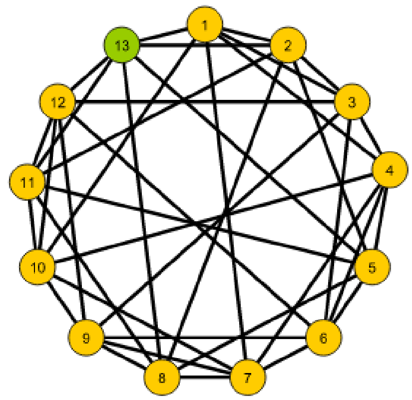
Θεωρία Γραφημάτων

1η Σειρά Ασκήσεων

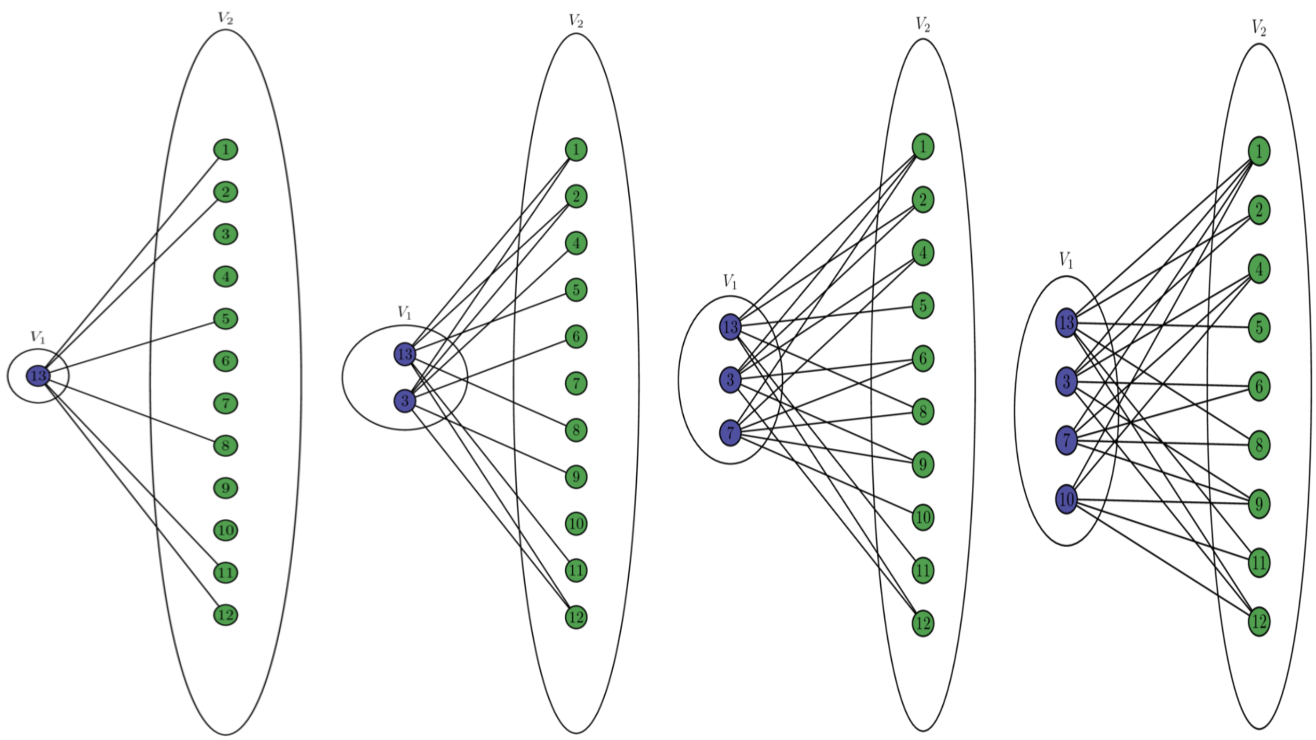
Ονοματεπώνυμο: Λιαροκάπης Αλέξανδρος
Αριθμός Μητρώου: 03114860

Άσκηση 1

Κάθε γράφημα G χωρίς βρόγχους έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με τουλάχιστον $|E(G)|/2$ ακμές (Δείτε σελ. 29 των σημειώσεων για την απόδειξη της πρότασης αυτής). Εφαρμόστε την κατασκευή της απόδειξης στο παρακάτω 6-κανονικό γράφημα G με 13 κορυφές και βρείτε ένα διμερές επαγόμενο υπογράφημα με τουλάχιστον $|E(G)|/2$ ακμές. Ξεκινήστε με τα εξής σύνολα διαμέρισης: $V_1 = \{v_{13}\}$ και $V_2 = \{v_1, ..., v_{12}\}$.



