

Σήματα και Συστήματα
3η & 4η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο: Λιαροκάπης Αλέξανδρος
Αριθμός Μητρώου: 03114860



Άσκηση 1

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό \mathcal{Z} και παρουσιάστε την περιοχή σύγκλισης (ROC) του μετασχηματισμού σε κάθε περίπτωση.

(1) $x_1[n] = \frac{u[n-1]}{n}$

(2) $x_2[n] = nu[n] + (2N - 2n)u[n - (N + 1)] - (2N - n)u[n - (2N + 1)]$
χρησιμοποιώντας το $z[n] = u[n] - u[n - N]$

(4) $x_4[n] = |n|2^{-|n|}$

(5) $x_5[n] = n(n + 1)(n + 2)3^{-n}u[n]$

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμός \mathcal{Z} των:

(1) $W_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1} - 2}, |z| > \frac{1}{2}$
Μέθοδος: Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

(2) $X_1(z) = \sin(z)$, ROC περιέχει $\{|z| = 1\}$, $X_2(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}, z \neq 0$, $X_3(z) = \ln(1 - 2z), |z| < \frac{1}{2}$
Μέθοδος: Δυναμοσειρά

(3) $Y_1(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$, όπου $y[n]$ ευσταθές σήμα.
 $Y_2(z) = \frac{2z^4}{(-2 + z)(-1 + z)^2(-1 + 2z)}, |z| > 2$
Μέθοδος: Ανάλυση κλασμάτων

(4) $Z_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3}$, $Z_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}$
Μέθοδος: Επαναλαμβανόμενη διαίρεση

Λύση

Μετασχηματισμοί \mathcal{Z}

(1) Γνωρίζουμε πως,

$$x_1[n] = \frac{u[n-1]}{n}$$

Επίσης έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(1-x)}{dx} &= -\frac{1}{1-x} \\ \frac{d \ln(1-x)}{dx} &= -\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1 \\ \ln(1-x) &= -\int \sum_{k=0}^{\infty} x^k dx + C, \quad |x| < 1 \\ \ln(1-x) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} dx, \quad (C = 0 \text{ για } x = 0) \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 X_1(z) &= \mathcal{Z}\left\{x_1[n]\right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k-1}}{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}}{k+1} \\
 &= \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right), \quad \text{ROC: } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1
 \end{aligned}$$

(2) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned}
 x_2[n] &= nu[n] + 2Nu[n - (N+1)] - 2nu[n - (N+1)] - 2Nu[n - (2N+1)] + nu[n - (2N+1)] \\
 &= nu[n] + 2Nu[n - (N+1)] - 2(n + (N+1) - (N+1))u[n - (N+1)] \\
 &\quad - 2Nu[n - (2N+1)] + (n + (2N+1) - (2N+1))u[n - (2N+1)] \\
 &= nu[n] + 2Nu[n - (N+1)] - 2(n - (N+1))u[n - (N+1)] - 2(N+1)u[n - (N+1)] \\
 &\quad - 2Nu[n - (2N+1)] + (n - (2N+1))u[n - (2N+1)] + (2N+1)u[n - (2N+1)] \\
 &= nu[n] - 2u[n - (N+1)] - 2(n - (N+1))u[n - (N+1)] \\
 &\quad + (n - (2N+1))u[n - (2N+1)] + u[n - (2N+1)]
 \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\left\{u[n]\right\} &= \frac{z}{z-1}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \\
 \mathcal{Z}\left\{nu[n]\right\} &= \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \\
 \mathcal{Z}\left\{u[n-k]\right\} &= z^{-k} \frac{z}{z-1}, \quad \text{ROC: } |z| > 1 \\
 \mathcal{Z}\left\{(n-k)u[n-k]\right\} &= z^{-k} \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \text{ROC: } |z| > 1
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\left\{x_2[n]\right\} &= \mathcal{Z}\left\{nu[n]\right\} - 2\mathcal{Z}\left\{u[n - (N+1)]\right\} - 2\mathcal{Z}\left\{(n - (N+1))u[n - (N+1)]\right\} \\
 &\quad + \mathcal{Z}\left\{(n - (2N+1))u[n - (2N+1)]\right\} + \mathcal{Z}\left\{u[n - (2N+1)]\right\} \\
 X_2(z) &= \frac{z}{(z-1)^2} - 2z^{-(N+1)} \frac{z}{z-1} - 2z^{-(N+1)} \frac{z}{(z-1)^2} + z^{-(2N+1)} \frac{z}{(z-1)^2} + z^{-(2N+1)} \frac{z}{z-1}, \quad \text{ROC: } |z| > 1
 \end{aligned}$$

(4) Γνωρίζουμε πως,

$$x_3[n] = |n|2^{-|n|} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - n2^n u[-n-1]$$

