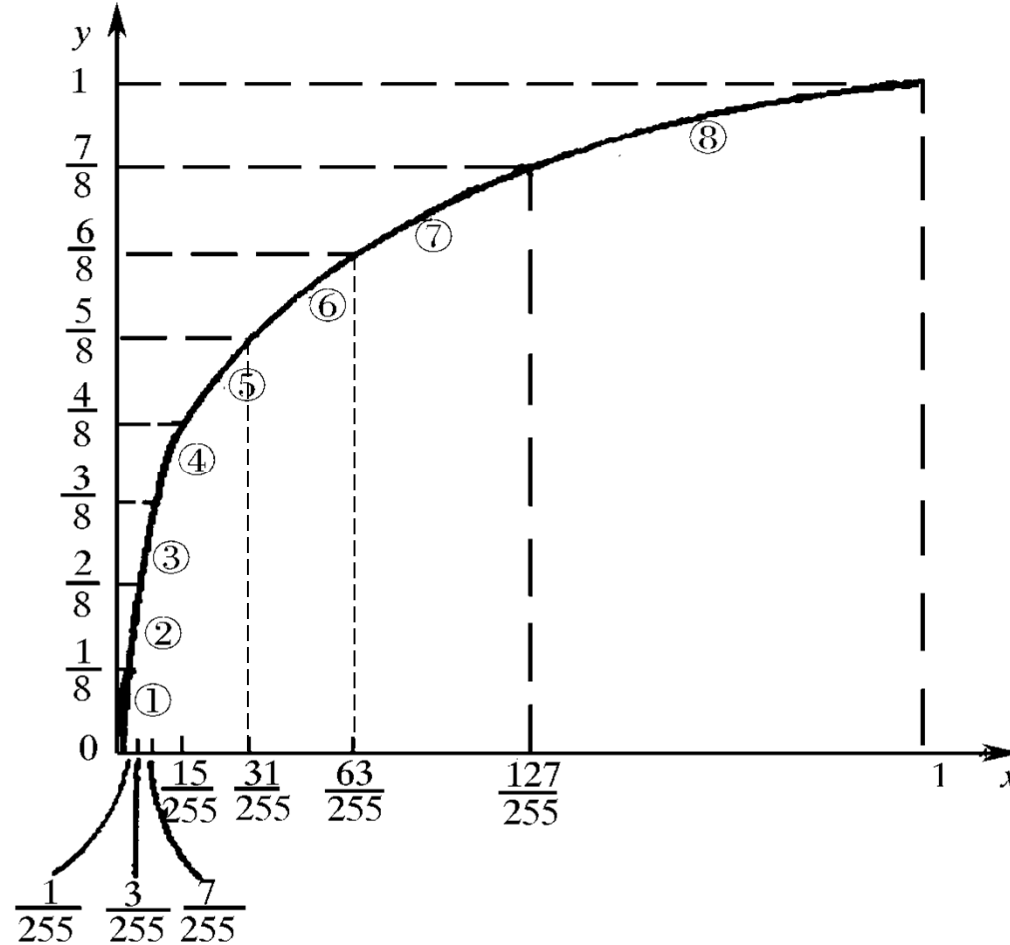
$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = i/8$	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
$x = (2^i - 1) / 255$	0	1/255	3/255	7/255	15/255	31/255	63/255	127/255	1
斜率 $\times 255$	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	
段号	1	2	3	4	5	6	7	8	

将这些转折点用直线相连，就构成了8段折线。表中还列出了各段直线的斜率。

由于其第一段和第二段的斜率不同，不能合并为一条直线，故当考虑到信号的正负电压时，仅正电压第一段和负电压第一段的斜率相同，可以连成一条直线。所以，得到的是15段折线，称为15折线压缩特性。

# 第7章模拟信号的数字传输

在下图中给出了15折线的图形。





## 第7章模拟信号的数字传输

比较13折线特性和15折线特性的第一段斜率可知，15折线特性第一段的斜率（ $255/8$ ）大约是13折线特性第一段斜率（16）的两倍。

所以，15折线特性给出的小信号的信号量噪比约是13折线特性的两倍。

但是，对于大信号而言，15折线特性给出的信号量噪比要比13折线特性时稍差。这可以从对数压缩式看出，在A律中A值等于87.6；但是在 $\mu$ 律中，相当A值等于94.18。A值越大，在大电压段曲线的斜率越小，即信号量噪比越差。

- ◆ 恢复原信号大小的扩张原理，完全和压缩的过程相反。





# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 均匀量化和均匀量化比较

若用13折线法中的（第一和第二段）最小量化间隔作为均匀量化时的量化间隔，则13折线法中第一至第八段包含的均匀量化间隔数分别为16、16、32、64、128、256、512、1024，共有2048个均匀量化间隔，而非均匀量化时只有128个量化间隔。因此，在保证小信号的量化间隔相等的条件下，均匀量化需要11比特编码，而非均匀量化只要7比特就够了。



# 第7章模拟信号的数字传输

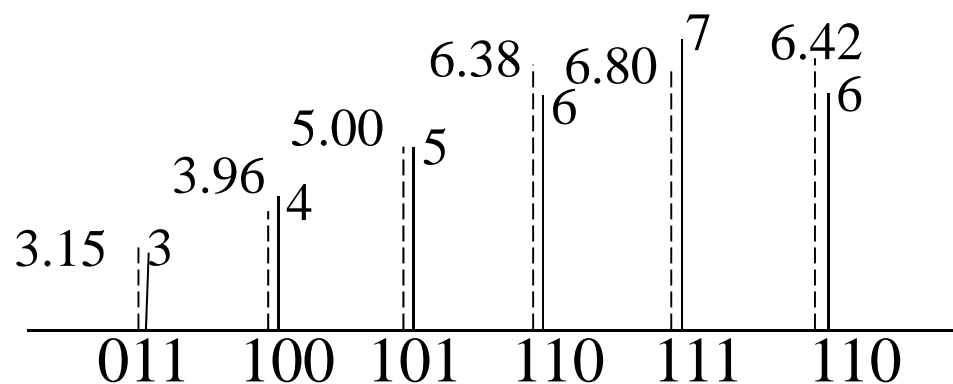
## • 7.5脉冲编码调制

### ■ 7.5.1脉冲编码调制（PCM）的基本原理

- ◆ 把从模拟信号抽样、量化，直到变换成为二进制符号的基本过程，称为脉冲编码调制，简称脉码调制。
- ◆ 例：在下图中，模拟信号的抽样值为3.15， 3.76， 5.00， 6.38， 6.80和6.42。若按照“四舍五入”的原则量化为整数值，则抽样值量化后变为3， 4， 5， 6， 7和6。在按照二进制数编码后，量化值(quantized value)就变成二进制符号：011、100、101、110、111和110。

# 第7章模拟信号的数字传输

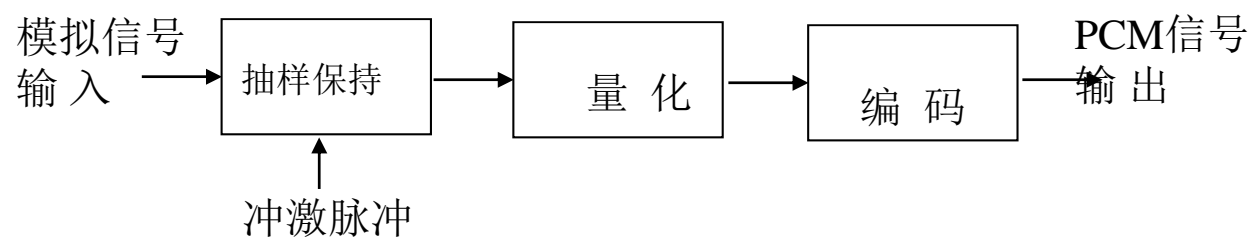
- ◆ 例：在下图中，模拟信号的抽样值为3.15，3.96，5.00，6.38，6.80和6.42。若按照“四舍五入”的原则量化为整数值，则抽样值量化后变为3，4，5，6，7和6。在按照二进制数编码后，量化值就变成二进制符号：011、100、101、110、111和110。



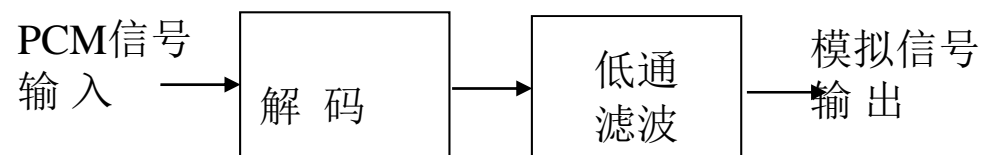
抽样值 -----	3.15	3.96	5.00	6.38	6.80	6.42
量化值 ———	3	4	5	6	7	6
编码后	011	100	101	110	111	110

# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ PCM系统的原理方框图



(a) 编码器

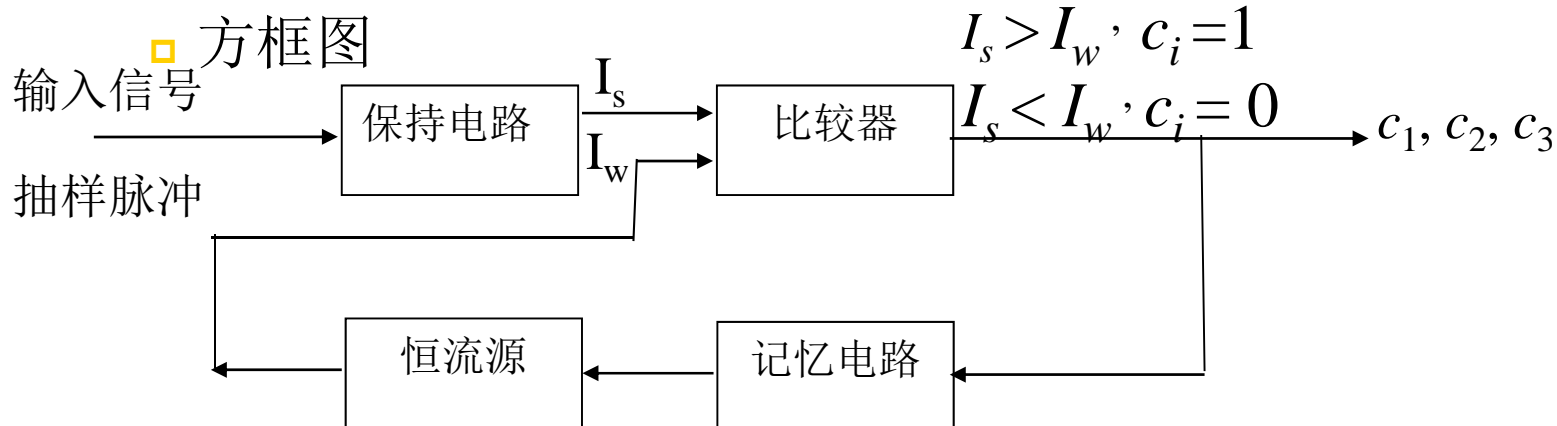


(b) 译码器

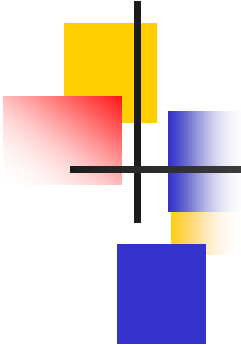
PCM原理方框图

# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 逐次比较法编码原理



- 图中示出一个3位编码器。其输入信号抽样脉冲值在0和7.5之间。它将输入模拟抽样脉冲编成3位二进制编码 $c_1 c_2 c_3$ 。
- 图中输入信号抽样脉冲电流 $I_s$ 由保持电路短时间保持，并和几个称为权值电流的标准电流 $I_w$ 逐次比较。每比较一次，得出1位二进制码。权值电流 $I_w$ 是在电路中预先产生的。 $I_w$ 的个数决定于编码的位数，现在共有3个不同的 $I_w$ 值。因为表示量化值的二进制码有3位，即 $c_1 c_2 c_3$ 。它们能够表示8个十进制数，从0至7，如下表所示。



# 第7章模拟信号的数字传输

量化值	$c_1$	$c_2$	$c_3$
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1



## 第7章模拟信号的数字传输

- 因此，若按照“四舍五入”原则编码，则此编码器能够对  $-0.5$  至  $+7.5$  之间的输入抽样值正确编码。
- 由此表可推知，用于判定  $c_1$  值的权值电流  $I_w = 3.5$ ，即若抽样值  $I_s < 3.5$ ，则比较器输出  $c_1 = 0$ ；若  $I_s > 3.5$ ，则比较器输出  $c_1 = 1$ 。 $c_1$  除输出外，还送入记忆电路暂存。
- 第二次比较时，需要根据此暂存的  $c_1$  值，决定第二个权值电流值。若  $c_1 = 0$ ，则第二个权值电流值  $I_w = 1.5$ ；若  $c_1 = 1$ ，则  $I_w = 5.5$ 。第二次比较按照此规则进行：若  $I_s < I_w$ ，则  $c_2 = 0$ ；若  $I_s > I_w$ ，则  $c_2 = 1$ 。此  $c_2$  值除输出外，也送入记忆电路。
- 在第三次比较时，所用的权值电流值须根据  $c_1$  和  $c_2$  的值决定。例如，若  $c_1 c_2 = 0 0$ ，则  $I_w = 0.5$ ；若  $c_1 c_2 = 1 0$ ，则  $I_w = 4.5$ ；依此类推。



# 第7章模拟信号的数字传输

## ■ 7.5.2 自然二进制码和折叠二进制码

- ◆ 在上表中给出的是**自然二进制码**。电话信号还常用另外一种编码 — **折叠二进制码**。现以4位码为例，列于下表中：

量化值序号	量化电压极性	自然二进制码	折叠二进制码
15	正极性	1111	1111
14		1110	1110
13		1101	1101
12		1100	1100
11		1011	1011
10		1010	1010
9		1001	1001
8		1000	1000
7	负极性	0111	0000
6		0110	0001
5		0101	0010
4		0100	0011
3		0011	0100
2		0010	0101
1		0001	0110
0		0000	0111





# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 折叠码的优点

- 因为电话信号是交流信号，故在此表中将16个双极性量化值分成两部分。第0至第7个量化值对应于负极性电压；第8至第15个量化值对应于正极性电压。显然，对于自然二进制码，这两部分之间没有什么对应联系。但是，对于折叠二进制码，除了其最高位符号相反外，其上下两部分还呈现映像关系，或称折叠关系。这种码用最高位表示电压的极性正负，而用其他位来表示电压的绝对值。这就是说，在用最高位表示极性后，双极性电压可以采用单极性编码方法处理，从而使编码电路和编码过程大为简化。



## 第7章模拟信号的数字传输

- 折叠码的另一个优点是误码对于小电压的影响较小。例如，若有1个码组为1000，在传输或处理时发生1个符号错误，变成0000。从表中可见，若它为自然码，则它所代表的电压值将从8变成0，误差为8；若它为折叠码，则它将从8变成7，误差为1。但是，若一个码组从1111错成0111，则自然码将从15变成7，误差仍为8；而折叠码则将从15错成为0，误差增大为15。这表明，折叠码对于小信号有利。由于语音信号小电压出现的概率较大，所以折叠码有利于减小语音信号的平均量化噪声。
- ◆ 在语音通信中，通常采用8位的PCM编码就能够保证满意的通信质量。



# 第7章模拟信号的数字传输

## ◆ 码位排列方法

- 在13折线法中采用的折叠码有8位。其中第一位 $c_1$ 表示量化值的极性正负。后面的7位分为段落码和段内码两部分，用于表示量化值的绝对值。其中第2至4位( $c_2 c_3 c_4$ )是段落码，共计3位，可以表示8种斜率的段落；其他4位( $c_5 \sim c_8$ )为段内码，可以表示每一段落内的16种量化电平。段内码代表的16个量化电平是均匀划分的。所以，这7位码总共能表示 $2^7 = 128$ 种量化值。在下面的表中给出了段落码和段内码的编码规则。



# 第7章模拟信号的数字传输

## □ 段落码编码规则

段落序号	段落码 $c_2 c_3 c_4$	段落范围 (量化单位)
8	1 1 1	1024~2048
7	1 1 0	512~1024
6	1 0 1	256~512
5	1 0 0	128~256
4	0 1 1	64~128
3	0 1 0	32~64
2	0 0 1	16~32
1	0 0 0	0~16



# 第7章模拟信号的数字传输

□ 段内码编码规则:

