Σήματα και Συστήματα

3η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο: Λιαροκάπης Αλέξανδρος
Αριθμός Μητρώου: 03114860

Άσκηση 1

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathscr{Z}$ και παρουσιάστε την περιοχή σύγκλισης (ROC) του μετασχηματισμού σε κάθε περίπτωση.

(1) $x_1[n] = \frac{u[n-1]}{n}$

(2) $x_2[n] = nu[n] + (2N-2n)u[n-(N+1)] - (2N-n)u[n-(2N+1)]$
χρησιμοποιώντας το $z[n] = u[n] - u[n-N]$

(4) $x_4[n] = |n|2^{-|n|}$

(5) $x_5[n] = n(n+1)(n+2)3^{-n}u[n]$

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμός $\mathscr{Z}$ των:

(1) $W_1(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{z^{-1}-2}, |z| > \dfrac{1}{2}$
Μέθοδος: Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

(2) $X_1(z) = \sin(z)$, ROC περιέχει $\{|z|=1\}, X_2(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}, z \neq 0, X_3(z) = \ln(1-2z), |z| < \frac{1}{2}$
Μέθοδος: Δυναμοσειρά

(3) $Y_1(z) = \dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$, όπου $y[n]$ ευσταθές σήμα.
$Y_2(z) = \dfrac{2z^4}{(-2+z)(-1+z)^2(-1+2z)}, |z| > 2$
Μέθοδος: Ανάλυση κλασμάτων

(4) $Z_1(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \dfrac{1}{3}, Z_2(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \dfrac{1}{3}$
Μέθοδος: Επαναλαμβανόμενη διαίρεση

Λύση

Μετασχηματισμοί $\mathscr{Z}$

(1) Γνωρίζουμε πως,

$$x_1[n] = \frac{u[n-1]}{n}$$

Επίσης έχουμε,

$$\frac{d\ln(1-x)}{dx} = -\frac{1}{1-x}$$
$$\frac{d\ln(1-x)}{dx} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$
$$\ln(1-x) = -\int \sum_{k=0}^{\infty} x^k \, dx + C, \quad |x| < 1$$
$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \, dx, \quad (C = 0 \text{ για } x = 0)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \mathscr{Z}\left\{x_1[n]\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k-1}}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}}{k+1} \\ &= ln\left(1-\frac{1}{z}\right), \quad \text{ROC: } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1 \end{aligned}$$

(2) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned} x_2[n] &= nu[n] + 2Nu[n-(N+1)] - 2nu[n-(N+1)] - 2Nu[n-(2N+1)] + nu[n-(2N+1)] \\ &= nu[n] + 2Nu[n-(N+1)] - 2(n+(N+1)-(N+1))u[n-(N+1)] \\ &\quad - 2Nu[n-(2N+1)] + (n+(2N+1)-(2N+1))u[n-(2N+1)] \\ &= nu[n] + 2Nu[n-(N+1)] - 2(n-(N+1))u[n-(N+1)] - 2(N+1)u[n-(N+1)] \\ &\quad - 2Nu[n-(2N+1)] + (n-(2N+1))u[n-(2N+1)] + (2N+1)u[n-(2N+1)] \\ &= nu[n] - 2u[n-(N+1)] - 2(n-(N+1))u[n-(N+1)] \\ &\quad + (n-(2N+1))u[n-(2N+1)] + u[n-(2N+1)] \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left\{u[n]\right\} &= \frac{z}{z-1}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \\ \mathscr{Z}\left\{nu[n]\right\} &= \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \\ \mathscr{Z}\left\{u[n-k]\right\} &= z^{-k}\frac{z}{z-1}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \\ \mathscr{Z}\left\{(n-k)u[n-k]\right\} &= z^{-k}\frac{z}{(z-1)^2}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left\{x_2[n]\right\} &= \mathscr{Z}\left\{nu[n]\right\} - 2\mathscr{Z}\left\{u[n-(N+1)]\right\} - 2\mathscr{Z}\left\{(n-(N+1))u[n-(N+1)]\right\} \\ &\quad + \mathscr{Z}\left\{(n-(2N+1))u[n-(2N+1)]\right\} + \mathscr{Z}\left\{u[n-(2N+1)]\right\} \\ X_2(z) &= \frac{z}{(z-1)^2} - 2z^{-(N+1)}\frac{z}{z-1} - 2z^{-(N+1)}\frac{z}{(z-1)^2} + z^{-(2N+1)}\frac{z}{(z-1)^2} + z^{-(2N+1)}\frac{z}{z-1}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \end{aligned}$$

