8/10/2015 Σολδάτος (1)
Γρ. 2.1.1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Τρόποι αναπαράστασης συστημάτων:

1) Διαφορική Εξίσωση
2) Συνάρτηση Μεταφοράς : $\frac{dy}{dx}$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες
3) Κρουστική Απόκριση
4) Χώρος Κατάστασης

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = c_m \frac{d^n u(t)}{dt^n} + c_{m-1}\frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + c_0 u(t) \xrightarrow{L}$$

$$S^n Y(s) + a_{n-1} S^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = c_m U(s) \cdot S^n + c_{m-1} S^{n-1} U(s) + c_0 U(s) \Rightarrow$$

$$Y(s)\left(S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0\right) = U(s)\left(c_m S^n + c_{m-1} S^{n+1} + \dots + c_0\right) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_m S^m + c_{m-1} S^{m-1} + \dots + c_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0}$$

$\leftarrow$ μηδενικά (αριθμητής), $\leftarrow$ πόλοι (παρονομαστής)

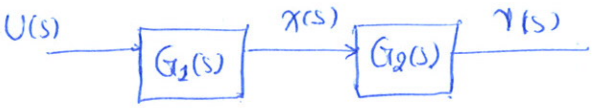
Άρα, $$G(s) = \frac{c_m S^n + c_{m-1} S^{n-1} + \dots + c_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0} \Rightarrow G(s) = \frac{c_n(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_m)}$$

$$= \frac{K\,N(s)}{D(s)}$$

Αν $n > m \Rightarrow G(s)$ γνήσια αυστηρά
Αν $n = m \Rightarrow G(s)$ γνήσια

Διαγράμματα Βαθμίδων (Λειτουργικό διάγραμμα Block)

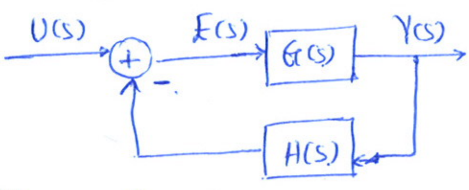
Άλγεβρα Block Diagram



$$Y(s) = G_2(s)\cdot X(s) = G_2(s)\left[U(s)\cdot G_1(s)\right] =$$
$$= G_1(s)\cdot G_2(s)\, U(s)$$

Άρα:

1 Παράδειγμα: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς συστήματος κλειστού βρόχου



Σύστημα κλειστού βρόχου στην κανονική μορφή
$\left[\, H(s) = (H_1 \cdot H_2 \dots)(s) \,\right]$

- $Y(s) = G(s)\cdot E(s)$
- $E(s) = U(s) - H(s)\,Y(s)$

$$\Rightarrow Y(s) = G(s)\left[U(s) - H(s)Y(s)\right] \Rightarrow Y(s)\left[1 + G(s)H(s)\right] = G(s)\,U(s)$$

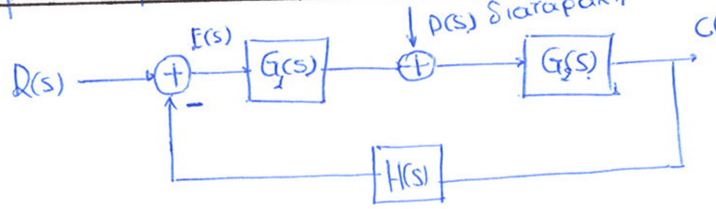
$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} \triangleq \frac{G(s)}{1 + \underbrace{G(s)H(s)}_{\text{συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου}}}$$

συνάρτηση μεταφ. κλειστού βρόχου

Παρατήρηση: Ο παρονομαστής έχει "+" γιατί στο feedback έχει "−".
Αν είχε στο feedback "+" ο παρονομαστής θα είχε "−".

12/10/2015

Πλεονεκτήματα κλειστού βρόχου:



Σύστημα κλειστού βρόχου:
Δηλώνω τι θέλει να είναι η έξοδος, οπότε το βάζω ως είσοδο. Η διαφορά της επιθυμητής εξόδου (δηλ. εισόδου) με έξοδο είναι το E(s) και λέγεται σφάλμα

↳ αυτό μπορεί να κάνει το C(s) με τις ίδιες μονάδες με το R(s)

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}, \text{ όταν } R(s) = 0$$

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1 + G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot H(s)}, \text{ όταν } D(s) = 0$$

Ίδιος παρονομαστής!!

Άρα η ολική έξοδος είναι:

$$C(s) = C_D(s) + C_R(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)\cdot H(s)} D(s) + \frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1 + G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot H(s)} R(s)$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H}\left[D + G_1 \cdot R\right]$$

Παρατηρήσεις:

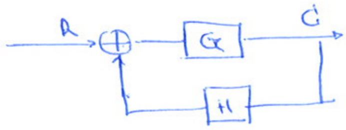
1) Έστω $|G_1(s)\cdot H(s)| >> 1$ και $|G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot H(s)| >> 1$ τότε:

(i) $\frac{C_D(s)}{D(s)}$ σχεδόν μηδέν δηλ. η διαταραχή δεν αφήνει το αποτύπωμά της στον κλειστό βρόχο.
Εάν $H=0$ (δηλ. δεν έχουμε κλειστό βρόχο τότε $C_D = G_2 D$). Οπότε ο κλειστός βρόχος κόβει τις διαταραχές.

(ii) $\frac{C_R(s)}{R(s)} \to \frac{1}{H(s)}$ Συνεπώς οι μεταβολές στα G_1, G_2 δεν επηρεάζουν το σύστημα.
πχ τριβές, αλλοιώσεις, φθορές.

Εάν $H = 1$ δηλ. το κλειστό σύστημα εξισώνει είσοδο με έξοδο

(iii) Ολικό κέρδος (πχ χωρίς διαταραχή)



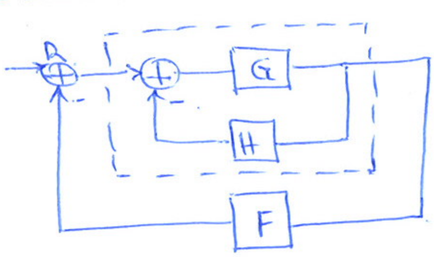
Ανοιχτό: G

Κλειστό: $\frac{G}{1+GH}$

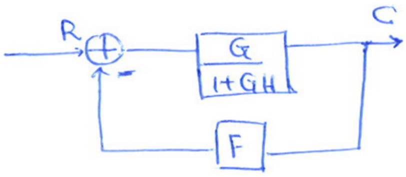
$|1+GH| > 1$ επηρεάζουμε τελικό κέρδος

(iv) Ευστάθεια:

Εάν $GH = -1$ η έξοδος τείνει στο ∞ για φραγμένη είσοδο
Όμως έχω την δυνατότητα να κάνω feedback στο ήδη υπάρχον feedback.



≡

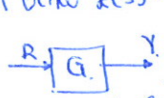


$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{G}{1+GH}}{1 + \frac{GF}{1+GH}} = \frac{G}{GH+GF+1}$$

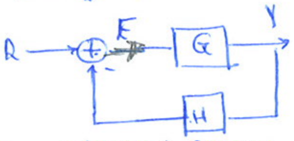
οπότε από ασταθές σύστημα μέσω feedback πάω σε ευσταθές

(v) Σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση E(s)

(Θέλω $E(s) \to 0$ ώστε $R \to C$)



ανοιχτού βρόχου



κλειστού βρόχου

$E = R - Y = R - GR = R(1-G)$

$\boxed{E = R(1-G)}$

$E = R - HY = R - HGE \Rightarrow E(1+HG) = R \Rightarrow \boxed{E = \frac{R}{1+HG}}$

$Y = GE$

Έστω ότι βάζω μια βηματική είσοδο.
Τότε από Θεώρημα Τελικής Τιμής: $e_{o_{\alpha\beta}} = \lim_{s\to 0} s(1-G)\frac{1}{s} = 1 - G(0)$ ← DC κέρδος για ανοιχτό βρόχο

$e_{o_{\kappa\beta}} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)}$ με μεγάλο DC κέρδος το σφάλμα είναι μικρό.

ΧΩΡΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

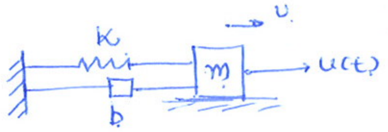
$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$
Ελάχιστος αριθμός μεταβλητών.

Εάν γνωρίζω στο $t=t_0$: $\begin{cases} x_i(t_0) \\ u(t) \quad t\geq t_0 \text{ (είσοδος)} \\ \text{εξισώσεις του συστήματος} \end{cases}$ τότε $x_i(t)$ $t \geq t_0$

Είναι πιο αναλυτικός τρόπος περιγραφής από την συνάρτηση μεταφοράς. Περιέχει όλες τις μεταβλητές που μπορεί να περιγράψω το σύστημα. πχ. ρεύμα σε μηχανή, η πίεση των κυλίνδρων, η θερμοκρασία κλπ.

Σκοπός: Να βρω κατάλληλο αριθμό μεταβλητών για να μπορώ να το περιγράψω. Προκύπτουν με μαθηματικό ή φυσικό τρόπο.

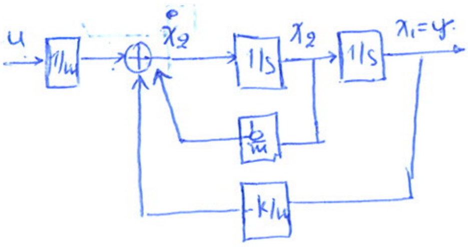
Παράδειγμα:



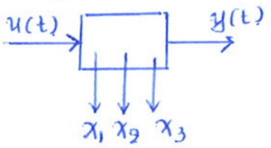
$-b\dot{y} - ky + u(t) = m\ddot{y} \Rightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$
Επιλέγω μεταβλητές κατάστασης: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u - kx_1 - bx_2}{m} = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{u}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}u \Rightarrow \left(\dot{X} = AX + BU\right)$$

Εξίσωση εξόδου $y = x_1$, $y = [1\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + [0]u$ $\quad (Y = CX + DU)$



15/10/2015



$\dot{x} = Ax + u$ δυναμική
$y = Cx + Du$ αλγεβρική $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + U(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow$

όμως θέλω $x(0) = 0$ → επειδή θέλω να βρω συνάρτηση μεταφοράς που απαιτεί μηδενικές αρχικές συνθήκες

$sX(s) = A\cdot X(s) + U(s)$
$Y(s) = CX(s) + DU(s)$ $\Rightarrow$ $(sI - A)X(s) = U(s)$
$Y(s) = CX(s) + DU(s)$ $\Rightarrow$

$X(s) = (sI-A)^{-1}U(s)$
$Y(s) = C(sI-A)^{-1}U(s) + DU(s) = [C(sI-A)^{-1} + D]\,U(s) \Rightarrow G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = C(sI-A)^{-1} + D}$$

Αν μου δίνεται ένα σύστημα με περιγραφή στον χώρο κατάστασης τότε χρησιμοποιώ τον τύπο για να βρω την συνάρτηση μεταφοράς.

Παράδειγμα (Συνέχεια προηγούμενου): Από χώρο κατάστασης → συνάρτηση μεταφοράς

Είναι $G(s) = C(sI-A)^{-1} + D = [1\ 0]\left[\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix} = [1\ 0]\begin{bmatrix}s & -1\\ k/m & s+\frac{b}{m}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}$

$= [1\ 0]\begin{bmatrix}s+\frac{b}{m} & -k/m\\ 1 & s\end{bmatrix}^{T}\dfrac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix} = [1\ 0]\begin{bmatrix}s+\frac{b}{m} & 1\\ -k/m & s\end{bmatrix}\dfrac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}\begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix} = \dfrac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}[1\ 0]\begin{bmatrix}\frac{1}{m}\\ \frac{s}{m}\end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix}0(s+\frac{b}{m}) & 1/m\\ 0(-k/m) & s/m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/m\\ s/m\end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}[1\ 0]\begin{bmatrix}1/m\\ s/m\end{bmatrix} = \dfrac{1/m}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}[1\ 0]\begin{bmatrix}1\\ s\end{bmatrix} = \dfrac{1/m}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} = \dfrac{1}{s^2m+bs+k}$

Παρατήρηση: Δυναμική εξίσωση: $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = u \xrightarrow{\mathcal{L}} ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = U$

$$Y(s)\,(ms^2 + cs + k) = U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = G(s)$$

Έστω συνάρτηση μεταφοράς: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$

(α). Κανονική Ελέγξιμη μορφή. (Κανονική μορφή φάσης ή πρώτη συντροφική μορφή)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Στα φυσικά συστήματα ο αριθμός των πόλων είναι από αυτόν των μηδενικών. Στην χειρότερη περίπτωση των πλήθος είναι ίδιο. Η ύπαρξη περισσότερων μηδενικών σημαίνει πρόβλεψη του μέλλοντος ενός συστήματος πράγμα αδύνατο.

$$y = \left[\, b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \;\vdots\; \dots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0 \,\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u.$$

(β) Κανονική παρατηρήσιμη μορφή ($2^η$ συντροφική μορφή)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & -a_n \\ 1 & & & -a_{n-1} \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 1 \; -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\, 0 \; \dots \; 1 \,\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Παράδειγμα

1) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} = \dfrac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$

Κανονική ελέγξιμη μορφή: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$y = [3 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Κανονική παρατηρήσιμη μορφή: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$y = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 4} = \dfrac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$

ο βαθμός του παρονομαστή δείχνει το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης

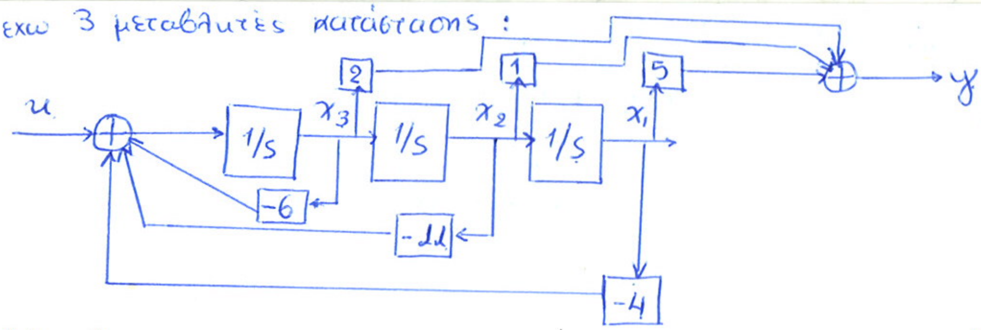
Κ.Ε.Μ.: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$y = [5 \;\; 1 \;\; 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Κ.Π.Μ.: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$, $\; y = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

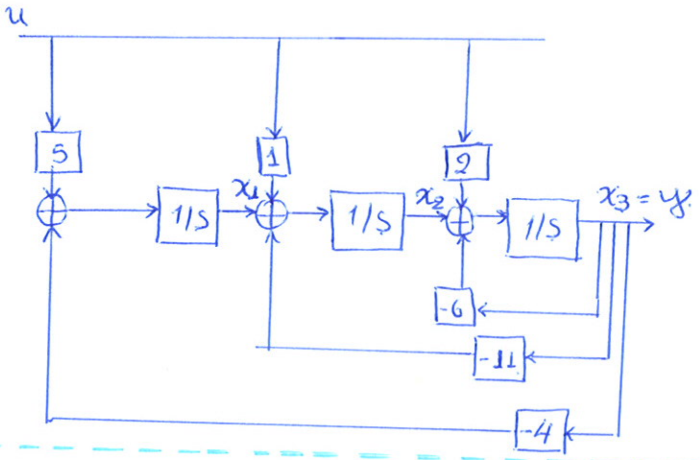
30/11/15

Επειδή έχω 3 μεταβλητές κατάστασης :



Διάγραμμα βαθμίδων Κ.Μ.Ε

Διάγραμμα βαθμίδων Κ.Π.Η



Μετασχηματισμοί Ομοιότητας και Ισοδυναμία Περιγραφών

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ \text{Έστω } x &= Tx^* \quad |T| \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} T\dot{x}^* &= ATx^* + Bu \\ y &= CTx^* \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}^* &= T^{-1}ATx^* + BT^{-1}u \\ y &= CTx^* \end{aligned} \Rightarrow$$

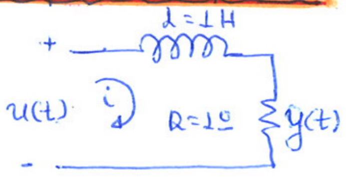
$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}^* &= A^*x^* + B^*u \\ y &= C^*x^* \end{aligned}\right.$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς παραμένει ίδια και είναι:

$$G^* = C^*(sI - A^*)^{-1}B^* = CT\left[T^{-1}(sI-A)T\right]^{-1}T^{-1}B = C[sI-A]^{-1}B = G.$$

19/10/2015

Απόκριση Συστημάτων



$$\left.\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri &= u \\ y(t) &= Ri \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{L}{R}\frac{dy}{dt} + y &= u \\ L = R &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dy}{dt} + y &= u \\ \text{Α.Σ: } & y(0) \end{aligned} \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}$$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = U(s) \Rightarrow (s+1)Y(s) = U(s) + y(0) \Rightarrow$$

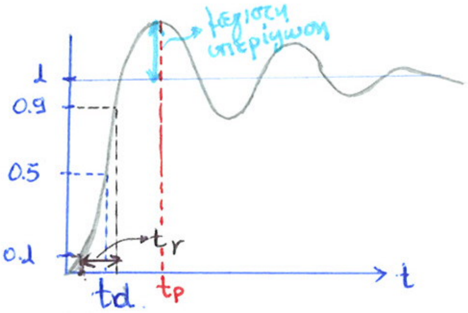
$$Y(s) = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{U(s)}{s+1} \quad \text{Αν } U(s) = 1/s \Rightarrow Y(s) = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow Y(s) = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$y(t) = \underbrace{y(0)\,e^{-t}}_{\substack{\text{ελεύθερη}\\ \text{απόκριση}\\ \text{γιατί εξαρτάται}\\ \text{από την Α.Σ}}} + \underbrace{1 - e^{-t}}_{\substack{\text{εξαναγκασμένη}\\ \text{απόκριση}\\ \text{λόγω εισόδου}}} = e^{-t}(y(0) - 1) + 1, \quad t \geq 0$$

Άρα ένα δυναμικό σύστημα κινείται είτε επειδή έχει αρχική συνθήκη είτε λόγω κάποιας εισόδου είτε και των δύο.

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{e^{-t}(y(0)-1)}_{\substack{\text{μεταβατική}\\ \text{απόκριση}}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{μόνιμη}\\ \text{κατάσταση}}}, \quad t \geq 0$$

Τυπική Απόκριση Συστήματος (στο πεδίο του χρόνου)



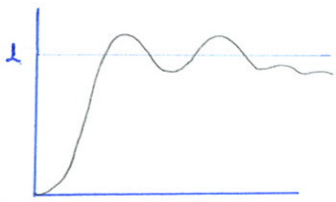
μέγιστη υπερύψωση επί τοις εκατό: $\frac{y(t_p)-y(\infty)}{y(\infty)}\cdot 100\%$.

t_s: χρόνος αποκατάστασης: Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σύστημα να μπει σε ζώνη υπερύψωσης 2% ή 5%.

t_d: χρόνος καθυστέρησης. Ο χρόνος που κάνει να φτάσει το σύστημα στο μισό της τελικής τιμής του.

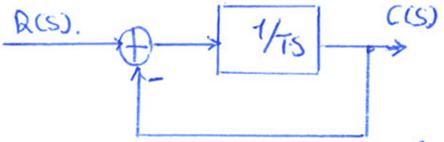
t_r: χρόνος ανύψωσης

t_p: χρόνος μέγιστης υπερύψωσης 1η φορά



Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα "καταλαγιάζει" σε διαφορετική τιμή από αυτή που προβλέπει η βηματική. Συνεπώς εδώ προκύπτει το σφάλμα μόνιμης απόκρισης.

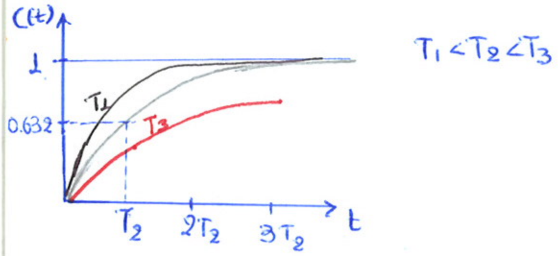
Συστήματα 1ης Τάξης

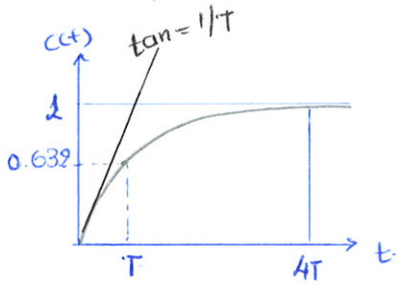


1. Απόκριση στην μοναδιαία βηματική.

