Θεωρία Γραφημάτων

6ο εξάμηνο - 2η σειρά ασκήσεων

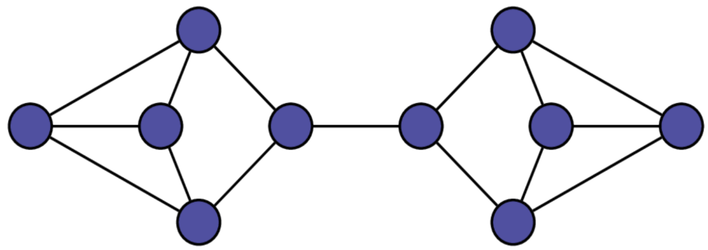
Ονοματεπώνυμο: Λιαροκάπης Αλέξανδρος
Αριθμός Μητρώου: 03114860

Άσκηση 1

Εξετάστε αν για κάθε απλό συνεκτικό d-κανονικό γράφημα G, κάθε κορυφή είναι κεντρική και απόκεντρη. Αν ισχύει αποδείξτε το, αλλιώς δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

Λύση

Δεν ισχύει, παρατίθεται αντιπαράδειγμα για 3-κανονικό γράφημα:



Άσκηση 2

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 5$ κορυφές, διάμετρο 2 και μία κορυφή τομής. Δείξτε ότι το συμπληρωματικό του γράφημα $\bar{G}$ έχει μεμονωμένη κορυφή.

Λύση

Αφού υπάρχει κορυφή τομής, οι υπόλοιπες κορυφές χωριζονται σε 2 υποσύνολα τα οποία δεν συνδέονται μεταξύ τους παρα μόνο μέσω αυτής. Επίσης η απόσταση κάθε κορυφής απο την κορυφή τομής πρέπει να είναι 1 διαφορετικά το άθροισμα των αποστάσεων δύο κορυφών απο την κορυφή γέφυρας θα ήταν μεγαλύτερο απο 2 το οποίο θα σήμαινε πως η διάμετρος θα ήταν μεγαλύτερη απο 2. Άρα όλες οι κορυφές συνδέονται με την κορυφή γέφυρας, και η αντίστοιχη ορυφή του συμπληρωματικού γράφου δε συνδέεται με καμία κορυφή.

Άσκηση 3

Έστω ένα απλό συνεκτικό γράφημα με $diam(G) \geq 2$. Δείξτε ότι οι απόκεντρες κορυφές του G δεν μπορούν να επάγουν κλίκα στο G.

Λύση

Για κάθε απόκεντρη κορυφή v θα πρέπει να υπάρχει άλλη απόκεντρη κορυφή u τέτοια ώστε $dist(u, v) = diam(G)$. Αν οι απόκεντρες κορυφές μπορούν να επάγουν κλίκα τότε θα πρέπει $dist(u, v) = 1 < diam(G)$ το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 4

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $diam(G) > 3$. Δείξτε ότι $diam(\bar{G}) < 3$, όπου $\bar{G}$ είναι το συμπληρωματικό γράφημα του G.

Λύση

Έστω μία τυχαία κορυφή $v \in G$. Έστω ένας μη γείτονάς της, u. Στον $\bar{G}$ θα ισχύει $dist(u, v) = 1$. Έστω ένας γείτονάς της, u'. Άμα δεν υπάρχει ένας κοινός μη-γείτονας των v, u', τότε όλες οι κορυφές θα απήχαν το πολύ 3 το οποίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχει κοινός μη-γείτονας των δύο και επομένως στον $\bar{G}$ θα ισχύει $dist(v, u') = 2$. Άρα $\forall v \in \bar{G} : ecc(v) \leq 2 \Rightarrow diam(\bar{G}) \leq 2$.

Άσκηση 5

Δείξτε ότι αν το απλό συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές έχει διάμετρο ίση με 2 και μέγιστο βαθμό $\Delta(G) = n - 2$, τότε $E(G) \geq 2n - 4$.

Λύση

Η κορυφή με τον μέγιστο βαθμό θα συνδέεται με όλες εκτός απο μία κορυφή. Αυτή η κορυφή θα πρέπει να συνδέεται με τουλάχιστον άλλη μία για να είναι συνεκτικός ο γράφος. Όμως αυτό σημαίνει πως όλες οι κορυφές εκτός αυτής με το μέγιστο βαθμό θα πρέπει να συνδέονται μεταξύ της διαφορετικά θα υπήρχε διάμετρος μεγαλύτερη του 2. Άρα οι ελάχιστες ακμές πρέπει να είναι $2 * (n - 2) = 2n - 4$.

Άσκηση 6

Έστω απλό k-συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και ελάχιστο βαθμό κορυφής $\delta(G)$.

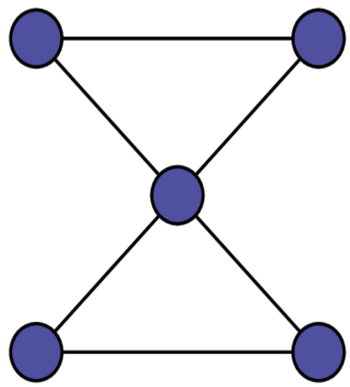
(i) Δείξτε ότι αν $\delta(G) \geq n-2$ τότε $k = \delta(G)$.

(ii) Βρείτε απλό γράφημα G με $\delta(G) = n-3$ και $k < \delta(G)$.