(4) Γνωρίζουμε πως,

$$x_3[n] = |n|2^{-|n|} = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - n2^n u[-n-1]$$

Επίσης έχουμε,

$$\mathscr{Z}\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$
$$\mathscr{Z}\left\{n2^n u[n]\right\} = 2\frac{z}{(z-2)^2}, \quad \text{ROC: } |z| < 2$$

Επομένως,

$$X_3(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2} + 2\frac{z}{(z-2)^2}, \quad \text{ROC: } \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(5) Γνωρίζουμε πως,

$$x_5[n] = n(n+1)(n+2)3^{-n}u[n]$$

Επίσης έχουμε,

$$\mathscr{Z}\left\{3^{-n}u[n]\right\} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-n}u[n]z^{-n} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$
$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} n3^{-n}u[n]z^{-n-1} = -\frac{3}{(1-3z)^2}, \quad \text{(Από παραγώγηση)}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1)3^{-n}u[n]z^{-n-2} = \frac{18}{(3z-1)^3}, \quad \text{(Από παραγώγηση)}$$
$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1)(n+2)3^{-n}u[n]z^{-n-3} = -\frac{162}{(3z-1)^4}, \quad \text{(Από παραγώγηση)}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1)(n+2)3^{-n}u[n]z^{-n} = z^3\frac{162}{(3z-1)^4}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

Επομένως,

$$X_5(z) = z^3\frac{162}{(3z-1)^4}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

Αντίστροφοι μετασχηματισμοί $\mathscr{Z}$

(1) Γνωρίζουμε πως,

$$W_1(z) = \frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}-2} = \frac{z-2}{1-2z}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$w_1[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C W_1(z)z^{n-1}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z-2}{1-2z}z^{n-1}\,dz$$

Παίρνω περιπτώσεις:

$n > 0$: Υπάρχει μόνο ο πόλος $\rho_1 = \frac{1}{2}$. Η καμπύλη C βρίσκεται στην περιοχή σύγκλισης άρα περικλύει τον πόλο. Επομένως,

$$\begin{aligned} w_1[n] &= Res\left[\frac{z-2}{1-2z}z^{n-1}, \frac{1}{2}\right] \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z-2}{1-2z}z^{n-1} \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{2}} -\frac{1}{2}(z-2)z^{n-1} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$n = 0$: Υπάρχουν οι πόλοι $\rho_1 = \frac{1}{2}$ και $\rho_2 = 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} w_1[n] &= Res\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{z-2}{1-2z}, \frac{1}{2}\right] + Res\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{z-2}{1-2z}, 0\right] \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z}\cdot\frac{z-2}{1-2z} + \lim_{z\to 0}\cdot\frac{z-2}{1-2z} \\ &= \frac{3}{2} - 2 \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$n < 0$: Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $p = \frac{1}{z} \Rightarrow dp = -\frac{1}{z^2}dz, \quad |p| < 2$. Τότε,

$$w_1[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{2p-1}{p-2}p^{-n-1}\,dp$$

Υπάρχει μοναδικός πόλος $\rho_1 = 2$ Επίσης έχουμε η C' εμπεριέχεται στην περιοχή σύγκλισης $|p| < 2$ και επομένως δεν περικλύει κανένα πόλο. Επομένως,

$$w_1[n] = 0$$

Τελικά:

$$w_1[n] = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n & n > 0 \\ -\frac{1}{4} & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