$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t)=1-e^{-t/T},\ t\geq 0$$

• Για $t=T \Rightarrow c(T)=1-e^{-1}=0.632$

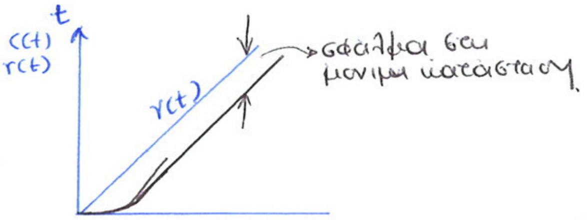




2. Απόκριση στη μοναδιαία ράμπα.

$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t)=t-T+Te^{-t/T}\quad t\geq 0$$

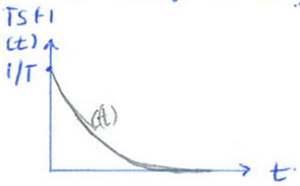
Το σφάλμα $e(t)=r(t)-c(t)=T(1-e^{-t/T})$ και $\lim_{t\to\infty} e(t)=T$



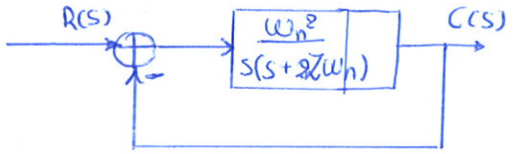
Παρατηρώ ότι βάζοντας την παράγωγο της ράμπας (βηματική) παίρνω την παράγωγο της απόκρισης της ράμπας. Παίρνοντας την παράγωγο της βηματικής παίρνω την παράγωγο της απόκρισης της βηματικής. Αυτή η ιδιότητα ισχύει μόνο για γραμμικά χρον. αναλλοίωτα συστήματα.

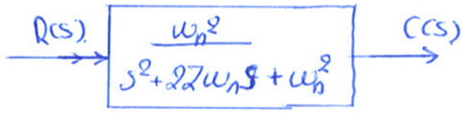
3. Απόκριση στην μοναδιαία κρουστική.

$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot 1\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}\quad t\geq 0$$



Συστήματα 2ης τάξης

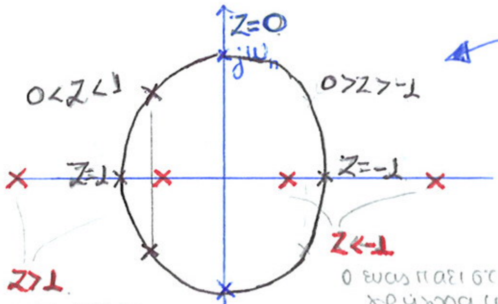




ζ_1 = σταθερά απόσβεσης

ω_n = μη αποσβενυμένη φυσική συχνότητα = κυκλική ιδιοσυχνότητα

πόλος: $s_{1,2} = -\zeta_1\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta_1^2} = -\sigma \pm j\omega_d$ $\quad$ ω_d: φυσική ιδιοσυχνότητα ή αποσβενυμένη ιδιοσυχνότητα



γεωμετρικός τόπος ριζών καθώς το ζ_1 μεταβάλλεται

Ο ένας πόλος πάει στο $-\infty$ παρα πολύ γρήγορα και ο άλλος πάει στο 0 πιο αργά. Αυτό όταν $\zeta>1$

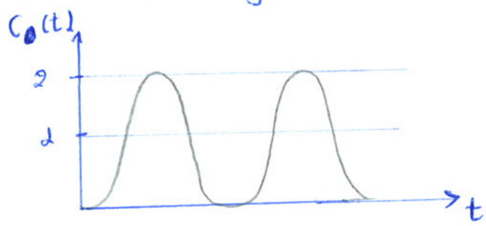
Ο ένας πάει στο $+\infty$ πολύ γρήγορα και ο άλλος στο μηδέν αν $\zeta<-1$.

1 Απόκριση στην μοναδιαία βηματική.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta_1\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

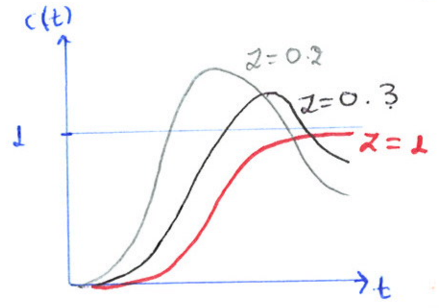
Διακρίνω περιπτώσεις

• $\zeta_1 = 0$, $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ Άρα $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$ $t\geq 0$

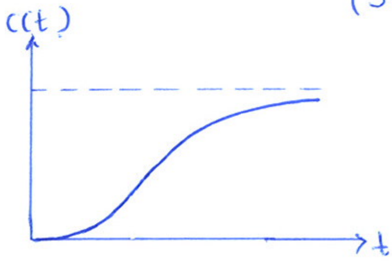


• $\zeta_1 \in (0,1)$ τότε $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta_1\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\sin(\omega_d t+\varphi)$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta_1^2}}{\zeta_1},\quad t\geq 0$$

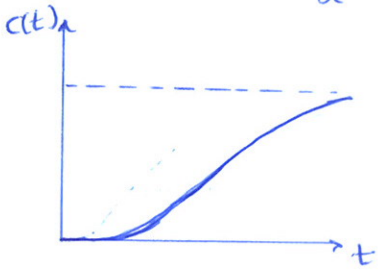


• $\zeta_1 = 1$ τότε $G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\cdot\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$ $t\geq 0$



• $\zeta>1$ πόλοι $s_{1,2} = -\sigma \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ τότε $C(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s\left[(s+\sigma)^2-a^2\right]}$ $\quad a = \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

$$c(t) = 1 - e^{-\sigma t}\cosh at - \frac{\sigma}{\alpha}\sinh at$$



Λύση Εξισώσεων Κατάστασης

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + du\end{aligned} \quad \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s)\\ Y(s) &= CX(s) + dU(s)\end{aligned} \Rightarrow (sI-A)X(s) = X(0) + bU(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1}x(0)} + \underbrace{(sI-A)^{-1}bU(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}x(0)}_{\text{ελεύθερη απόκριση}} + \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1}b + d\right]U(s)}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση}}$$

Παράδειγμα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & -3.5\\ 6 & 4\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u \quad \text{(δυναμική εξίσωση)}$$

$$y = \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}x \quad \text{(αλγεβρική εξίσωση)}$$

και u η μοναδιαία βηματική.

Να βρεθεί η έξοδος αν $x(0) = \begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-6 & -3.5\\ 6 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & 3.5\\ -6 & s-4\end{bmatrix}$$

Για να βρω τον αντίστροφο αντιμεταθέτ… κάθε στοιχείο με την ορίζουσα του πινακ… που προκύπτει αν αφαιρέσω γραμμ… και στήλη του στοιχείου. Έπειτα βρίσκ… τον ανάστροφο του πίνακα και διαιρ… με την ορίζουσα

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-4 & +6\\ -3.5 & s+6\end{bmatrix}^T \cdot \frac{1}{(s+6)(s-4)-(-6)3.5} \;?$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!

$$\overbrace{C(sI-A)^{-1}x(0)}^{\text{ελεύθερη}} = \frac{-3s-12}{s^2+2s-3}, \quad C(sI-A)^{-1}b = \frac{s+2}{s^2+2s-3} \quad \text{εξαναγκασμένη}$$

Με $U(s) = 1/s$: $\quad Y(s) = \dfrac{-3s-12}{s^2+2s} + \dfrac{s+2}{s^2+2s-3}\cdot\dfrac{1}{s} = \dfrac{-3}{s-1} + \dfrac{2/3}{s+3} - \dfrac{2/3}{s} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow}$

$$y(t) = -3e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3}, \; t \geq 0$$

Επίλυση Εξισώσεων Κατάστασης στο Πεδίο του Χρόνου

Ορισμός: $e^{At} = I + tA + t^2\dfrac{A^2}{2!} + t^3\dfrac{A^3}{3!}$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b\,u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{AT}x(0)}_{\text{ελεύθερη}} + \underbrace{C\int_0^t e^{A(t-c)}b\,u(\tau)d\tau}_{\text{εξαναγκασμένη}}$$

Άρα έχουμε καταλήξει στην γραφή δυναμι… συστημάτων $1^{ης}$ κ' $2^{ης}$ τάξης σε Σ.Μ… Χ.Κ.

Υπάρχουν σφάλματα στη μόνιμη κατάσταση που προκύπταν από διαταραχές και αστοχίες, τα οποία λόγω feedback αναμένω να διορθωθούν και άρα δεν τα εξετάζω. Ωστόσο θα εξετάσουμε δομικά σφάλματα.

ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Θεώρημα Τελικής Τιμής (ΘΤΤ)

Έστω $f(t) \xrightarrow{L} F(s)$.

Εάν η $sF(s)$ είναι αναλυτική στον άξονα των φανταστικών και στο δεξί ημιεπίπεδο τότε:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

?

Δηλ. **ΔΕΝ** ισχύει εάν η $sF(s)$ έχει πόλο του οποίου το πραγματικό μέρος είναι μηδέν ή θετικό.

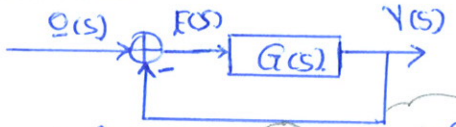
π.χ. $F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad f(t) = \sin(\omega t)$

Το $sF(s)$ έχει δύο πόλους στον φανταστικό άξονα. Το ΘΤΤ δεν εφαρμόζεται.

Πράγματι $\lim_{s\to 0} sF(s) = 0$ ⚠ ΛΑΘΟΣ

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Έστω το σύστημα:



Συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου:

$$G(s) = \frac{k(T_a s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

N: τύπος

π.χ. $G(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+3}$ $\quad 2^{ου}$ βαθμού, τύπου 0

$G(s) = \dfrac{1}{s^7(s+1)}$ $\quad 8^{ου}$ βαθμού, τύπου 7

- Τύπου 0 είναι το σύστημα που δεν έχει ελεύθερο s στον παρονομαστή.

Άρα αν θέλω να βρω πως συμπεριφέρεται το $Y(s)$ στην μόνιμη κατάσταση παίρνω το $\lim_{s\to 0} sY(s)$. Το ίδιο και για οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση π.χ. $\Theta(s)$, $E(s)$ κλπ.

Όσο πιο πολύ μεγαλώνει ο τύπος τόσο περισσότερες εισόδους μπορεί να ακολουθεί το σύστημα (δηλ. δεν έχει σφάλμα).

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y(s)}{\Theta(s)} &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\ E(s) &= \Theta(s) - Y(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(s) = \Theta(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot\Theta(s) \Rightarrow$$

$$E(s) = \left(1 - \frac{G(s)}{1+G(s)}\right)\cdot\Theta(s) = \frac{1+G(s)-G(s)}{1+G(s)}\cdot\Theta(s) = \frac{1}{1+G(s)}\cdot\Theta(s) \Rightarrow$$

$$E(s) = \frac{\Theta(s)}{1+G(s)}$$

Άρα $e_{\mu o\nu.\kappa\alpha\tau} = \lim_{s\to 0} \underbrace{sE(s)}_{\text{ευσταθής}} = \lim_{s\to 0} \dfrac{s\,\Theta(s)}{1+G(s)}$

$$\boxed{e_{\mu o\nu} = \lim_{s\to 0} \frac{s\,\Theta(s)}{1+G(s)}}$$

ΣΦΑΛΜΑ ΘΕΣΗΣ (βηματική είσοδο) π.χ. $\omega(t) = 1$

$$e_{\mu o\nu} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)}$$

Ορίζω ως **Σταθερά σφάλματος θέσης** το $\boxed{\lim_{s\to 0} G(s) = G(0) = K_p}$

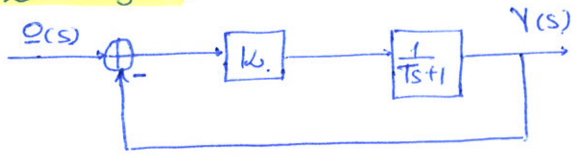
Επομένως $e_{\mu o\nu} = \dfrac{1}{1+K_p}$

Για $N=0$: $K_p = \lim_{s\to 0} \dfrac{k(T_a s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)} = k$

Για $N \geq 1$ $\quad K_p = \lim_{s \to 0} \dfrac{K(T_a s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)\cdots} = \infty$

Οπότε: $\quad e_{μον} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+K} & N=0 \\ \infty & N \geq 1 \end{cases}$

Παράδειγμα (Εύρεση σφάλματος μόνιμης κατάστασης)



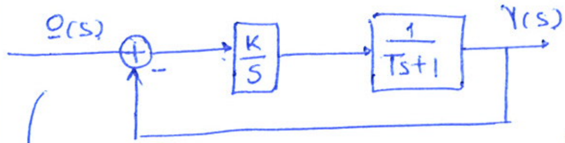
$$\frac{Y(s)}{Θ(s)} = \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{K}{Ts+1}} = \frac{K}{\cancel{Ts+1}} \cdot \frac{\cancel{Ts+1}}{Ts+1+K} = \frac{K}{K+Ts+1}$$

Αν $Θ(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{K}{K+Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$

Από Θ.Τ.Τ $\Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{s\to 0} s\,Y(s)}_{ευσταθής} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{K}{K+Ts+1} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{K}{K+1}$

Άρα σφάλμα $= 1 - \frac{K}{K+1} = \frac{1}{K+1}$.

Από την συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου βλέπω πόσα ελεύθερα s έχει στον παρονομαστή και από εκεί χαρακτηρίζω τον τύπο του συστήματος.



προσθέσαμε έναν ολοκληρωτή σε αυτό το σύστημα

$$\frac{Y(s)}{Θ(s)} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{K}{s(Ts+1)+K} = \frac{K}{Ts^2+s+K}$$

Άρα $\quad E(s) = Θ(s) - \frac{K}{Ts^2+s+K}\,Θ(s) = Θ(s)\left(1 - \frac{K}{Ts^2+s+K}\right)$

$$= \overset{1/s}{Θ(s)} \cdot \frac{Ts^2+s}{Ts^2+s+K} = \frac{Ts^2+s}{s(Ts+s+K)} =$$

Από Θ.Τ.Τ. $\quad e_{μον} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\,\frac{Ts+1}{Ts+s+K} = 0$

Παράδειγμα (είσοδος αναρρίχησης) π.χ. $ω(t) = t$.

$$e_{μον} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s^{\cancel{2}}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

Άρα βρίσκω συν. μετ. αν. βρόχου υπολογίζω το $\lim_{s\to 0} sG(s)$ και το σφάλμα μ.κ είναι το αντίστροφο

Ορίζω ως Σταθερά σφάλματος ταχύτητας: $\boxed{K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)}$

Επομένως $\quad e_{μον} = \frac{1}{K_v}$

Αν $N=0$ $\quad K_v = \lim_{s\to 0} \dfrac{sK(T_a s+1)\cdots}{(T_1 s+1)\cdots} = 0$

Αν $N=1$ $\quad K_v = \lim_{s\to 0} \dfrac{\cancel{s} \cdot K(T_a s+1)\cdots}{\cancel{s}\cdot(T_1 s+1)} = K$

Αν $N \geq 2$ $\quad K_v = \lim_{s\to 0} \dfrac{sK(T_a s+1)\cdots}{s^N \cdot (T_1 s+1)\cdots} = \infty$

$\Rightarrow \quad e_{μον} = \dfrac{1}{K_v} = \begin{cases} \infty & N=0 \\ 1/K & N=1 \\ 0 & N \geq 2 \end{cases}$

Παράδειγμα (παραβολική είσοδος) π.χ. $\frac{1}{2}t^2$

$$e_{μον} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

Άρα $\quad e_{μον} = \dfrac{1}{K_a} = \begin{cases} \infty & N=0, N=1 \\ 1/K & N=2 \\ 0 & N=3. \end{cases}$

Ορίζω ως Σταθερά σφάλματος Επιτάχυνσης $\boxed{K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)}$

Επομένως $\quad e_{μον} = \frac{1}{K_a}$

Αν $N=0$ $\quad K_a = \lim_{s\to 0} \dfrac{s^2 K(T_a s+1)\cdots}{(T_1 s+1)\cdots} = 0$

Αν $N=1$ $\quad K_a = \lim_{s\to 0} \dfrac{s^{\cancel{2}} K(T_a s+1)\cdots}{\cancel{s}(T_1 s+1)\cdots} = 0$

Αν $N=2$ $\quad K_a = \lim_{s\to 0} \dfrac{\cancel{s^2} K(T_a s+1)\cdots}{\cancel{s^2}(T_1 s+1)} = K$

Αν $N \geq 3$ $\quad K_a = \lim_{s\to 0} \dfrac{1}{s}\,\dfrac{K(T_a s+1)\cdots}{(T_1 s+1)\cdots} = \infty$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

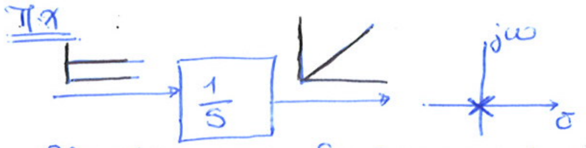
1. Ευστάθεια Φραγμένης Εισόδου - Εξόδου (BIBO)
   • Κάθε φραγμένη είσοδος παράγει φραγμένη έξοδο

2. Lyapunov ⇝ Μόνο εδώ ορίζεται η οριακή ευστάθεια.

Όταν στην συνάρτηση μεταφοράς όλοι οι πόλοι είναι αυστηρά στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο τότε το σύστημα είναι **Ευσταθές**

Όταν κάποιος πόλος είναι στον $j\omega$ άξονα τότε το σύστημα είναι ασταθές κατά BIBO.

Π.χ.



Βλέπουμε ότι η είσοδος είναι φραγμένη αλλά η έξοδος μη φραγμένη. Οπότε ο ολοκληρωτής είναι μη ευσταθές σύστημα κατά BIBO.

Στα Συνεχή Συστήματα παίρνουμε το $\boxed{\text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ ROUTH}}$:

Συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Υποθέτουμε: 1) $a_n != 0$ (ώστε να μην έχει πόλο στο 0)

2) Εάν κάποιος συντελεστής είναι 0 ή αρνητικός (εάν υπάρχει κάποιος θετικός) τότε το σύστημα ασταθές

π.χ. $s^4 + s^3 - s - 1 = 0$ ← Αν αυτό το πολυώνυμο είναι παρονομαστής συναρτ. μεταφ. κλειστού βρόχου, τότε το σύστημα είναι ασταθές λόγω (2).

Άρα, **αναγκαία** (αλλά όχι ικανή) συνθήκη για ευστάθεια είναι ότι όλοι οι συντελεστές υπάρχουν και είναι ομόσημοι

Παράδειγμα 1

Έστω: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

s^4	1	3	5	0
s^3	$\cancel{2}$ 1	$\cancel{4}$ 2	0	0
s^2	1	5		
s^1	-3	0		
s^0	5			

→ διαιρώ με 2 τη γραμμή.

$\frac{1\cdot 2 - 5\times 1}{1}$

$\frac{1\times 3 - 2\times 1}{1}$

$\frac{1\cdot 5 - 1\cdot 0}{1} = 5$

$\frac{-3\cdot 5 - 1\cdot 0}{-3} = 5$

Αφού φτιάξω τον πίνακα, κοιτάω πόσες μεταβολές προσήμου συμβαίνουν στην 1η στήλη. Τόσες είναι και οι ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος δηλ. στο δεξί μιγαδικό επίπεδο

Κανόνας: Πολλ/ζω το 2ο στοιχείο της 1ης στήλης με το 1ο στοιχείο της στήλης που έπεται από αυτήν που θέλω να γεμίσω και μετά βρίσκω την διαφορά από το γινόμενο 1ο στοιχείο 1ης στήλης με 2ο στοιχείο 2ης στήλης. Έπειτα διαιρώ με το 1ο στοιχείο 1ης στήλης

Αν έχω μηδενικό στην 1η στήλη τότε είναι ασταθές

Παράδειγμα 2

$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k = 0$

s^3	1	3
s^2	3	$1+k$
s^1	$\frac{8-k}{3}$	0
s^0	$1+k$	

Για να είναι ευσταθές θέλω να μην έχω καμία μεταβολή στο πρόσημο (δηλ. καμία ρίζα με θετ. πραγμ. μέρος). Πρέπει

$$\begin{cases} 8+k > 0 \Rightarrow k < 8 \\ 1+k > 0 \quad\;\; k > -1 \end{cases} \Rightarrow k \in (-1, 8)$$

Για $k=8$ η βοηθητική εξίσωση $3s^2 + 9 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{3}$ Άρα είναι ασταθές

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εάν η s^1 γραμμή έχει μηδενικά παντού, το πολυώνυμο έχει ζεύγη ριζών που ικανοποιούν την $As^2 + B = 0$ όταν A, B το 1ο και το 2ο στοιχείο της s^2 γραμμής

Παράδειγμα 3 : Προσοχή!!

$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

s^3	1	1	0
s^2	$\cancel{2}$ 1	$\cancel{2}$ 1	0
s^1	$0 = \varepsilon > 0$		
s^0			

Σε μια γραμμή: Στοιχείο της 1ης στήλης 0, και από τα άλλα στοιχεία κάποια ή κάποιο είναι μη μηδενικά ή δεν υπάρχουν άλλα στοιχεία. Θέτουμε ε > 0. Τότε πρόσημα πάνω και κάτω από το ε ίδια σημαίνει έχουμε ένα ζεύγος φανταστικών ριζών.