Λύση

(i) Αν $\delta(G) = n-1$ τότε προφανώς ισχύει αφού αν αφαιρέσουμε $n-2$ κορυφές απο πλήρη γράφο, οι υπόλοιπες θα συνδέονται. Αν $\delta(G) = n-2$ τότε κάθε κορυφή δεν θα συνδέεται το πολύ με μία άλλη. Αν αφαιρέσουμε $n-3$ κορυφές αυτές που απομένουν θα πρέπει να συνδέονται διαφορετικά μία απο αυτές δε θα συνδέονταν με 2 κορυφές.

(ii) Για $n = 5$ υπάρχει το αντιπαράδειγμα του παρακάτω γράφου.



Άσκηση 7

Έστω απλό λ-πλευρικά συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και ελάχιστο βαθμό κορυφής $\delta(G)$.

(i) Δείξτε ότι αν $\delta(G) \geq n/2$ τότε $\lambda = \delta(G)$.

(ii) Βρείτε απλό γράφημα G με $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ και $\lambda < \delta(G)$.

Λύση

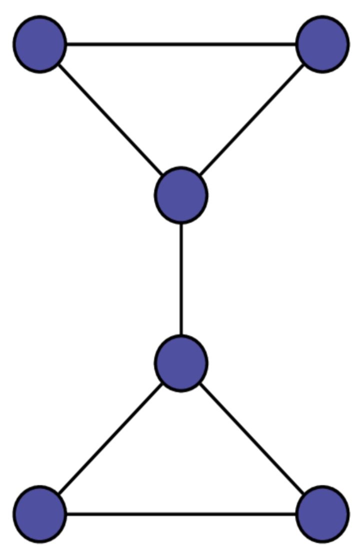
(i) Καταρχάς ισχύει πως $\lambda \leq \delta(G)$. Έστω πως $\lambda < \delta(G)$, Τότε υπάρχουν δύο συνιστώσες $X, Y : |V(X)| < |V(Y)|$ οι οποίες συνδέονται με ακριβώς λ ακμές και για την X Θα ισχύει $|V(X)| \leq n/2$. Κάθε κορυφή της X θα έχει το πολύ $|V(X)| - 1$ γείτονές με κορυφές της X και το ελάχιστο $\delta(G) - |V(X)| + 1 \geq 1$ γείτονές με κορυφές της Y.

Ο αριθμός των ακμών από την X στην Y είναι προφανώς μικρότερος ή ίσος απο λ και επομένως,

$$\lambda \geq |V(X)|(\delta(G) - |V(X)| + 1) > |V(X)|(\lambda - |V(X)| + 1) \Rightarrow$$
$$\lambda(1 - |V(X)|) > |V(X)|(1 - |V(X)|) \Rightarrow$$
$$\lambda < |V(X)|$$

Το οποίο είναι άτοπο αφού πρέπει κάθε κορυφή της X να έχει τουλάχιστον ένα γείτονα στην Y.

(ii) Παράδειγμα για $\lambda = 1, \delta(G) = 2, n = 6$:



Άσκηση 8

Δείξτε ότι αν το G είναι απλό γράφημα με n κορυφές και $\delta(G) \geq (n+k-2)/2$ με $k \geq 2$, τότε το G είναι τουλάχιστον k-συνεκτικό.

Λύση

Αφαιρώ $k-1$ κόρυφές και έχω $|V(G')| = n-k+1$ και $\delta(G') \geq (n-k)/2$. Έστω πως το G' δεν είναι συνεκτικό, τότε θα υπάρχουν κορυφές u, v που δεν επικοινωνούν και συνεπώς δεν έχουν και κοινούς γείτονες. Συνολικά λόγω του $\delta(G')$ οι γείτονές τους θα είναι τουλάχιστον $n-k$ και επομένως ο G' θα έχει τουλάχιστον $n-k+2$ κορυφές. Άρα άτοπο και επομένως το G' είναι συνεκτικό και το G τουλάχιστον k-συνεκτικό.

Άσκηση 9

Για κάθε $n \geq 5$ βρείτε ένα απλό 2-συνεκτικό γράφημα με n κορυφές, διάμετρο 2 και $e = 2n - 5$ ακμές.

Λύση

Για $n = 5$ υπάρχει το παράδειγμα του πενταγώνου. Διαλέγουμε δύο κορυφές a, b του πενταγώνου με $dist(a, b) = 2$. Κάθε κορυφή που βάζουμε μπορούμε να τη συνδέουμε με τα a και b και έτσι κατασκευαστικά μπορούμε να βρούμε ένα 2-συνεκτικό γράφημα με τους παραπάνω περιορισμούς για κάθε $n \geq 5$.

Άσκηση 10

Δείξτε ότι σε ένα απλό γράφημα G με $n \geq 4$ κορυφές και περισσότερες απο $3(n-1)/2$ ακμές υπάρχει ένα ζεύγος κορυφών που ενώνεται με τρία εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια. Περιγράψτε ένα ακρότατο γράφημα με ακριβώς $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ ακμές, δηλαδή ένα γράφημα με n κορυφές και $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ ακμές στο οποίο δεν υπάρχει ζεύγος κορυφών που ενώνεται με τρία ξένα μονοπάτια, ενώ αν προστεθεί οποιαδήποτε ακμή στο γράφημα τότε υπάρχει τέτοιο ζεύγος κορρυφών.

Λύση

Για το δεύτερο μέρος της ερώτησης, ένα ακρότατο γράφημα είναι ένα απλό τετράγωνο το οποίο θα έχει $n = 4$ κορυφές, $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor = 4$ ακμές και δεν περιέχει ζεύγος κορυφών που ενώνεται με τρία ξένα μονοπάτια ενώ ταυτόχρονα άν του προστεθεί ακμή τότε θα υπάρχει το επιθυμητό ζεύγος.