量化间隔	段内码 $c_5 c_6 c_7 c_8$
15	1 1 1 1
14	1 1 1 0
14	1 1 0 1
12	1 1 0 0
11	1 0 1 1
10	1 0 1 0
9	1 0 0 1
8	1 0 0 0
7	0 1 1 1
6	0 1 1 0
5	0 1 0 1
4	0 1 0 0
3	0 0 1 1
2	0 0 1 0
1	0 0 0 1
0	0 0 0 0



## 第7章模拟信号的数字传输

- 在上述编码方法中，虽然段内码是按量化间隔均匀编码的，但是因为各个段落的斜率不等，长度不等，故不同段落的量化间隔是不同的。其中第1和2段最短，斜率最大，其横坐标 $x$ 的归一化动态范围只有 $1/128$ 。再将其等分为16小段后，每一小段的动态范围只有 $(1/128) \times (1/16) = 1/2048$ 。这就是最小量化间隔，后面将此最小量化间隔( $1/2048$ )称为1个量化单位。第8段最长，其横坐标 $x$ 的动态范围为 $1/2$ 。将其16等分后，每段长度为 $1/32$ 。假若采用均匀量化而仍希望对于小电压保持有同样的动态范围 $1/2048$ ，则需要用11位的码组才行。现在采用非均匀量化，只需要7位就够了。
- 典型电话信号的抽样频率是8000 Hz。故在采用这类非均匀量化编码器时，典型的数字电话传输比特率为64 kb/s。



# 第7章模拟信号的数字传输

---

- 7.5.3 PCM系统中噪声的影响（选学）



# 通信原理基础

## 差错控制编码





# 第8章 差错控制编码

## • 8.1 概述

- 信道分类：从差错控制角度看
  - ◆ 随机信道：错码的出现是随机的
  - ◆ 突发信道：错码是成串集中出现的
  - ◆ 混合信道：既存在随机错码又存在突发错码
- 差错控制技术的种类
  - ◆ 检错重发
  - ◆ 前向纠错
  - ◆ 反馈校验
  - ◆ 检错删除

# 第8章 差错控制编码

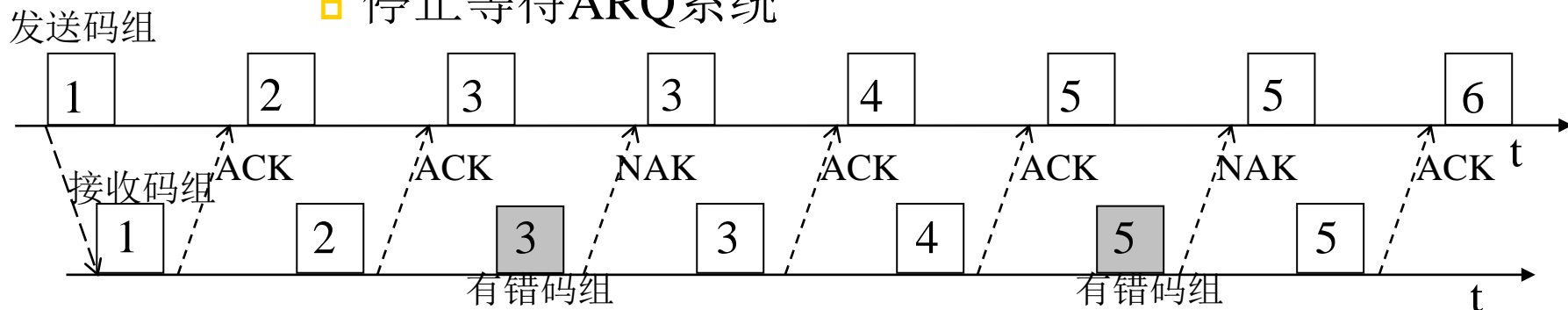
- 差错控制编码：常称为**纠错编码**
  - ◆ **监督码元**：上述4种技术中除第3种外，都是在接收端识别有无错码。所以在发送端需要在信息码元序列中增加一些差错控制码元，它们称为监督码元。
  - ◆ 不同的编码方法，有不同的**检错或纠错能力**。
  - ◆ **多余度**：就是指增加的监督码元多少。例如，若编码序列中平均每两个信息码元就添加一个监督码元，则这种编码的多余度为 $1/3$ 。
  - ◆ **编码效率(简称码率)**：设编码序列中信息码元数量为 $k$ ，总码元数量为 $n$ ，则比值 $k/n$ 就是码率。
  - ◆ **冗余度**：监督码元数 $(n-k)$ 和信息码元数 $k$ 之比。
  - ◆ 理论上，差错控制以降低信息传输速率为代价换取提高传输可靠性。

# 第8章 差错控制编码

## ■ 自动要求重发(ARQ)系统

### ◆ 3种ARQ系统

#### □ 停止等待ARQ系统



- 数据按分组发送。每发送一组数据后发送端等待接收端的确认(ACK)答复, 然后再发送下一组数据。
- 图中的第3组接收数据有误, 接收端发回一个否认(NAK)答复。这时, 发送端将重发第3组数据。
- 系统是工作在半双工状态, 时间没有得到充分利用, 传输效率较低。

# 第8章 差错控制编码

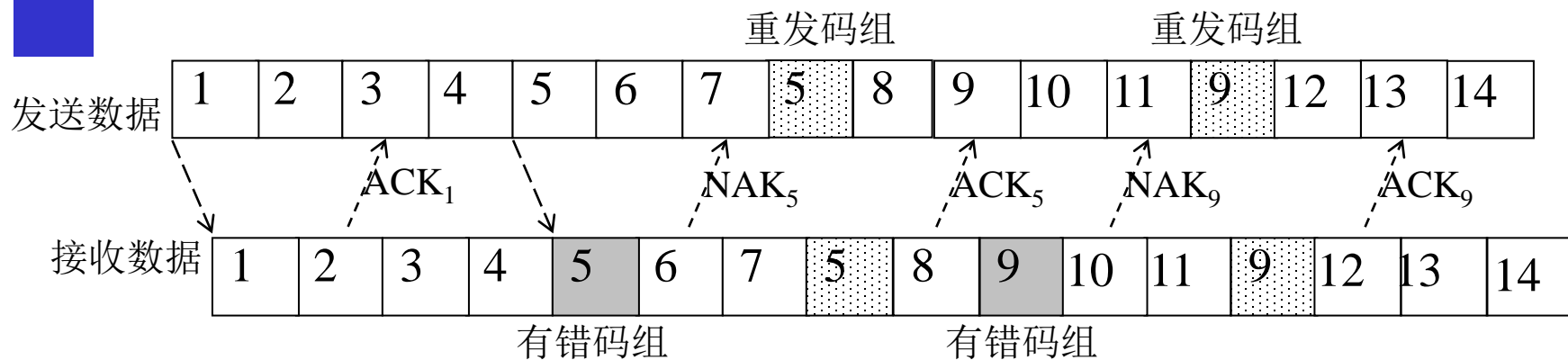
## □ 拉后ARQ系统



- 发送端连续发送数据组，接收端对于每个接收到的数据组都发回**确认(ACK)**或**否认(NAK)**答复。
- 例如，图中第5组接收数据有误，则在发送端收到第5组接收的否认答复后，从第5组开始重发数据组。
- 在这种系统中需要对发送的数据组和答复进行编号，以便识别。显然，这种系统需要双工信道

# 第8章 差错控制编码

## □ 选择重发ARQ系统



- 它只重发出错的数据组，因此进一步提高了传输效率。

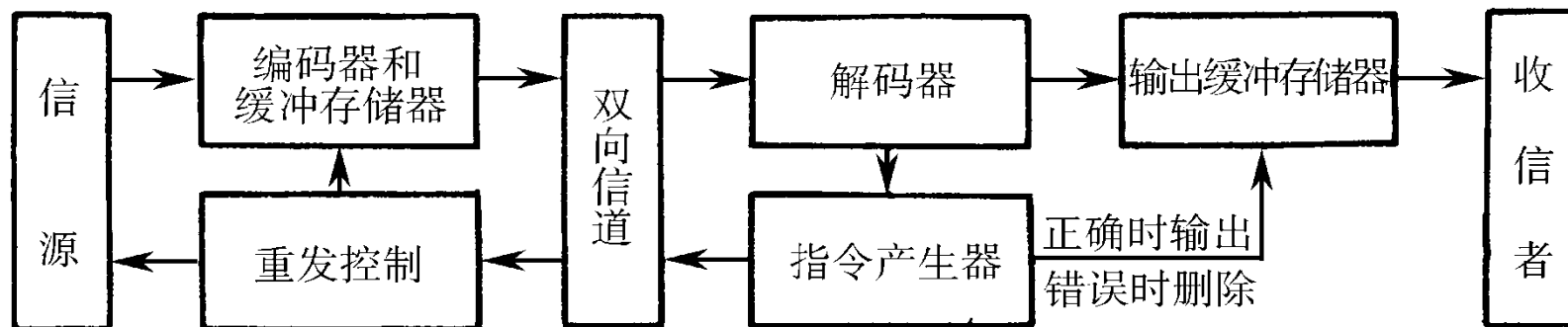


# 第8章 差错控制编码

- ◆ ARQ的主要优点：和前向纠错方法相比
  - 监督码元较少即能使误码率降到很低，即码率较高；
  - 检错的计算复杂度较低；
  - 检错用的编码方法和加性干扰的统计特性基本无关，能适应不同特性的信道。
- ◆ ARQ的主要缺点：
  - 需要双向信道来重发，不能用于单向信道，也不能用于一点到多点的通信系统。
  - 因为重发而使ARQ系统的传输效率降低。
  - 在信道干扰严重时，可能发生因不断反复重发而造成事实上的通信中断。
  - 在要求实时通信的场合，例如电话通信，往往不允许使用ARQ法。

# 第8章 差错控制编码

## ◆ ARQ系统的原理方框图



- 在发送端，输入的信息码元在编码器中被分组编码（加入监督码元）后，除了立即发送外，还暂存于缓冲存储器中。若接收端解码器检出错码，则由解码器控制产生一个重发指令。此指令经过反向信道送到发送端。由发送端重发控制器控制缓冲存储器重发一次。
- 接收端仅当解码器认为接收信息码元正确时，才将信息码元送给受信者，否则在输出缓冲存储器中删除接收码元。
- 当解码器未发现错码时，经过反向信道发出不需重发指令。发送端收到此指令后，即继续发送后一码组，发送端的缓冲存储器中的内容也随之更新。

# 第8章 差错控制编码

## 8.2 纠错编码的基本原理

■ 分组码基本原理：举例说明如下。

- ◆ 设有一种由3位二进制数字构成的码组，它共有8种不同的可能组合。若将其全部用来表示天气，则可以表示8种不同天气，

例如：“000”（晴）， “001”（云），

“010”（阴）， “011”（雨），

“100”（雪）， “101”（霜），

“110”（雾）， “111”（雹）。

- ◆ 其中任一码组在传输中若发生一个或多个错码，则将变成另一个信息码组。这时，接收端将无法发现错误。





# 第8章 差错控制编码

- ◆ 若在上述8种码组中只准许使用4种来传送天气，例如：

“000”=晴                      “011”=云    “101”=阴    “110”  
=雨

- 这时，虽然只能传送4种不同的天气，但是接收端却有可能发现码组中的一个错码。
- 例如，若“000”（晴）中错了一位，则接收码组将变成“100”或“010”或“001”。这3种码组都是不准使用的，称为**禁用码组**。
- 接收端在收到禁用码组时，就认为发现了错码。当发生3个错码时，“000”变成了“111”，它也是禁用码组，故这种编码也能检测3个错码。
- 但是这种码不能发现一个码组中的两个错码，因为发生两个错码后产生的是**许用码组**。

# 第8章 差错控制编码

## ◆ 检错和纠错

- 上面这种编码只能检测错码，不能纠正错码。例如，当接收码组为禁用码组“100”时，接收端将无法判断是哪一位码发生了错误，因为晴、阴、雨三者错了一位都可以变成“100”。
- 要能够纠正错误，还要增加多余度。例如，若规定许用码组只有两个：“000”（晴），“111”（雨），其他都是禁用码组，则能够检测两个以下错码，或能够纠正一个错码。
- 例如，当收到禁用码组“100”时，若当作仅有一个错码，则可以判断此错码发生在“1”位，从而纠正为“000”（晴）。因为“111”（雨）发生任何一位错码时都不会变成“100”这种形式。
- 但是，这时若假定错码数不超过两个，则存在两种可能性：“000”错一位和“111”错两位都可能变成“100”，因而只能检测出存在错码而无法纠正错码。

# 第8章 差错控制编码

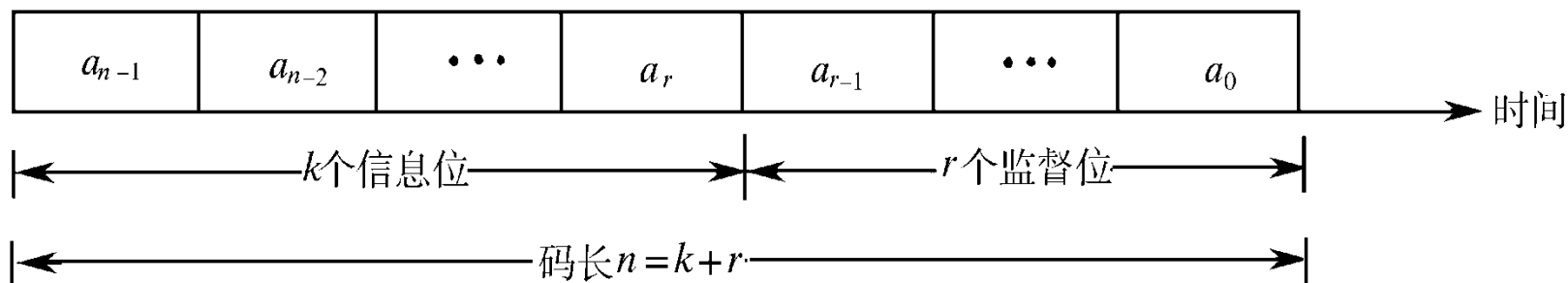
## ◆ 分组码的结构

- 将信息码分组，为每组信息码附加若干监督码的编码称为**分组码**。
- 在分组码中，监督码元仅监督本码组中的信息码元。
- 信息位和监督位的关系：举例如下

	信息位	监督位
晴	00	0
云	01	1
阴	10	1
雨	11	0

# 第8章 差错控制编码

## □ 分组码的一般结构



## ◆ 分组码的符号: $(n, k)$

- $N$  — 码组的总位数，又称为码组的长度（码长），
- $k$  — 码组中信息码元的数目，
- $n - k = r$  — 码组中的监督码元数目，或称监督位数目。

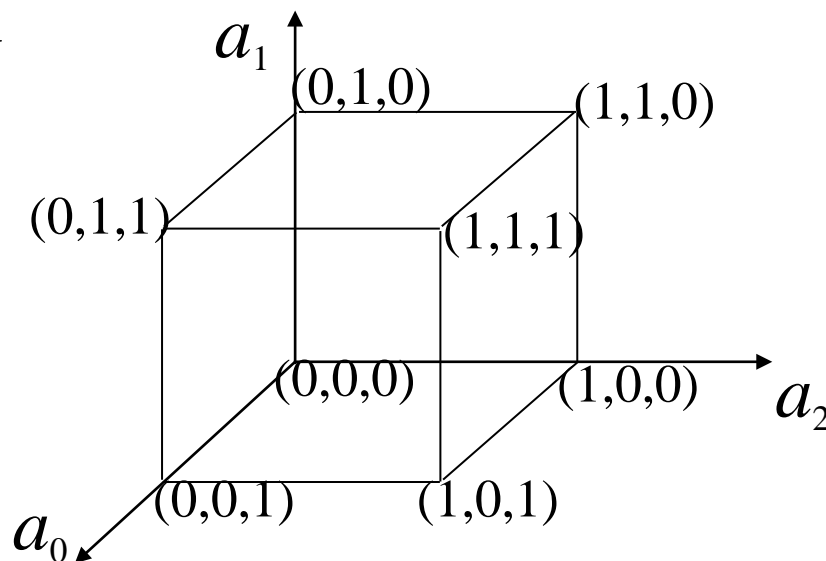
# 第8章 差错控制编码

## ◆ 分组码的码重和码距

- 码重：把码组中“1”的个数目称为码组的重量，简称**码重**。
- 码距：把两个码组中对应位上数字不同的位数称为码组的距离，简称**码距**。码距又称**汉明距离**。
- 例如，“000”=晴，“011”=云，“101”=阴，“110”=雨，4个码组之间，任意两个的距离均为2。
- 最小码距：把某种编码中各个码组之间距离的最小值称为**最小码距**( $d_0$ )。例如，上面的编码的最小码距 $d_0 = 2$ 。