Εδώ βοηθητική εξίσωση (βλέπε Σημείωση) είναι $2s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s = \pm j$

Παράδειγμα 4

$s^5+2s^4+4s^3+8s^2+10s+6=0$

s^5	1	4	10
s^4	2	8	6
s^3	$0 \approx \varepsilon$	7	
s^2	$\frac{8\varepsilon-14}{\varepsilon} \to -\infty$	6	
s^1	$\frac{7-6\varepsilon^2}{8\varepsilon-14} \to 7$		
s^0	6		

Εχω δυο μεταβολες προσήμου στην $1^η$ στήλη. Αρα δύο ρίζες με θετικό και πραγματικό μέρος. Οποτε ασταθές (αυτό το καταλαβαίνουμε από το 0 στην $1^η$ στήλη)

Απο MATLAB βρίσκουμε ρίζες: $\boxed{0.48 \pm 1.14j}$

-1.25

$-0.86 \pm 0.86j$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εαν το τελευταίο στοιχείο στην πρώτη στήλη είναι μηδέν, τοτε μια απο τις ρίζες είναι το μηδέν.

Παράδειγμα 5 (Με αλλο τρόπο από το "ε")

$s^4+s^3+2s^2+2s+3=0$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	0	3	
s^1			
s^0			

Πολλαπλασιάζουμε με το $(s+\alpha)$, με το $\alpha>0$ και το $-\alpha$ δεν είναι ρίζα

Εδω πολλ/ω με το $s+1$. Άρα $s^5+2s^4+3s^3+4s^2+5s+3=0$

s^5	1	3	5
s^4	2	4	3
s^3	1	3.5	
s^2	-3	3	
s^1	4.5	0	
s^0	3		

Εχω δύο εναλλαγές προσήμου στην $1^η$ στήλη. Αρα εχω δυο ρίζες στο δεξιο μιγαδικο επιπεδω. Συνεπως και τα δυο πολυώνυμα έχουν 2 ασταθής ρίζες.

Παράδειγμα 6 (περιπτωση μηδενικής γραμμής)

$s^5+s^4+2s^3+2s^2+3s+3$

s^5	1	2	3
s^4	1	2	3
s^3	$\cancel{0}\ 4$	$\cancel{0}\ 4$	0
s^2	1	3	
s^1	-8		
s^0	3		

Οταν πετυχω μια μηδενική γραμμή πηγαινω στην αμεσως προηγούμενη και φτιαχνω το βοηθητικό πολυώνυμο:

$s^4+2s^2+3\cdot s^0 = s^4+2s^2+3 = Q(s)$

Αρχιζω απο τον μεγιστοβαθμιο (s^4) και κατεβαίνω κατα 2 παντα!!

$Q'(s) = 4s^3+4s+0 = 4s^3+4s$

Τωρα παιρνω τους συντελεστες του $Q'(s)$ και αντικαθιστω στα τα μηδενικά της αντιστοιχης γραμμής απο αριστερα προς τα δεξια

Οι ρίζες του βοηθητικού πολ/μου είναι και ρίζες του αρχικού πολ/μου.

Λογω της μηδενικής σειράς οι ρίζες θα ειναι συμμετρικες ως προς το O (Όχι όλες!!)

Εδω εχω 2 μεταβολές προσήμου στην $1^η$ στήλη. Αρα εχω 2 ρίζες στο δεξιο μιγαδ. επιπεδο

Παράδειγμα 7

$\lambda^5+2\lambda^4+5\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda = \lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2+2\lambda+4)$

λ^5	1	5	-4
λ^4	2	-2	0
λ^3	4	-4	0
λ^2	$\cancel{0}\ 12$	$\cancel{0}\ -4$	0
λ^1	-2/3	0	
λ^0	-4		

$Q(\lambda) = 4\lambda^3 - 4\lambda$. $Q'(\lambda) = 12\lambda^2 - 4$.

$Q(\lambda)=0 \Rightarrow 4\lambda(\lambda^2-1)=0 \Rightarrow \lambda=0$, $\lambda=\pm1$ → συμμετρικές ως προς το O

μια αλλαγή προσήμου ⇒ μια ρίζα στο δεξιο μιγαδικό επιπεδο

Παράδειγμα 8 Προσοχή!!

Συναρτ. μετ. αν. βρόχου: $G = \dfrac{k}{s(s+4)^2}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τιμές του k που κάνουν την απόκριση να σβήνει γρηγορότερα από το e^{-t}. Δηλ. οι πόλοι του κλειστού συστήματος να έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -1.

Χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου με αρνητική ανάδρ.: $1+G = 1 + \dfrac{k}{s(s+4)^2} = 0$

Άρα $p(s) = s^3 + 8s^2 + 16s + k$.

Πλέον με ενδιαφέρει ποιες ρίζες είναι μικρότερες του -1.
Άρα από το επίπεδο s μετατοπίζω τον άξονα κατά 1 αριστερά. Δηλαδή θέτω $w = s+1$
$s = w-1$

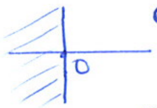
Άρα $p(w) = (w-1)^3 + 8(w-1)^2 + 16(w-1) + k$
$= w^3 + 5w^2 + 3w - 9 + k$.

w^3	1	3
w^2	5	$k-9$
w^1	$4.8-0.2k$	
w^0	$k-9$	

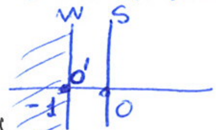
Άρα θέλω $\begin{cases} k-9>0 \\ 4.8-0.2k>0 \end{cases} \Rightarrow$

$24 > k > 9$ → δίνει πόλους του κλειστού με πραγμ. μέρος μικρότερο του -1

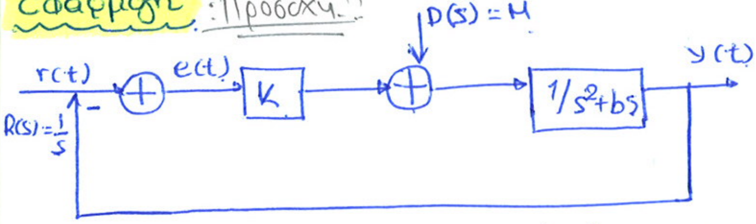
Ουσιαστικά με Routh βρίσκω αν υπάρχουν ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο (εξετάζοντας αν υπάρχουν ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο).



Με μετατόπιση κατά 1 από αριστερά εξετάζω αν υπάρχουν ρίζες μικρότερες του -1 και το -1 είναι το "0" του w (που είναι η νέα μεταβλητή).



Εφαρμογή: Προσοχή!!



Να βρεθούν περιοχές των τιμών του k (εάν υπάρχουν) έτσι ώστε:
1) Απαλοιφή διαταραχής στη μόνιμη κατάσταση
2) $\lim_{t\to\infty} y(t) - r(t) = 0$

Οι παρονομαστές πρέπει να βγαίνουν ίδιοι

Επαλληλία: $Y_d(s) = \dfrac{\frac{1}{s^2+bs}}{1+\frac{k}{s^2+bs}} \cdot D(s) = \dfrac{1}{s^2+bs+k} \cdot D(s)$, όταν $r(t) = 0$

$Y_r(s) = \dfrac{\frac{k}{s^2+bs}}{1+\frac{k}{s^2+bs}} R(s) = \dfrac{k}{s^2+bs+k} \cdot R(s)$, όταν $D(s) = 0$ $\Rightarrow$

$Y(s) = Y_d(s) + Y_r(s) = \dfrac{D(s)}{s^2+bs+k} + \dfrac{kR(s)}{s^2+bs+k} = \dfrac{M}{s^2+bs+k} + \dfrac{k}{s(s^2+bs+k)}$

Απαλοιφή διαταραχής σημαίνει: $\lim_{t\to\infty} y_d(t) = 0$. Θα χρησιμοποιήσω Routh για την απόδειξη ΘΤΤ ισχύει με την προϋπόθ. $sY_d(s)$ είναι ευσταθής.

$sY_d(s) = s\dfrac{M}{s^2+bs+k}$ άρα $p(s) = s^2+bs+k$

s^2	1	k
s^1	b	0
s^0	k	

Αρκεί $k>0$

Είναι $\lim_{t\to\infty} y_d(t) = \lim_{s\to 0} sY_d(s) \overset{k>0}{=} \lim_{s\to 0} \dfrac{sM}{s^2+bs+k} = 0$

το $sY_d(s)$ το έχω υπολογίσει

Επίσης: $\lim_{t\to\infty} y(t) - r(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) - sR(s) = \lim_{s\to 0} (sY_r(s) - 1)$

$= \lim_{s\to 0} \left(s \dfrac{k}{s^2+bs+k} \dfrac{1}{s} - 1\right) = \lim_{s\to 0} \dfrac{k}{s^2+bs+k} - 1 = \dfrac{k}{k} - 1 = 0$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ LIAPUNOV

Αφορά αρχικές συνθήκες και όχι είσοδο. Περιγράφει την συμπεριφορά του σημείου ισορροπίας.

Σημείο Ισορροπίας. Έστω $\dot{x} = f(x)$. $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας $f(\bar{x}) = 0$

Παράδειγμα: $\dot{x} = a\left(1 - \frac{x}{c}\right)x$

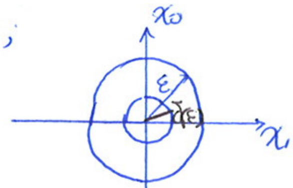
$$0 = a\left(1 - \frac{x}{c}\right)\cdot x \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ ή } \bar{x} = c$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας παίρναμε το 0 σαν σημείο ισορροπίας.

Θέτω $y = x - \bar{x} \Rightarrow x = y + \bar{x}$ $\quad \dot{x} = \dot{y} \Rightarrow f(x) = \dot{y} \Rightarrow f(y + \bar{x}) = \dot{y}$, $\bar{y} = 0$

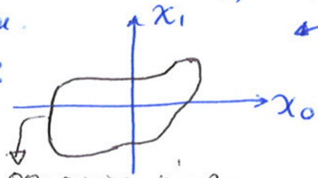
ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Το σημείο ισορροπίας 0 είναι ευσταθές κατά Liapunov εάν για κάθε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$: Αν $\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow x(t) < \varepsilon \ \forall \ t \geq t_0$

Σχηματικά;



Δηλαδή όσο μεγάλο ε και να μου δώσουν, επιλέγω ένα δ(ε) μικρότερο τέτοιο ώστε για αυτό το δ(ε) το σύστημα να μην υπερβαίνει το ε.

Στα γραμμικά συστήματα όταν είναι ασταθή, τότε πάνε στο άπειρο. Αυτό δεν ισχύει για τα μη γραμμικά συστήματα.
π.χ. Ταλαντωτής Van der Pol:

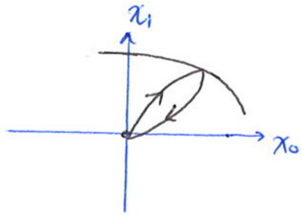


ασταθές κατά Liapunov γιατί $\forall \varepsilon > 0 \ \nexists \ \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε η έξοδος να είναι μικρότερη από το ε.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Το σημείο ισορροπίας 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (Α.Ε) εάν είναι

1) Ευσταθές
2) $\exists \ \delta_1 > 0$: $\|x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$

Έστω το μη γραμμικό σύστημα:



Δεν είναι ευσταθές αφού $\forall \varepsilon > 0$ $\nexists \ \delta(\varepsilon)$: $y < \varepsilon$.
Όμως ισχύει $\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$ αφού επιστρέφει στο 0.
Άρα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

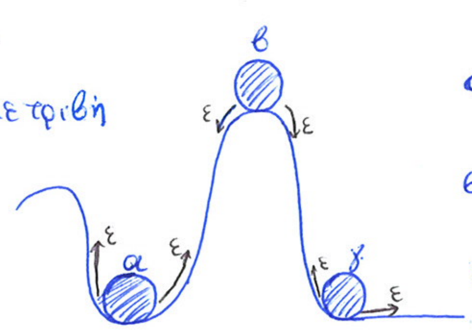
Παραδείγματα

1.

Είναι ευσταθές αφού $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$: αν βάλω την μπάλα να κινηθεί στο δ(ε), τότε αυτή δεν θα ξεπεράσει το ε.

2.

μετριβή



α. Είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αφού είναι ευσταθές και αν το μετατοπίσω κατά δ(ε) θα επιστρέψει στο 0

β. Είναι ασταθές γιατί $\forall \varepsilon > 0 \ \nexists \ \delta(\varepsilon) > 0$: $y < \varepsilon$.

γ. Είναι ευσταθές γιατί $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$: $y < \varepsilon$
Είτε από αριστερά είτε από δεξιά και να επιλέξω το δ(ε), λόγω τριβής η μπάλα δεν θα υπερβεί το ε.

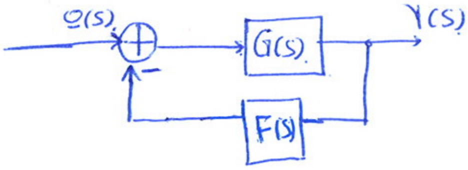
Κριτήριο: Οι ιδιοτιμές του A να είναι αυστηρά στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. (8) τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν έστω και μια είναι στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο δηλ. έχει πραγματικό μέρος θετικό, τότε το $\bar{x}$ (σημείο ισορροπίας) είναι ασταθές. Ιδιοτιμές του A επάνω στον φανταστικό άξονα ⇒ οριακή ευστάθεια (μόνο για κατά Λιαπούνοφ ευστάθεια). Αν είναι πολλαπλές ιδιοτιμές και έχουν κατάλληλο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, τότε είναι οριακά ευσταθές.

↓ ευστάθειας για Λιαπούνοφ.

Σημείωση: Ιδιοτιμές του A == πόλοι συνάρτησης μεταφοράς [δηλαδή ευστάθεια κατά BIBO == ασυμπτωτική ευστάθεια (άρα και ευστάθεια) κατά Λιαπούνοφ]

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

{πού πάνε οι πόλοι του κλειστού καθώς μεταβάλλεται το k ανοικτού}



$$\frac{Y(s)}{\Theta(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} \qquad G(s)F(s) = \frac{kN(s)}{D(s)} = \frac{k(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_0)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}$$

$$\frac{Y(s)}{\Theta(s)} = \frac{G(s)}{1+k\frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{D(s)\,G(s)}{D(s)+kN(s)}$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$D(s) + kN(s) = 0$

1) $k=0 \Rightarrow D(s)=0$ δηλ. πόλοι ανοιχτού κ' κλειστού συστήματος συμπίπτουν.

2) $k \to +\infty \Rightarrow N(s)=0$ οι πόλοι του κλειστού καταλήγουν σε μηδενικά του ανοιχτού βρόχου ή ∞.

3) Γωνία και μέτρο εάν ο γ.τ.ρ. περνάει από το S_0

$G(S_0)F(S_0) = \frac{kN(S_0)}{D(S_0)} = -1 \qquad \measuredangle G(S_0)F(S_0) = 180^\circ + 360^\circ \ell = (2\ell+1)\pi$ αν $\ell = 0, \pm1, \pm\dots$

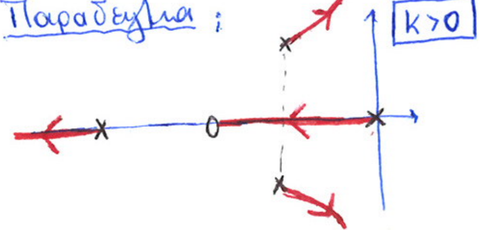
$\left| k\frac{N(S_0)}{D(S_0)} \right| = 1$

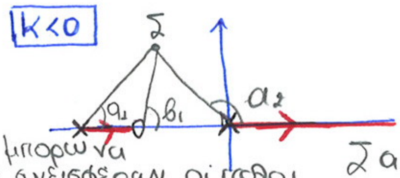
Μια ικανή συνθήκη για να ανήκει ένα σημείο στο γτρ είναι να σχηματίζει γωνία 180° μοίρες. Για να βρω το k πρέπει να χρησιμοποιήσω την συνθήκη μέτρου

ΚΑΝΟΝΕΣ:

1. Όροι είναι $(s+\dots)$ ή $(s-\dots)$ (πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου να είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων)
2. Συνθήκη μέτρου και γωνίας όπως στο (3).
3. Συμμετρία ως προς τον άξονα των πραγματικών (ο γτρ πρέπει να είναι συμμετρικός ως προς τον πραγματικό άξονα για να είναι καλός)
4. Σημεία έναρξης - λήξης του γτρ. Έναρξη στα $-P_i$ (πόλοι του ανοικτού) και καταλήγει στα μηδενικά $-Z_i$ του ανοικτού ή στο $\pm\infty$
5. Αριθμός των σκελών του γτρ (διακεκριμένων τόπων-κλάδων) είναι ίσος προς τον αριθμό των πόλων της $G(s)F(s)$ πχ. $G(s)F(s) = \frac{k(s+2)}{s^2(s+5)}$ έχει 3 κλάδους διότι έχει 3 πόλους
6. Τόποι στον άξονα των πραγματικών
   Για $k>0$: στα αριστερά ενός περιττού αριθμού πόλων και μηδενικών
   Για $k<0$: στα αριστερά ενός άρτιου αριθμού πόλων και μηδενικών.

Παράδειγμα:





(Κάθε ένας πόλος πάει σε ΕΝΑ μηδενικό!! όταν k>0)

$\Sigma a_i - \Sigma b_i = 180^\circ$

Πολλές φορές μπορώ να βρω τι γωνία συνεισφέραν οι πόλοι και τα μηδενικά σε ένα σημείο (είτε ανήκει στον γτρ. είτε όχι)
πχ για το Σ: $\measuredangle = a_1 + b_1 + a_2$

• Για να βρω την γωνία που έχει ένα σημείο λόγω των πόλων και των μηδενικών ανοιχτού βρόχου τότε βρίσκω την γωνία των μηδενικών και από αυτή αφαιρώ την γωνία των πόλων.
Για εύρεση γωνίας έχουμε αλγεβρικό και γεωμετρικό τρόπο (ίδιες μονάδες στους άξονες). ↑ ?

7. Ασύμπτωτες : μετον άξονα σ

Η τομή των ασυμπτώτων θα βρίσκεται στο σημείο $\sigma_1 = -\dfrac{\sum_1^n p_i - \sum_1^m z_i}{n-m}$

p_i : πόλοι
z_i : μηδενικά
n : # πόλων
m : # μηδενικών του $G(s)F(s)$

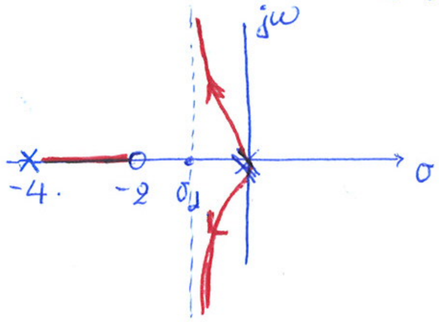
και $\theta_p = \begin{cases} \dfrac{(2p+1)\cdot 180}{n-m}, & K>0 \\ \dfrac{(2p)\,180}{n-m}, & K<0 \end{cases}$ $\quad p = 0,1,2,\dots,n-m-1$

και αριθμός των ασυμπτώτων $n-m$.

Παράδειγμα

$G(s)F(s) = \dfrac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$ $\quad K>0$

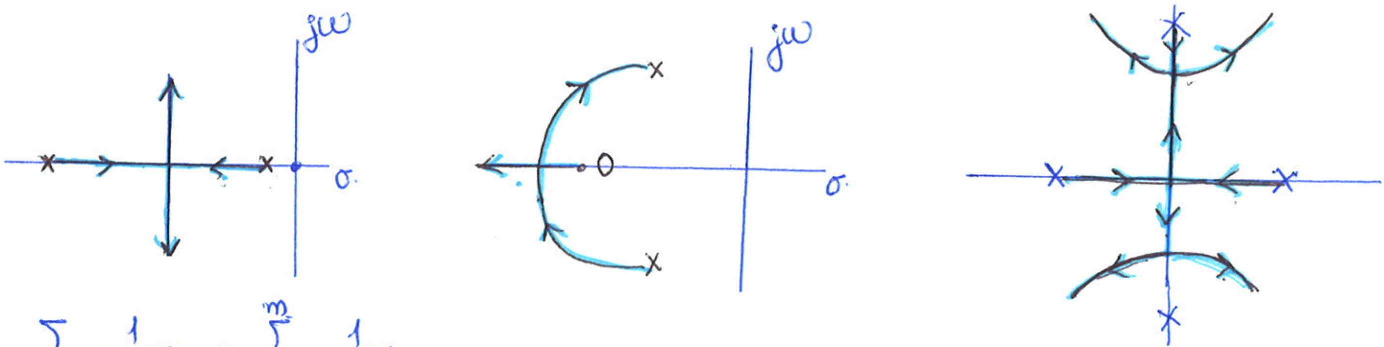
Αφού # πόλων > # μηδενικών θα έχω ασύμπτωτες για να έχουν να πάνε κάπου οι πόλοι που δεν πάνε σε μηδενικά



$\sigma_1 = \dfrac{0+0+4-2}{2} = -1$

$\theta_p = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ, 270^\circ$ ($p=1$, $p=2$)

8. Σημεία Θλάσης : Το σημείο στο οποίο οι δύο πόλοι του κλειστού ταυτίζονται.



