Θεωρία Γραφημάτων

3η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο: Λιαροκάπης Αλέξανδρος
Αριθμός Μητρώου: 03114860

Άσκηση 1

1. Για τα δέντρα με 2 κορυφές η σχέση ισχύει. Έστω πως ισχύει για όλα τα δέντρα k κορυφών. Για ένα οποιοδήποτε δέντρο $k+1$ κορυφών G, αφαιρώ ένα φύλλο l και παίρνω ένα δέντρο k κορυφών G'. Ονομάζουμε τον προσπίπτων l κόμβο ως t. Αν ο t είναι φύλλο τότε ο G δεν θα έχει περισσότερα φύλλα και η σχέση θα ισχύει και για τον G αφού η ακμή $t-l$ δεν αυξάνει τον αριθμό των κόμβων με βαθμό μεγαλύτερο του 2. Αν ο t δεν είναι φύλλο τότε λόγω της ακμής $t-l$ το t θα συνεισφέρει 1 περισσότερο στο άθροισμα, ενώ τα φύλλα θα αυξηθούν κατα ένα. Έτσι θα ισχύει η σχέση και στο G. Επομένως λόγω επαγωγής η σχέση θα ισχύει σε κάθε δέντρο με τουλάχιστον 2 κορυφές.

2. Η σχέση προκύπτει απευθείας παραγοντοποιώντας τους βαθμούς στο άθροισμα μαζί με το ότι το n_1 είναι ίσο με τον αριθμό των φύλλων.

Άσκηση 3

Κανένα φύλλο δε θα εμφανιστεί στον κώδικα Prufer αφού δεν εμφανίζεται στον αναδρομικό υπολογισμό. Όλες οι κορυφές βαθμού n θα πρέπει να εμφανιστούν $n-1$ φορές πριν γίνουν φύλλα των γράφων των αναδρομικών υπολογισμών. Έτσι άμα υπάρχει κορυφή βαθμού 3 και πάνω, θα εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές στον κώδικα Prufer. Επομένως οι κώδικες Prufer χωρίς διπλές κορυφές αντιπροσωπεύουν δέντρα - γραμμές με βαθμούς το πολύ 2. Η σχέση προκύπτει απο το γεγονός πως υπάρχουν $\frac{n(n-1)}{2}$ διακριτές τέτοιες γραμμές άμα λάβουμε υπόψιν τις συμμετρίες.

Άσκηση 4

Ένα δέντρο θα έχει τα ελάχιστα σε αριθμό διακριτά μονοπάτια αν οι κορυφές ζυγού βαθμού δεν αποτελούν άκρα μονοπατιού και οι κορυφές περιττού βαθμού αποτελούν άκρα διακριτού μονοπατιού (διαφορετικά μπορούμε να ενώσουμε δύο διαφορετικά μονοπάτια). Η σχέση επομένως θα ισχύει για απλά δέντρα αφού με $2k$ άκρα διακριτών μονοπατιών πρέπει να υπάρχουν k διακριτά μονοπάτια στο δέντρο. Έστω πως ένα δάσος έχει $2k$ περιττού βαθμού κορυφές και n συνιστώσες. Κάθε συνιστώσα ως δέντρο πρέπει να έχει τουλάχιστον 2 κορυφές περιττού βαθμού. Ενώνω ανα ζεύγη κορυφές περιττού βαθμού διαφορετικών συνιστωσών μέχρι να μείνει ένα δέντρο. Το δέντρο αυτό θα έχει $2k - 2(n-1) = 2(k-n+1)$ περιττές κορυφές και όπως αποδείχτηκε παραπάνω θα έχει τουλάχιστον $k-n+1$ διακριτά μονοπάτια. Το αρχικό δάσος αντί για το μονοπάτι που ενώνει τις παραπάνω συνιστώσες θα έχει τα n μονοπάτια που μαζί με τις προστεθόμενες ακμές το αποτελούν. Έτσι θα έχει $(k-n+1) - 1 + n = k$ μονοπάτια και επομένως θα ισχύει η σχέση.

Άσκηση 5

Έστω μία κορυφή x και δύο γείτονές του y, z. Έστω πως τα y και z έχουν n και m άλλους γείτονες αντίστοιχα. Τότε θα ισχύει $s(y) \geq s(x) - n + m + 1,\ s(z) \geq s(x) - m + n + 1$. Και επομένως $s(y) + s(z) \geq 2s(x) + 2 \Rightarrow s(y) + s(z) > 2s(x)$.

Άσκηση 6

Αρχικά, απο την προηγούμενη άσκηση γίνεται φανερό πως η μεγαλύτερη βαρυκεντρότητα θα ανοίκει σε φύλλο (διαφορετικά θα υπήρχε μία γειτονική κορυφή με μεγαλύτερη βαρυκεντρότητα). Έπειτα θα δείξουμε πως από κάθε γράφο συγκεκριμένων κορυφών, το δέντρο-γραμμή έχει την κορυφή με την μεγαλύτερη βαρυκεντρότητα. Για 2 κορυφές προφανώς ισχύει. Έστω πως ισχύει για k κορυφές. Έστω γράφος G με $k+1$ κορυφές, φύλλο με τη μεγαλύτερη βαρυκεντρότητα l και γείτονάς του t. Θα πρέπει να ισχύει πως $s(l,G) = s(t,G/l) + |V(G/l)|$. Επομένως ο γράφος με τη μεγαλύτερη βαρυκεντρότητα θα είναι αυτός που μεγιστοποιεί τον όρο $s(t,G/l)$ το οποίο θα συμβαίνει όταν ο t είναι το ένα ακρο του δέντρου-γραμμής k κορυφών. Επομένως ο γράφος $k+1$ με τη μεγαλύτερη βαρυκεντρότητα θα είναι και αυτός δέντρο-γραμμή. Λόγω επαγωγής αποδείχτηκε το παραπάνω. Για ένα γράφο-γραμμή n κορυφών θα ισχύει πως η βαρυκεντρότητα του φύλλου θα είναι ίση με $\binom{n}{2}$. Οποιαδήποτε άλλη κορυφή θα έχει μικρότερη βαρυκεντρότητα.