

Διακριτές Μέθοδοι Για Την Επιστήμη Των Υπολογιστών
3η Σειρά Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο: Λιαροκάπης Αλέξανδρος
Αριθμός Μητρώου: 03114860



Θέμα 1

Θεωρούμε 100 επιβάτες του προαστιακού, οι οποίοι έχουν επιβιβαστεί στο Αεροδρόμιο, και αποβιβάζονται σε κάποιους από τους επόμενους 12 σταθμούς (σε κάθε σταθμό αποβιβάζονται κανέναν ή περισσότεροι επιβάτες). Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό:

- (1) Αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες δεν είναι διακεκριμένοι.
- (2) Αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι διακεκριμένοι, και δεν παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης;
- (3) Αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι διακεκριμένοι, και παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης.
- (4) Αν θεωρήσουμε ότι οι επιβάτες είναι 45 άντρες και 55 γυναίκες, ότι τόσο οι άντρες μεταξύ τους όσο και οι γυναίκες μεταξύ τους δεν είναι διακεκριμένοι, και ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης ανδρών και γυναικών;
- (5) Αν θεωρήσουμε ότι και στο (4), με τη μόνη διαφορά ότι τώρα παίζει ρόλο η σειρά αποβίβασης ανδρών και γυναικών;
- (6) Πόσοι είναι οι τρόποι αποβίβασης για τα ερωτήματα (1), (2) και (3), αν σε κάθε σταθμό κατεβαίνει τουλάχιστον ένας επιβάτης;

Λύση

- (1) Μετράμε τρόπους να χωρέσουν 100 ίδια αντικείμενα (επιβάτες) σε 12 θέσεις (σταθμούς). Αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{100+12-1}{12} = \binom{111}{12}$ τρόπους.
- (2) Σε κάθε άνθρωπο από τους 100 μπορώ να αντιστοιχίσω 12 θέσεις. Άρα οι τρόποι να αποβιβαστούν οι επιβάτες είναι 12^{100} .
- (3) Μετράμε τρόπους να χωρέσουν 100 διακεκριμένα αντικείμενα (επιβάτες) σε 12 θέσεις (σταθμούς) με τη διάταξη των αντικειμένων στην ίδια θέση να παίζει ρόλο. Υπάρχουν $\frac{(100+12-1)!}{(12-1)!} = \frac{111!}{11!}$ τρόποι να συμβεί αυτό.
- (4) Το πρόβλημα ανάγεται στα ανεξάρτητα προβλήματα του να μετρήσουμε τους τρόπους αποβίβασης των γυναικών και των ανδρών. Το κάθε πρόβλημα ανάγεται στο να χωρέσουμε 55/45 άντρες/γυναίκες σε 12 θέσεις. Άρα οι τρόποι αποβίβασης είναι $\binom{55+12-1}{55} \binom{45+12-1}{45} = \binom{66}{55} \binom{56}{45}$.
- (5) Μετράμε τρόπους να μοιραστούν 100 θέσεις σε δύο ομάδες των 45 ανδρών και 55 γυναικών. Οι τρόποι να αποβιβαστούν οι επιβάτες είναι $\frac{100!}{45!55!}$.
- (6) Για το (1) μετράμε τρόπους να τοποθετήσουμε 100 ίδια αντικείμενα (επιβάτες) σε 12 θέσεις (στάσεις) με κάθε στάση να έχει τουλάχιστον 1 αντικείμενο. Το πρόβλημα είναι αντίστοιχο με το να τοποθετήσουμε ένα από τα αντικείμενα σε κάθε θέση και να μετρήσουμε τους τρόπους που χωράνε τα υπόλοιπα 88 αντικείμενα στις 12 θέσεις. Άρα οι τρόποι αποβίβασης είναι $\binom{12+88-1}{12} = \binom{99}{12}$. Για το (2) ψάχνουμε αναδιατάξεις 100 διακεκριμένων αντικειμένων (επιβάτες) σε 12 διακεκριμένες θέσεις με κάθε θέση να παίρνει τουλάχιστον ένα αντικείμενο. Η Γ.Σ είναι η $(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)^{12} = (e^x - 1)^{12}$ της οποίας ο όρος $\frac{x^{100}}{100!}$ έχει συντελεστή $\sum_{i=0}^{12} (-1)^i \binom{12}{i} (12-i)^{100}$. Για το (3) ψάχνουμε τις αναδιατάξεις 100 διακεκριμένων αντικειμένων σε 12 διακεκριμένες θέσεις που παίζει ρόλο η σειρά. Για κάθε αναδιάταξη το πρόβλημα ανάγεται στο να τοποθετήσω 100 ίδια άτομα σε 12 θέσεις. Άρα οι τρόποι αποβίβασης είναι $\binom{100+12-1}{12} 100! = \binom{111}{12} 100!$.