1. $\displaystyle\sum_{b=1} \frac{1}{\sigma_b + p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_b + z_j}$

2. $\dfrac{d}{ds}(GF) = 0$

3. $\chi.\varepsilon = B(s) + KA(s) = 0 \Rightarrow K = -\dfrac{B(s)}{A(s)}$ $\quad \dfrac{dK}{ds} = -\dfrac{B'(s)A(s) - A'(s)B(s)}{A^2(s)} = 0$

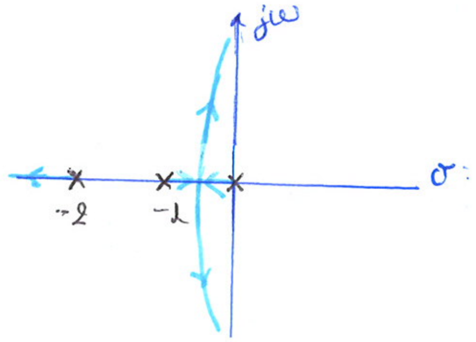
Οι τρόποι 1., 2 και 3 μας δίνουν τα ΠΙΘΑΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΘΛΑΣΗΣ.

Οι ρίζες των 1, 2, 3 πρέπει να ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση για κατάλληλ τιμές του K.
Αν το K βγει μιγαδικό σε κάποια περίπτωση δεν είναι σημείο θλάσης αφού το K πρέπ να είναι πραγματικό εφόσον αναπαριστά ενίσχυση σήματος

Παράδειγμα : Υπολογισμός σημείων θλάσης

$$GF = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b+1} + \frac{1}{\sigma_b+2} = 0 \Rightarrow 3\sigma_b^2 + 6\sigma_b + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_b = -0.423 \\ \sigma_b = -1.577 \end{cases}$$ πιθανά σημεία θλάσης.



Εδώ σημείο θλάσης είναι το $\sigma_b = -0.423$ διότι αυτό το σημείο ανήκει στον γεωμετρικό τόπο για $K>0$

Αν το $K<0$ τότε το σημείο θλάσης θα ήταν το $\sigma_b = -1.577$

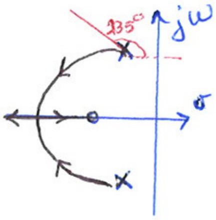
9. Γωνίες εκκίνησης (αναχώρησης) και άφιξης (λήξης)

Γωνία αναχώρησης γ.τ.ρ. από μιγαδικό πόλο : $\theta_D = 180^\circ + \measuredangle GF'$

όπου η GF' είναι η γωνία του GF υπολογισμένη στον μιγαδικό πόλο χωρίς την "συνεισφορά" αυτού του πόλου.

Παράδειγμα

$$GF = \frac{K(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$



$$\measuredangle GF'\Big|_{s=-1+j} = \frac{K(-1+j+2)}{(-1+j+1+j)} = \measuredangle \frac{K(1+j)}{2j} = 45^\circ - 90^\circ = -45^\circ$$

Άρα η γωνία αναχώρησης από τον πόλο $-1+j$ είναι :

$$\theta_D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Γωνία άφιξης σε μιγαδικό μηδεν. : $\theta_A = 180^\circ - \measuredangle GF''$

όπου $\measuredangle GF''$ η γωνία της GF στο μιγαδικό μηδενικό αγνοώντας την "συνεισφορά" αυτού του μηδενικού.

Παράδειγμα

$$GF = \frac{K(s+j)(s-j)}{s(s+1)}$$

$$\measuredangle GF'' = \measuredangle GF''\Big|_{s=j} = \measuredangle \frac{K\,2j}{j(j+1)} = 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$$

Άρα $\theta_A = 180^\circ - (-45^\circ) = 225^\circ$

10. Τομή των γ.τ.ρ. με τον άξονα των φανταστικών

Παράδειγμα

Εστω χ.ε: $s^3+3s^2+2s+K=0$ ← έχει προκύψει από συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου.

ΠΑΝΤΑ: χ.ε: $1+G(s)F(s)=0$

Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$\begin{cases} K>0 \\ 6-K>0 \end{cases} \Rightarrow K\in(0,6)$

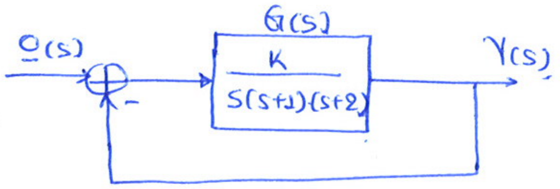
Για $K=6$ παίρνω την βοηθητική εξίσωση: $3s^2+K=0 \Rightarrow 3s^2+6=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{2} \Rightarrow \omega=\pm\sqrt{2}$

Για $K=0$ παίρνω $s=0$

Με άλλον τρόπο: $s=j\omega$ Οπότε: $(j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0 \Rightarrow$

$(K-3\omega^2)+j(2\omega-\omega^3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \omega=\pm\sqrt{2}, & K=6 \\ \omega=0, & K=0 \end{cases}$

Παράδειγμα (Εφαρμογή των 10 κανόνων - εύρεση γ.τ.ρ)



$F(s)=1$
$K>0$

$$\frac{Y(s)}{\Theta(s)}=\frac{\frac{K}{s(s+1)(s+2)}}{1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{\frac{K}{\cancel{s(s+1)(s+2)}}}{\frac{s(s+1)(s+2)+K}{\cancel{s(s+1)(s+2)}}}=\frac{K}{s(s+1)(s+2)+K}$$

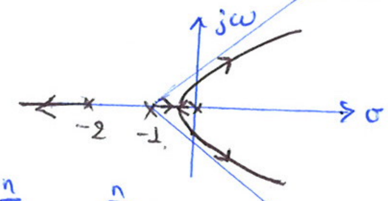
1. Μορφή γ.τ.ρ. Άρα: χ.ε $= s(s+1)(s+2)+K=0$

2. Συνθήκη γωνίας - μέτρου: $\measuredangle GF=\measuredangle\frac{K}{s(s+1)(s+2)}=\measuredangle s-\measuredangle(s+1)-\measuredangle(s+2)=(2\ell+1)\pi \quad \ell\in\mathbb{Z}$

   και $|GF|=\left|\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right|=1$

3. Τμήματα γ.τ.ρ.: 3 τμήματα, όσοι και οι πόλοι

4. Γτρ στον άξονα πραγμ.:



5. Συμμετρία:

6. Ασύμπτωτες: $\sigma_1=-\frac{\sum_1^n p_i-\sum_1^n z_i}{n-m}=-\frac{(0+1+2)-0}{3-0}=-1$. $-p_i, -z_i$ πόλοι και μηδενικά αντίστοιχα

   και $\theta_p=\frac{(2p+1)180^\circ}{n-m}=\begin{cases} 60^\circ, & p=0 \\ 540 & p=1 \\ 300 & p=2 \end{cases}$

* ΠΡΟΣΟΧΗ!! Είναι λάθος να δουλεύω με την αρχή του μέτρου για να βρω σ.θ. καθώς με αυτό τον τρόπο βρίσκω πάντα θετικό K.

8. Σημεία θλάσης:

$\frac{d}{ds}GF=\frac{d}{ds}\left[\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right]=0 \Rightarrow 3s^2+6s+2=0 \Rightarrow s=\begin{cases} -0.423 & \text{πιθανά σ.θ.} \\ -1.572 & \end{cases}$

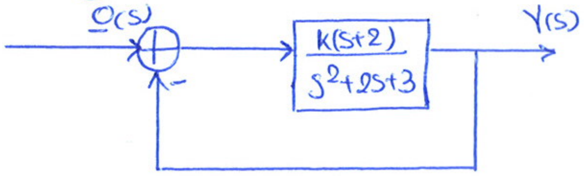
$-0.423 \rightarrow$ αποδεκτό

$-1.572 \rightarrow K\simeq -0.4$

Από χ.ε: $1+G(s)F(s)=0$ θα πρέπει να προκύπτει κατάλληλη πραγματική τιμή του K.

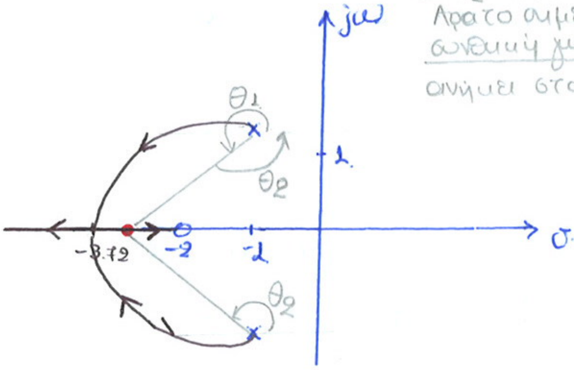
* Εδώ προκύπτει: $K=0.385$ για $s=-0.423$

Παράδειγμα



$K>0$

$\theta_1+\theta_2=360=2\cdot180=0$
Άρα το σημείο ικανοποιεί τη συνθήκη γωνίας γι' αυτό ανήκει στον γ.τ.ρ.



1. $\dfrac{K(s+2)}{s^2+2s+3}=\dfrac{K(s+2)}{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}$

⋮

5. Τμήματα του γ.τ.ρ.: 2 (όσοι είναι και οι πόλοι)
6. Τμήματα στον άξονα των πραγματικών.

Παρατήρηση 1: Με άλλον τρόπο θεμελίωση των τμημάτων του άξονα

$1+KG=0 \Rightarrow -K=\dfrac{1}{G(s)} \Rightarrow -K=\dfrac{s^2+2s+3}{s+2}$ (1)

Είναι $-K=|K|e^{i\pi}$ (2)

Για $s\in\mathbb{R}$ και $s\in(-\infty,-2)$ $\quad s+2<0$ Άρα: $s+2=|s+2|e^{i\pi}$
$s^2+2s+3>0$ Άρα: $s^2+2s+3=|s^2+2s+3|e^{i0}$ } (3)

Οπότε η (1) λόγω (2) ∧ (3) γίνεται: $|K|e^{i\pi}=\dfrac{|s^2+2s+3|e^{i0}}{|s+2|e^{i\pi}}=\dfrac{|s^2+2s+3|}{|s+2|}e^{-i\pi}$ (4)

Όλα τα $s\in(-\infty,-2)$ ικανοποιούν την (4)
διότι $\forall s\in(-\infty,-2)\ \exists K$ για το οποίο ισχύει $|K|=\left|\dfrac{s^2+2s+3}{s+2}\right|$. Άρα όλα αυτά τα s αποτελούν τμήμα του γ.τ.ρ.

8. Σημεία θλάσης

$\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{K(s+2)}{s^2+2s+3}\right]=\dfrac{K(s^2+2s+3)-K\cdot(s+2)(2s+2)}{(s^2+2s+3)^2}=0 \Rightarrow K\left(s^2+2s+3-(s+2)(2s+2)\right)=0$

$K(s^2+4s+1)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} s=-3.73 \\ s=-0.27 \end{array}$ } πιθανά σημεία θλάσης

Με αντικατάσταση αυτών των τιμών στην χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει:

$s_1 \longrightarrow K_1=5.46$
$s_2 \longrightarrow K=-1.46$

Το $s=-3.73$ ανήκει στον γ.τ.ρ και βγάζει και αποδεκτό K. Άρα είναι σημείο θλάσης.

Τα σημεία θλάσης μπορούν να ανήκουν και εκτός του πραγματικού άξονα

Τις τομές με jω άξονα τις βρίσκουμε είτε μέσω Routh είτε με αντικατάσταση $s=j\omega$ στην χ.ε

9. Γωνία αναχώρησης: $\theta_D=180^\circ+\measuredangle GF'=180^\circ+54.74^\circ-90^\circ\simeq145^\circ$

με $\measuredangle GF'\Big|_{s=-1+j\sqrt{2}}=\measuredangle\dfrac{K(-1+j\sqrt{2}+2)}{(-1+j\sqrt{2}+1+j\sqrt{2})}=\measuredangle\dfrac{K(1+j\sqrt{2})}{2\sqrt{2}j}=K\cdot(\tan^{-1}\sqrt{2}-90^\circ)=$

Παρατήρηση 2: Με άλλο τρόπο: Γωνία αναχώρησης από τον πόλο $-1+\sqrt{2}j$.
Κοντά στον πόλο $-1+j\sqrt{2}$ ισχύει: $s=-1+j\sqrt{2}+\varepsilon$ όπου $\varepsilon\in\mathbb{C}$ και $|\varepsilon|$ πολύ μικρό

$\dfrac{1}{G(s)}=\dfrac{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}{s+2}=\dfrac{(-1+j\sqrt{2}+\varepsilon+1-j\sqrt{2})(-1+j\sqrt{2}+\varepsilon+1+j\sqrt{2})}{-1+j\sqrt{2}+\varepsilon+2}=\dfrac{\varepsilon(\varepsilon+2j\sqrt{2})}{\varepsilon+1+j\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{2j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{2}} |\varepsilon| e^{j\phi(\varepsilon)} = -K = \frac{2\sqrt{2}\, e^{\pi/2 j}}{\sqrt{3}\, e^{0.96 j}} |\varepsilon|\, e^{j\phi(\varepsilon)} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} |\varepsilon|\, e^{j(\frac{\pi}{2}+\phi(\varepsilon)-0.96)} = |K|\, e^{j\pi}$$

Άρα $\phi(\varepsilon) = \pi - \frac{\pi}{2} + 0.96 = 2.53$ rad $= 2.53 \frac{180^\circ}{\pi} = 145^\circ$

ΤΥΠΟΙ VIETTA

$f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_\nu \neq 0$

με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_\nu$

$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu) \quad (1)$

Διαιρώ με a_ν : $x^\nu + \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu} x^{\nu-1} + \dots + \frac{a_1}{a_\nu} x + \frac{a_0}{a_\nu} = x^\nu - (\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_\nu) x^{\nu-1} + (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \dots + \rho_{\nu-1}\rho_\nu) x$

$- \dots + (-1)^\nu \rho_1\rho_2\cdots\rho_\nu$

Εξισώνουμε συντελεστές ομοιβαίων όρων: $S_1 = \rho_1+\rho_2+\dots+\rho_\nu = -\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}$

$S_2 = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \dots + \rho_{\nu-1}\rho_\nu = +\frac{a_{\nu-2}}{a_\nu}$

$\vdots$

$S_\nu = \rho_1\rho_2\cdots\rho_\nu = (-1)^\nu \frac{a_0}{a_\nu}$

Παράδειγμα

1. $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

$S_1 = \rho_1 + \rho_2 = -\beta/\alpha$

$S_2 = \rho_1\rho_2 = \gamma/\alpha$

2. $ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$

$S_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\beta/\alpha$

$S_2 = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_3\rho_2 = \gamma/\alpha$

$S_3 = \rho_1\rho_2\rho_3 = -\delta/\alpha$

3. $ax^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$

$S_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = -\beta/\alpha$

$S_2 = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 = \gamma/\alpha$

$S_3 = \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \rho_1\rho_3\rho_4 + \rho_2\rho_3\rho_4 = -\delta/\alpha$

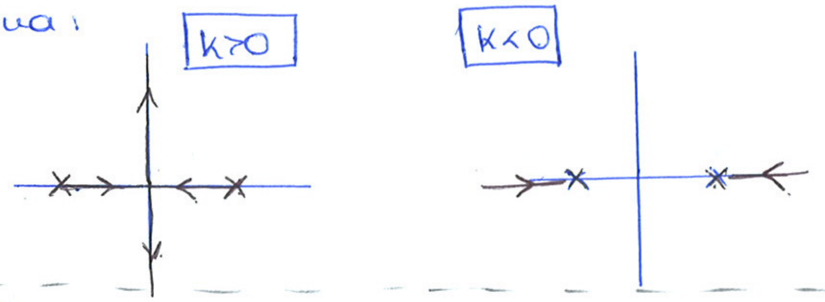
$S_4 = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \varepsilon/\alpha$

9. Γωνίες Αναχώρησης (όπως πριν)
10. Σημεία τομής με άξονα (όπως πριν)

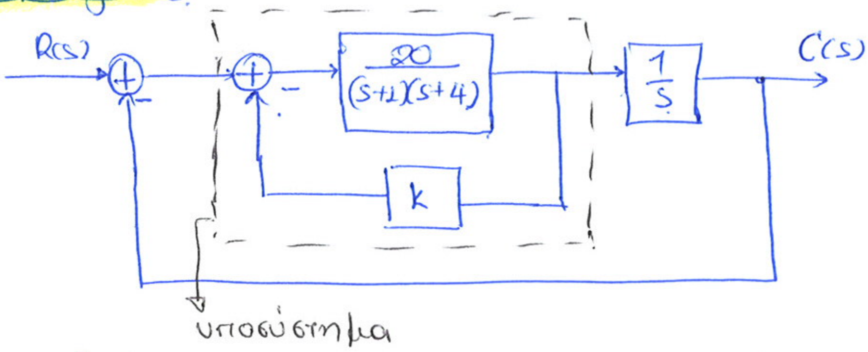
ΠΡΟΣΟΧΗ!!

- Για $k>0$ τα τόξα πάνε από τους πόλους στα μηδενικά ή στο άπειρο, καθώς το k μεγαλώνει
- Για $k<0$ τα τόξα πάνε ανάλογα με το αν θεωρούμε το k να μεγαλώνει στο R ή κατ' απόλυτη τιμή.

Σχηματικά:



Παράδειγμα

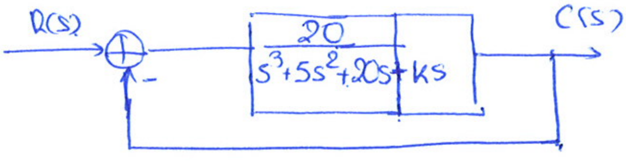


Για να βγάλω το υποσύστημα το αντικαθιστώ με την συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου.

$$\frac{\dfrac{20}{(s+1)(s+4)}}{1+\dfrac{20k}{(s+1)(s+4)}}=\frac{20}{s^2+5s+4+20k}$$

Ανοιχτός βρόχος ολικού συστήματος: $\dfrac{20}{s^2+5s+4+20k}\cdot\dfrac{1}{s}$

Ισοδύναμα:



ΠΡΟΣΟΧΗ!!

Το k για την μελέτη του γτρ και το θέλω στον αριθμητή και στην συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου το έχω στον παρονομαστή. Συνεπώς βρίσκω την συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου

Είναι:

$$\frac{\dfrac{20}{s^3+5s^2+20s+ks}}{1+\dfrac{20}{s^3+5s^2+20s+ks}}=\frac{20}{s^3+5s^2+4s+20ks+20}$$

Η χ.ε : $s^3+5s^2+20ks+4s+20=0$

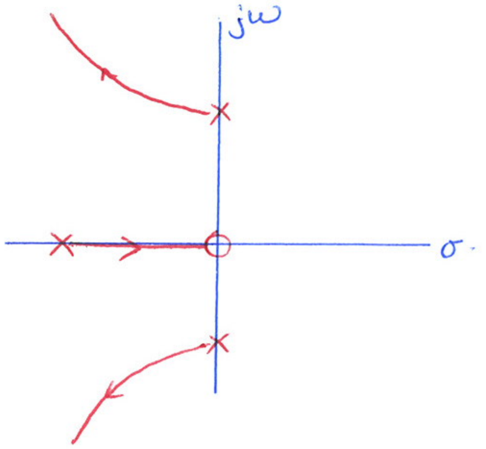
Στην συνέχεια διαιρώ την χ.ε με ένα πολυώνυμο που περιέχει όλους τους όρους της εκτός από αυτόν που περιέχει το k.

Άρα προκύπτει: $1+\dfrac{k's}{s^3+5s^2+4s+20}=$ $\quad k'=20k$

$$=1+\frac{k's}{\underbrace{(s-2j)(s+2j)(s+5)}}$$

↳ Συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου με k στον αριθμητή

Τώρα βρίσκω τους πόλους του ανοιχτού και βρίσκω τον γτρ.



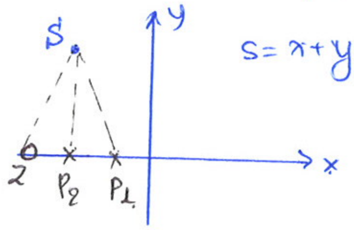
ΠΡΟΣΟΧΗ!!

Πως γνωρίζω ότι η νέα συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου αφορά το ίδιο σύστημα?