(2) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned} X_3(z) &= \ln(1-x) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -\frac{(2z)^n}{n}u[n-1] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]z^{-n} \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε,

$$X_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_3[n]z^{-n}$$

Επομένως,

$$x_3[n] = \frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

(3) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned}
Y_1(z) &= \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\
\frac{Y_1(z)}{z} &= \frac{z^2}{(z-2)(z-3)(z+\frac{1}{2})} \\
\frac{Y_1(z)}{z} &= -\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{z-2} + \frac{1}{35}\cdot\frac{1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{18}{7}\cdot\frac{1}{z-3} \\
Y_1(z) &= -\frac{8}{5}\cdot\frac{z}{z-2} + \frac{1}{35}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{18}{7}\cdot\frac{z}{z-3}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
y_1[n] &= \mathscr{Z}^{-1}\Big\{Y_1(z)\Big\} \\
&= -\frac{8}{5}\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} + \frac{1}{35}\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{18}{7}\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} \\
&= -\frac{8}{5}2^n + \frac{1}{35}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{18}{7}3^n
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned}
Y_2(z) &= \frac{2z^4}{(-2+z)(-1+z)^2(-1+2z)} \\
\frac{Y_2(z)}{z} &= \frac{2z^3}{(-2+z)(-1+z)^2(-1+2z)} \\
\frac{Y_2(z)}{z} &= -4\frac{1}{z-1} - \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{z-2} \\
Y_2(z) &= -4\frac{z}{z-1} - \frac{2}{6}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 2\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{16}{3}\cdot\frac{z}{z-2}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
y_2[n] &= \mathscr{Z}^{-1}\Big\{Y_2(z)\Big\} \\
&= -4\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} - \frac{2}{6}\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right\} - 2\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\} + \frac{16}{3}\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} \\
&= -4u[n] - \frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + \frac{16}{3}2^n
\end{aligned}$$

(4) Γνωρίζουμε πως,

$$Z_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3}$$

Επειδή $|z| < \frac{1}{3}$ εκτελούμε επαναλαμβανόμενη διαίρεση,

$$\begin{array}{r|l} - \begin{array}{l} 1 \\ 1-3z \end{array} & -\frac{1}{3}z^{-1}+1 \\ \cline{2-2} & -3z-9z^2-27z^3-\dots \\ \hline - \begin{array}{l} 3z \\ 3z-9z^2 \end{array} & \\ \hline - \begin{array}{l} 9z^2 \\ 9z^2+27z^3 \end{array} & \\ \hline \dots & \end{array}$$

Παρατηρούμε πως,

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} -3^n z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -3^n z^n u[n-1] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] z^{-n} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$z_1[n] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Γνωρίζουμε πως,

$$Z_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}$$

Επειδή $|z| > \frac{1}{3}$ εκτελούμε επαναλαμβανόμενη διαίρεση,

$$\begin{array}{r|l} - \begin{array}{l} 1 \\ 1-\frac{1}{3}z^{-1} \end{array} & 1-\frac{1}{3}z^{-1} \\ \cline{2-2} & 1+\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}+\dots \\ \hline - \begin{array}{l} \frac{1}{3}z^{-1} \\ \frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{9}z^{-2} \end{array} & \\ \hline - \begin{array}{l} \frac{1}{9}z^{-2} \\ \frac{1}{9}z^{-2}-\frac{1}{27}z^{-3} \end{array} & \\ \hline \dots & \end{array}$$

Παρατηρούμε πως,

$$\begin{aligned} Z_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$z_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Άσκηση 2

(1) Αποδείξτε ότι αν ο μετασχηματισμός (Laplace/Fourier) της κρουστικής ενός συστήματος είναι μία ρητή συνάρτηση δύο πολυωνύμων, τότε το σύστημα περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση.