Επίσης έχουμε,

$$\mathcal{Z}\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{2} \frac{z}{(z - \frac{1}{2})^2}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{n2^n u[n]\right\} = 2 \frac{z}{(z - 2)^2}, \quad \text{ROC: } |z| < 2$$

Επομένως,

$$X_3(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{(z - \frac{1}{2})^2} + 2 \frac{z}{(z - 2)^2}, \quad \text{ROC: } \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(5) Γνωρίζουμε πως,

$$x_5[n] = n(n+1)(n+2)3^{-n}u[n]$$

Επίσης έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{3^{-n}u[n]\right\} &= \frac{z}{z - \frac{1}{3}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-n}u[n]z^{-n} &= \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n3^{-n}u[n]z^{-n-1} &= -\frac{3}{(1 - 3z)^2}, \quad (\text{Από παραγώγηση}) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1)3^{-n}u[n]z^{-n-2} &= \frac{18}{(3z - 1)^3}, \quad (\text{Από παραγώγηση}) \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1)(n+2)3^{-n}u[n]z^{-n-3} &= -\frac{162}{(3z - 1)^4}, \quad (\text{Από παραγώγηση}) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1)(n+2)3^{-n}u[n]z^{-n} &= z^3 \frac{162}{(3z - 1)^4}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$X_5(z) = z^3 \frac{162}{(3z - 1)^4}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}$$

Αντίστροφοι μετασχηματισμοί \mathcal{Z}

(1) Γνωρίζουμε πως,

$$W_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1} - 2} = \frac{z - 2}{1 - 2z}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$w_1[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C W_1(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z - 2}{1 - 2z} z^{n-1} dz$$

Παίρνω περιπτώσεις:

$n > 0$: Υπάρχει μόνο ο πόλος $\rho_1 = \frac{1}{2}$. Η καμπύλη C βρίσκεται στην περιοχή σύγκλισης άρα περικλύει τον πόλο. Επομένως,

$$\begin{aligned} w_1[n] &= \text{Res} \left[\frac{z-2}{1-2z} z^{n-1}, \frac{1}{2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{z-2}{1-2z} z^{n-1} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} -\frac{1}{2} (z-2) z^{n-1} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

$n = 0$: Υπάρχουν οι πόλοι $\rho_1 = \frac{1}{2}$ και $\rho_2 = 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} w_1[n] &= \text{Res} \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{z-2}{1-2z}, \frac{1}{2} \right] + \text{Res} \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{z-2}{1-2z}, 0 \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{z} \cdot \frac{z-2}{1-2z} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-2}{1-2z} \\ &= \frac{3}{2} - 2 \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$n < 0$: Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής $p = \frac{1}{z} \Rightarrow dp = -\frac{1}{z^2} dz$, $|p| < 2$. Τότε,

$$w_1[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'} \frac{2p-1}{p-2} p^{-n-1} dp$$

Υπάρχει μοναδικός πόλος $\rho_1 = 2$ Επίσης έχουμε η C' εμπεριέχεται στην περιοχή σύγκλισης $|p| < 2$ και επομένως δεν περικλύει κανένα πόλο. Επομένως,

$$w_1[n] = 0$$

Τελικά:

$$w_1[n] = \begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n & n > 0 \\ -\frac{1}{4} & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

(2) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned} X_3(z) &= \ln(1-x) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2z)^k}{k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -\frac{(2z)^k}{k} u[k-1] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k} u[-k-1] z^{-k} \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε,

$$X_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_3[n]z^{-n}$$

Επομένως,

$$x_3[n] = \frac{2^{-n}}{n} u[-n-1]$$

(3) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\ \frac{Y_1(z)}{z} &= \frac{z^2}{(z-2)(z-3)(z+\frac{1}{2})} \\ \frac{Y_1(z)}{z} &= -\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{18}{7} \cdot \frac{1}{z-3} \\ Y_1(z) &= -\frac{8}{5} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{1}{35} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{18}{7} \cdot \frac{z}{z-3} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ Y_1(z) \right\} \\ &= -\frac{8}{5} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-2} \right\} + \frac{1}{35} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z+\frac{1}{2}} \right\} + \frac{18}{7} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-3} \right\} \\ &= -\frac{8}{5} 2^n + \frac{1}{35} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{18}{7} 3^n \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned} Y_2(z) &= \frac{2z^4}{(-2+z)(-1+z)^2(-1+2z)} \\ \frac{Y_2(z)}{z} &= \frac{2z^3}{(-2+z)(-1+z)^2(-1+2z)} \\ \frac{Y_2(z)}{z} &= -4 \frac{1}{z-1} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{z-\frac{1}{2}} - 2 \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{z-2} \\ Y_2(z) &= -4 \frac{z}{z-1} - \frac{2}{6} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 2 \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{16}{3} \cdot \frac{z}{z-2} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y_2[n] &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ Y_2(z) \right\} \\ &= -4 \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} - \frac{2}{6} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right\} - 2 \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-1)^2} \right\} + \frac{16}{3} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-2} \right\} \\ &= -4u[n] - \frac{2}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 2n + \frac{16}{3} 2^n \end{aligned}$$