Ουσιαστικά δεν αφορά το ίδιο σύστημα, αλλά αφού έχουν την ίδια χ.ε, έχουν και τον ίδιο γτρ. και εδώ αυτό είναι που μας ενδιαφέρει.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Γεωμετρικού Τόπου Ριζών

Αν έχω 2 πόλους p_1, p_2 και 1 μηδενικό z_1 τότε:
η χ.ε: $(s-p_1)(s-p_2)+k(s-z_1)=0$ (1)



Δοκιμαστικό σημείο: $s=x+yi$
Με αντικατάσταση του s στην (1) προκύπτει:

$$\begin{cases} x^2-y^2-(p_1+p_2+k)x+p_1p_2-kz=0 \\ 2xy-(p_1+p_2-k)y=0 \end{cases}$$

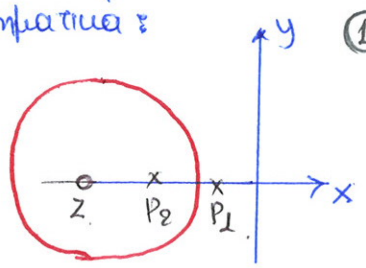
$$\Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{(x^2-y^2)-(p_1+p_2)x+p_1p_2}{z-x} \\ k=(p_1+p_2)-2x \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=p_1p_2+[2x-(p_1+p_2)]z \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(x-z)^2+y^2=(p_1-z)(p_2-z)}$$

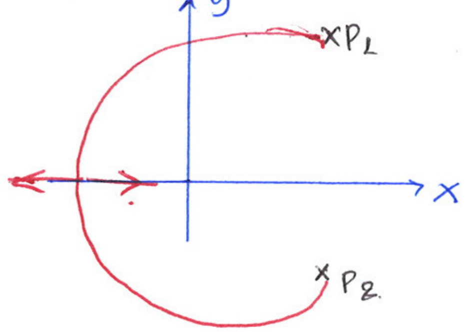
Κύκλος κέντρου $(z,0)$ και ακτίνας $R=\sqrt{(p_1-z)(p_2-z)}$

Σχηματικά:

(1): πραγματικοί πόλοι



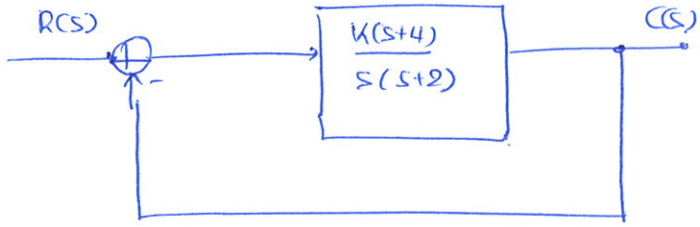
(2): Μιγαδικοί πόλοι



ΠΡΟΣΟΧΗ!!

Γενικά αν έχω 2 πόλους και 1 μηδενικό ή
2 πόλους και 2 μηδενικά
Τότε ο γτρ που προκύπτει θα είναι κύκλος ή τμήμα κύκλου.

Παράδειγμα



Να σχεδιασθεί ο γτρ και να υπολογιστεί το K στο $x=-4$ κ $x=-8$

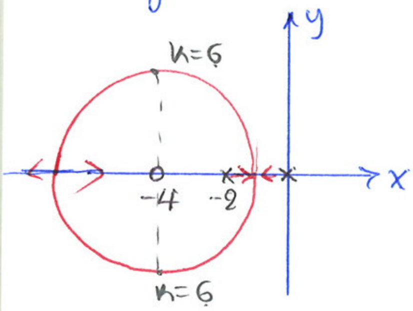
ΛΥΣΗ

Είναι χ-ε $s(s+2)+K(s+4)=0$ δηλ $z=-4$ $p_1=0$ $p_2=-2$

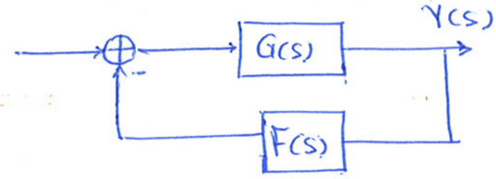
Ο γτρ είναι κύκλος $(-4,0)$ και $\rho=\sqrt{(p_1-z)(p_2-z)}=2\sqrt{2}$

Από την σχέση $\underset{(x=-4)}{K=p_1+p_2-2x}=0-2-2(-4)=6$

για $x=-8$: $K=18$



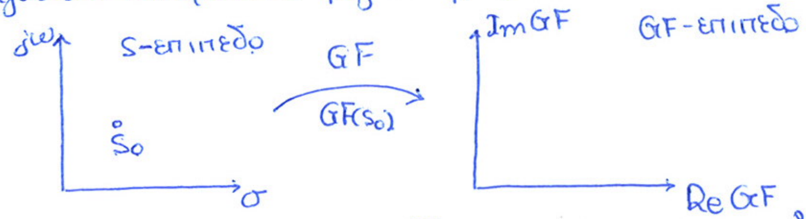
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ NYQUIST



$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

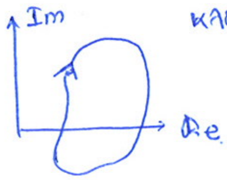
Τα προηγούμενα κριτήρια (Routh, κτλ) μας έδειχναν απόλυτη ευστάθεια.
Το Nyquist αναφέρεται στην σχετική ευστάθεια και σε πόσο απέχει η κατάσταση ευστάθειας από το να γίνει ασταθής.

- Γραφική Μέθοδος (στο πεδίο συχνότητας), απόλυτη - σχετική ευστάθεια
- Εξετάζει με ευκολία και πολυώνυμα που δεν είναι πεπερασμένης τάξης
- Χρησιμοποιώ της $GF(s)$ (συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού) για να μελετήσουμε την ευστάθεια του κλειστού συστήματος
- Εύκολη χρήση με πειραματικά δεδομένα (πολικό διάγραμμα) ↳ τμήμα διαγράμματος Nyquist.
- Μιγαδικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής.



Έστω $GF = s^2$, $s_0 = x + yi$. Τότε $GF(s) = (x+yi)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2xy}_{v} i = u + vi$

Άρα $(1,2) \longrightarrow (-3,4)$

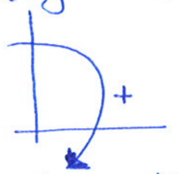


Εσωτερικά σημεία καμπύλης: Τα σημεία που είναι δεξιά καθώς διανύουμε την καμπύλη.

π.χ.:

Φορά καμπύλης:

1) Δεξιόστροφα (ωρολογιακά) ⟶ Θετική διεύθυνση καμπύλης

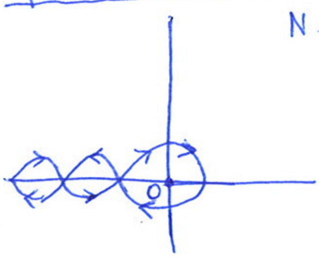


2) Αριστερόστροφα ⟶ αρνητική διεύθυνση καμπύλης

Περιελίξεις ή Περιστροφές N

N. αριθμός περιστροφών γύρω από το 0

$N_{(0)} = 1$

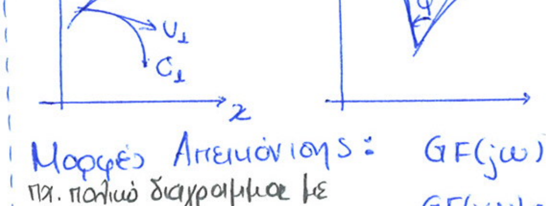


Παράγωγος της f στο z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$ αν υπάρχει.

Η συνάρτηση είναι αναλυτική στο z_0 εάν η παράγωγος υπάρχει όχι μόνο στο z_0 αλλά και σε μια γειτονιά του.

Επίσης θα κάνουμε και σύμμορφες απεικονίσεις



Μορφές Απεικόνισης:

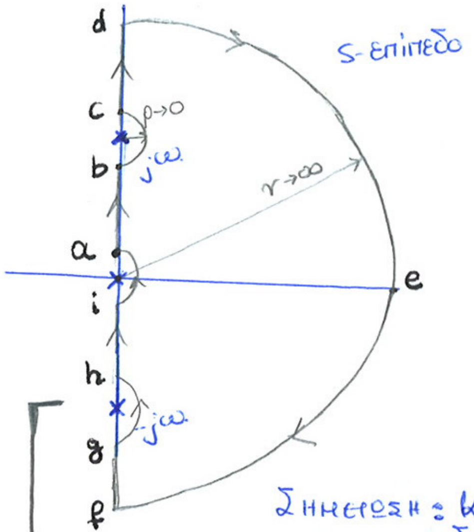
π.χ. πολικό διάγραμμα με $s = j\omega$

$GF(j\omega) = |GF(j\omega)| \measuredangle GF(j\omega)$

$GF(j\omega) = Re[GF(j\omega)] + j\,Im[GF(j\omega)]$

Το διάγραμμα του π.χ. $GF(j\omega)+\alpha$ ίδιο με του $GF(j\omega)$ και αρχή αξόνων στο $-\alpha$.
Δηλ. $\alpha=1$ το διάγραμμα του $1+GF(j\omega)$ είναι το ίδιο με το π $GF(j\omega)$ με αρχή των αξόνων το 1
Το διάγραμμα για $-\infty<\omega<0$ είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των πραγματικών (διόρθωση) με το διάγραμμα για $0<\omega<\infty$.

<u>Κλειστός δρόμος του Nyquist</u> : Κλειστή καμπύλη που περιλαμβάνει <u>όλο</u> το δεξιό μιγαδικό επίπεδο



τμήμα ab : $s=j\omega \quad , 0<\omega<\omega_0$

bc : $s=\lim\limits_{\rho\to0}(j\omega+\rho e^{j\theta}) \quad -90^\circ\leq\theta\leq90^\circ$

cd : $s=j\omega \quad \omega_0<\omega<\infty$

def : $s=\lim\limits_{r\to\infty} re^{j\theta} \quad \theta\in[+90,-90^\circ]$

fg : $s=j\omega \quad -\infty<\omega<-\omega_0$

gh : $s=-j\omega+\rho e^{j\theta} \quad -90^\circ\leq\theta\leq+90^\circ$

hi : $s=-j\omega \quad -\omega_0<\omega<0$

ia : $s=\lim\limits_{\rho\to0}\rho e^{j\theta} \quad -90\leq\theta<90$

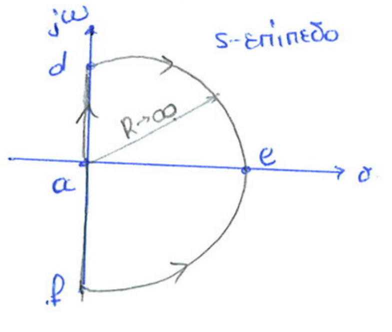
ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Κλειστός δρόμος στο s-επίπεδο δίνει κλειστό δρόμο στο GF-επίπεδο

→ Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου – Συνάρτηση Απεικόνισης GF.

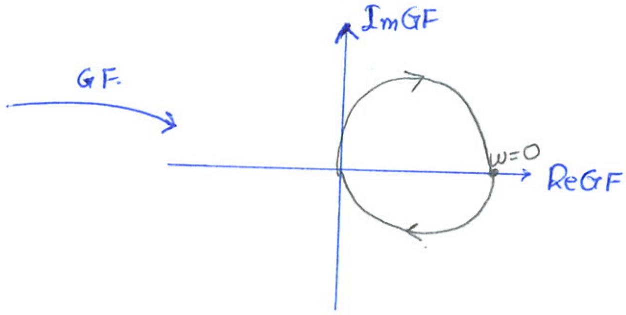
Μας ενδιαφέρει οι πόλοι να <u>μην</u> βρίσκονται στα όρια της καμπύλης

Παράδειγμα

$$GF(s)=\frac{1}{s+1}$$



ad : $s=j\omega \quad 0\leq\omega<\infty$



ad: $s=j\omega \quad 0\leq\omega<\infty$

$$GF(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\measuredangle -\arctan\omega.$$

$GF(j0)=1\measuredangle 0 \qquad GF(j\infty)=0\measuredangle -90^\circ$ } πολικό διάγραμμα
$GF(j1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\measuredangle -45^\circ$

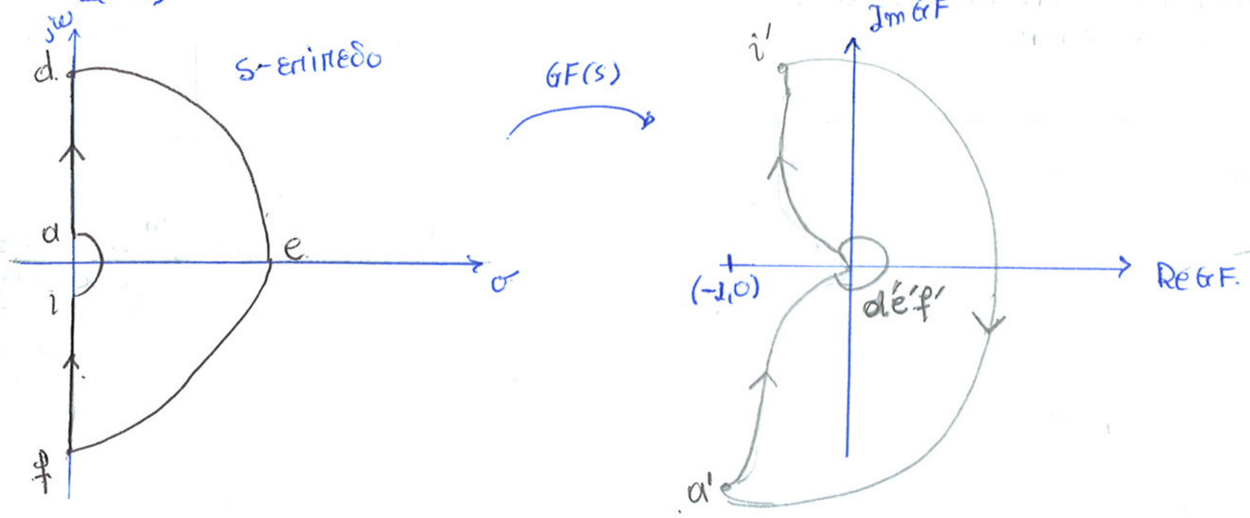
def: $s=\lim R e^{j\theta} \quad 90^\circ\leq\theta\leq-90^\circ$

$$GF(s)\Big|_{def}=\frac{1}{\lim\limits_{R\to\infty} Re^{j\theta}+1}=0\measuredangle-\theta$$

fa : $s=-j\omega \quad -\infty<\omega<0$

Παράδειγμα

$$GF(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



ad: $s = j\omega \quad 0 < \omega < \infty$

$$GF(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} \angle -90^\circ$$

$$\lim_{\omega \to 0} GF(j\omega) = \infty \angle -90^\circ$$

$$\lim_{\omega \to \infty} GF(j\omega) = 0 \angle -90^\circ$$

fi: συμμετρικό με ad

def: στην αρχή των αξόνων

Σημείωση: $\lim_{R \to \infty} (R e^{j\theta}) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2 \cdot e^{j2\theta}}$

για $s = \lim_{\rho \to 0} GF(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho e^{j\theta}} = \infty \angle -\theta$

Παρατήρηση 1: Πως γνωρίζαμε ότι το a'd' είναι στο 3ο τεταρτημόριο?

Βοηθάει το Re(GF) και Im(GF) για τομές με άξονες και δεν έχει ιδιαίτερη σημασία.

Παρατήρηση 2: Γιατί στρίβαμε δεξιά στο i'?

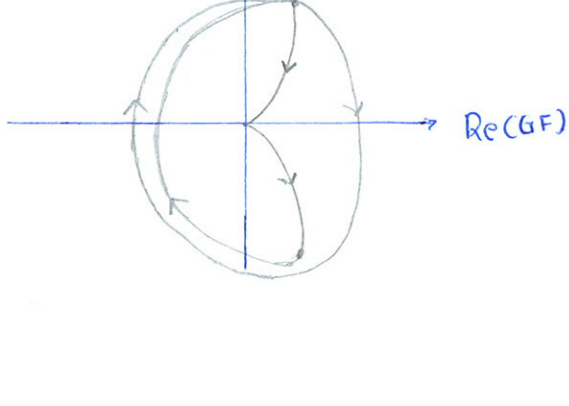
Ελέγχαμε π.χ. $\theta = 0$ και δίνει πάλι 0 και επομένως τομή στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει από σύμμορφη απεικόνιση.

Παρατήρηση 3:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έχουμε τόσα απειροημικύκλια όσο είναι και ο τύπος του συστήματος

Συνεπώς το διάγραμμα Nyquist ενός συστήματος τύπου ℓ, έχει ℓ απειροημικύκλια.

π.χ.: $GF(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$ τύπου 3



Θεώρημα Nyquist: Το κλειστό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι ευσταθές ανν $N=-p$ όπου p: αριθμός πόλων στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο (s-επι

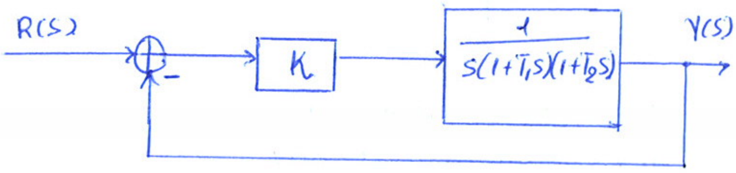
N: αριθμός δεξιόστροφων περι στροφών του $(-1,0)$ σημείου στο GF επίπεδο

Στο παράδειγμά μας $p=0$ $N=0$. Άρα το κλειστό σύστημα ευσταθές.

Οι πόλοι του GF είναι ίδιοι με τους πόλους $1+GF$ του κλειστού συστήματος

Εδώ δουλεύουμε με το σημείο $(-1,0)$ διότι χρησιμοποιούμε συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου που έχει παρονομαστή $1+GF$. $\Rightarrow 1+GF=0 \Rightarrow GF=-1$ Άρα εφαρμόζουμε το θεώρημα Cauchy με κέντρο το σημείο $(-1,0)$

Παράδειγμα



$T_1 > T_2 > 0$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Σε περίπτωση αστάθειας ο αριθμός των πόλων της σ.μ κλειστού βρόχου στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο είναι $N+P$.

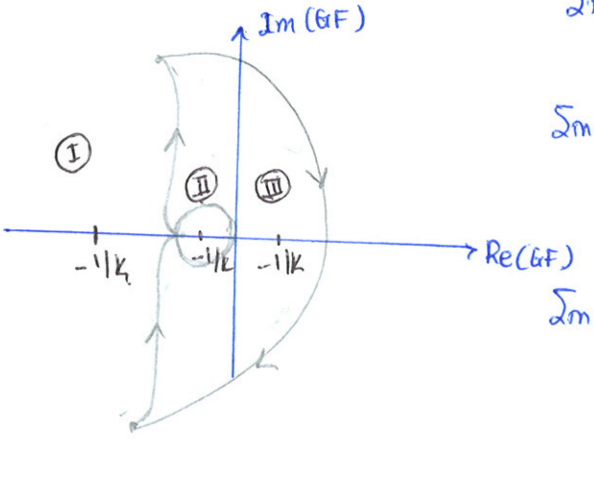
Να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού για $K \in (-\infty,+\infty)$
Σε περίπτωση αστάθειας να βρεθεί ο αριθμός των ασταθών πόλων.

Σημείωση: Για συστήματα με μεταβλητό K.
i) $\forall$ K σχεδιάζουμε το διάγραμμα Nyquist και χρησιμοποιούμε το σημείο $(-1,0)$ $\{KGF=-1\}$
ii) Χρησιμοποιούμε το διάγραμμα Nyquist για $K=1$ και το σημείο $(-1/K,0)$ $\{GF=-1/K\}$

$$KGF(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)} = \frac{-K(T_1+T_2) - K\frac{1}{\omega}(1-\omega^2 T_1 T_2)}{1+\omega^2(T_1^2+T_2^2)+\omega^4 T_1^2 T_2^2}$$

$$Im(j\omega)=0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} \quad (1)$$

$$Re(j\omega) \overset{(1)}{=} -\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2} = -\frac{1}{a}$$



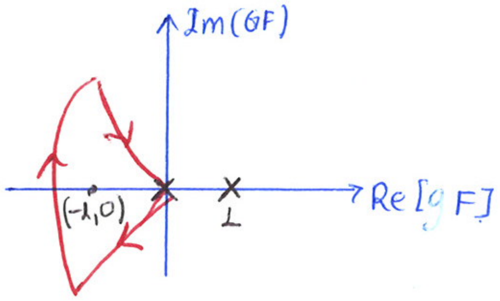
Στην περιοχή I: $-\infty < -1/K < -1/a \Rightarrow 0 < K < a$
$P=0$ $N=0$ $\Rightarrow$ κλειστό σύστημα ευσταθές

Στην περιοχή II: $-1/a < -1/K < 0 \Rightarrow a < K < \infty$
$N=2$, $P=0$ $\Rightarrow$ κλειστό σύστημα ασταθές.
τότε $Z=N+P=2+0=2$ ασταθείς πόλοι

Στην περιοχή III: $0 < -1/K < \infty \Rightarrow K \in (-\infty,0)$
$N=1$ $p=0$ $\Rightarrow$ κλειστό σύστημα ασταθές
τότε $Z=N+P=1$ ασταθής πόλος

Παράδειγμα

$$GF(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$



Οι δεξιόστροφες περιστροφές γύρω από το $(-1,0)$ είναι $N=1$
και οι πόλοι της $GF(s)$ στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο είναι $P=1$.

$N \neq -P$ Άρα το κλειστό σύστημα ασταθές

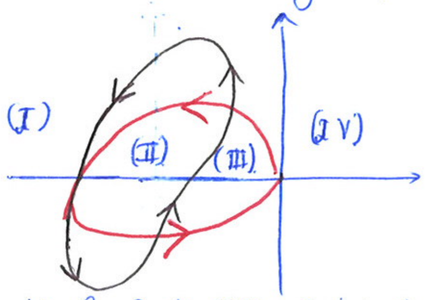
Οπότε $Z=N+P=2$ είναι οι πόλοι του κλειστού συστήματος στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο $\forall K$.

