Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

2η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο: Λιαροκάπης Αλέξανδρος
Αριθμός Μητρώου: 03114860

Άσκηση 1

Ένα αιτιακό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{(1 - 0.6z^{-2})}$$

(α) Βρείτε εκφράσεις για ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_1(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$$

(β) Βρείτε εκφράσεις για ένα διαφορετικό σύστημα ελάχιστης φάσης $H_2(z)$ και ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{lin}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_2(z)H_{lin}(z)$$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{(1 - 0.64z^{-2})} \\
&= \frac{4(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(z^{-2} + \frac{1}{2})}{(1 - 0.69z^{-2})} \\
&= \frac{4(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(z^{-1} + \frac{1}{2}j)(z^{-1} - \frac{1}{2}j)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1}j)} \\
&= \left(\frac{4(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1}j)(1 + \frac{1}{2}z^{-1}j)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}\right)\left(\frac{(z^{-1} - \frac{1}{2}j)(z^{-1} + \frac{1}{2}j)}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1}j)(1 + \frac{1}{2}z^{-1}j)}\right) \\
&= H_1(z)H_{ap}(z)
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{(1 - 0.64z^{-2})} \\
&= \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 4z^{-2})(4 + z^{-2})}{(1 - 0.64z^{-2})(4 + z^{-2})} \\
&= \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 4z^{-2})(4 + z^{-2})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(4 + z^{-2})} \\
&= \left(\frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(4 + z^{-2})}\right)(4 + 17z^{-2} + 4z^{-4}) \\
&= H_2(z)H_{lin}(z)
\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Προβλήματα 3.4 απο βιβλίο, σελ 120-121.

Λύση

(α)

$$
\begin{aligned}
r_x(k) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \Rightarrow \\
R_x(e^{j\omega}) &= \frac{1-\frac{1}{2}^2}{1-cos\omega+\frac{1}{2}^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+\frac{1}{4}} \Rightarrow \\
R_x(z) &= \frac{3}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}(z+z^{-1})+\frac{1}{4})} = \frac{3}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})}
\end{aligned}
$$

(β)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} &\leftrightarrow \frac{\frac{8}{9}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)} \Rightarrow \\
r_y(k) &= \frac{8}{9}\frac{3}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} = \frac{27}{32}\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|}
\end{aligned}
$$

(γ)

$$
Rxy(z) = R_x(z)H(z^{-1})
$$

(δ)

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(z) &= \frac{3}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\frac{(1-\frac{1}{2}z)}{(1-\frac{1}{3}z)} \\
&= \frac{3}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \\
&= \frac{3}{4}\frac{z^{-1}}{(z^{-1}-\frac{1}{3})} \\
&= \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{10}\frac{1}{z^{-1}-\frac{1}{3}} \Rightarrow \\
r_{xy}(k) &= \frac{9}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) + \frac{9}{10}3^{-k}u(-k-1)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3

Έστω ότι μας δίνεται μία στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 17\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{|k-1|} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{|k+1|}$$

(α) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z.

(β) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω.

(γ) Με φασματική παραγοντοιοποίηση του $P_x(z)$, να βρείτε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$ το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $u[n]$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας θα δώσει μία στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση.

Λύση

(α)

$$a^{|n|} \leftrightarrow \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)},\ |a|<1 \Rightarrow$$

$$R_x(z) = 17\frac{\frac{8}{9}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)} + 4\frac{\frac{8}{9}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)} + 4\frac{\frac{8}{9}z}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}$$

(β)

$$R_x(e^{j\omega}) = \frac{8}{9}\frac{(1+4e^{j\omega})(1+4e^{-j\omega})}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{j\omega})} = \frac{8}{9}\frac{17+8\cos\omega}{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos\omega} = 8\frac{17+8\cos\omega}{10-6\cos\omega}$$

(γ)

$$\begin{aligned} R_x(z) &= \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\frac{1+4z}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\frac{1+4z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z}\right) \\ &= M(z)M(z^{-1}), \\ M(z) &= z\frac{4\sqrt{8}}{3}\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = zH(z) \end{aligned}$$

Επειδή η $H(z)$ είναι συνάρτηση μεταφοράς ευσταθούς και αιτιακού συστήματος, επιλύθηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας όλες τις παρακάτω μεθόδους σχεδιάστε με το MATLAB εργαλείο fdatool:

(α) IIR με αναλογικό Butterworth.

(β) IIR με αναλογικό Chebyshev II.

(γ) IIR με αναλογικό Elliptic.

(δ) FIR με Kaiser window.

Αναπαραστήστε γραφικά το πλάτος, τη φάση και το group-delay στο $[0,1]\pi$ και γύρω από το transition band.

Λύση

Τα διαγράμματα παρατίθενται μαζί με την αναφορά.

Άσκηση 2.5

Συμπληρώστε τον πίνακα σύμφωνα με το δοθέν σύστημα.

Λύση

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x[n]$	0	1	2	4	8	9	7	5	3	0	0	0	0
$\widetilde{x}[n]$	0	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2
$d[n]$	0	0	0	1	4	4	1	-2	-3	-5	-4	-3	-2
$\widehat{d}[n]$	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$c[n]$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$\widehat{x}[n]$	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1