(2) Αν το σύστημα έχει απόκριση $H(s) = \frac{A}{s+c}$, αποδείξτε ότι η διαφορική εξίσωση είναι $\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = Ax(t)$

(3) Για να προσεγγίσουμε την παράγωγο $\frac{dy(t)}{dt}$, χρησιμοποιούμε τον ορισμό $\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{T\to 0} \frac{y(t)-y(t-T)}{T} \approx \frac{y(t)-y(t-T)}{T}$, για T πολύ μικρός αριθμός. Εκτιμήστε προσεγγιστικά την μορφή της διαφορικής εξίσωσης για $t = nT_s$, όπου T_s πολύ μικρός αριθμός.

(4) Για $n[n] =\equiv x(nT_s)$, δώστε την εξίσωση διαφορών που προκύπτει από την προσέγγιση του (3) και υπολογίστε την $H(z)$.

(5) Δείξτε ότι $H(z) = H(s)\big|_{s=\frac{10z-1}{T}}$, υπάρχει δηλαδή διγραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ Laplace & $\mathscr{Z}$. Σε ποιο πεδίο του $\mathscr{Z}$ αντιστοιχείται η περιοχή $Real(s) < 0$; Εξαρτάται η ευστάθεια του διακριτοποιημένου συστήματος από το T αν το αναλογικό σύστημα είναι ευσταθές;

Λύση

(1) Γνωρίζουμε πως,

$$\mathscr{F}\{h(t)\} = H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$
$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_n\omega^n}{b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \cdots + b_m\omega^m}$$
$$\sum_{k=0}^{m} Y(\omega) b_k \omega^k = \sum_{k=0}^{n} X(\omega) a_k \omega^k \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην (1) έχουμε,

$$\mathscr{F}^{-1}\Big\{\sum_{k=0}^{m} Y(\omega) b_k \omega^k\Big\} = \mathscr{F}^{-1}\Big\{\sum_{k=0}^{n} X(\omega) a_k \omega^k\Big\}$$
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{j^k}\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{j^k}\frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Αντίστοιχα, για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε,

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\sum_{k=0}^{m'} Y(s) b_k s^k\Big\} = \mathscr{L}^{-1}\Big\{\sum_{k=0}^{n'} X(s) a_k s^k\Big\}$$
$$\sum_{k=0}^{m'} b_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n'} a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα μας περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση.

(2) Έχουμε,

$$
\begin{gathered}
H(s) = \frac{A}{s+c} \\
\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A}{s+c} \\
sY(s) + cY(s) = AX(s) \\
\mathscr{L}^{-1}\Big\{sY(s) + cY(s)\Big\} = \mathscr{L}^{-1}\Big\{AX(s)\Big\} \\
\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = Ax(t)
\end{gathered}
$$

(3) Έχουμε,

$$
\begin{gathered}
\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = Ax(t) \\
\frac{y(t) - y(t-T)}{T} + cy(t) = Ax(t) \quad \text{(προσεγγιστικά)} \\
y(t) - y(t-T) + cTy(t) = ATx(t) \\
y(nTs) - y(nTs - T) + cTy(nTs) = ATx(nTs) \qquad \text{για } t = nTs \\
y(nTs) - y(Ts(n-1)) + cTy(nTs) = ATx(nTs) \qquad \text{για } T \approx nTs
\end{gathered}
$$

(4) Έχοντας $x[n] = x(nTs)$ και $y[n] = y(nTs)$, τότε σύμφωνα με την (3):

$$
y[n] - y[n-1] + cTy[n] = ATx[n]
$$

Εφαρμόζοντας αμφίπλευρο μετασχηματισμό $\mathscr{Z}$,

$$
\begin{gathered}
\mathscr{Z}\Big\{y[n] - y[n-1] + cTy[n]\Big\} = AT\mathscr{Z}\Big\{x[n]\Big\} \\
(1 - z^{-1})Y(z) + cTY(z) = ATX(z) \\
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{AT}{1 - z^{-1} + cT}
\end{gathered}
$$

(5) Γνωρίζουμε πως,

$$
H(s) = \frac{A}{s+c}
$$

Επομένως,

$$
H(s)\Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{A}{\frac{1-z^{-1}}{T} + c} = \frac{AT}{1 - z^{-1} + cT} = H(z)
$$

Και άρα υπάρχει διγραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ $\mathscr{Z}$ και $\mathscr{L}$

Άσκηση 3

Έστω σύστημα Σ_1 Γ.Χ.Α αιτιατό στο οποίο δίνουμε είσοδο:

$$x[n] = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1] \tag{2}$$

Ο μετασχηματισμός $\mathscr{Z}$ της εξόδου είναι:

$$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \tag{3}$$

(1) Υπολογίστε τον $X(z)$ και βρείτε την ROC του μετασχηματισμού.