# 第8章 差错控制编码

## ◆ 码距的几何意义



- 对于3位的编码组，可以在3维空间中说明码距的几何意义。
- 每个码组的3个码元的值( $a_1, a_2, a_3$ )就是此立方体各顶点的坐标。而上述码距概念在此图中就对应于各顶点之间沿立方体各边行走的几何距离。
- 由此图可以直观看出，上例中4个准用码组之间的距离均为2。

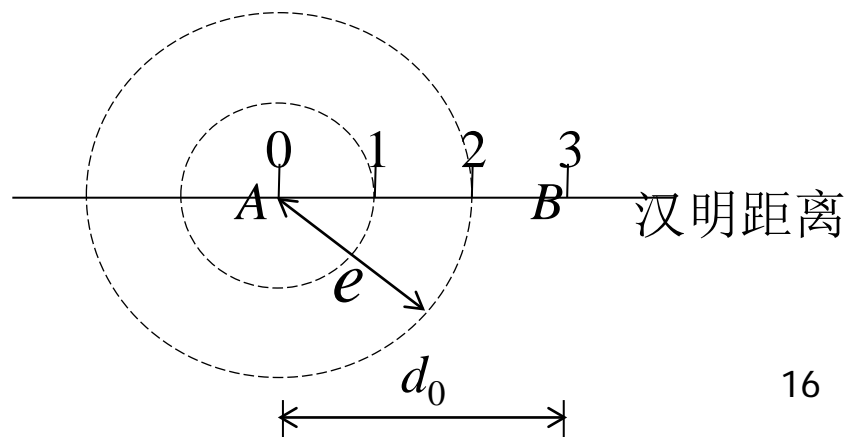
# 第8章 差错控制编码

## ◆ 码距和检纠错能力的关系

- 一种编码的最小码距 $d_0$ 的大小直接关系着这种编码的检错和纠错能力
- 为检测 $e$ 个错码，要求最小码距  $d_0 \geq e + 1$

【证】设一个码组A位于O点。若码组A中发生一个错码，则我们可以认为A的位置将移动至以O点为圆心，以1为半径的圆上某点，但其位置不会超出此圆。

若码组A中发生两位错码，则其位置不会超出以O点为圆心，以2为半径的圆。因此，只要最小码距不小于3，码组A发生两位以下错码时，不可能变成另一个准用码组，因而能检测错码的位数等于2。



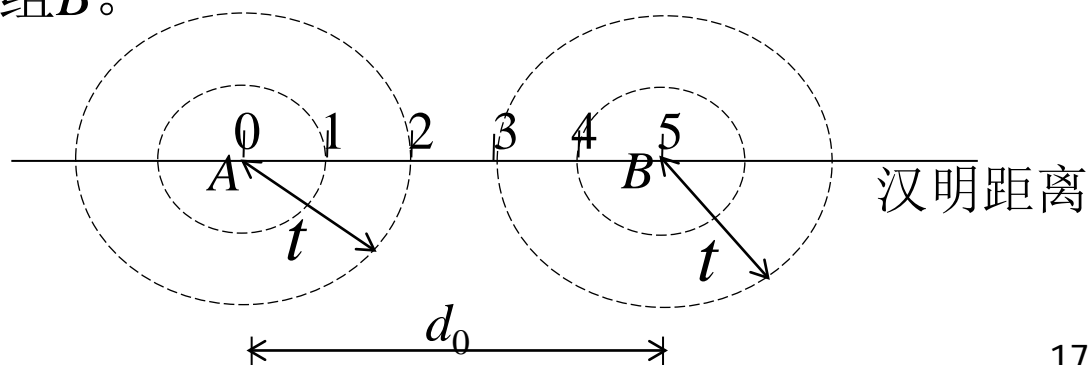
# 第8章 差错控制编码

同理，若一种编码的最小码距为 $d_0$ ，则将能检测 $(d_0 - 1)$ 个错码。反之，若要求检测 $e$ 个错码，则最小码距 $d_0$ 至少应不小于 $(e + 1)$ 。

■ 为了纠正 $t$ 个错码，要求最小码距 $d_0 \geq 2t + 1$

【证】图中画出码组A和B的距离为5。码组A或B若发生不多于两位错码，则其位置均不会超出半径为2以原位置为圆心的圆。这两个圆是不重叠的。判决规则为：若接收码组落于以A为圆心的圆上就判决收到的是码组A，若落于以B为圆心的圆上就判决为码组B。

这样，就能够纠正两位错码。







# 第8章 差错控制编码

若这种编码中除码组A和B外，还有许许多多不同码组，但任两码组之间的码距均不小于5，则以各码组的位置为中心以2为半径画出之圆都不会互相重叠。这样，每种码组如果发生不超过两位错码都将能被纠正。因此，当最小码距 $d_0=5$ 时，能够纠正2个错码，且最多能纠正2个。若错码达到3个，就将落入另一圆上，从而发生错判。故一般说来，为纠正 $t$ 个错码，最小码距应不小于 $(2t + 1)$ 。

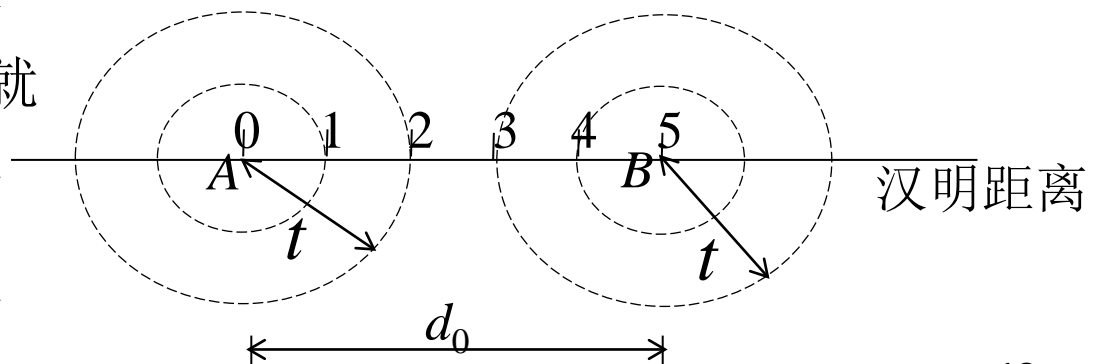
# 第8章 差错控制编码

- 为纠正 $t$ 个错码，同时检测 $e$ 个错码，要求最小码距

$$d_0 \geq e + t + 1 \quad (e > t)$$

在解释此式之前，先来分析下图所示的例子。图中码组A和B之间距离为5。按照检错能力公式，最多能检测4个错码，即 $e = d_0 - 1 = 5 - 1 = 4$ ，按照纠错能力公式纠错时，能纠正2个错码。但是，不能同时作到两者，因为当错码位数超过纠错能力时，该码组立即进入另一码组的圆内而被错误地“纠正”了。例如，码组A若错了3位，就会被误认为码组B错了2位造成的结果，从而被

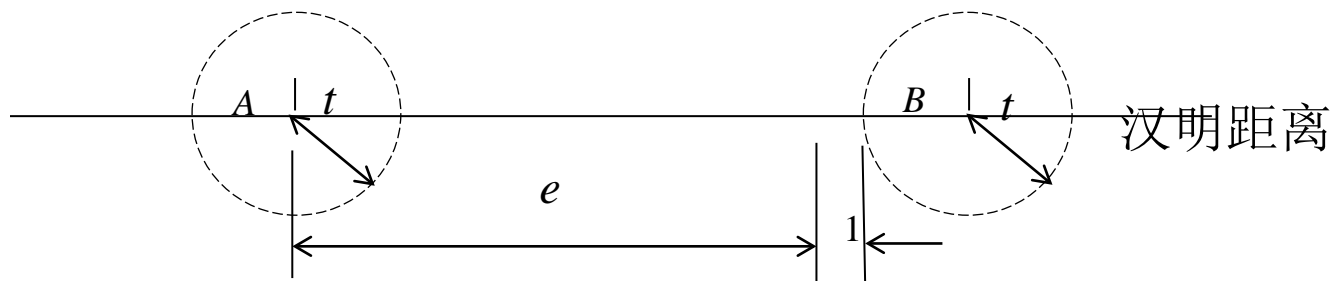
错“纠”为B。这就是说，检错和纠错公式不能同时成立或同时运用。



# 第8章 差错控制编码

所以，为了在可以纠正 $t$ 个错码的同时，能够检测 $e$ 个错码，就需要像下图所示那样，使某一码组（譬如码组A）发生 $e$ 个错误之后所处的位置，与其他码组（譬如码组B）的纠错圆圈至少距离等于1，不然将落在该纠错圆上从而发生错误地“纠正”。因此，由此图可以直观看出，要求最小码距

$$d_0 \geq e + t + 1 \quad (e > t)$$



这种纠错和检错结合的工作方式简称**纠检结合**。



# 第8章 差错控制编码

这种工作方式是自动在纠错和检错之间转换的。当错码数量少时，系统按前向纠错方式工作，以节省重发时间，提高传输效率；当错码数量多时，系统按反馈重发方式纠错，以降低系统的总误码率。所以，它适用于大多数时间中错码数量很少，少数时间中错码数量多的情况。



# 第8章 差错控制编码

## • 8.3 纠错编码的性能（自学）

### ■ 系统带宽和信噪比的矛盾：

- ◆ 由上节所述的纠错编码原理可知，为了减少接收错误码元数量，需要在发送信息码元序列中加入监督码元。这样作的结果使发送序列增长，冗余度增大。若仍须保持发送信息码元速率不变，则传输速率必须增大，因而增大了系统带宽。系统带宽的增大将引起系统中噪声功率增大，使信噪比下降。信噪比的下降反而又使系统接收码元序列中的错码增多。一般说来，采用纠错编码后，误码率总是能够得到很大改善的。改善的程度和所用的编码有关。

# 第8章 差错控制编码

## 8.4 简单的实用编码

### 8.4.1 奇偶监督码

- ◆ 奇偶监督码分为奇数监督码和偶数监督码两种，两者的原理相同。在偶数监督码中，无论信息位多少，监督位只有1位，它使码组中“1”的数目为偶数，即满足下式条件：

$$a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus \cdots \oplus a_0 = 0$$

式中 $a_0$ 为监督位，其他位为信息位。

这种编码能够检测奇数个错码。在接收端，按照上式求“模2和”，若计算结果为“1”就说明存在错码，结果为“0”就认为无错码。

奇数监督码与偶数监督码相似，只不过其码组中“1”的数目为奇数：

$$a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus \cdots \oplus a_0 = 1$$

# 第8章 差错控制编码

## 8.4.2 二维奇偶监督码（方阵码）

### ◆ 二维奇偶监督码的构成

它是先把上述奇偶监督码的若干码组排成矩阵，每一码组写成一列，然后再按列的方向增加第二维监督位，如下图所示

$$\begin{array}{cccccc} a_{n-1}^1 & a_{n-2}^1 & \cdots & a_1^1 & a_0^1 & \\ a_{n-1}^2 & a_{n-2}^2 & \cdots & a_1^2 & a_0^2 & \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \\ a_{n-1}^m & a_{n-2}^m & \cdots & a_1^m & a_0^m & \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 & \end{array}$$

图中 $a_0^1 a_0^2 \dots a_0^m$ 为 $m$ 行奇偶监督码中的 $m$ 个监督位。

$c_{n-1} c_{n-2} \dots c_1 c_0$ 为按列进行第二次编码所增加的监督位，它们构成了一监督位行。

# 第8章 差错控制编码

## ◆ 二维奇偶监督码的性能

- 这种编码有可能检测偶数个错码。因为每行的监督位虽然不能用于检测本行中的偶数个错码，但按列的方向有可能由 $c_{n-1} c_{n-2} \dots c_1 c_0$ 等监督位检测出来。有一些偶数错码不可能检测出来。例如，构成矩形的4个错码，譬如图中

$$a_{n-2}^2 \quad a_1^2 \quad a_{n-2}^m \quad a_1^m$$

错了，就检测不出。

- 这种二维奇偶监督码适于检测突发错码。因为突发错码常常成串出现，随后有较长一段无错区间。
- 由于方阵码只对构成矩形四角的错码无法检测，故其检错能力较强。
- 二维奇偶监督码不仅可用来检错，还可以用来纠正一些错码。例如，仅在一行中有奇数个错码时。





# 第8章 差错控制编码

## 8.4.3 恒比码

- ◆ 在恒比码中，每个码组均含有相同数目的“1”（和“0”）。由于“1”的数目与“0”的数目之比保持恒定，故得此名。
- ◆ 这种码在检测时，只要计算接收码组中“1”的数目是否对，就知道有无错码。
- ◆ 恒比码的主要优点是简单和适于用来传输电传机或其他键盘设备产生的字母和符号。对于信源来的二进制随机数字序列，这种码就不适合使用了。

# 第8章 差错控制编码

## 8.4.4 正反码

### ◆ 正反码的编码：

- 它是一种简单的能够纠正错码的编码。其中的监督位数目与信息位数目相同，监督码元与信息码元相同或者相反则由信息码中“1”的个数而定。
- 例如，若码长 $n = 10$ ，其中信息位 $k = 5$ ，监督位 $r = 5$ 。其编码规则为：
  - 当信息位中有奇数个“1”时，监督位是信息位的简单重复；
  - 当信息位有偶数个“1”时，监督位是信息位的反码。
  - 例如，若信息位为11001，则码组为1100111001；若信息位为10001，则码组为1000101110。



# 第8章 差错控制编码

## ◆ 正反码的解码

- 在上例中，先将接收码组中信息位和监督位按模 2 相加，得到一个 5 位的合成码组。然后，由此合成码组产生一个校验码组。
- 若接收码组的信息位中有奇数个“1”，则合成码组就是校验码组；若接收码组的信息位中有偶数个“1”，则取合成码组的反码作为校验码组。
- 最后，观察校验码组中“1”的个数，按下表进行判决及纠正可能发现的错码。

# 第8章 差错控制编码

## □ 校验码组和错码的关系

	校验码组的组成	错码情况
1	全为“0”	无错码
2	有4个“1”和1个“0”	信息码中有1位错码，其位置对应校验码组中“0”的位置
3	有4个“0”和1个“1”	监督码中有1位错码，其位置对应校验码组中“1”的位置
4	其他组成	错码多于1个

例如，若发送码组为1100111001，接收码组中无错码，则合成码组应为 $11001 \oplus 11001 = 00000$ 。由于接收码组信息位中有奇数个“1”，所以校验码组就是00000。按上表判决，结论是无错码。



# 第8章 差错控制编码

若传输中产生了差错，使接收码组变成1000111001，则合成码组为 $10001 \oplus 11001 = 01000$ 。由于接收码组中信息位有偶数个“1”，所以校验码组应取合成码组的反码，即10111。由于其中有4个“1”和1个“0”，按上表判断信息位中左边第2位为错码。

若接收码组错成1100101001，则合成码组变成 $11001 \oplus 01001 = 10000$ 。由于接收码组中信息位有奇数个“1”，故校验码组就是10000，按上表判断，监督位中第1位为错码。

最后，若接收码组为1001111001，则合成码组为 $10011 \oplus 11001 = 01010$ ，校验码组与其相同，按上表判断，这时错码多于1个。

- 上述长度为10的正反码具有纠正1位错码的能力，并能检测全部2位以下的错码和大部分2位以上的错码。



# 第8章 差错控制编码

## 8.5 线性分组码

### ■ 基本概念

- ◆ **代数码**：建立在代数学基础上的编码。
- ◆ **线性码**：按照一组线性方程构成的代数码。在线性码中信息位和监督位是由一些线性代数方程联系着的。
- ◆ **线性分组码**：按照一组线性方程构成的分组码。

本节将以汉明码为例引入线性分组码的一般原理。

# 第8章 差错控制编码

## ■ 汉明码

～能够纠正1位错码且编码效率较高的一种线性分组码

◆ 汉明码的构造原理。

- 在偶数监督码中，由于使用了一位监督位 $a_0$ ，它和信息位 $a_{n-1} \dots a_1$ 一起构成一个代数式：

$$a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus \dots \oplus a_0 = 0$$

在接收端解码时，实际上就是在计算

$$S = a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus \dots \oplus a_0$$