Θέμα 2

Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P , την οποία ερμηνεύουμε σε σύνολο A με n (διακεκριμένα) στοιχεία. Να υπολογίσετε το πλήθος των διαφορετικών διμελών σχέσεων στο A οι οποίες (ως ερμηνεία του P) ικανοποιούν τις παρακάτω προτάσεις:

- (1) $\forall x P(x, x) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$
- (2) $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y)$
- (3) $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x, y) \vee P(y, x))$

Λύση

- (1) Το πλήθος των διμελών σχέσεων είναι ίσο με το πλήθος των συμμετρικών προς τη διαγώνιο πινάκων με διαγώνιο απο τιμές 1. Ανάγεται στο πλήθος των συνδυασμών απο 0 και 1 στις $\frac{n(n-1)}{2}$ θέσεις που βρίσκονται κάτω/πάνω από τη διαγώνιο. Άρα $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ πιθανές διμελές σχέσεις.
- (2) Σε ένα πίνακα γειτνίασης υπάρχουν 3 πιθανές τιμές κάθε ένα από τα $\frac{n(n-1)}{2}$ ζεύγη $(P(x, y), P(y, x))$. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στα ανεξάρτητα προβλήματα της εύρεσης των συνδυασμών στις θέσεις της διαγωνίου και των συνδυασμών των παραπάνω ζευγών. Άρα οι διμελές σχέσεις είναι $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Θέμα 3

- (α) Ένα μάθημα παρακολουθείται από 500 φοιτητές και διδάσκεται σε 4 τμήματα από 4 διαφορετικούς καθηγητές (κάθε καθηγητής αναλαμβάνει ένα τμήμα εξόλοκληρου και μπορεί να διαφοροποιηθεί ως προς τον τρόπο εξέτασης). Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να χωριστούν οι φοιτητές σε τμήματα, αν κάθε τμήμα πρέπει να έχει τουλάχιστον 50 και το πολύ 200 φοιτητές και:
1. οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται στα τμήματα.
 2. οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται στα τμήματα.
- (β) Να υπολογίσετε το πλήθος των τετραδικών συμβολοσειρών μήκους $n \geq 1$ στις οποίες το ψηφίο 0 εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, το ψηφίο 1 έχει άρτιο πλήθος εμφανίσεων και το ψηφίο 2 έχει περιττό πλήθος εμφανίσεων (δεν έχουμε περιορισμούς για το πλήθος των εμφανίσεων του ψηφίου 3).

Λύση

- (α) Για το 1 η Γ.Σ είναι η $(\frac{x^{50}}{50!} + \frac{x^{51}}{51!} + \frac{x^{52}}{52!} + \dots + \frac{x^{200}}{200!})^4$ και μας ενδιαφέρει ο συντελεστής του $\frac{x^{500}}{500!}$. Για το 2 η Γ.Σ είναι η $(x^{50} + x^{51} + x^{52} + \dots + x^{200})^4$ και μας ενδιαφέρει ο συντελεστής του $\frac{x^{500}}{500!}$.
- (β) Η Γ.Σ είναι η $(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots)(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots)$ και μας ενδιαφέρει ο συντελεστής του x^n .

Θέμα 4

- (1) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα ακριβώς k φοιτητές να απαντήσουν σωστά.
- (2) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα το πολύ k φοιτητές να απαντήσουν σωστά.

Λύση

- (1) Η Γ.Σ είναι η $((1 - p_1) + p_1 x)((1 - p_2) + p_2 x) \dots ((1 - p_n) + p_n)$ και μας ενδιαφέρει ο συντελεστής του x^k .
- (2) Η ακολουθία που προκύπτει για κάθε i είναι το άθροισμα όλων των συντελεστών των όρων της παραπάνω ακολουθίας μέχρι τον όρο i . Άρα η Γ.Σ είναι $\frac{((1-p_1)+p_1x)((1-p_2)+p_2x)\dots((1-p_n)+p_n)}{1-x}$ και ο συντελεστής που μας ενδιαφέρει είναι του x^k

Θέμα 5

Θεωρούμε μία σχολή ΗΜΜΥ με 200 εγγεγραμμένους φοιτητές σε καθένα απο τα 5 έτη σπουδών (άρα έχουμε 1000 φοιτητές συνολικά). Στα πλαίσια μίας διαφημιστικής εκστρατείας, έχουμε 300 (ίδια) κόκκινα και 700 (ίδια) πράσινα μπλουζάκια, τα οποία θα μοιράσουμε στους φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει ένα μπλουζάκι.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα μπλουζάκια:

1. αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.
2. αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι, και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.

(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τα μπλουζάκια, να σε κάθε έτος πρέπει να μοιράσουμε τουλάχιστον δύο και συνολικά άρτιο πλήθος απο κόκκινα και από πράσινα μπλουζάκια, και:

1. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι, και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.
2. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.

(γ) Με αμιγώς συνδυαστικά επιχειρήματα, να δείξετε ότι οι συντελεστές των όρων x^{400} και x^{600} στο ανάπτυγμα της $A(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{200})^5$ είναι ίσοι.

Λύση

(α) Το πρόβλημα ανάγεται στο να βρούμε τους συνδυασμούς 1000 αντικειμένων (φοιτητών) τα οποία χωρίζονται σε δύο όμοιες ομάδες των 300 και των 700. Άρα μπορούμε να μοιράσουμε τα μπλουζάκια με $\frac{1000!}{700!300!}$ τρόπους.