(2) Υπολογίστε την ROC στο $Y(z)$. Είναι το σύστημα ευσταθές;

(3) Υπολογίστε την απόκριση του Σ_1 σε συχνότητα/χρόνο $H(z)$, $h[n]$.

(4) Ποια είναι η εξίσωση διαφορών που ορίζει το σύστημα;

(5) Αντίστροφο καλείται το Σ_2, για το οποίο ισχύει ότι $\Sigma_2[\Sigma_1[x(t)]] = x(t)$. Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας και την κρουστική απόκριση $G(z), g[n]$ του αντίστροφου συστήματος. Πριν τον υπολογισμό του $g[n]$, υπολογίστε το $g[0]$ χρησιμοποιώντας το $G(z)$. Επιβεβαιώστε το τελικό αποτέλεσμα.

(6) Έστω ότι συνδέουμε σειριακά το Σ_1 με σύστημα Σ_3 : $M(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$. Για το νέο σύστημα Σ_4, υπολογίστε την απόκριση συχνότητας $F(z)$, την συχνότητα Ω όπου μεγιστοποιείται το πλάτος της απόκρισης. Το σύστημα είναι βαθυπερατό ή υψιπερατό;

(7) Υπολογίστε το DFT του $r[n] = (f[n] - \frac{1}{4}f[n-2])$.

Λύση

(1) Γνωρίζουμε ότι,

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$
$$\mathscr{Z}\left\{-2^n u[-n-1]\right\} = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| < 2$$

Επομένως,

$$X(z) = -\frac{1}{3}\mathscr{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} + \frac{4}{3}\mathscr{Z}\left\{-2^n u[-n-1]\right\} \quad = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(2) Γνωρίζουμε ότι,

$$X(z) = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$$
$$Y(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-2)(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

Άρα,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$
$$H(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

Και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, $|z| > r$ αφού πρέπει $z \to \infty$. Εξαιτίας των πόλων έχουμε $|z| > 1$. Τελικά ROC: $1 < |z| < 2$ και το σύστημα είναι ευσταθές αφού ο μοναδιαίος κύκλος αποτελεί όριο του πεδίου σύγκλισης.

(3) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$h[n] = \mathscr{Z}^{-1}\Big\{H(z)\Big\} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{3}u[n] - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

(4) Έχουμε,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$
$$H(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)}$$
$$\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)X(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)Y(z)$$
$$X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}X(z) = Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z)$$
$$\mathscr{Z}^{-1}\Big\{X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}X(z)\Big\} = \mathscr{Z}^{-1}\Big\{Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z)\Big\}$$
$$x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] = y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2]$$

(5) Για την νέα απόκριση συχνότητας $H'(z)$ έχουμε,

$$H'(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$$
$$H'(z) = \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}$$
$$H'(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της διαίρεσης πολυωνύμων,

$$
\begin{array}{rr|l}
- & z^2 - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2} & z^2 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2} \\
 & z^2 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2} & \overline{1 - z^{-1} + \dots} \\
\hline
- & -z & \\
 & -z - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}z^{-1} & \\
\hline
 & \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}z^{-1} &
\end{array}
$$

Άρα $h'[0] = 1$

Αναλύοντας το $H'(z)$ σε κλάσματα παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
H'(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \\
\mathscr{Z}^{-1}\Big\{H'(z)\Big\} &= \mathscr{Z}^{-1}\Big\{\frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}}\Big\} \\
h'[n] &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{3}(-1)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]
\end{aligned}
$$