若 $S = 0$ ，就认为无错码；若 $S = 1$ ，就认为有错码。现将上式称为**监督关系式**， $S$ 称为**校正子**。由于校正子 $S$ 只有两种取值，故它只能代表有错和无错这两种信息，而不能指出错码的位置。

# 第8章 差错控制编码

- 若监督位增加一位，即变成两位，则能增加一个类似的监督关系式。由于两个校正子的可能值有4中组合：00，01，10，11，故能表示4种不同的信息。若用其中1种组合表示无错，则其余3种组合就有可能用来指示一个错码的3种不同位置。同理， $r$ 个监督关系式能指示1位错码的 $(2^r - 1)$ 个可能位置。
- 一般来说，若码长为 $n$ ，信息位数为 $k$ ，则监督位数 $r = n - k$ 。如果希望用 $r$ 个监督位构造出 $r$ 个监督关系式来指示1位错码的 $n$ 种可能位置，则要求

$$2^r - 1 \geq n \quad \text{或} \quad 2^r \geq k + r + 1$$

下面通过一个例子来说明如何具体构造这些监督关系式。



# 第8章 差错控制编码

- 例：设分组码 $(n, k)$ 中 $k = 4$ ，为了纠正1位错码，由上式可知，要求监督位数 $r \geq 3$ 。若取 $r = 3$ ，则 $n = k + r = 7$ 。我们用 $a_6, a_5, \dots, a_0$ 表示这7个码元，用 $S_1, S_2$ 和 $S_3$ 表示3个监督关系式中的校正子，则 $S_1, S_2$ 和 $S_3$ 的值与错码位置的对应关系可以规定如下表所列：

$S_1 S_2 S_3$	错码位置	$S_1 S_2 S_3$	错码位置
001	$a_0$	101	$a_4$
010	$a_1$	110	$a_5$
100	$a_2$	111	$a_6$
011	$a_3$	000	无错码



# 第8章 差错控制编码

由表中规定可见，仅当一位错码的位置在 $a_2$ 、 $a_4$ 、 $a_5$ 或 $a_6$ 时，校正子 $S_1$ 为1；否则 $S_1$ 为零。这就意味着 $a_2$ 、 $a_4$ 、 $a_5$ 和 $a_6$ 四个码元构成偶数监督关系：

$$S_1 = a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 \oplus a_2$$

同理， $a_1$ 、 $a_3$ 、 $a_5$ 和 $a_6$ 构成偶数监督关系：

$$S_2 = a_6 \oplus a_5 \oplus a_3 \oplus a_1$$

以及 $a_0$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 和 $a_6$ 构成偶数监督关系

$$S_3 = a_6 \oplus a_4 \oplus a_3 \oplus a_0$$

# 第8章 差错控制编码

- 在发送端编码时，信息位 $a_6$ 、 $a_5$ 、 $a_4$ 和 $a_3$ 的值决定于输入信号，因此它们是随机的。监督位 $a_2$ 、 $a_1$ 和 $a_0$ 应根据信息位的取值按监督关系来确定，即监督位应使上3式中 $S_1$ 、 $S_2$ 和 $S_3$ 的值为0（表示编成的码组中应无错码）：

$$\begin{cases} a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 \oplus a_2 = 0 \\ a_6 \oplus a_5 \oplus a_3 \oplus a_1 = 0 \\ a_6 \oplus a_4 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \end{cases}$$

上式经过移项运算，解出监督位

$$\begin{cases} a_2 = a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 \\ a_1 = a_6 \oplus a_5 \oplus a_3 \\ a_0 = a_6 \oplus a_4 \oplus a_3 \end{cases}$$

给定信息位后，可以直接按上式算出监督位，结果见下表<sub>36</sub>

# 第8章 差错控制编码

信息位 $a_6 a_5 a_4 a_3$	监督位 $a_2 a_1 a_0$	信息位 $a_6 a_5 a_4 a_3$	监督位 $a_2 a_1 a_0$
0000	000	1000	111
0001	011	1001	100
0010	101	1010	010
0011	110	1011	001
0100	110	1100	001
0101	101	1101	010
0110	011	1110	100
0111	000	1111	111

# 第8章 差错控制编码

- 接收端收到每个码组后，先计算出 $S_1$ 、 $S_2$ 和 $S_3$ ，再查表判断错码情况。例如，若接收码组为0000011，按上述公式计算可得： $S_1 = 0$ ， $S_2 = 1$ ， $S_3 = 1$ 。由于 $S_1 S_2 S_3$ 等于011，故查表可知在 $a_3$ 位有1错码。
- 按照上述方法构造的码称为汉明码。表中所列的(7, 4)汉明码的最小码距 $d_0 = 3$ 。因此，这种码能够纠正1个错码或检测2个错码。由于码率 $k/n = (n - r) / n = 1 - r/n$ ，故当 $n$ 很大和 $r$ 很小时，码率接近1。可见，汉明码是一种高效码。

# 第8章 差错控制编码

## 8.6 循环码

### 8.6.1 循环码原理

- ◆ **循环性**：循环性是指任一码组循环一位（即将最右端的一个码元移至左端，或反之）以后，仍为该码中的一个码组。在下表中给出一种(7, 3)循环码的全部码组。

码组编号	信息位	监督位	码组编号	信息位	监督位
	$a_6a_5a_4$	$a_3a_2a_1a_0$		$a_6a_5a_4$	$a_3a_2a_1a_0$
1	000	0000	5	100	1011
2	001	0111	6	101	1100
3	010	1110	7	110	0101
4	011	1001	8	111	0010

例如，表中的第2码组向右移一位即得到第5码组；第6码组向右移一位即得到第7码组。



# 第8章 差错控制编码

一般说来, 若 $(a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0)$ 是循环码的一个码组, 则循环移位后的码组

$$(a_{n-2} a_{n-3} \dots a_0 a_{n-1})$$

$$(a_{n-3} a_{n-4} \dots a_{n-1} a_{n-2})$$

$\dots \dots \dots$

$$(a_0 a_{n-1} \dots a_2 a_1)$$

也是该编码中的码组。

# 第8章 差错控制编码

## 8.6.3 截短循环码

- ◆ 截短目的：在设计纠错编码方案时，常常信息位数 $k$ 、码长 $n$ 和纠错能力都是预先给定的。但是，并不一定有恰好满足这些条件的循环码存在。这时，可以采用将码长截短的方法，得出满足要求的编码。
- ◆ 截短方法：设给定一个 $(n, k)$ 循环码，它共有 $2^k$ 种码组，现使其前 $i$  ( $0 < i < k$ )个信息位全为“0”，于是它变成仅有 $2^{k-i}$ 种码组。然后从中删去这 $i$ 位全“0”的信息位，最终得到一个 $(n-i, k-i)$ 的线性码。将这种码称为**截短循环码**。
- ◆ 截短循环码性能：循环码截短前后至少具有相同的纠错能力，并且编解码方法仍和截短前的方法一样。
- ◆ 例：要求构造一个能够纠正1位错码的 $(13, 9)$ 码。这时可以由 $(15, 11)$ 循环码的11种码组中选出前两信息位均为“0”的码组，构成一个新的码组集合。然后在发送时不发送这两位“0”。于是发送码组成为 $(13, 9)$ 截短循环码。



# 第8章 差错控制编码

## 8.6.4 BCH码

- ◆ 什么是BCH码？它是一种获得广泛应用的能够纠正多个错误的循环码，是以3位发明这种码的人名(Bose - Chaudhuri - Hocguenghem)命名的。BCH码的重要性在于它解决了生成多项式与纠错能力的关系问题，可以在给定纠错能力要求的条件下寻找到码的生成多项式。有了生成多项式，编码的基本问题就随之解决了。
- ◆ BCH码分类：
  - ▣ 本原BCH码：其生成多项式 $g(x)$ 中含有最高次数为 $m$ 的本原多项式，且码长为 $n = 2^m - 1$ ，( $m \geq 3$ ，为正整数)。
  - ▣ 非本原BCH码：其生成多项式中不含这种本原多项式，且码长 $n$ 是 $(2^m - 1)$ 的一个因子，即码长 $n$ 一定除得尽 $2^m - 1$ 。
  - ▣ 本原多项式的概念将在下一章介绍。

# 第8章 差错控制编码

## ◆ BCH码的性能:

- 码长 $n$ 与监督位、纠错个数 $t$ 之间的关系:

对于正整数 $m$  ( $m \geq 3$ )和正整数 $t < m/2$ , 必定存在一个码长为 $n = 2^m - 1$ , 监督位为 $n - k \leq mt$ , 能纠正所有不多于 $t$ 个随机错误的BCH码。若码长 $n = (2^m - 1) / i$  ( $i > 1$ , 且除得尽 $(2^m - 1)$ ), 则为非本原BCH码。

- 汉明码是能够纠正单个随机错误的码。可以证明, 具有循环性质的汉明码就是能纠正单个随机错误的本原BCH码。
- 例如,  $(7, 4)$ 汉明码就是以 $g_1(x) = x^3 + x + 1$ 或 $g_2(x) = x^3 + x^2 + 1$ 生成的BCH码, 而用 $g_3(x) = x^4 + x + 1$ 或 $g_4(x) = x^4 + x^3 + 1$ 都能生成 $(15, 11)$ 汉明码。



# 第8章 差错控制编码

## ◆ BCH码的设计

- 在工程设计中，一般不需要用计算方法去寻找生成多项式  $g(x)$ 。因为前人早已将寻找到的  $g(x)$  列成表，故可以用查表法找到所需的生成多项式。
- 下表给出了码长  $n \leq 127$  的二进制本原BCH码生成多项式。

# 第8章 差错控制编码

$n = 3$			$n = 63$		
$k$	$t$	$g(x)$	$k$	$t$	$g(x)$
1	1	7	57	1	103
$n = 7$			51	2	12471
$k$	$t$	$g(x)$	45	3	1701317
4	1	13	39	4	166623567
1	3	77	36	5	1033500423
$n = 15$			30	6	157464165347
$k$	$t$	$g(x)$	24	7	17323260404441
11	1	23	18	10	1363026512351725
7	2	721	16	11	6331141367235453
5	3	2467	10	13	472622305527250155
1	7	77777	7	15	5231045543503271737
			1	31	全部为1

# 第8章 差错控制编码

$n = 31$			$n = 127$		
$k$	$t$	$g(x)$	$k$	$t$	$g(x)$
26	1	45	120	1	211
21	2	3551	113	2	41567
16	3	107657	106	3	11554743
11	5	5423325	99	4	3447023271
6	7	313365047	92	5	624730022327
1	15	17777777777	85	6	130704476322273
			78	7	26230002166130115
			71	9	6255010713253127753
			64	10	1206534025570773100045
			57	11	235265252505705053517721
			50	13	54446512523314012421501421
			43	15	17721772213651227521220574343
			36	$\geq 15$	3146074666522075044764574721735
			29	$\geq 22$	403114461367670603667530141176155
			22	$\geq 23$	123376070404722522435445626637647043
			15	$\geq 27$	22057042445604554770523013762217604353
			8	$\geq 31$	7047264052751030651476224271567733130217
			1	63	全部为1

# 第8章 差错控制编码

- 表中给出的生成多项式系数是用8进制数字列出的。  
例如,  $g(x) = (13)_8$ 是指 $g(x) = x^3 + x + 1$ , 因为 $(13)_8 = (1011)_2$ , 后者就是此3次方程 $g(x)$ 的各项系数。
- 下表列出了部分非本原BCH码的生成多项式参数。

$n$	$k$	$t$	$g(x)$	$n$	$k$	$t$	$g(x)$
17	9	2	727	47	24	5	43073357
21	12	2	1663	65	53	2	10761
23	12	3	5343	65	40	4	354300067
33	22	2	5145	73	46	4	1717773537
41	21	4	6647133				

# 第8章 差错控制编码

## □ 戈莱码:

在上表中的(23, 12)码称为戈莱(Golay)码。它能纠正3个随机错码, 并且容易解码, 实际应用较多。

## □ 扩展BCH码:

BCH码的长度都为奇数。在应用中, 为了得到偶数长度的码, 并增大检错能力, 可以在BCH码生成多项式中乘上一个因式 $(x + 1)$ , 从而得到扩展BCH码 $(n + 1, k)$ 。扩展BCH码相当于在原BCH码上增加了一个校验位, 因此码距比原BCH码增加1。扩展BCH码已经不再具有循环性。例如, 广泛实用的扩展戈莱码(24, 12), 其最小码距为8, 码率为1/2, 能够纠正3个错码和检测4个错码。它比汉明码的纠错能力强很多, 付出的代价是解码更复杂, 码率也比汉明码低。此外, 它不再是循环码了。

# 第8章 差错控制编码

**8.6.5 RS码：** 它是一类具有很强纠错能力的多进制BCH码。

- ◆ 若仍用 $n$ 表示RS码的码长，则对于 $m$ 进制的RS码，其码长需要满足下式：
$$n = m - 1 = 2^q - 1$$

式中  $q \geq 2$ ，为整数。

- ◆ 对于能够纠正 $t$ 个错误的RS码，其监督码元数目为 $r = 2t$ ，这时的最小码距 $d_0 = 2t + 1$ 。
- ◆ RS码的生成多项式为

$$g(x) = (x + \alpha)(x + \alpha^2) \dots (x + \alpha^{2t})$$

式中， $\alpha$  — 伽罗华域 $GF(2^q)$ 中的本原元。

- ◆ 若将每个 $m$ 进制码元表示成相应的 $q$ 位二进制码元，则得到的二进制码的参数为：

码长：  $n = q(2^q - 1)$  （二进制码元）

监督码：  $r = 2qt$  （二进制码元）





# 第8章 差错控制编码

- ◆ 由于RS码能够纠正 $t$ 个 $m$ 进制错码，或者说，能够纠正码组中 $t$ 个不超过 $q$ 位连续的二进制错码，所以RS码特别适用于存在突发错误的信道，例如移动通信网等衰落信道中。此外，因为它是多进制纠错编码，所以特别适合用于多进制调制的场合。

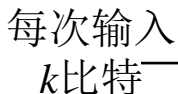
# 第8章 差错控制编码

## 8.7 卷积码

### ■ 非分组码概念：

- ◆ 卷积码是一种非分组码。通常它更适用于前向纠错，因为对于许多实际情况它的性能优于分组码，而且运算较简单。
- ◆ 卷积码在编码时虽然也是把 $k$ 个比特的信息段编成 $n$ 个比特的码组，但是监督码元不仅和当前的 $k$ 比特信息段有关，而且还同前面 $m = (N - 1)$ 个信息段有关。所以一个码组中的监督码元监督着 $N$ 个信息段。通常将 $N$ 称为编码**约束度**，并将 $nN$ 称为编码**约束长度**。一般说来，对于卷积码， $k$ 和 $n$ 的值是比较小的整数。我们将卷积码记作 $(n, k, N)$ 。码率则仍定义为 $k / n$ 。

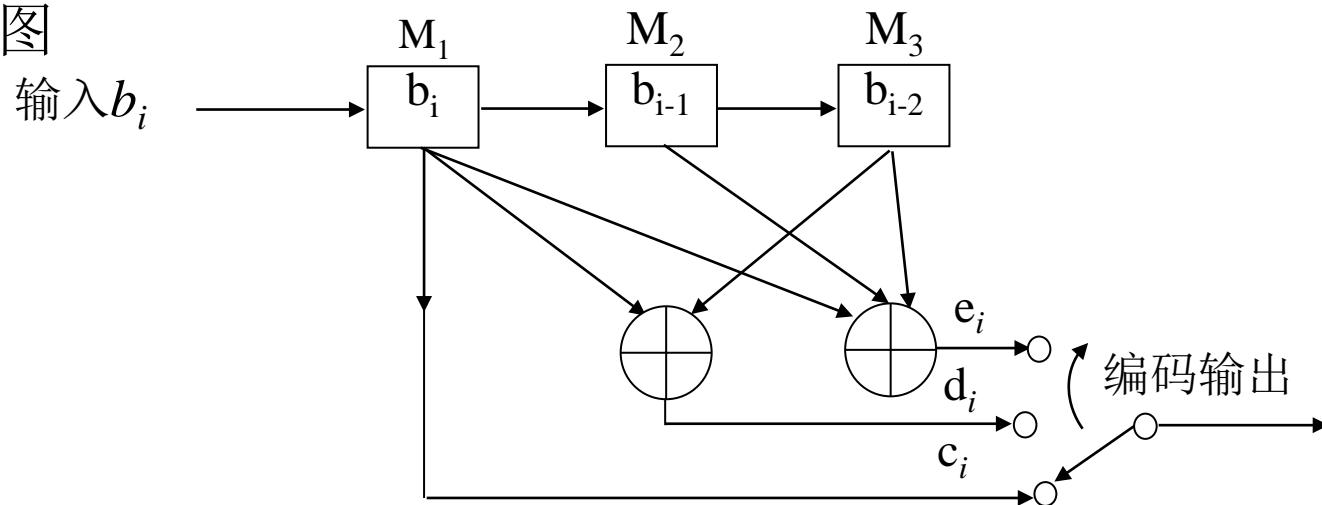
1



# 第8章 差错控制编码

◆ 例：  $(n, k, N) = (3, 1, 3)$  卷积码编码器

□ 方框图



□ 设输入信息比特序列是  $\dots b_{i-2} b_{i-1} b_i b_{i+1} \dots$ ，则当输入  $b_i$  时，此编码器输出3比特  $c_i d_i e_i$ ，输入和输出的关系如下：