Παράδειγμα

Δίνεται $G(s) = \dfrac{-1}{s^4+2s^3+3s^2+4s+3{,}5}$

α) Ευστάθεια Routh για $G(s)$

β). Δίνεται το διάγραμμα Nyquist για $G(s)$



Να βρεθούν τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα.

(γ)

$K \in (-\infty, +\infty)$

Είναι ευσταθές καθώς αλλάζει το K?

ΛΥΣΗ

α)

s^4	1	3	3,5
s^3	2	4	0
s^2	1	3,5	
s	-3	0	
s^0	3,5		

Έχουμε 2 μεταβολές στην $1^η$ στήλη άρα και 2 ρίζες στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο

Χρησιμοποιήσαμε το Routh για το $G(s)$ δεν δίνεται σε παραγοντοποιημένη μορφή ώστε να βρούμε απ' ευθείας τους πόλους

(β)

Όταν ψάχνω σημεία τομής του διαγράμματος Nyquist με τους άξονες, καλύτερο είναι να γράφω την GF σε πραγματικό και φανταστικό μέρος αντί για πολική μορφή.

Έτσι βρίσκω τα σημεία που $Im(GF(s)) = 0$, επειδή όμως πρόκειται για σημεία που το Nyquist είναι το πολικό διάγραμμα:

$$G(j\omega) = \left[-\omega^4 - 3\omega^2 + 3{,}5\right] + j\omega\left(4 - 2\omega^2\right)$$

$$Im\, G(j\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega(4-2\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega = 0 \text{ η } \omega = \pm\sqrt{2}$$

Άρα τα εν λόγω σημεία είναι: $G(j0) = -\frac{1}{3{,}5} = -0.2857$

$$G(\pm j\sqrt{2}) = -0.667.$$

(γ)

Άντι να πάω σε κάθε μια από τις 4 περιοχές του διαγράμματος Nyquist και να βρω τις περιελίξεις γύρω από το $(-1,0)$, όταν μεταβάλλεται το K, μπορώ να πάρω διαστήματα για το K και να πάρω τις περιελίξεις γύρω από το νέο κρίσιμο, το $-1/K$.

Έτσι, Ⓘ $-\infty < -\frac{1}{K} < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 < K < 3/2$

$\left.\begin{matrix} N=0 \\ P=2 \end{matrix}\right\}$ Ασταθές
$Z = 2+0 = 2$ ασταθείς πόλους κλειστού

Ⓘ Ⓘ $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{K} < -\frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < K < \frac{7}{2}$

$\left.\begin{matrix} N=-2 \text{ (2 αριστερόστροφες περιστροφές)} \\ P=2 \end{matrix}\right\}$ $N=-P$
Γι' αυτά τα K το σύστημα ευσταθές

Ⓘ Ⓘ Ⓘ $-\frac{2}{7} < -\frac{1}{K} < 0 \Rightarrow K > 7/2.$

$\left.\begin{matrix} N=-1 \\ P=2. \end{matrix}\right\}$ $N \neq -P$ Ασταθές με $Z=1$ πόλο στο δεξιό μιγαδ. ημιεπίπεδο

ⒾⓋ $0 < -\frac{1}{K} < \infty \Rightarrow K < 0$

$\left.\begin{matrix} N=0 \\ P=2 \end{matrix}\right\}$ $N \neq -P$ Ασταθές με 2 πόλους το δεξιό μιγ. επίπεδο.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί ο μεταβατικός πίνακας κατάστασης: αν $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix} \qquad (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{-2}{s+2} & \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

Ελέγξιμο και Παρατηρήσιμο

$x_0 \rightarrow x_1$

Ελέγξιμο: Όταν μπορώ να μεταφέρω το σύστημα με εφαρμοσμένη είσοδο σε πεπερασμένο χρόνο σε ένα άλλο επιτρεπόμενο σημείο

Παρατηρήσιμο: η δυνατότητα ανακατασκευής (προσδιορισμού) της κατάστασης του συστήματος από τις διαθέσιμες μετρήσεις εξόδου

$$\dot{x} = \underset{(n\times n)}{A} x + \underset{(n\times m)}{B} u$$
$$y = \underset{(p\times n)}{C} x + \underset{(p\times n)}{D} u$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ

Για τον υπολογισμό του $A^{n-1}B$ κάνω $A \cdot \underbrace{A^{n-2}B}$ που είναι ο προηγούμενος που είχα υπολογίσει

Έστω ο πίνακας $\mathcal{C} = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$. Αν είναι τάξη n τότε είναι ελέγξιμο.

Έστω ο πίνακας $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$. Αν είναι τάξη n τότε είναι παρατηρήσιμο.

Παράδειγμα

1) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ a & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$. Είναι ελέγξιμο αυτό το σύστημα;

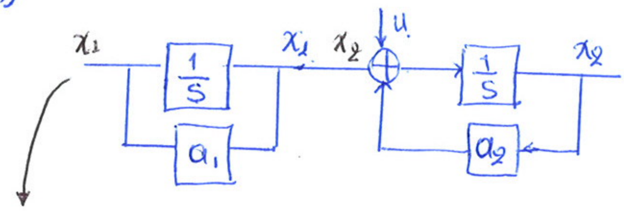
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & a \end{bmatrix} \qquad |\mathcal{C}| = a = \begin{cases} \text{ελέγξιμο } a \neq 0 \\ \text{μη ελέγξιμο } a = 0 \end{cases}$$

2) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ Είναι παρατηρήσιμο?

$y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$$ τάξη 1 → μη παρατηρήσιμο

3)



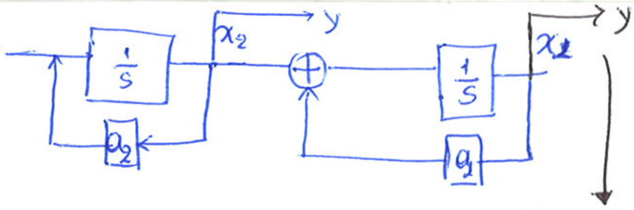
$$\dot{x}_1 = a_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + a_2 x_2 + u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}$$ τάξη 1 → μη ελέγξιμο

Αν η είσοδος είναι από αριστερά:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ τάξη 2 → ελέγξιμο

4)



$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ $c = [0\ 1]$

$\theta = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ = τάξη 1 → μη παρατηρήσιμο

Εάν η έξοδος μετακινηθεί στο 2ο υποσύστημα:

$c = [1\ 0]$ $\theta = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix}$ τάξη 2 → παρατηρήσιμο

$S^{-1}S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $S^{-1}e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ιδιοδιάνυσμα της λ_1

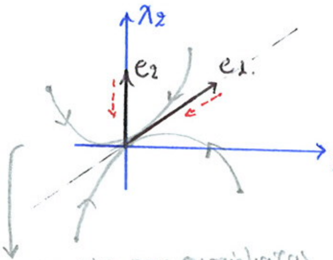
$\dot{x} = Ax$, $x = e^{At}x_0 = S\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} S^{-1} a e_1 = aS\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix} = a e^{\lambda_1 t} e_1 = e^{\lambda_1 t} x_0$, x_0

Παράδειγμα

$\dot{x} = Ax + bu$ $x(0) = x_0$
$y = Cx$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$ $C = [k_1\ k_2]$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = -2$
Ιδιοδιανύσματα: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



η πορεία του συστήματος είναι εφαπτόμενη στο αργότερο ιδιοδιάνυσμα

Μη παρατηρήσιμο αν $C = [1, -1]$ κάθετο προς το e_1.
Μια είσοδος κατά μήκος ενός ιδιοδιανύσματος θα παράγει κίνηση μόνο στην διεύθυνση αυτού του ιδιοδιανύσματος. Άρα αν $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ τότε μη ελέγξιμο.

Έστω $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ τότε $G(s) = c(sI - A)^{-1} b = (k_1\ k_2)\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{k_1(s+2) + k_2}{(s+1)(s+2)}$

Εάν $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ → μη παρατηρήσιμο $G(s) = \frac{1}{s+2}$ Ένας από τους πόλους εξαφανίστηκε.
Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς "κρύβει" τμήμα του συστήματος

Έστω $b = \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$, $C = [0, 1]$

$G(s) = \frac{k_3 + k_4(s+1)}{(s+1)(s+2)}$

Εάν όπως εξετάσαμε $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ή $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ έχουμε απαλειφή πόλου-μηδενικού.

Σε σύστημα μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο ή και τα δύο τότε έχουμε απαλειφή πόλου-μηδενικού και η ΣΜ κρύβει τμήμα του συστήματος

Έστω $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, θέτω $x = Sx^*$, S αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ $S\dot{x}^* = ASx^* + Bu$, $y = CSx^*$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = S^{-1}ASx^* + S^{-1}Bu \\ y = CSx^* = C^*x^* \end{cases}$$

(A,B) ελέγξιμο $\Rightarrow$ $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ τάξη n. Τότε $[S^{-1}B, S^{-1}ASS^{-1}B, \ldots S^{-1}A^{n-1}SS^{-1}B]$ τάξη n

$S^{-1}[B, AB, \ldots A^{n}B]$ τάξη n $\Rightarrow$ $[B^*, A^*B^*, \ldots, A^{*\,n-1}B^*]$ τάξη n

Άρα: $(A\ B)$ ελέγξιμο $\Leftrightarrow$ $(A^*\ B^*)$ ελέγξιμο

$(A\ C)$ παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow$ $(A^*\ C^*)$ παρατηρήσιμο

Παράδειγμα (Μια είσοδος: $B^* = b^* - S b^*$ ← διαγωνοπ.)

$$\dot{x}^* = \Lambda_\delta x^* + b^* u$$

Πίνακας ελεγξιμότητας: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b_1^* & \lambda_1 b_1^* & \lambda_1^2 b_1^* & \dots & \lambda_1^{v-1} b_1^* \\ b_2^* & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2^* & & \lambda_2^{v-1} b_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^* & \lambda_v b_v^* & \lambda_v^2 b_v^* & & \lambda_v^{v-1} b_v^* \end{bmatrix}$

Για να είναι ο $\mathcal{C}$ πλήρους τάξης (ήτα αντιστρέψιμος) πρέπει:

1) $b_i \neq 0 \quad \forall i \in (1, n)$
2) λ_i όχι επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές

Παράδειγμα (Πολλαπλή ιδιοτιμή ο A, αλλά επιδέχεται διαγωνοποίηση)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{bmatrix} u$$

Πίνακας ελεγξ: $\mathcal{C} = [b, Ab] = \begin{bmatrix} b_1^* & a b_1^* \\ b_2^* & a b_2^* \end{bmatrix}$ τάξη 1.

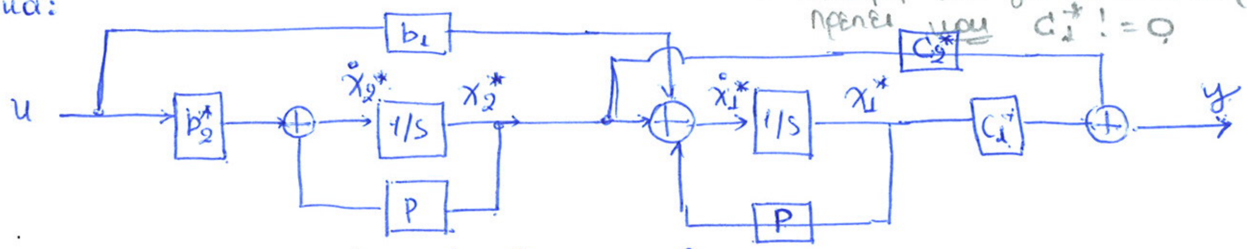
Μορφή Jordan: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{bmatrix} u$

$$y = [c_1^*\ c_2^*] \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

Πρακτικά ο παρακάτω κανόνας εφαρμόζεται ως εξής. Πρέπει για να είναι ελέγξιμο το σύστημα $b_2 != 0$

Έχω έναν υποπίνακα Jordan για κάθε ιδιοτιμή και για να είναι παρατηρήσιμο πρέπει και $c_1^* != 0$

Σχηματικά:



$$|\mathcal{C}| = |(b^*, A^* b^*)| = \begin{vmatrix} b_1^* & p b_1^* + b_2^* \\ b_2^* & p b_2^* \end{vmatrix} = -b_2^{*2}$$

Ελέγξιμο είναι όταν $b_2^* \neq 0$ (ανεξάρτητα από το b_1^*)

$$|c^{*T}\ A^{*T} c^{*T}| = \begin{vmatrix} c_1^* & p c_1^* \\ c_2^* & c_1^* + p c_2^* \end{vmatrix} = c_1^{*2}$$

Παρατηρήσιμο όταν $c_1^* \neq 0$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\\ \dot x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0&0\\0&-2&1&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\5&0\\0&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

είναι στοιχεία που αντιστοιχούν στην τελευταία γραμμή των 2 υποπιν. Jordan και για να είναι ελέγξιμο πρέπει να είναι μη μηδενικά

$$y=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

αντιστοιχούν στις πρώτες στήλες των υποπινάκων Jordan και πρέπει να είναι μη μηδενικά για να είναι παρατηρήσιμο.

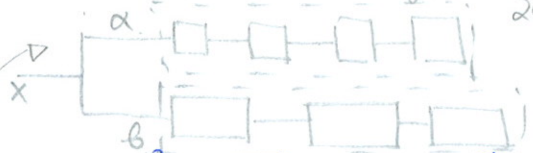
Χρησιμοποιούμε τον εξής κανόνα:

Στη μορφή Jordan (περιλαμβάνει και διαγώνια) το διάνυσμα κατάστασης είναι $\left\{\begin{matrix}\text{ελέγξιμο}\\ \text{παρατηρήσιμο}\end{matrix}\right\}$ εάν υπάρχει ένας μόνο υποπίνακας Jordan για κάθε ξεχωριστή ιδιοτιμή, και τα στοιχεία της $\left\{\begin{matrix}\text{γραμμής του } S^{-1}B=B^*\\ \text{στήλης του } CS=C^*\end{matrix}\right\}$ που αντιστοιχούν στην $\left\{\begin{matrix}\text{τελευταία γραμμή}\\ \text{πρώτη στήλη}\end{matrix}\right\}$ του κάθε υποπίνακα Jordan δεν είναι όλα μηδέν.

Για πολλαπλούς πίνακες Jordan για την ίδια ιδιοτιμή εάν μεν είναι μιας εισόδου είναι μη ελέγξιμο

Αν είναι μιας εισόδου και έχει πολλαπλ. ιδιοτιμές είναι μη ελέγξιμο

Το σύστημα αυτό περιγράφεται από το εξής γράφημα:



Συνεπώς για να είναι ελέγξιμο κ παρατηρήσιμο πρέπει κάθε ένα από τα υποσυστήματα να είναι ελέγξιμο κ παρατηρήσιμο

Παράδειγμα (Σπάνια Περίπτωση: πολλαπλών Jordan για την ίδια ιδιοτιμή)

$$\dot x=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&&&&&\\&\lambda_1&&&&&\\&&\lambda_1&&&&\\&&&\lambda_1&&&\\&&&&\lambda_2&1&0\\&&&&&\lambda_2&1\\&&&&0&&\lambda_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}1&1&2&0&0&2&0\\1&0&1&2&0&1&1\\1&0&2&3&0&2&2\end{bmatrix}x$$

μη παρατηρήσιμο

μη μηδενικό άρα ελέγξιμο

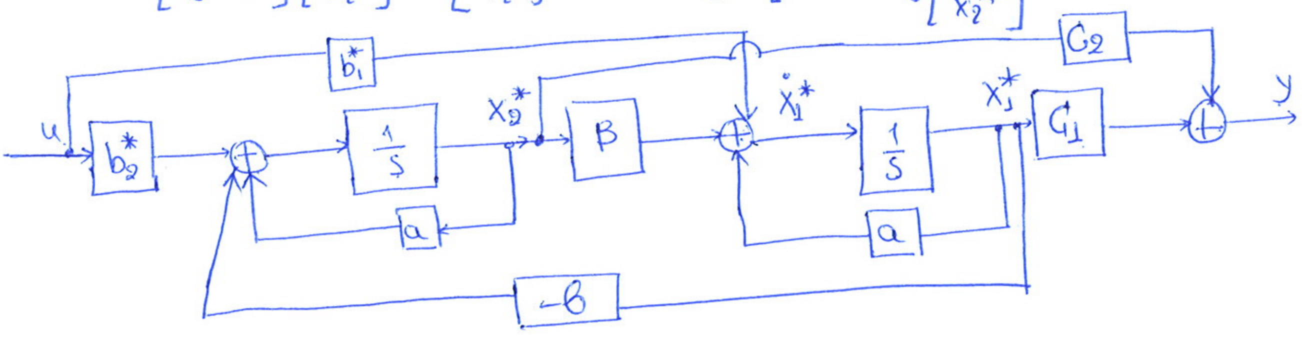
γραμμικά ανεξάρτητα και μη μηδ. για να είναι παρατηρήσιμο

αντιστοιχούν στις τελευταίες γραμμές των υποπινάκων Jordan και πρέπει να είναι γραμμ. ανεξ. για να είναι ελέγξιμο

Το σύστημα αυτό χωρίζεται σε δύο υποσυστήματα Jordan. Για να είναι συνολικά το σύστημα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο πρέπει να είναι και τα δύο. Καθένα από αυτά τα υποσυστήματα έχει ανάδραση την ιδιοτιμή του.

Παράδειγμα (Μιγαδικές Ιδιοτιμές)

$$\begin{bmatrix}\dot x_1^*\\ \dot x_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}c_1, & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}\qquad b>0$$



$$|P| = \begin{vmatrix} b_1 & ab_1 + \beta b_2 \\ b_2 & -\beta b_1 + ab_2 \end{vmatrix} = -\beta\left(b_1^{*2} + b_2^{*2}\right)$$

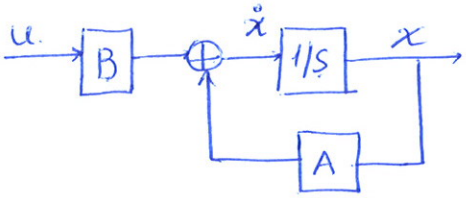
Ελέγξιμο είναι όταν b_1 ή το b_2 ή και τα δύο είναι $\neq 0$

$$|\Theta| = \left|C^T A^T C^T\right| = \begin{vmatrix} c_1 & \alpha c_1 - \beta c_2 \\ c_2 & \beta c_1 + \alpha c_2 \end{vmatrix} = \beta\left(c_1^2 + c_2^2\right)$$

Παρατηρίσιμο όταν το c_1 ή το c_2 ή και τα δύο είναι $\neq 0$

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

{ Ιδιοτιμές == πόλοι }



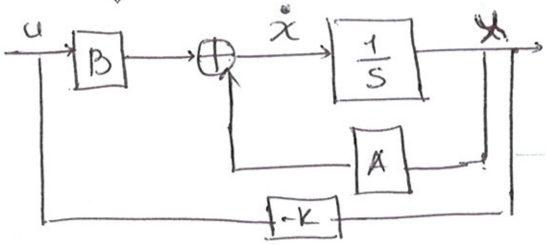
$\dot{x} = Ax + Bu$ { (A, B) ελέγξιμο, ιδιοτιμές του A όχι ικανοποιητικές }

$u = -kx$, k: η τιμή του καθορίζεται από το πόσο καλό κι γρήγορο είναι το controller στο σύστημα.

Μπορώ να μετατοπίσω ιδιοτιμές από το δεξί στο αριστερό μιγ. επίπεδο. Με αποτέλεσμα το σύστημα από ασταθές να γίνεται ευσταθές. Αυτό γίνεται μέσω **ανάδρασης** κατάστασης. Πρώτα σε ένα σύστημα για να ελέγξω το feedback αλλά και να βάλω το σωστό πρέπει το σύστημα να είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο ώστε να μπορώ να ελέγξω το σύστημα (δηλαδή αν μπορώ να επέμβω στο σύστημα) αλλά και να παρατηρήσω.

$\dot{x} = Ax + B(-kx) = Ax - Bkx \Rightarrow$

$\boxed{\dot{x} = (A - BK)\cdot x}$: Η εξίσωση αυτή περιγράφει ένα καινούριο σύστημα του οποίου τις ιδιοτιμές δηλ. τους πόλους μπορώ να τους τοποθετήσω όπου εγώ θέλω



Θεωρείται εσωτερική ανάδραση του συστήματος

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Επιλογή του K: οι ιδιοτιμές του A-Bk σε επιθυμητές θέσεις. (πόλοι)

Παράδειγμα: Κατάλληλη μεθοδολογία για πίνακες 2x2 ή 3x3

$\dot{x} = Ax + Bu$ με $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

αρχικοί πόλοι: -5, -0,5, -0,64

Παράδειγμα: Για να είναι πιο γρήγορο από το e^{-3t} πρέπει οι πόλοι (ιδιοτιμές) του συστήματος να είναι πιο αριστερά από το -3.