(4) Γνωρίζουμε πως,

$$Z_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3}$$

Επειδή $|z| < \frac{1}{3}$ εκτελούμε επαναλαμβανόμενη διαίρεση,

$$\begin{array}{r|l} - & 1 \\ & 1 - 3z \\ \hline & 3z \\ & 3z - 9z^2 \\ \hline & 9z^2 \\ & 9z^2 + 27z^3 \\ \hline & \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{1}{3}z^{-1} + 1 \\ \hline -3z - 9z^2 - 27z^3 - \dots \end{array}$$

Παρατηρούμε πως,

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} -3^n z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -3^n z^n u[n-1] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] z^{-n} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$z_1[n] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Γνωρίζουμε πως,

$$Z_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}$$

Επειδή $|z| > \frac{1}{3}$ εκτελούμε επαναλαμβανόμενη διαίρεση,

$$\begin{array}{r|l} - & 1 \\ & 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \\ \hline & \frac{1}{3}z^{-1} \\ & \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{9}z^{-2} \\ \hline & \frac{1}{9}z^{-2} \\ & \frac{1}{9}z^{-2} - \frac{1}{27}z^{-3} \\ \hline & \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \\ \hline 1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2} + \dots \end{array}$$

Παρατηρούμε πως,

$$\begin{aligned} Z_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$z_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Άσκηση 2

- (1) Αποδείξτε ότι αν ο μετασχηματισμός (Laplace/Fourier) της κρουστικής ενός συστήματος είναι μία ρητή συνάρτηση δύο πολυωνύμων, τότε το σύστημα περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση.
- (2) Αν το σύστημα έχει απόκριση $H(s) = \frac{A}{s+c}$, αποδείξτε ότι η διαφορική εξίσωση είναι $\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = Ax(t)$
- (3) Για να προσεγγίσουμε την παράγωγο $\frac{dy(t)}{dt}$, χρησιμοποιούμε τον ορισμό $\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t-T)}{T} \approx \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$, για T πολύ μικρός αριθμός. Εκτιμήστε προσεγγιστικά την μορφή της διαφορικής εξίσωσης για $t = nT_s$, όπου T_s πολύ μικρός αριθμός.
- (4) Για $n[n] \equiv x(nT_s)$, δώστε την εξίσωση διαφορών που προκύπτει από την προσέγγιση του (3) και υπολογίστε την $H(z)$.
- (5) Δείξτε ότι $H(z) = H(s)|_{s=\frac{10z-1}{T}}$, υπάρχει δηλαδή διγραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ Laplace & \mathcal{Z} . Σε ποιο πεδίο του \mathcal{Z} αντιστοιχείται η περιοχή $Real(s) < 0$; Εξαρτάται η ευστάθεια του διακριτοποιημένου συστήματος από το T αν το αναλογικό σύστημα είναι ευσταθές;

Λύση

- (1) Γνωρίζουμε πως,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{h(t)\} &= H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \\ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_n\omega^n}{b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_m\omega^m} \\ \sum_{k=0}^m Y(\omega)b_k\omega^k &= \sum_{k=0}^n X(\omega)a_k\omega^k \end{aligned} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην (1) έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^m Y(\omega)b_k\omega^k\right\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^n X(\omega)a_k\omega^k\right\} \\ \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{j^k} \frac{d^k y(t)}{dt^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{j^k} \frac{d^k x(t)}{dt^k} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{m'} Y(s)b_k s^k\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n'} X(s)a_k s^k\right\} \\ \sum_{k=0}^{m'} b_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} &= \sum_{k=0}^{n'} a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \end{aligned}$$

Και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα μας περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση.

(2) Έχουμε,

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{A}{s+c} \\
 \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{A}{s+c} \\
 sY(s) + cY(s) &= AX(s) \\
 \mathcal{L}^{-1}\{sY(s) + cY(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{AX(s)\} \\
 \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) &= Ax(t)
 \end{aligned}$$

(3) Έχουμε,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) &= Ax(t) \\
 \frac{y(t) - y(t-T)}{T} + cy(t) &= Ax(t) \quad (\text{προσεγγιστικά}) \\
 y(t) - y(t-T) + cTy(t) &= ATx(t) \\
 y(nTs) - y(nTs-T) + cTy(nTs) &= ATx(nTs) \quad \text{για } t = nTs \\
 y(nTs) - y(Ts(n-1)) + cTy(nTs) &= ATx(nTs) \quad \text{για } T \approx nTs
 \end{aligned}$$