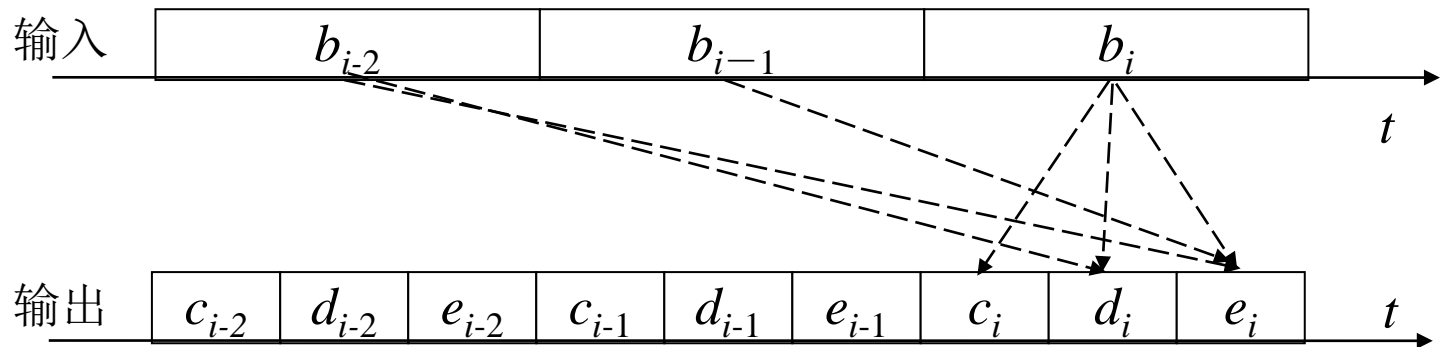
$$c_i = b_i$$

$$d_i = b_i \oplus b_{i-2}$$

$$e_i = b_i \oplus b_{i-1} \oplus b_{i-2}$$

# 第8章 差错控制编码

在下图中用虚线示出了信息位 $b_i$ 的监督位和各信息位之间的约束关系。这里的编码约束长度 $nN$ 等于9。





# 第8章 差错控制编码

## 8.7.3 卷积码的解码

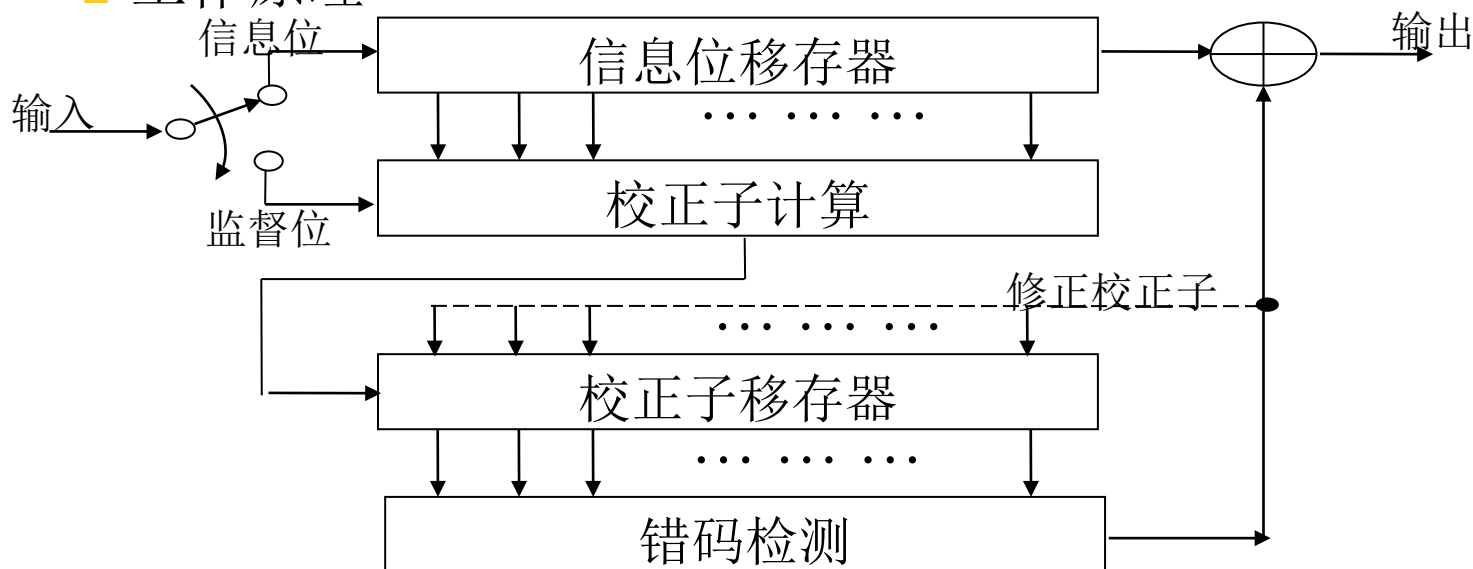
### ◆ 分类:

- **代数解码**: 利用编码本身的代数结构进行解码, 不考虑信道的统计特性。**大数逻辑解码**, 又称**门限解码**, 是卷积码代数解码的最主要一种方法, 它也可以应用于循环码的解码。大数逻辑解码对于约束长度较短的卷积码最为有效, 而且设备较简单。
- **概率解码**: 又称**最大似然解码**。它基于信道的统计特性和卷积码的特点进行计算。针对无记忆信道提出的序贯解码就是概率解码方法之一。另一种概率解码方法是**维特比算法**。当码的约束长度较短时, 它比序贯解码算法的效率更高、速度更快, 目前得到广泛的应用。

# 第8章 差错控制编码

## ◆ 大数逻辑解码

### □ 工作原理



- 图中首先将接收信息位暂存于移寄存器中，并从接收码元的信息位和监督位计算校正子。然后，将计算得出的校正子暂存，并用它来检测错码的位置。在信息位移寄存器输出端，接有一个模2加电路；当检测到输出的信息位有错时，在输出的信息位上加“1”，从而纠正之。



# 第8章 差错控制编码

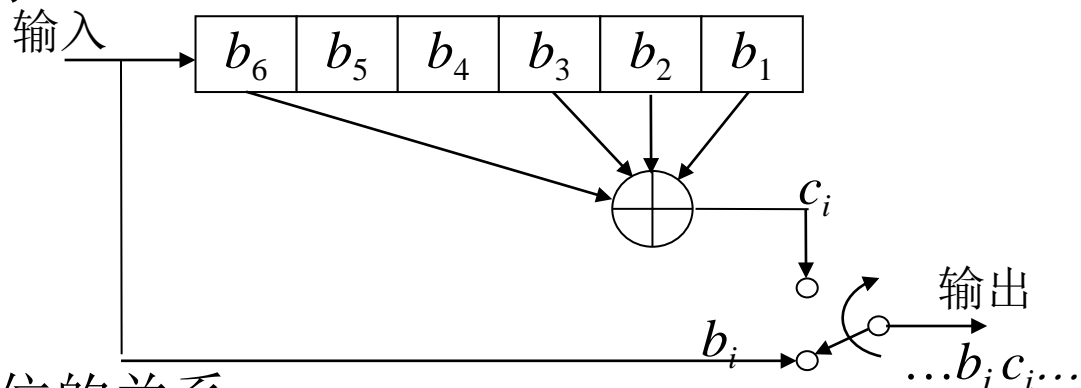
- 这里的错码检测是采用二进制码的大数逻辑解码算法。它利用一组“正交”校验方程进行计算。
- 这里的“正交”定义：若被校验的那个信息位出现在校验方程组的每一个方程中，而其他的信息位至多在一个方程中出现，则称这组方程为正交校验方程。这样就可以根据被错码影响了的方程数目在方程组中是否占多数来判断该信息位是否错了。下面将用一个实例来具体讲述这一过程。



# 第8章 差错控制编码

□ 例：(2, 1, 6)卷积码

➤ 编码器方框图



➤ 监督位和信息位的关系

当输入序列为 $b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ 时，监督位为

$$c_1 = b_1$$

$$c_2 = b_2$$

$$c_3 = b_3$$

$$c_4 = b_1 + b_4$$

$$c_5 = b_1 + b_2 + b_5$$

$$c_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_6$$

... ..

# 第8章 差错控制编码

## ➤ 监督关系式

参照8.5节中监督关系的定义式，容易写出

$$S_1 = c_1 + b_1$$

$$S_2 = c_2 + b_2$$

$$S_3 = c_3 + b_3$$

$$S_4 = c_4 + b_1 + b_4$$

$$S_5 = c_5 + b_1 + b_2 + b_5$$

$$S_6 = c_6 + b_1 + b_2 + b_3 + b_6$$

上式中的 $S_i$  ( $i = 1 \sim 6$ )称为校正子。

## ➤ 正交校验方程组

上式经过简单线性变换后，得出如下正交校验方程组：

# 第8章 差错控制编码

$$S_1 = c_1 + b_1$$

$$S_4 = c_4 + b_1 + b_4$$

$$S_5 = c_5 + b_1 + b_2 + b_5$$

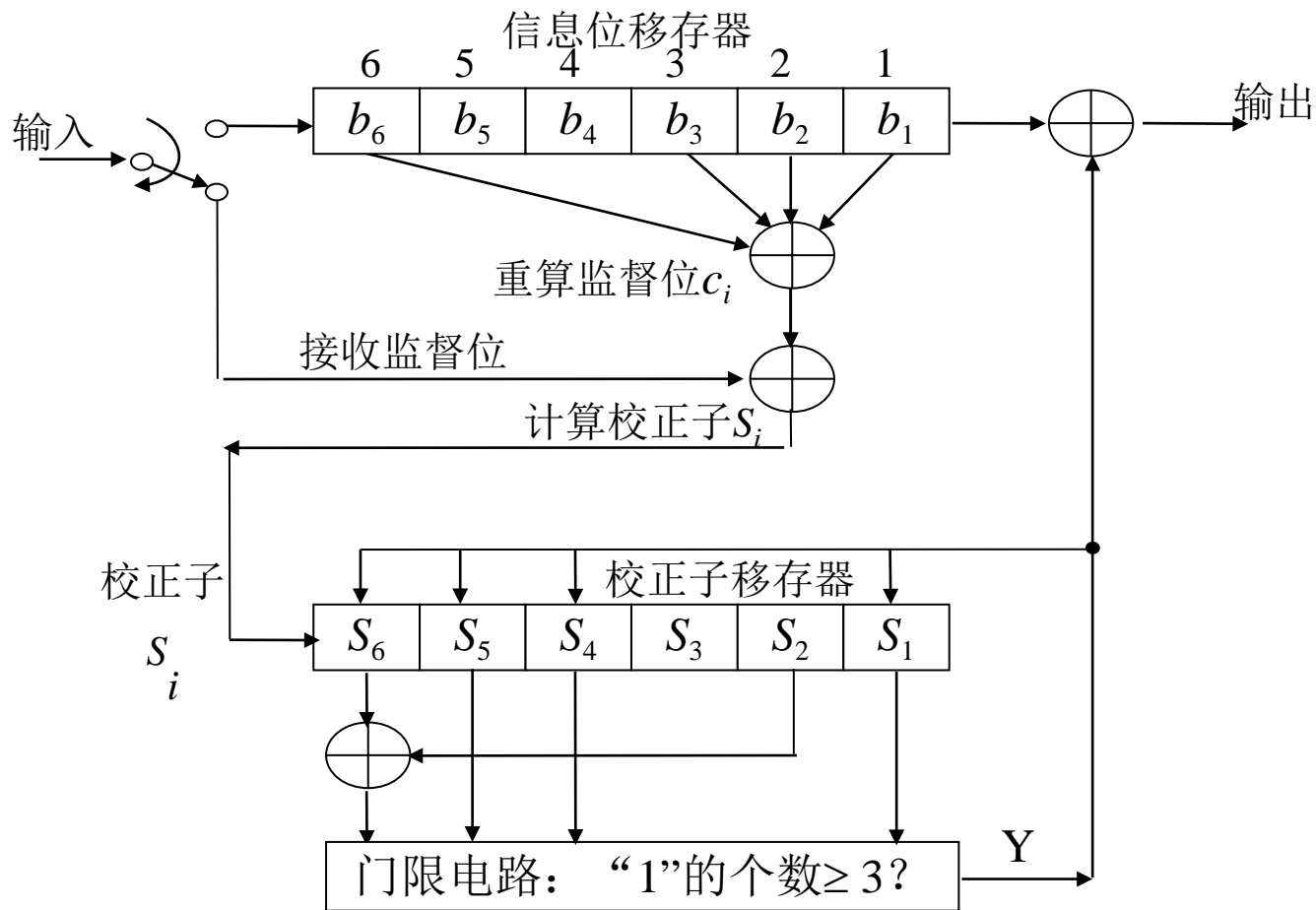
$$S_2 + S_6 = c_2 + c_6 + b_1 + b_3 + b_6$$

在上式中，只有信息位 $b_1$ 出现在每个方程中，监督位和其他信息位均最多只出现一次。因此，在接收端解码时，考察 $b_1$ 、 $c_1$ 至 $b_6$ 、 $c_6$ 等12个码元，仅当 $b_1$ 出错时，式中才可能有3个或3个以上方程等于“1”。从而能够纠正 $b_1$ 的错误。

# 第8章 差错控制编码

## ▶ 解码器方框图

按照这一原理画出的此(2, 1, 6)卷积码解码器方框图如下



# 第8章 差错控制编码

由此图可见，当信息位出现一个错码时，仅当它位于信息位移存器的第6、3、2和1级时，才使校正子等于“1”。因此，这时的校正子序列为100111；

反之，当监督位出现一个错码时，校正子序列将为100000。

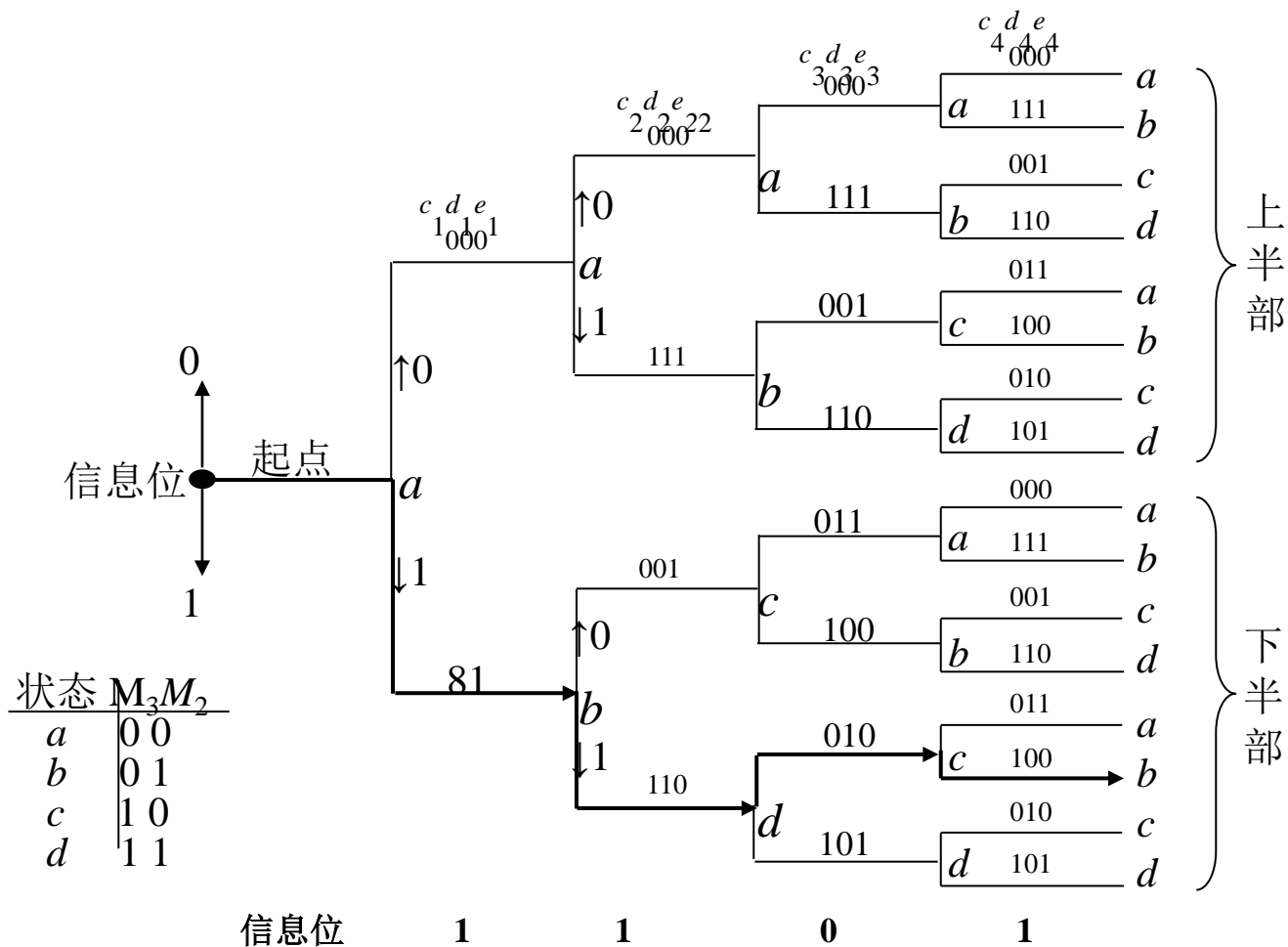
由此可见，当校正子序列中出现第一个“1”时，表示已经检出一个错码。后面的几位校正子则指出是信息位错了，还是监督位错了。