Επιθυμητοί πόλοι: $s = -2+4j$ $s = -10$

Επιθυμητή χ.ε: $(s+2-4j)(s+2+4j)(s+10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0$ (1)

Εδώ $\mathcal{C} = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ $|\mathcal{C}| = -1$, τάξη 3 ⇒ ελέγξιμο

$|sI - A + BK| = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \; k_2 \; k_3] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k_1 & 5+k_2 & s+6+k_3 \end{vmatrix}$

$= s^3 + (6+k_2)s^2 + (5+k_2)s + 1 + k_1 = 0$

Λόγω (1) ⇒ $\begin{cases} 6+k_3 = 14 \\ 5+k_2 = 60 \\ \quad = 200 \end{cases}$ ⇒ $k_3 = 8$, $k_2 = 55$, $k_1 = 8$ $k = [199 \;\; 55 \;\; 8]$

Παρατηρήσεις:

1) Όταν βάζω μιγαδικό πόλο ως επιθυμητό τότε πρέπει να προσθέτω και τον συζυγή του στους επιθυμητούς πόλους

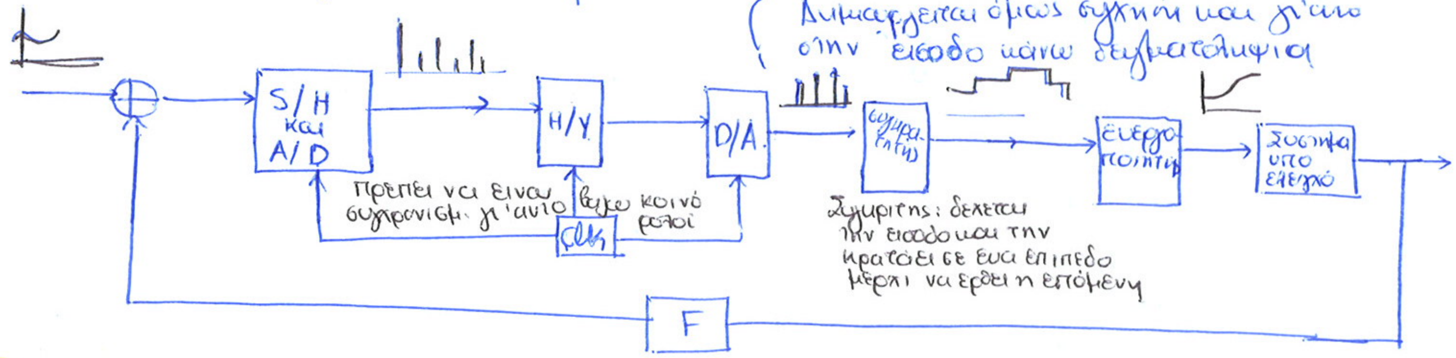
2) Όταν προκύπτει σύστημα μη ελέγξιμο τότε δουλεύουμε μήπως κάποιος υπόχωρος του χώρου κατάστασης είναι ελέγξιμος.
Αν κατά την μεταφορά ενός πόλου σε ένα επιθυμητό σημείο βρεθεί (κατά την επίλυση) ίδιο k δηλ. $k_1 = 80$ $k_1 = 50$ τότε το σημείο δεν μπορεί να μεταφερθεί.

Ελέγξιμο : για τοποθέτηση πόλων μέσω ανάδρασης κατάστασης

ΔΙΑΚΡΙΤΑ - ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Συστήματα κλειστού βρόχου με ελεγκτή Η/Υ.

Πλέον υπάρχουν ψηφιακοί ελεγκτές και τοποθετούνται σε συνεχή συστήματα. Δημιουργείται όμως σύγχυση και γι'αυτό στην είσοδο κάνω δειγματοληψία



Μετασχηματισμός Ζ

Δίνεται το $x(t)$ από το οποίο προκύπτει το $x[kT]$ $k=0,1,2,\ldots$ (από δειγματοληψία) ή δίδεται το $x[k]$ (ακολουθία αριθμών.)

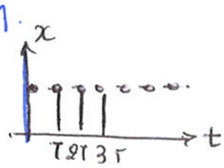
$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x[kT]] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \ldots$$

Για ακολουθία αριθμών $x[k]$: $X(z) = \mathcal{Z}[x[k]] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$

Παράδειγμα

1) Μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z|>1$$

Ιδιότητες

1) $x(k) = af(k) + bg(k)$, $X(z) = aF(z) + bG(z)$ Γραμμικότητα

2) $\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}X(z)$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$$

$$\mathcal{Z}[x(k+2)] = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$$

3) Θεώρημα Τελικής Τιμής.

Εάν η $(1-z^{-1})X(z)$ δεν έχει πόλο εκτός ή επάνω στον μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$ τότε το $\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$ ή

{αν έχω ακολουθία $\lim_{k\to\infty} x(kT) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$ }

Παράδειγμα

Να βρεθεί η τελ. τιμή $x(\infty)$ του : $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-a}}$ $a>0$

Είναι $x(\infty) = \lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}\right](1-z^{-1}) = \lim_{z\to 1}\left(1 - \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}e^{-aT}}\right) = 1.$

Αντιστροφος Μετασχηματισμος Z^{-1}

Μας δίνει μοναδικό $x(k)$ αλλά όχι $x(t)$ (Αυτό γιατί μεταξύ των διακριτών τιμών παρεμβάλλονται πραγματικές τιμές που μπορούν να αντιστοιχούν για διάφορες $x(t)$)

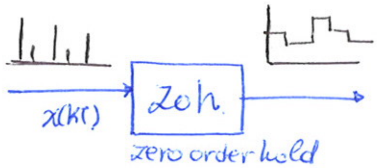
Παράδειγμα

$$X(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

Να βρεθεί το $x(kT)$

Είναι $\frac{X(z)}{z} = \frac{1-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})} \Rightarrow \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = X(z) \overset{Z^{-1}}{\Rightarrow} x(kT) = 1-e^{-akT}$, $k=0,1,2,\dots$

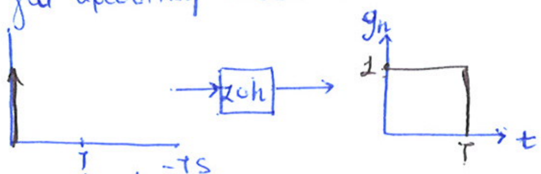
Συγκρατητής Μηδενικής Τάξης



Σημείωση: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$

και για κρουστική είσοδο $Y(s) = G(s)$

Στο zoh:



$$g_h(t) = 1(t) - 1(t-T) \Rightarrow \frac{1-e^{-Ts}}{s} = G_h(s)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΤΟΝ ΟΡΟ $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$

$$X(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s) = \frac{G(s)}{s} - e^{-Ts}\frac{G(s)}{s} = G_1(s) - e^{-Ts}G_1(s)$$

$$x(t) = g_1(t) - g_1(t-T)$$

$$X(z) = G_1(z) - z^{-1}G_1(z) = (1-z^{-1})G_1(z) = (1-z^{-1})\underbrace{Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$$

Άρα $\boxed{X(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$

με αυτό εννοούμε το εξής: μετατρέπουμε το $G(s)/s$ στο πεδίο του χρόνου, το δειγματοληπτούμε και έπειτα το αποτέλεσμα το μετασχηματίζουμε κατά Z.

Παράδειγμα

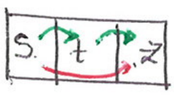
$X(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s+1}$. Να βρω τον μετασχ. Z του $X(z)$

Χρησιμοποιώ τον τύπο: $X(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] =$

$$= (1-z^{-1})\left(Z\left[\frac{1}{s}\right] - Z\left[\frac{1}{s+1}\right]\right) = (1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

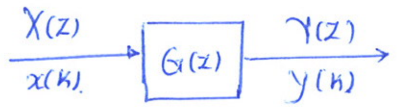
ΠΡΟΣΟΧΗ!!

Ουσιαστικά έχω το εξής:



Αντί δηλαδή να ακολουθήσω το πράσινο βέλος και να κάνω L^{-1}, δειγμ. και Z πάω κατ' ευθείαν με χρήση πινάκων από το $L \to Z$

Συνάρτηση Μεταφοράς Διακριτού Χρόνου:



$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Bigg|_{\text{μηδενικές αρχ. συνθ.}}$$

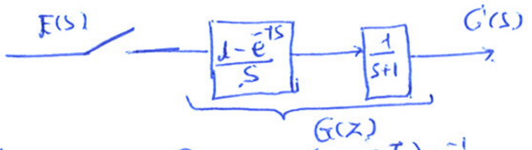
$Y(z) = G(z)\cdot X(z)$

Έστω $x(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$ $\quad X(z) = 1$

τότε $Y(z) = G(z)$

Παράδειγμα

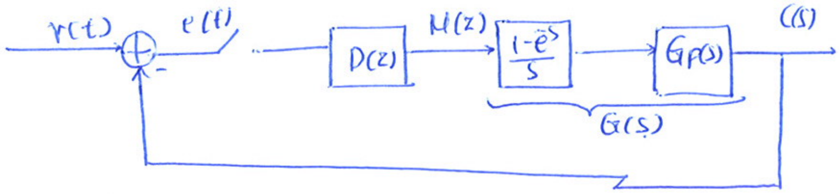
Να βρεθεί το $C(z)$ αν $e(t) = u(t)$



Από πριν $G(z) = \dfrac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$

$$C(z) = G(z)E(z) = G(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \Rightarrow c(kT) = 1 - e^{-kT}$$

Παράδειγμα



$$\left.\begin{aligned} M(z) &= D(z)E(z) \\ E(s) &= R(s) - C(z) \\ C(z) &= G(z)M(z) \end{aligned}\right\}$$

$$C(z) = G(z)D(z)E(z) = G(z)D(z)\big(R(z) - C(z)\big)$$
$$= G(z)D(z)R(z) - G(z)D(z)C(z) \Rightarrow$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)D(z)}{1+G(z)D(z)} \Bigg\} \text{ συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου}$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση: $1 + G(z)D(z) = 0$

Οι ρίζες είναι οι πόλοι.

Στα διακριτά συστήματα ο μοναδιαίος κύκλος είναι ότι ο jω άξονας για τα συνεχή συστήματα και το εσωτερικό του μ.κ. αντιστοιχεί στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

Για BIBO αν είναι οι πόλοι στον μοναδιαίο πάνω → ασταθές

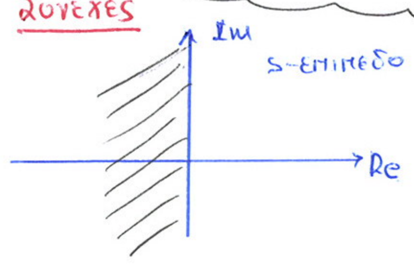
Για Lyapunov: στον κύκλο εσωτ. → ασυμπτ. ευσταθ.
πάνω στο όριο του κύκλου → οριακά ευσ.
εκτός κύκλου → ασταθές

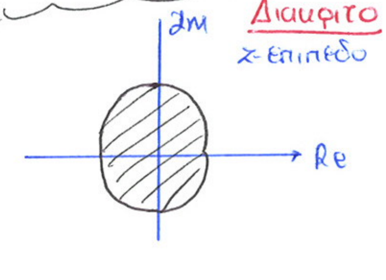
Παράδειγμα: $f(t) = e^{-at}, \; t>0$

$\mathcal{L}$: $F(s) = \dfrac{1}{s+a}$ πόλος $s=-a$

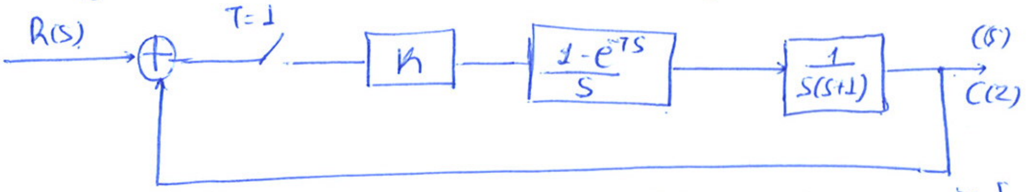
$\mathcal{Z}$: $F(z) = \mathcal{Z}[e^{-akT}] = \dfrac{z}{z-e^{-aT}}$ πόλος στο $z = e^{-aT}$

Γενικά, τα ισοδύναμα χαρακτηριστικά στο z-επίπεδο σχετίζονται με αυτά στο s-επίπεδο με την εξίσωση $z = e^{Ts}$ όπου T είναι η περίοδος δειγματοληψίας





Παράδειγμα: Να προσδιορίσετε η ευστάθεια για $K=1$



$$G(s) = \frac{1-e^{-TS}}{S} \cdot \frac{1}{S(S+1)} \qquad G(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{S^2(S+1)}\right] = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{-1}{S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S+1}\right] =$$

$$= \frac{0.3679z + 0.2640}{(z-0.3679)(z-1)} = G(z)$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K\,G(z)}{1+K\,G(z)}$$

Χαρακτηριστική εξ.: $1 + K G(s) = 0$

Για $K=1$ $\quad z^2 - z + 0.6321 = 0 \qquad z_{1,2} = 0.5 \pm j\,0.681$ και $|z_1| = |z_2| < 1$.

Άρα το σύστημα είναι ευστaθές.

Κριτήριο Routh για Διακριτά Συστήματα

Αρχικά κάνω διγραμμικό μετασχ. από το επίπεδο z στο επίπεδο w.

Χρησιμοποιώ το $z = \dfrac{w+1}{w-1}$. $\quad w = \sigma + j\omega$

Είναι $\underset{\text{εσωτ. μον κύκλου}}{|z|<1} \Rightarrow \left|\dfrac{w+1}{w-1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{\sigma+j\omega+1}{\sigma+j\omega-1}\right| < 1 \Rightarrow \dfrac{(\sigma+1)^2+\omega^2}{(\sigma-1)^2+\omega^2} < 1 \Rightarrow (\sigma+1)^2 + \omega^2 < (\sigma-1)^2 + \omega^2$

$\sigma^2 + 2\sigma + 1 < \sigma^2 - 2\sigma + 1 \Rightarrow \sigma < -\sigma \Rightarrow \underline{\sigma < 0}$ ~ αριστερό μιγαδ. επίπεδο

Προσοχή!!
Το w-επίπεδο ΔΕΝ είναι S-επίπεδο

Παράδειγμα

$q(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.024 = 0$

Είναι το κλειστό σύστημα του οποίου η $q(z)$ είναι η χ.ε. ευσταθές;

α) Βρίσκω ρίζες και αποφασίζω εάν $|z_i| < 0$ (δύσκολος)

β) Θέτω $z = \dfrac{w+1}{w-1}$ Άρα: $\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right)^3 - 1.3\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0.08\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right) + 0.024 = 0 \Rightarrow \ldots$

$w^3 - 7{,}571w^2 - 36.43w - 14.14 = 0$

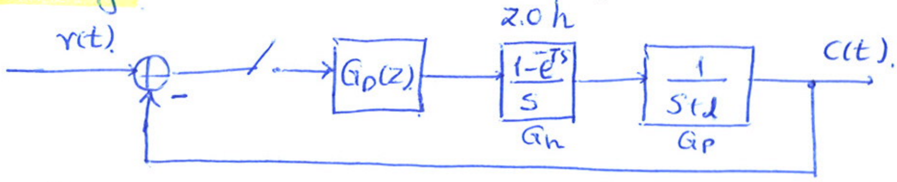
w^3	1	-36.43
w^2	-7.571	-14.14
w^1	-38.30	0
w^0	-14,14	

Δηλαδή μια ρίζα στο δεξιό μιγαδικό w-ημιεπίπεδο άρα μια ρίζα εκτός μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο. Σύστημα ασταθές.

Μπορούσαμε να πούμε κατ' ευθείαν ότι το σύστημα θα είναι ασταθές αφού έχουμε ετερόσημα πρόσημα στην χ.ε.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

Παράδειγμα (ΠΡΟΣΟΧΗ!!) Να δω παράδειγμα όπου το οριακό σημείο δεν δίνεται



$G_D(z) = k\frac{z}{z-1},\ k>0$

α) Να σχεδιαστεί ο γτρ για $T=0.5s$
β) Να βρεθεί η οριακή τιμή του k

ΛΥΣΗ

Ξεκινάμε από την συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού για να βγάλουμε συμπεράσματα για το κλειστό σύστημα.

γνωστά κλάσματα

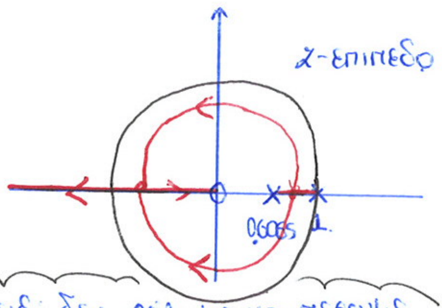
Είναι $Z[G_h G_P] = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s+1}\right\} = (1-z^{-1})\,Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$

Άρα $G(z) = k\cdot\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$

T=0.5

χ.ε: $1+G(z)=0 \Rightarrow 1+k\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}=0 \Longrightarrow G(z)=\frac{0.3935kz}{(z-1)(z-0.6065)}$

παρονομαστής σ.μ. κλειστού βρόχου



Τα 5 πρώτα βήματα του συνεχούς γτρ ισχύουν και στον διακριτό γτρ.
6. Τόποι στον άξονα των πραγματικών
8. Σημεία θλάσης

$k = \frac{-(z-1)(z-0.6065)}{0.3935z}$

$\frac{dk}{dz}=0 \Rightarrow -\frac{z^2-0.6065}{0.3935z^2}=0 \Rightarrow z^2=0.6065 \Rightarrow$

Επειδή δεν θέλουμε να πέσουμε σε αστάθεια επιλέγουμε k που να δίνουν σημεία εντός του μοναδιαίου κύκλου

$z = \begin{cases}0.7788\\-0.7788\end{cases}$ και προκύπτουν $k=0.1244$

μόνο για αυτό το σημείο.

Δεν χρησιμοποιούμε ποτέ την συνθήκη μέτρου διότι αυτή πάντα δίνει θετικό k.

και $k=8.041$ με αντικατάσταση στην χ.ε αντίστοιχα και οι δύο τιμές είναι αποδεκτές

ΣΟ: $\left|\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}\right| = \frac{1}{k} \overset{0.5}{=} \left|\frac{0.3935z}{(z-1)(z-0.6065)}\right|$

Όταν έχουμε 2 πόλους και 1 μηδενικό τότε ο γτρ είναι κύκλος με κέντρο το μηδενικό και ακτίνα που καθορίζεται από τους πόλους

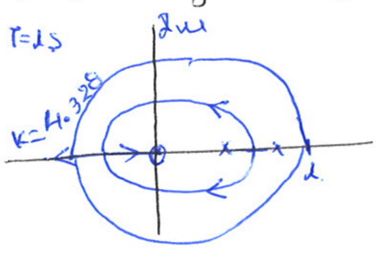
και για $z=-1$ $k=8.165$

το οριακό σημείο του μοναδιαίου κύκλου.

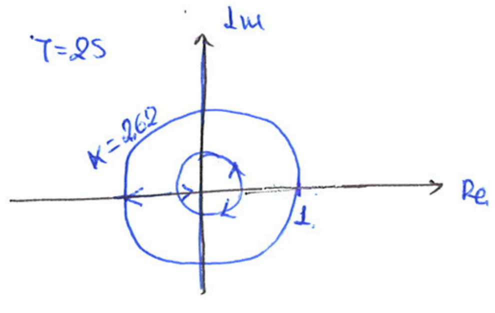
Αν δεν είχα το σημείο θα χρησιμοποιούσα Routh για να βρω το οριακό K και έπειτα θα βρω το σημείο.

Παρατήρηση

Αν κάνω πιο αργή δειγματοληψία τότε για μικρότερο k βγαίνω έξω από τον γ.τ.ρ.
πχ.



Άρα δηλαδή η ευστάθεια του συστήματος εξαρτάται από τον ρυθμό δειγματοληψίας. T



Παρατήρηση: Ο ρυθμός δειγμ. T επηρεάζει την μεταβατική απόκριση, το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση, το ελέγξιμο και το παρατηρήσιμο

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

- Εξισώσεις διαφορών
- Συναρτήσεις μεταφοράς
- Χώρος Κατάστασης
- Κρουστική Απόκριση

Εξίσωση διαφορών ⟶ Χώρος Κατάστασης

Παράδειγμα

$$y(k+2) - 1.7y(k+1) + 0.72y(k) = u(k) \Rightarrow y(k+2) = 1.7y(k+1) - 0.72y(k) + u(k)$$

Ορίζουμε $x_1(k) = y(k)$

$x_2(k) = y(k+1)$

Άρα

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -0.72x_1(k) + 1.7x_2(k) + u(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.72 & 1.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

και $y(k) = x_1(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Παίρνουμε Μ/Σ Ζ με μηδενικές αρχ. συνθήκες

$$y[k+2] - 1.7y[k+1] + 0.72y[k] = u[k] \xleftrightarrow{Z.T} z^2Y(z) - 1.7zY(z) + 0.72Y(z) = U(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.7z + 0.72}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ⟶ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Εύκολα με την ακριβώς αντίστροφη διαδικασία

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ⟶ ΧΩΡΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Π.χ. $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2 + 1.3z + 0.4}$

- Κανονική Ελέγξιμη μορφή:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} \end{cases}$$

▶ Κανονική Παρατηρήσιμη Μορφή:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,4 \\ 1 & -1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} \end{cases}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!