(4) Έχοντας $x[n] = x(nTs)$ και $y[n] = y(nTs)$, τότε σύμφωνα με την (3):

$$y[n] - y[n-1] + cTy[n] = ATx[n]$$

Εφαρμόζοντας αμφίπλευρο μετασχηματισμό \mathcal{Z} ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{y[n] - y[n-1] + cTy[n]\} &= AT\mathcal{Z}\{x[n]\} \\
 (1 - z^{-1})Y(z) + cTY(z) &= ATX(z) \\
 H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{AT}{1 - z^{-1} + cT}
 \end{aligned}$$

(5) Γνωρίζουμε πως,

$$H(s) = \frac{A}{s+c}$$

Επομένως,

$$H(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{A}{\frac{1-z^{-1}}{T} + c} = \frac{AT}{1 - z^{-1} + cT} = H(z)$$

Και άρα υπάρχει διγραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ \mathcal{Z} και \mathcal{L}

Άσκηση 3

Έστω σύστημα Σ_1 Γ.Χ.Α αιτιατό στο οποίο δίνουμε είσοδο:

$$x[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1] \quad (2)$$

Ο μετασχηματισμός \mathcal{Z} της εξόδου είναι:

$$Y(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (3)$$

- (1) Υπολογίστε τον $X(z)$ και βρείτε την ROC του μετασχηματισμού.
- (2) Υπολογίστε την ROC στο $Y(z)$. Είναι το σύστημα ευσταθές;
- (3) Υπολογίστε την απόκριση του Σ_1 σε συχνότητα/χρόνο $H(z)$, $h[n]$.
- (4) Ποια είναι η εξίσωση διαφορών που ορίζει το σύστημα;
- (5) Αντίστροφο καλείται το Σ_2 , για το οποίο ισχύει ότι $\Sigma_2[\Sigma_1[x(t)]] = x(t)$. Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας και την χρονική απόκριση $G(z)$, $g[n]$ του αντίστροφου συστήματος. Πριν τον υπολογισμό του $g[n]$, υπολογίστε το $g[0]$ χρησιμοποιώντας το $G(z)$. Επιβεβαιώστε το τελικό αποτέλεσμα.
- (6) Έστω ότι συνδέουμε σειριακά το Σ_1 με σύστημα Σ_3 : $M(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$. Για το νέο σύστημα Σ_4 , υπολογίστε την απόκριση συχνότητας $F(z)$, την συχνότητα Ω όπου μεγιστοποιείται το πλάτος της απόκρισης. Το σύστημα είναι βαθυπερατό ή υψιπερατό;
- (7) Υπολογίστε το DFT του $r[n] = (f[n] - \frac{1}{4}f[n-2])$.

Λύση

- (1) Γνωρίζουμε ότι,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2} \\ \mathcal{Z}\left\{-2^n u[-n-1]\right\} &= \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| < 2 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$X(z) = -\frac{1}{3}\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{Z}\left\{-2^n u[-n-1]\right\} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } \frac{1}{2} < |z| < 2$$

- (2) Γνωρίζουμε ότι,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} \\ Y(z) &= \frac{z^2(z+1)}{(z-2)(z-1)(z+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Άρα,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

Και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, $|z| > r$ αφού πρέπει $z \rightarrow \infty$. Εξαιτίας των πόλων έχουμε $|z| > 1$. Τελικά ROC: $1 < |z| < 2$ και το σύστημα είναι ευσταθές αφού ο μοναδιαίος κύκλος αποτελεί όριο του πεδίου σύγκλισης.

(3) Γνωρίζουμε πως,

$$H(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$$

Επομένως,

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{H(z)\right\} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{3} u[n] - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

(4) Έχουμε,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)X(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)Y(z)$$

$$X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}X(z) = Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}X(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z)\right\}$$

$$x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] = y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2]$$

(5) Για την νέα απόκριση συχνότητας $H'(z)$ έχουμε,

$$H'(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$$

$$H'(z) = \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}$$

$$H'(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της διαίρεσης πολυωνύμων,

$$\begin{array}{r|l}
 - & \begin{array}{r} z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \\ z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{r} z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \\ 1 - z^{-1} + \dots \end{array} \\
 \hline
 - & \begin{array}{r} -z \\ -z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1} \end{array} & \\
 \hline
 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} &
 \end{array}$$

Άρα $h'[0] = 1$

Αναλύοντας το $H'(z)$ σε κλάσματα παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 H'(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \\
 \mathcal{Z}^{-1} \left\{ G(z) \right\} &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \right\} \\
 h'[n] &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{2}{3} (-1)^n u[n] - \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n-1]
 \end{aligned}$$