图中门限电路的输入代表式中4个方程的4个电压。门限电路将这4个电压（非模2）相加。当相加结果大于或等于3时，门限电路输出“1”，它除了送到输出端的模2加法器上纠正输出码元 $b_1$ 的错码外，还送到校正子移存器纠正其中错误。

- 此卷积码除了能够纠正两位在约束长度中的随机错误外，还能纠正部分多于两位的错误。

## ◆ 卷积码的几何表述

■ 码树图： 现仍以上面(3, 1, 3)码为例，介绍卷积码的码树



# 第8章 差错控制编码

将图中移存器 $M_1$ ， $M_2$ 和 $M_3$ 的初始状态000作为码树的起点。现在规定：输入信息位为“0”，则状态向上支路移动；输入信息位为“1”，则状态向下支路移动。于是，就可以得出图中所示的码树。

设现在的输入码元序列为1101，则当第1个信息位 $b_1 = 1$ 输入后，各移存器存储的信息分别为 $M_1 = 1$ ， $M_2 = M_3 = 0$ 。此时的输出为 $c_1 d_1 e_1 = 111$ ，码树的状态将从起点 $a$ 向下到达状态 $b$ ；此后，第2个输入信息位 $b_2 = 1$ ，故码树状态将从状态 $b$ 向下到达状态 $d$ 。这时 $M_2 = 1$ ， $M_3 = 0$ ，此时， $c_2 d_2 e_2 = 110$ 。第3位和后继各位输入时，编码器将按照图中粗线所示的路径前进，得到输出序列：111 110 010 100 ...。

由此码树图还可以看到，从第4级支路开始，码树的上半部和下半部相同。这意味着，从第4个输入信息位开始，输出码元已经与第1位输入信息位无关，即此编码器的约束度 $N = 3$ 。



# 第8章 差错控制编码

若观察在新码元输入时编码器的过去状态，即观察 $M_2 M_3$ 的状态和输入信息位的关系，则可以得出图中的 $a b c$ 和 $d$ 四种状态。这些状态和 $M_2 M_3$ 的关系也在图中给出了。

- 码树图原则上还可以用于解码。在解码时，按照汉明距离最小的准则沿上面的码树进行搜索。例如，若接收码元序列为111 010 010 110 ...，和发送序列相比可知第4和第11码元为错码。当接收到第4~6个码元“010”时，将这3个码元和对应的第2级的上下两个支路比较，它和上支路“001”的汉明距离等于2，和下支路“110”的汉明距离等于1，所以选择走下支路。

类似地，当接收到第10~12个码元“110”时，和第4级的上下支路比较，它和上支路的“011”的汉明距离等于2，和下支路“100”的汉明距离等于1，所以走下支路。这样，就能够纠正这两个错码。





# 第8章 差错控制编码

一般说来，码树搜索解码法并不实用，因为随着信息序列的增长，码树分支数目按指数规律增长；在上面的码树图中，只有4个信息位，分支已有 $2^4 = 16$ 个。但是它为以后实用解码算法建立了初步基础。

# 第8章 差错控制编码

## □ 状态图

上面的码树可以改进为下述的状态图。

由上例的编码器结构可知，输出码元 $c_i$   $d_i$   $e_i$ 决定于当前输入信息位 $b_i$ 和前两位信息位 $b_{i-1}$ 和 $b_{i-2}$ （即移存器 $M_2$ 和 $M_3$ 的状态）。在上图中已经为 $M_2$ 和 $M_3$ 的4种状态规定了代表符号 $a$ ,  $b$ ,  $c$  和 $d$ 。所以，可以将当前输入信息位、移存器前一状态、移存器下一状态和输出码元之间的关系归纳于下表中。

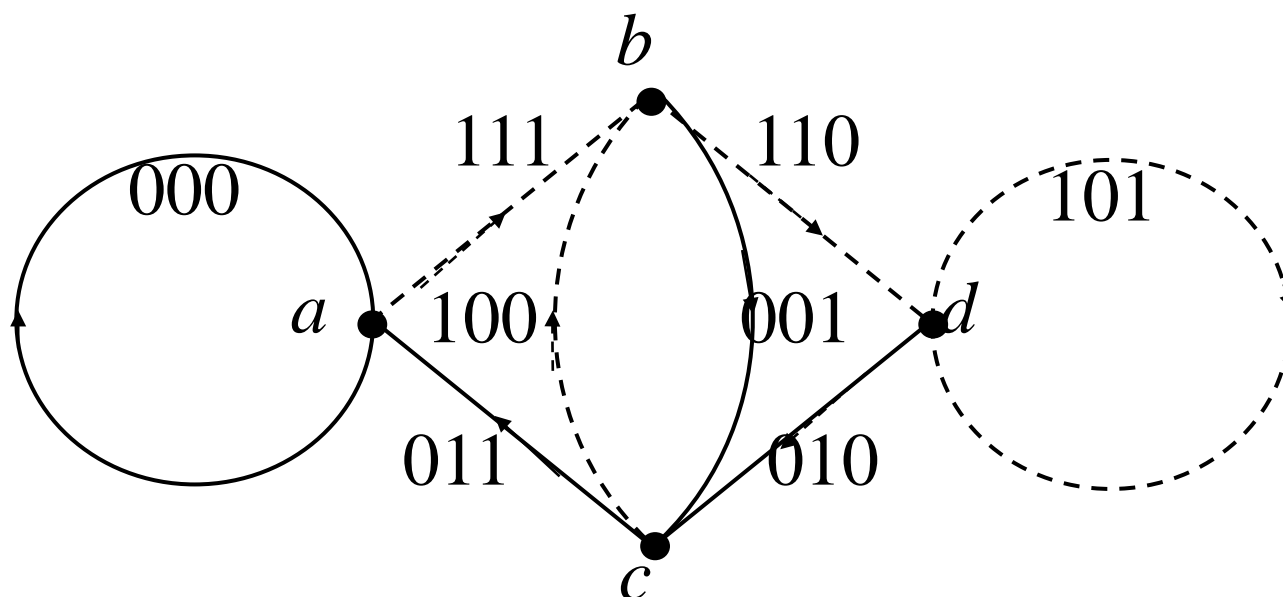
# 第8章 差错控制编码

移存器前一状态 $M_3 M_2$	当前输入信息位 $b_i$	输出码元 $c_i d_i e_i$	移存器下一状态 $M_3 M_2$
$a (00)$	0	000	$a (00)$
	1	111	$b (01)$
$b (01)$	0	001	$c (10)$
	1	110	$d (11)$
$c (10)$	0	011	$a (00)$
	1	100	$b (01)$
$d (11)$	0	010	$c (10)$
	1	101	$d (11)$

由上表看出，前一状态 $a$ 只能转到下一状态 $a$ 或 $b$ ，前一状态 $b$ 只能转到下一状态 $c$ 或 $d$ ，等等。

按照此表中的规律，可以画出状态图如下图所示。

# 第8章 差错控制编码

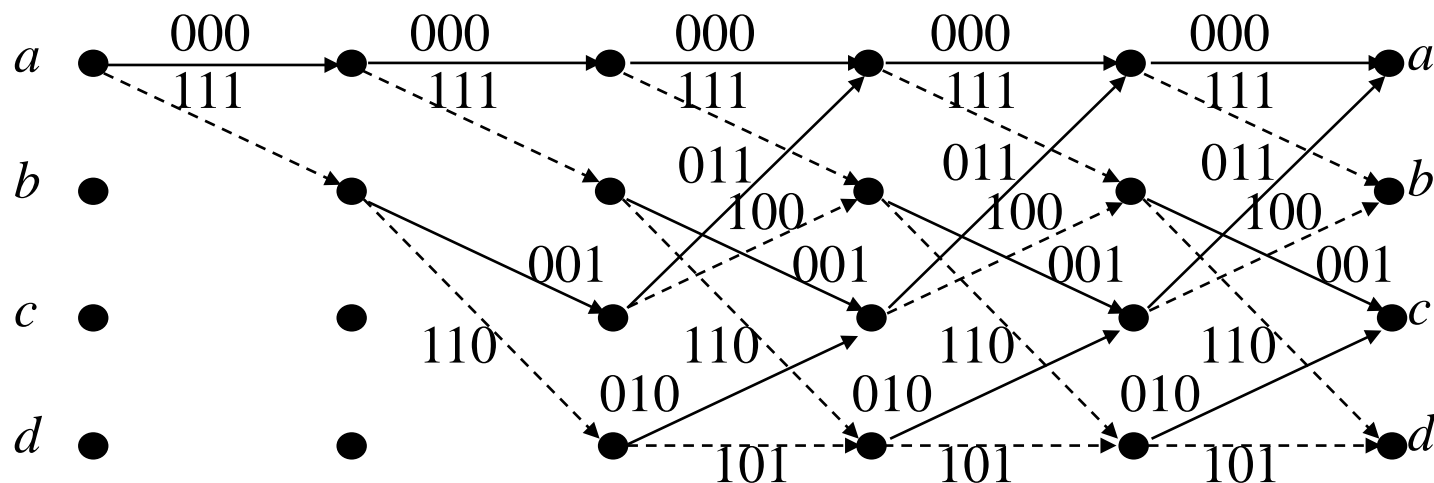


在此图中，虚线表示输入信息位为“0”时状态转变的路线；实线表示输入信息位为“1”时状态转变的路线。线条旁的3位数字是编码输出比特。利用这种状态图可以方便地从输入序列得到输出序列。

# 第8章 差错控制编码

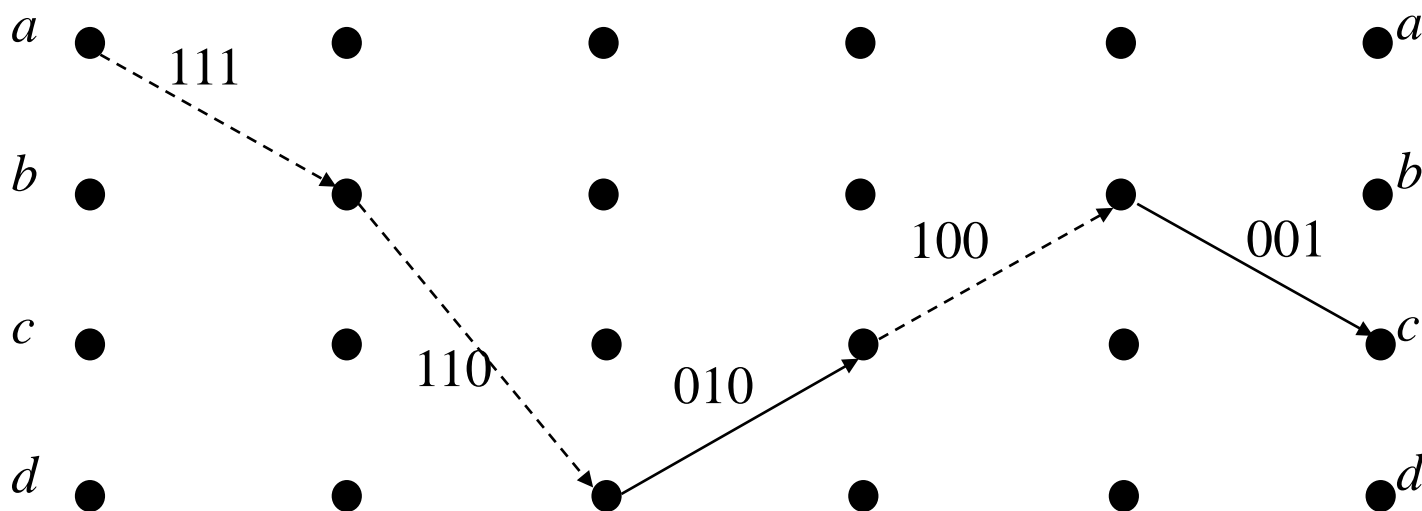
## □ 网格图

将状态图在时间上展开，可以得到网格图如下：



图中画出了5个时隙。在此图中，仍用虚线表示输入信息位为“0”时状态转变的路线；实线表示输入信息位为“1”时状态转变的路线。可以看出，在第4时隙以后的网格图形完全是重复第3时隙的图形。这也反映了此(3, 1, 3)卷积码的约束长度为3。

# 第8章 差错控制编码



在上图中给出了输入信息位为11010时，在网格图中的编码路径。图中示出这时的输出编码序列是：111 110 010 100 011...。由上述可见，用网格图表示编码过程和输入输出关系比码树图更为简练。

有了上面的状态图和网格图，下面就可以讨论维特比解码算法了。



# 第8章 差错控制编码

## ◆ 维特比解码算法

### □ 基本原理

将接收到的信号序列和所有可能的发送信号序列比较，选择其中汉明距离最小的序列认为是当前发送信号序列。若发送一个 $k$ 位序列，则有 $2^k$ 种可能的发送序列。计算机应存储这些序列，以便用作比较。

当 $k$ 较大时，存储量太大，使实用受到限制。维特比算法对此作了简化，使之能够实用。

现在仍用上面(3, 1, 3)卷积码的例子来说明维特比算法的原理。

# 第8章 差错控制编码

## □ 例：(3, 1, 3)卷积码

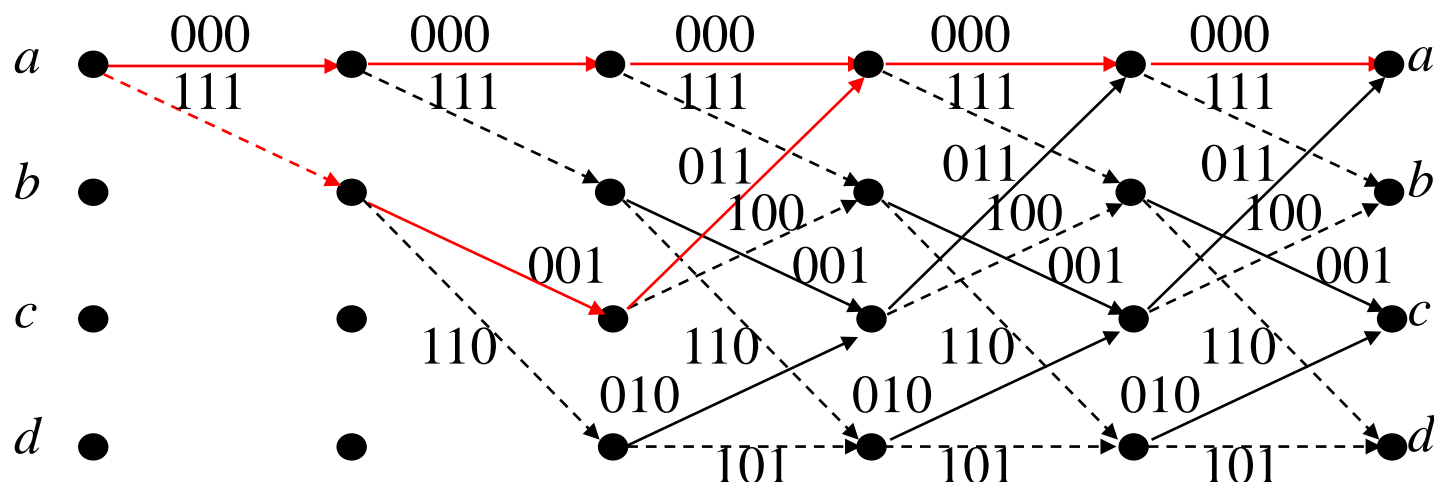
设现在的发送信息位为1101，为了使图中移存器的信息位全部移出，在信息位后面加入3个“0”，故编码后的发送序列为111 110 010 100 001 011 000。并且假设接收序列为111 010 010 110 001 011 000，其中第4和第11个码元为错码。