Η συνάρτηση μεταφοράς αφορά το ελέγξιμο και παρατηρήσιμο τμήμα του συστήματος (λόγω του πιθανού φαινομένου απλοποίησης πόλων - μηδενικών κατά την κατασκευή της) κι επομένως όταν δίνεται μπορώ να μετατρέπω κατά το δοκούν σε κανονική ελέγξιμη ή κανονική παρατηρήσιμη μορφή.
Αν, δε, λέει ότι δίνεται χωρίς απλοποίηση πόλων - μηδενικών, τότε εννοεί ότι το συνολικό σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.
Για πλήρη ανάλυση απαιτείται διάσπαση kalman.

ΧΩΡΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ⟶ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

$$\begin{cases} x[k+1] = A x[k] + B u[k] \\ y[k] = C x[k] + D u[k] \end{cases} \xRightarrow{ZT} \begin{cases} z X(z) - z \vec{x}(0) = A X(z) + B U(z) \\ Y(z) = C X(z) + D U(z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (zI - A) X(z) = B U(z) + z \vec{x}(0) \\ Y(z) = C X(z) + D U(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(z) = (zI-A)^{-1} B U(z) + (zI-A)^{-1} z \vec{x}(0) \\ Y(z) = C (zI-A)^{-1} B U(z) + D U(z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X(z) = (zI-A)^{-1} B U(z) \\ \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \left[C (zI-A)^{-1} B + D \right] \end{cases} \qquad \boxed{\dfrac{Y(z)}{U(z)} = C (zI-A)^{-1} B + D}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ k b_1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = 0$$

ΛΥΣΗ

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & z + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 + a_1 z} \begin{bmatrix} z + a_1 & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = C (zI - A)^{-1} B + D = \frac{1}{z^2 + a_1 z} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z + a_1 & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 b \end{bmatrix} = \frac{k b_1}{z^2 + a_1 z}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

$$x[k+1] = A x[k] + B u[k]$$

$k=0$: $x[1] = A x[0] + B u[0]$

$k=1$: $x[2] = A x[1] + B u[1] = A\left[A x[0] + B u[0]\right] + B u[1]$

$k=2$: $x[3] = A x[2] + B u[2] = A\left[A(A x[0] + B u[0]) + B u[1]\right] + B u[2]$

$= A^3 x[0] + A^2 B u[0] + A B u[1] + B u[2]$

$k = k-1$: $x[k] = A x[k-1] + B u[k-1] = A^k x[0] + A^{k-1} B u[0] + A^{k-2} B u[1] + \dots + B u[k-1]$

$$\Rightarrow x[k] = \underbrace{A^k x[0]}_{\text{εξαρτάται από αρχική συνθήκη. zero input response}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u[j]}_{\text{εξαναγκασμένη (εξαρτάται από είσοδο) zero state response}}$$

A^k : μεταβατικός πίνακας κατάστασης για τα ψηφιακά συστήματα.

Άρα αν μπορώ να υπολογίσω γρήγορα τον A^k τότε μπορώ να υπολογίσω οποιαδήποτε κατάσταση όσο μεγάλη και να είναι

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ Z

δεν διώχνω το $x(0)$ διότι τώρα δεν θέλω να υπολογίσω Σ.Μ που θέλει α.σ $=0$

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \xrightarrow{Z} z X(z) - z x(0) = A X(z) + B U(z) \Rightarrow$$

$$(zI - A) X(z) = z x(0) + B U(z) \Rightarrow X(z) = (zI-A)^{-1} z x(0) + (zI-A)^{-1} B U(z) \Rightarrow$$

$$x[k] = Z^{-1}\left[(zI-A)^{-1} z x(0) + (zI-A)^{-1} B U(z)\right] = Z^{-1}\left[(zI-A)^{-1} z x(0)\right] + Z^{-1}\left[(zI-A)^{-1} B U(z)\right]$$

$$= \underbrace{Z^{-1}\left[(zI-A)^{-1} z\right]}_{A^k} x(0) + Z^{-1}\left[(zI-A)^{-1} B U(z)\right]$$

$$\boxed{A^k = Z^{-1}\left\{(zI-A)^{-1} z\right\}[k]}$$

Παράδειγμα

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad \text{με} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0]$$

$$y(k) = C x(k)$$

Να βρεθεί το $x(k)$ όταν η είσοδος είναι $u(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

$$A^k = Z^{-1}\left[(zI-A)^{-1} z\right]$$

(?)

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4/3}{z+0.2} + \frac{-1/3}{z+0.8} & \frac{5/3}{z+0.2} + \frac{-5/3}{z+0.8} \\ \frac{-\frac{0.8}{3}}{z+0.2} + \frac{\frac{0.8}{3}}{z+0.8} & \frac{-1/3}{z+0.2} + \frac{4/3}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

$$(zI-A)^{-1} z = \begin{bmatrix} \frac{4/3\, z}{z+0.2} + \frac{-1/3\, z}{z+0.8} & \frac{5/3\, z}{z+0.2} + \frac{-5/3\, z}{z+0.8} \\ \frac{-0.8/3\, z}{z+0.2} + \frac{0.8/3\, z}{z+0.8} & \frac{-1/3\, z}{z+0.2} + \frac{4/3\, z}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[(zI-A)^{-1}z\right] = \mathcal{Z}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\frac{z}{z+0.2}-\frac{1}{3}\frac{z}{z+0.8} & \frac{5}{3}\frac{z}{z+0.2}-\frac{5}{3}\frac{z}{z+0.8} \\ -\frac{0.8}{3}\frac{z}{z+0.2}+\frac{0.8}{3}\frac{z}{z+0.8} & -\frac{1}{3}\frac{z}{z+0.2}+\frac{4}{3}\frac{z}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0.2)^k-\frac{1}{3}(-0.8)^k & \frac{5}{3}(-0.2)^k-\frac{5}{3}(-0.8)^k \\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^k+\frac{0.8}{3}(-0.8)^k & -\frac{1}{3}(-0.2)^k+\frac{4}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

Από πρίν : $X(z) = (zI-A)^{-1}z\,x(0) + (zI-A)^{-1}BU(z)$ ①

$= (zI-A)^{-1}\left[z\,x(0)+BU(z)\right]$ όπου $U(z)=\frac{z}{z-1}$

Είναι $z\,x(0)+BU(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} \\ \frac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$ ②

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow$ $X(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z^2+z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\ \frac{z(-z^2+1.8z)}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{απλά κλάσματα}}$

$$x(k) = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{22}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18} \\ \frac{31}{6}(-0.2)^k-\frac{17.6}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

εδώ πρέπει να μου βγαν οι ρίζες της ορίζουσας του $(zI-A)$

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ A^k ΜΕΣΩ "ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗΣ"

$S^{-1}AS=\Lambda \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1}$

$A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^2 S^{-1}$

Γενικά : $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

Εξετάζαμε όλες τις περιπτώσεις που αναπτύξαμε στα συνεχή.

1. Διαγώνια Μορφή

$A_\delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \ddots \end{bmatrix}$ $\quad A_\delta^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \ddots \end{bmatrix}$

2. Μορφή Jordan

$A_J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\quad A_J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$ $k\lambda^{k-1}$ $\frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2}$ $\ldots$ $\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+2)}{(m-1)!}\lambda^{k-m+1}$

3. Μιγαδική Μορφή

$A_\mu = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\quad A_\mu^k = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$ $\quad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

Παράδειγμα

Να επιλυθεί το $x[k+1] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix} x[k]$ $\quad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ

Είναι $x(k) = A^k x(0)$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -0.2 \quad \lambda_2 = 0.5 \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^k = S \Lambda_\delta S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} \lambda_1^k + 6\lambda_2^k & -2\lambda_1^k + 2\lambda_2^k \\ -3\lambda_1^k + 3\lambda_2^k & 6\lambda_1^k + \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

Οπότε: $x(k) = A^k x_0 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} \lambda_1^k + 6\lambda_2^k \\ -3\lambda_1^k + 3\lambda_2^k \end{bmatrix}$

ΕΛΕΓΞΙΜΟ κ' ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟ

Έστω $\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Ορισμός: Το Σ είναι ελέγξιμο όταν για $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει πεπερασμένο $N > 0$ και ακολουθία ελέγχων $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ τέτοια ώστε $x(N) = \xi$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το (A, B) είναι ελέγξιμο ανν $\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ έχει τάξη n.

Παράδειγμα

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί ακολουθία ελέγχων (αν υπάρχει) που οδηγεί το Σ στο $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

Αρχικά θα εξετάσω αν το σύστημα μου είναι ελέγξιμο.

Παίρνω τον πίνακα ελεγξιμότητας: $\mathcal{C} = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ τάξης 2 άρα ελέγξιμο.

Είναι $x(1) = Ax(0) + Bu(0)$

$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A(A\cancel{x(0)}^{0} + Bu(0)) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$

$$= [B, BA]\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) \\ u(0) + u(1) \end{bmatrix}}_{2\times 1}$$

Αν $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(0) + u(1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = 1 \\ u(1) = 0.2 \end{cases}$

Το σύστημα θα φτάσει στην επιθ. κατάσταση σε δύο επαναλήψεις γι τότε το σύστημα είναι επιλύσιμο. Δεν θα μπορούσε να πάει σε περισσότερες γι τότε το σύστημα δεν θα επιλύοταν.

Ορισμός: Το Σ (ή (A,C)) είναι παρατηρήσιμο αν $\exists$ πεπερασμένο $N>0$: γνώση των εισόδων $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ και των εξόδων $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$ είναι ικανή να προσδιορίσει την αρχική κατάσταση $x(0)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το AC είναι παρατηρήσιμο ανν $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ είναι τάξη n

Παράδειγμα

$u(k)=0 \ \forall k$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} y(0)=1 \\ y(1)=1,2 \end{matrix}$

Μπορεί να βρεθεί η αρχική συνθήκη?

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $y(0) = C x(0)$

$y(1) = C x(1) = CA x(0)$

Πίνακας παρατηρησιμότητας: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ τάξης 2 άρα παρατηρήσιμο

Όμως $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_1(0)+x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

Μπορεί να επιλυθεί μόνο αν $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ είναι πλήρους τάξης δηλ. το Σ είναι παρατηρήσιμο

$\begin{cases} x_2(0) = 1 \\ x_1(0) = 0.2 \end{cases}$ Άρα $x(0) = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ΓΕΝΙΚΑ: Ισχύουν για τα διακριτά όσον αφορά το ελέγξιμο και το παρατηρήσιμο ό,τι είπαμε και για τα συνεχή.

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ ΕΛΕΓΞΙΜΟΥ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΥ

$S_1 \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

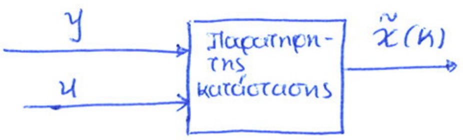
Δυικό σύστημα του S_1: $\hat{S}_1 \begin{cases} \hat{x}(k+1) = A^T \hat{x}(k) + C^T \hat{u}(k) \\ \hat{y}(k) = B^T \hat{x}(k) \end{cases}$

Αν το $S_1 \begin{Bmatrix} \text{ελέγξιμο} \\ \text{παρατηρήσιμο} \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \hat{S}_1 \begin{Bmatrix} \text{παρατηρήσιμο} \\ \text{ελέγξιμο} \end{Bmatrix}$

▶ S_1 ελέγξιμο $\Rightarrow$ τάξη $[B, AB, \dots A^{n-1}B] = n =$ τάξη $[B, AB, \dots, A^{n-1}]^T = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow S_2$ παρατηρήσιμο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ



Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να γίνει "παρατήρηση" της κατάστασης είναι το αρχικό σύστημα να είναι παρατηρήσιμο.

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ (1) ελέγξιμο, παρατηρήσιμο   A, B, C γνωστά
$y(k) = Cx(k)$ αλλά δεν είναι γνωστό/μετρήσιμο το state

$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + Bu(k)$ (2)
$\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k)$ (Σ_2)

Αφού A, B, C γνωστά μπορώ να τα βάλω σε προσομοίωση (Simulink, Matlab) και βρίσκω το state μέσα από αυτό. (όχι όμως το πραγματικό)

- Εάν το $x(0) = \tilde{x}(0) \Rightarrow \tilde{x}(k) = x(k)$
- Εάν το $x(0) != \tilde{x}(0)$ $e(k) = x(k) - \tilde{x}(k) \overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} x(k+1) - \tilde{x}(k+1) = A(x(k) - \tilde{x}(k))$

$\Rightarrow \dot{e}(k) = Ae(k)$

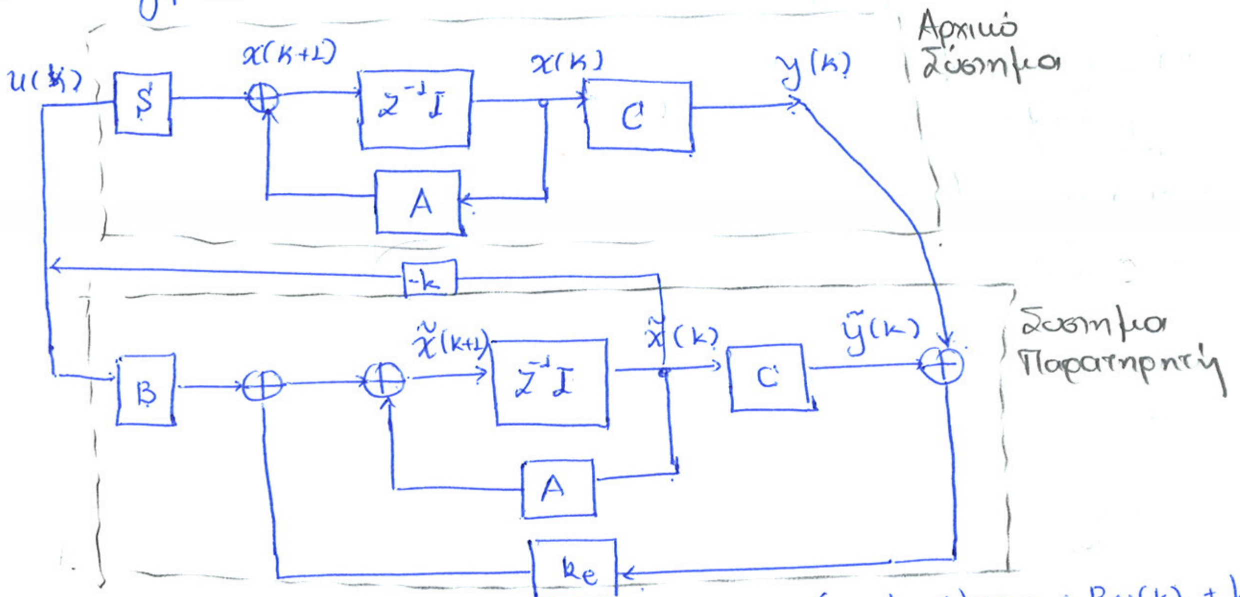
Αν A ευσταθής $\Rightarrow e(k) \to 0 \Rightarrow \tilde{x}(k) \to x(k)$

Συμπεριφορά με συγκεκριμένο A όχι ικανοποιητική ή ο A ασταθής επιτάσσει αλλαγή του δυναμικού μοντέλου Σ_2

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
$y(k) = Cx(k)$ $\Big\}\ \Sigma_I$ το Σ_1 ελέγξιμο κ' παρατηρήσιμο, $x(0)$ δεν είναι γνωστό ή μετρήσιμο

$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + Bu(k)$
$\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k)$ $\Big\}\ \Sigma_{II}$

Κάνουμε αλλαγή του Σ_2



Οπότε: $\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + Bu(k) + k_e(y(k) - \tilde{y}(k)) = (A - k_eC)x(k) + Bu(k) + k_e y(k)$

$x(k+1) - \tilde{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} - (A - k_eC)\tilde{x}(k) - \cancel{Bu(k)} - k_e y(k)$

$= (A - k_eC)x(k) - (A - k_eC)\tilde{x}(k) = (A - k_eC)(x(k) - \tilde{x}(k)) \Rightarrow$

$e(k+1) = (A - k_e C) e(k)$ ενω ειχαμε $e(k+1) = A e(k)$

εδω ουσιαστικα μετατοπιζουμε τις ιδιοτιμές του A (τοποθετηση πόλων στον παρατηρητή)

αν ειναι "καλές" το θα σμικρύνει γρήγορα οποτε το σφάλμα θα ειναι πλησιαζει στο

Επομένως, το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται στις ιδιοτιμές του $A - k_e C$ που ειναι ίδιες με τις ιδιοτιμές $A^T - C^T k_e^T$

Απο δυικοτητα: $(\Sigma_1) = (S_1)$ παρατηρισιμο $\Leftrightarrow$ S_2 ελεγξιμο.

Εφοσον το δυικο $A^T - C^T k_e^T$ ειναι ελέγξιμο μπορω να κανω τοποθετηση πόλων οπου εγω θελω. Όμως οι πολοι $A - k_e C$ ταυτιζονται με $A^T - C^T k_e^T$ οποτε μπορω να πάω τους πόλους του παρατηρισημου οπου θελω ωστε να μηδενισω το σφάλμα.

Με το S_2 ελέγξιμο υπάρχει δυνατότητα να τοποθετηθούν αυθαίρετα οι ιδιοτιμές του $A^T - C^T k_e^T$ με κατάλληλη επιλογή του $k_{δικ}$. Εαν τότε $k_e = k_{δυικ}$ έχουμε αυθαιρετες ιδιοτιμές για τον παρατηρητή (E_1)

ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

$$x(k+1) = A x(k) - BK\tilde{x}(k) = (A - BK) x(k) + BK(x(k) - \tilde{x}(k))$$

$$= (A - BK) x(k) + BK e(k)$$

Είναι γνωστό ότι $e(k+1) = (A - k_e C) e(k)$ $\Big\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - k_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$

$$\chi\varepsilon: \begin{vmatrix} zI - A + BK & -BK \\ 0 & zI - A + k_e C \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow |zI - A + BK| \cdot |zI - A + k_e C| = 0$$

θα βρω ενα k που βαζει τους πόλους στις επιθυμ θέσεις

θα βρω ενα k που βαζει τους πολους σε επιθυμ θέση.

Οι πόλοι του κλειστού συστήματος με ανατροφοδότηση της εκτίμησης $\tilde{x}(k)$ αποτελουνται από τους πόλους που προκυπτουν από την μετατοπιση των ιδιοτιμων του αρχικού συστήματος και τους πόλους από τον σχεδιασμό του παρατηρητή.

Η Αρχή του Διαχωρισμού μας λέει οτι τα δύο προβλήματα (παρατηρητή και αρχικού συστήματος) μπορούν να λυθούν το ένα ανεξάρτητα από το άλλο.

Παράδειγμα

Να τοποθετηθούν οι ζητούμενοι πόλοι $0,5 \pm j0.5$. δηλ να βρω ένα k, να κάνω ανάδρα-
ση κλπ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & +1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

$$C = [\,b \;\; Ab\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$ τάξη 2 ⇒ ελέγξιμο το αρχικό σύστημα

Επιθυμητή χ.ε : $(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5) = z^2 - z + 0.5 = 0$

Παίρνουμε : $|zI - A + Bk| = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \; k_2] \right| =$

χ.ε συστήματος που θέλω

$$= \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 + k_1 & z + 1 + k_2 \end{vmatrix} = z^2 + (1+k_2)z + 0.16 + k_1$$

Εξισώνουμε συντελεστές ομοιοβαθμίων όρων : $\begin{cases} 0.16 + k_1 = 0.5 \\ 1 + k_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0.34 \\ k_2 = -2 \end{cases}$

$$k = [k_1 \; k_2] = [0.34 \;\; -2]$$

Δεν υπάρχει στα συνεχή.
Η κατάσταση θα πάει στο 0 σε (το πολύ) n βήματα όπου n η τάξη του συστήματος
Για να το πετύχω αυτό κάνω deadbeat όπως παρατηρήσεις

Παράδειγμα (deadbeat = μηδενορυθμικός)

Επιθυμητή χ.ε $z^2 = 0$

μεταφέρω τους δύο πόλους στο 0

Από σύγκριση : $\begin{cases} 1 + k_2 = 0 \\ 0.16 + k_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = -1 \\ k_1 = -0.16 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0.16 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Έστω $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύει ότι σε δύο βήματα πάει στο 0

Παράδειγμα

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(k) = C x(k) \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(γι αυτό αναζητούμε k_e)

Να βρεθεί ο παρατηρητής πλήρους τάξης
(ουσιαστικά να επιλεγεί ο k_e αν οι επιθυμητές ιδιοτιμές του παρατηρητή είναι $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.5$)

Για παρατηρησιμότητα: $\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ τάξη 2 παρατηρήσιμο

Άρα το δυϊκό θα είναι:

Το δυϊκό είναι: $\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A^T \hat{x}(k) + C^T u(k) \\ \hat{y}(k) = B^T \hat{x}(k) \end{cases}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \quad . \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα είχαμε $\underline{k} = \begin{bmatrix} 0.34 & -2 \end{bmatrix}$

Άρα $k_e = k^T = \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix}$