由于这是一个 $(n, k, N) = (3, 1, 3)$ 卷积码，发送序列的约束度 $N = 3$ ，所以首先需考察 $nN = 9$ 比特。第1步考察接收序列前9位“111 010 010”。由此码的网格图可见，沿路径每一级有4种状态 $a, b, c$ 和 $d$ 。每种状态只有两条路径可以到达。故4种状态共有8条到达路径。

现在比较网格图中的这8条路径和接收序列之间的汉明距离。



# 第8章 差错控制编码



例如，由出发点状态 $a$ 经过3级路径后到达状态 $a$ 的两条路径中上面一条为“000 000 000”。它和接收序列“111 010 010”的汉明距离等于5；下面一条为“111 001 011”，它和接收序列的汉明距离等于3。同样，由出发点状态 $a$ 经过3级路径后到达状态 $b$ 、 $c$ 和 $d$ 的路径分别都有两条，故总共有8条路径。在下表中列出了这8条路径和其汉明距离。

# 第8章 差错控制编码

序号	路径	对应序列	汉明距离	幸存否
1	<i>aaaa</i>	000 000 000	5	否
2	<i>abca</i>	111 001 011	3	是
3	<i>aaab</i>	000 000 111	6	否
4	<i>abcb</i>	111 001 100	4	是
5	<i>aabc</i>	000 111 001	7	否
6	<i>abdc</i>	111 110 010	1	是
7	<i>aabd</i>	000 111 110	6	否
8	<i>abdd</i>	111 110 101	4	是

现在将到达每个状态的两条路径的汉明距离作比较，将距离小的一条路径保留，称为幸存路径。若两条路径的汉明距离相同，则可以任意保存一条。这样就剩下4条路径了，即表中第2, 4, 6和8条路径。

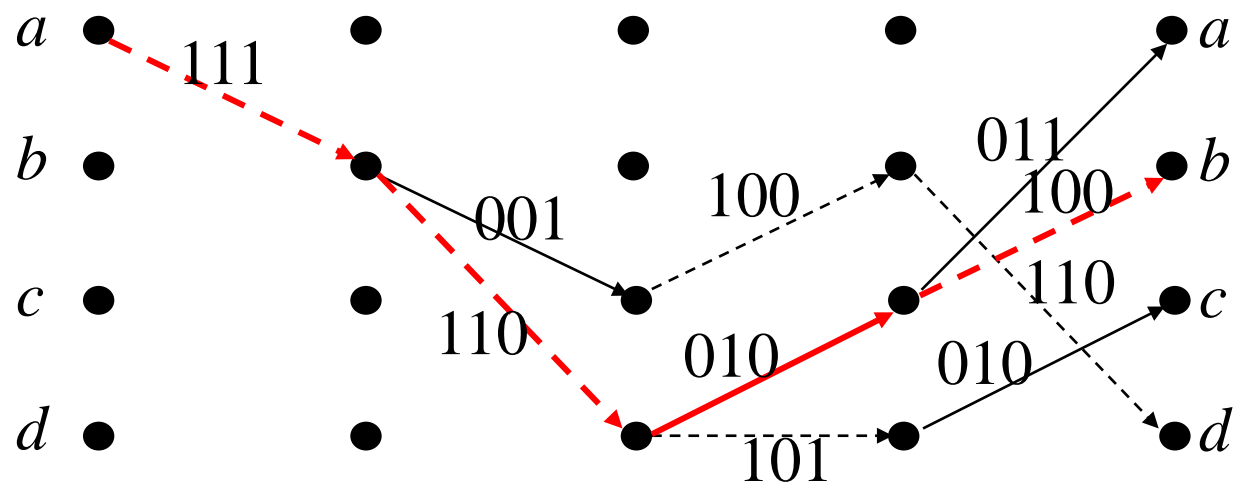
# 第8章 差错控制编码

第2步继续考察接收序列的后继3个比特“110”。计算4条幸存路径上增加1级后的8条可能路径的汉明距离。结果如下表。

序号	路径	原幸存路径 的距离	新增 路径段	新增距离	总距离	幸存否
1	$abca+a$	3	$aa$	2	5	否
2	$abdc+a$	1	$ca$	2	3	是
3	$abca+b$	3	$ab$	1	4	否
4	$abdc+b$	1	$cb$	1	2	是
5	$abcb+c$	4	$bc$	3	7	否
6	$abdd+c$	4	$dc$	1	5	是
7	$abcb+d$	4	$bd$	0	4	是
8	$abdd+d$	4	$dd$	2	6	否

表中最小的总距离等于2，其路径是 $abdc+b$ ，相应序列为111 110 010 100。它和发送序列相同，故对应发送信息位1101。按照表中的幸存路径画出的网格图示于下图中。

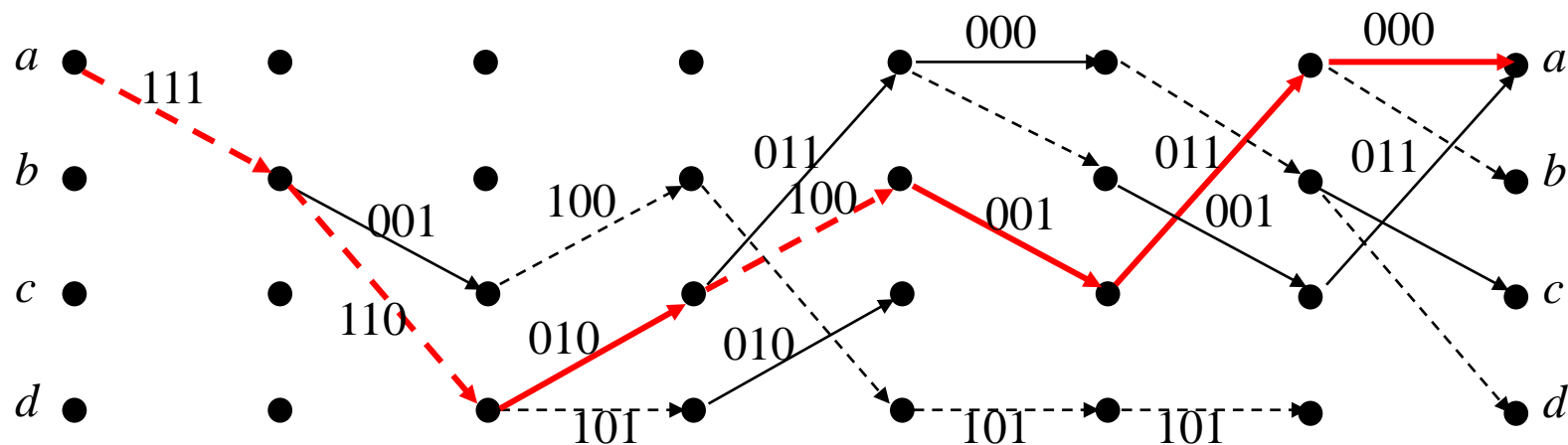
# 第8章 差错控制编码



图中粗红线路径是汉明距离最小（等于2）的路径。

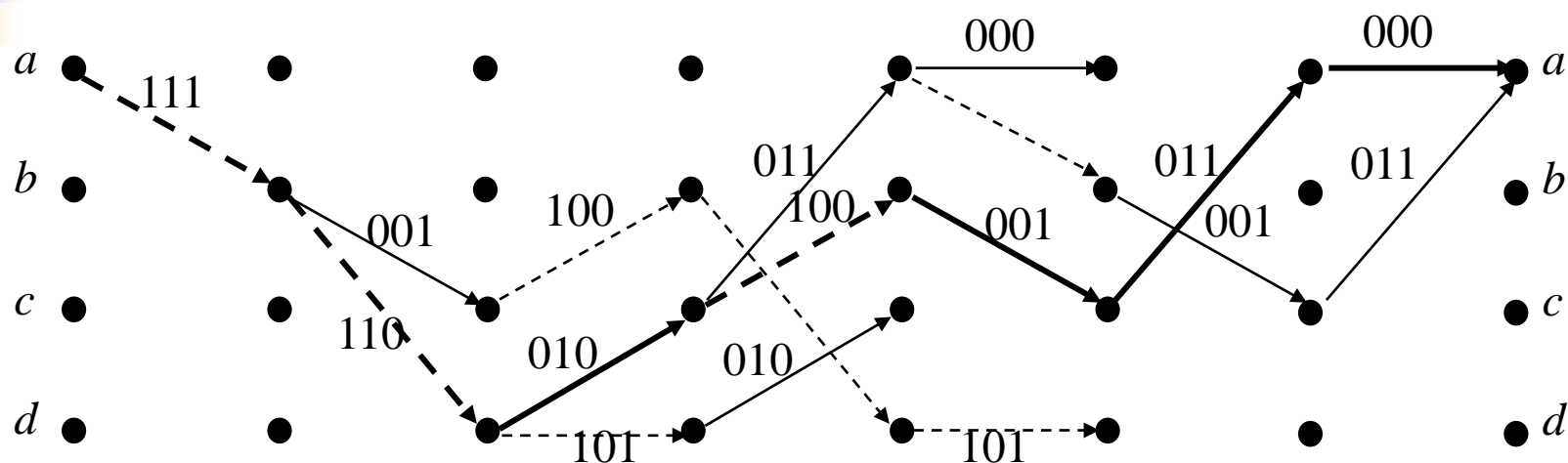
# 第8章 差错控制编码

上面提到过，为了使输入的信息位全部通过编码器的移存器，使移存器回到初始状态，在信息位1101后面加了3个“0”。若把这3个“0”仍然看作是信息位，则可以按照上述算法继续解码。这样得到的幸存路径网格图图示于下图中。



图中的粗红线仍然是汉明距离最小的路径。但是，若已知这3个码元是（为结尾而补充的）“0”，则在解码计算时就预先知道在接收这3个“0”码元后，路径必然应该回到状态*a*。而由图可见，只有两条路径可以回到*a*状态。所以，这时上图可以简化成下图。

# 第8章 差错控制编码



在上例中卷积码的约束度 $N=3$ ，需要存储和计算8条路径的参量。由此可见，维特比解码算法的复杂度随约束长度 $N$ 按指数形式 $2^N$ 增长。故维特比解码算法适合约束度较小（ $N \leq 10$ ）的编码。对于约束度大的卷积码，可以采用其他解码算法。



# 第8章 差错控制编码

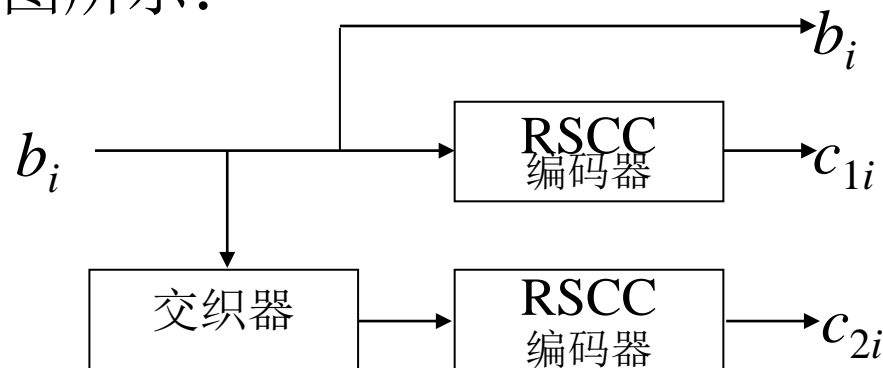
## 8.8 Turbo码

- 什么是Turbo码？它是一种特殊的链接码。由于其性能接近信息理论上能够达到的最好性能，所以在编码理论上是带有革命性的进步。这种码，特别是解码运算，非常复杂，这里只对其基本概念作一简明介绍。
- 基本原理
  - ◆ 由于分组码和卷积码的复杂度随码组长度或约束度的增大按指数规律增长，所以为了提高纠错能力，人们大多不是单纯增大一种码的长度，而是将两种或多种简单的编码组合成复合编码。
  - ◆ Turbo码的编码器在两个并联或串联的分量码编码器之间增加一个交织器，使之具有很大的码组长度，能在低信噪比条件下得到接近理想的性能。

# 第8章 差错控制编码

- ◆ Turbo码的译码器有两个分量码译码器，译码在两个分量译码器之间进行迭代译码，故整个译码过程类似涡轮（turbo）工作，所以又形象地称为Turbo码。
- 编码器的基本结构：它由一对递归系统卷积码(RSCC)编码器和一个交织器组成，如下图所示：

- ◆ RSCC编码器和卷积码编码器之间的主要区别是从移存器输出端到信息位输入端之间有反馈路径。原



来的卷积码编码器像是一个FIR数字滤波器。增加了反馈路径后，它就变成了一个IIR滤波器，或称递归滤波器。

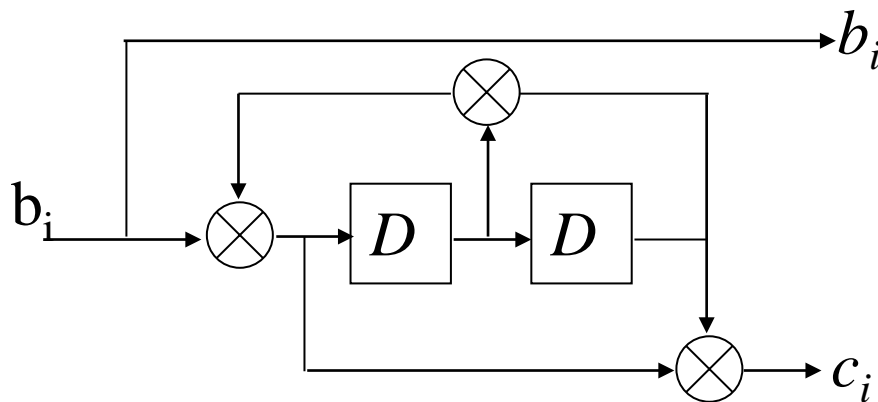
- ◆ 两个RSCC编码器是相同的。它们的输入经过一个交织器并联。此Turbo码的输入信息位是 $b_i$ ，输出是 $b_i c_{1i} c_{2i}$ ，故码率等于1/3。



# 第8章 差错控制编码

## ◆ RSCC编码器举例：

□ 方框图：如下图所示



- 它是一个码率等于1/2的卷积码编码器，输入为 $b_i$ ，输出为 $b_i c_i$ 。
- 因为输出中第1位是信息位，所以它是系统码。

# 第8章 差错控制编码

## ◆ 矩阵交织器:

- 原理方框图：见右图
- 其基本形式是矩阵交织器，它由容量为  $(n-1)m$  比特的存储器构成。将信号码元按行的方向输入存储器，再按列的方向输出。

$a_{11}$	$a_{12}$	...	...	...	$a_{1m}$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	...	...	$a_{2m}$
...	...	...	...	...	...
$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	...	...	$a_{nm}$

- 若输入码元序列是：  $a_{11}a_{12}\dots a_{1m} a_{21}a_{22}\dots a_{2m}\dots a_{n1}\dots a_{nm}$ ，则输出序列是：  $a_{11}a_{21}\dots a_{n1}a_{12}a_{22}\dots a_{n2}\dots a_{1m}\dots a_{nm}$ 。
- 交织的目的是将突发错码分散开，变成随机错码。例如，若图中第1行的  $m$  个码元构成一个码组，并且连续发送到信道上，则当遇到脉冲干扰，造成大量错码时，可能因超出纠错能力而无法纠正错误。但是，若在发送前进行了交织，按列发送，则能够将集中的错码分散到各个码组，从而有利于纠错。这种交织器常用于分组码。

# 第8章 差错控制编码

## 8.9 低密度奇偶校验码

- 低密度奇偶校验(LDPC)码是一种线性分组码，和Turbo码同属于复合码类。两者的性能相近，且两者的译码延迟都相当长，所以它们更适用于一些实时性要求不很高的通信。但是LDPC码比Turbo码的译码简单，更易实现。
- LDPC码的分类：
  - ◆ 规则LDPC码： $H$ 矩阵每列具有相同个数的“1”
  - ◆ 非规则LDPC码： $H$ 矩阵每列中“1”的个数不一定相同
  - ◆ 非规则LDPC码是在规则LDPC码基础上发展出的，它使解码性能得到改善，使误码率性能比Turbo码还好。



# 第8章 差错控制编码

## • 8.10 网格编码调制

### ■ 8.10.1 网格编码调制(TCM)的基本概念

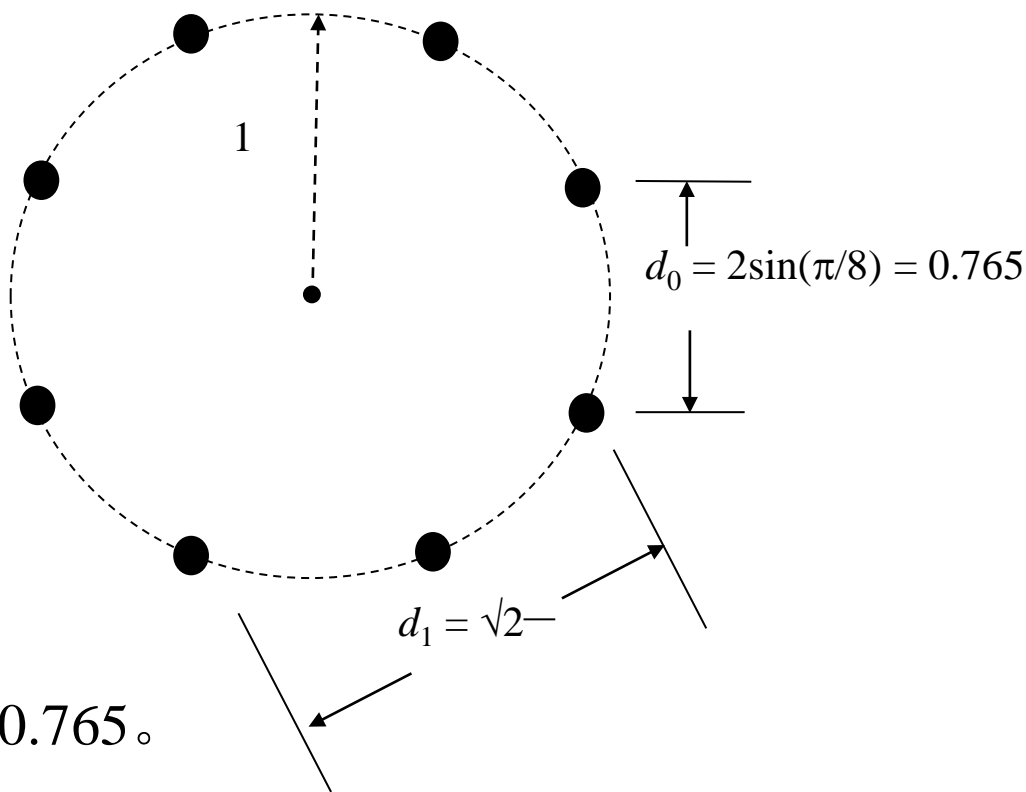
下面将利用一个实例给出TCM的基本概念

#### ◆ 复习QPSK系统:

QPSK是一个4相相移键控系统，它的每个码元传输2 比特信息。若在接收端判决时因干扰而将信号相位错判至相邻相位，则将出现错码。现在，将系统改成8PSK，它的每个码元可以传输3 比特信息。但是我们仍然令每个码元传输2 比特信息。第3 比特用于纠错码，例如，采用码率为2/3的卷积码。这时接收端的解调和解码是作为一个步骤完成的，不像传统作法，先解调得到基带信号后再为纠错去解码。

# 第8章 差错控制编码

- ◆ 在纠错编码理论中，码组间的最小汉明距离决定着这种编码的纠错能力。在TCM中，由于是直接对于已调信号（现在是8PSK信号）解码，码元之间的差别是载波相位之差，这个差别是欧氏距离。
- ◆ 在右图中示出了8PSK信号星座图中的8个信号点。图中已假设信号振幅等于1，则相邻两信号点的欧氏距离 $d_0$ 等于0.765。





# 第8章 差错控制编码

- ◆ 两个信号序列的欧氏距离越大，即它们的差别越大，则因干扰造成互相混淆的可能性越小。
- ◆ 图中的信号点代表某个确定相位的已调信号波形。
- ◆ 为了利用卷积码维特比解码的优点，这时仍然需要用到网格图。但是，和卷积码维特比解码时的网格图相比，在TCM中是将这些波形映射为网格图，故TCM网格图中的各状态是波形的状态。

# 第8章 差错控制编码

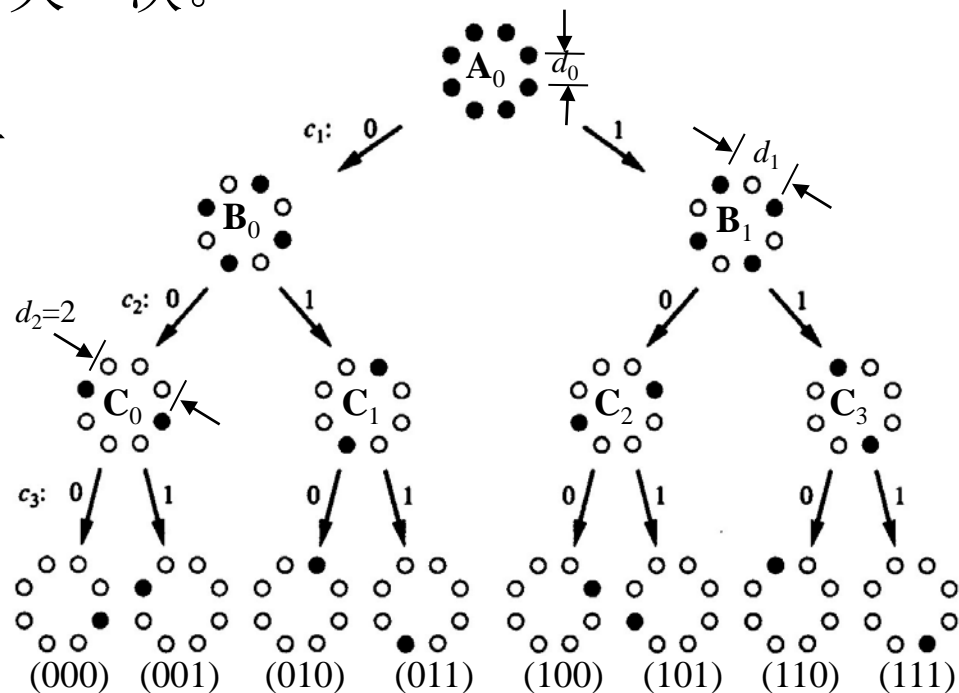
## 8.10.2 TCM信号的产生

### ◆ 集划分方法

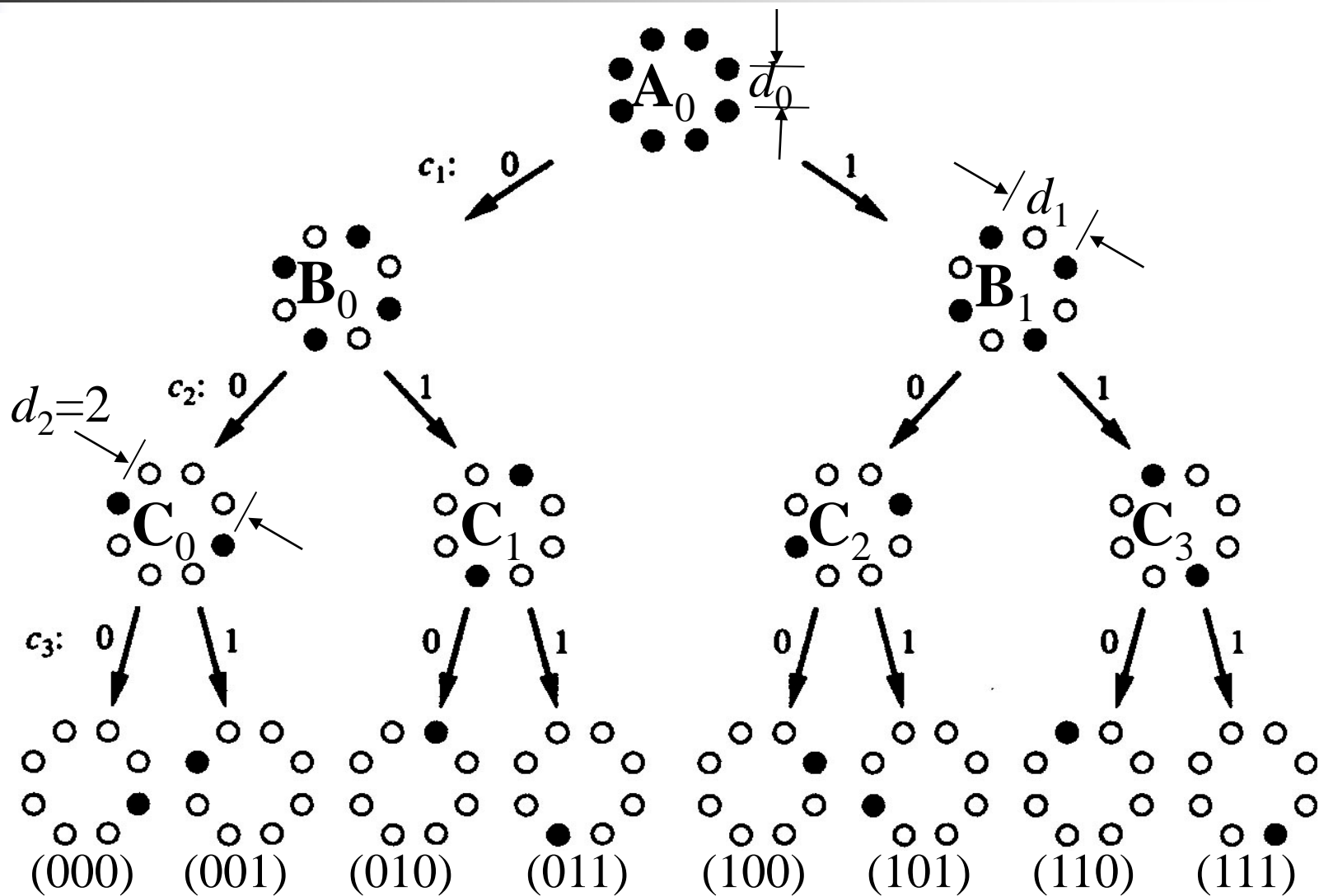
- 基本原则：将信号星座图划分成若干子集，使子集中的信号点间距离比原来的大。每划分一次，新的子集中信号点间的距离就增大一次。

- 例：见右图

➤  $A_0$  是 8PSK 信号的星座图，其中任意两个信号点间的距离为  $d_0$ 。这个星座被划分为  $B_0$  和  $B_1$  两个子集，在子集中相邻信号点间的距离为  $d_1$ 。



# 第8章 差错控制编码





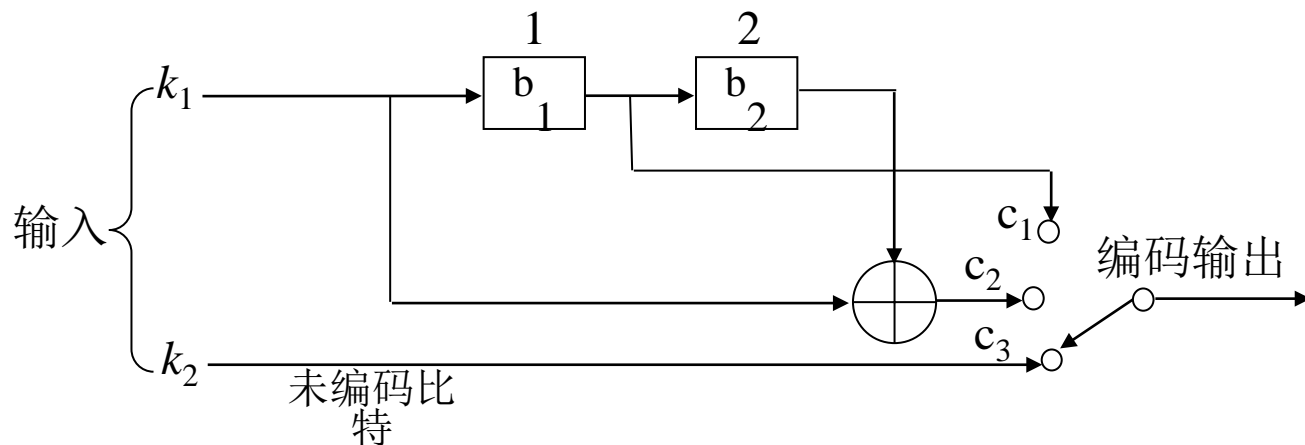


# 第8章 差错控制编码

- 在上图中已经示出 $d_1 > d_0$ 。将这两个子集再划分一次，得到4个子集： $C_0, C_1, C_2, C_3$ ，它们中相邻信号点间的距离为 $d_2 = 2$ 。显然， $d_2 > d_1 > d_0$ 。
- 在这个例子中，需要根据已编码的3个比特来选择信号点，即选择波形的相位。
- $c_1, c_2$  和  $c_3$  表示已编码的3个码元，图中最下一行注明了 $(c_1 c_2 c_3)$ 的值。若 $c_1$ 等于“0”，则从 $A_0$ 向左分支走向 $B_0$ ；若 $c_1$ 等于“1”，则从 $A_0$ 向右分支走向 $B_1$ 。第2和3个码元 $c_2$ 和 $c_3$ 也按照这一原则选择下一级的信号点。

# 第8章 差错控制编码

➤ 卷积码编码器的方框图：



由上图可见，这个卷积码的约束长度等于3。编码器输出的前两个比特 $c_1$ 和 $c_2$ 用来选择星座图划分的路径，最后1个比特 $c_3$ 用于选定星座图第3级（最低级）中的信号点。

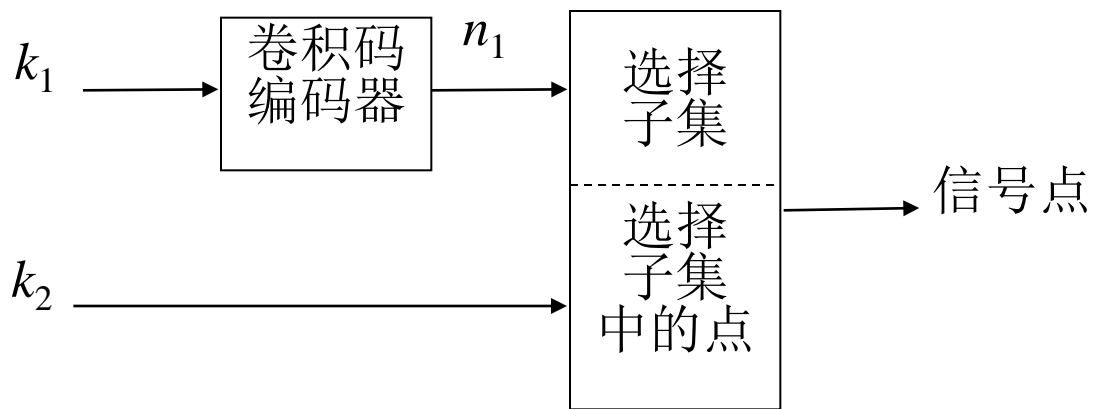
# 第8章 差错控制编码

## ◆ TCM编码器结构

□ 方框图

□ 原理：

将 $k$ 比特输入  
信息段分为 $k_1$   
和 $k_2$ 两段；前



$k_1$ 比特通过一个 $(n_1, k_1, m)$ 卷积码编码器，产生 $n_1$ 比特输出，用于选择信号星座图中划分之一，后面的 $k_2$ 比特用于选定星座图中的信号点。

这表明星座图被划分为 $2^{n_1}$ 个子集，每个子集中含有个信号点。

在上例编码器方框图中 $k_1 = k_2 = 1$