Λύση



Άσκηση 2

Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών είναι γραφικές. Στην περίπτωση γραφικής ακολουθίας βαθμών να δοθεί γράφημα που την υλοποιεί.

i. $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$

ii. $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$

iii. $(2, 2, 0, 0)$

iv. $(6, 6, 5, 5, 5, 3, 2)$

v. $(5, 5, 4, 4, 3, 3, 2)$

vi. $(5, 5, 4, 4, 3, 3, 2)$ και το γράφημα να είναι διμερές.

vii. $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_{2k}$, με $d_{2i} = d_{2i-1} = i$ για $1 \leq i \leq k$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε εκτενώς το θεώρημα Havel-Hakimi:

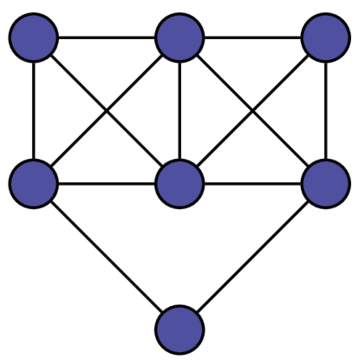
i. Ο 1ος βαθμός είναι μεγαλύτερος απο τον αριθμό των υπόλοιπων στοιχείων και επομένως η ακολουθία δεν είναι γραφική.

ii. Το άθροισμα των βαθμών είναι περιττός αριθμός και επομένως η ακολουθία δεν είναι γραφική.

iii. $(2, 2, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$ η οποία έχει περιττό άθροισμα βαθμών και επομένως δεν είναι γραφική.

iv. $(6, 6, 5, 5, 5, 3, 2) \rightarrow (5, 4, 4, 4, 2, 1) \rightarrow (3, 3, 3, 1, 0) \rightarrow (2, 2, 0, 0)$ το οποίο ανάγεται στην προηγούμενη.

v. $(5, 5, 4, 4, 3, 3, 2) \rightarrow (4, 3, 3, 2, 2, 2) \rightarrow sorted(2, 2, 1, 1, 2) \rightarrow (2, 2, 2, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1)$. Η οποία είναι γραφική, πχ. ένας γράφος με δύο ενωμένα ζεύγη.



vi. Ο αριθμός των ακμών είναι μεγαλύτερος απο 12 που είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών που θα μπορούσε να έχει ένας διμερής γράφος με τους παραπάνω κόμβους και επομένως δεν είναι γραφική.

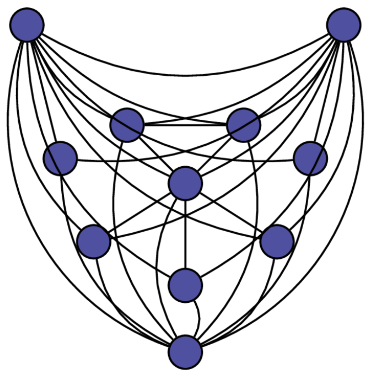
vii. Μπορώ με χρήση επαγωγής να δείξω πως κάθε τέτοια ακολουθία είναι γραφική. Για $k = 2$ έχουμε $(1, 1)$ που προφανώς είναι γραφική ώς γράφος που αποτελείται απο ένα ζεύγος. Έστω πως ισχύει για $k \geq 2$, τότε έχουμε $(k, k, k-1, k-1, ..., 1, 1)$. Προσθέτω δύο κόμβους v_{k+1}, v_{k+2} στο γράφο. Συνδέω τον v_{k+2} με κάθε δεύτερο κόμβο συγκεκριμένου βαθμού και έχω $(k+1, k, k, k-1, k-1, ..., 2, 2, 1)$. Συνδέω τον v_{k+1} με τον v_{k+2} και έχω $(k+1, k+1, k, k, ..., 1, 1)$ επομένως θα ισχύει και για $k+1$. Απο επαγωγή θα ισχύει και για όλα τα $k \geq 2$.

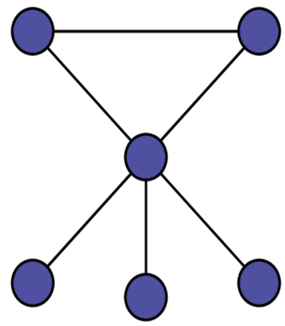
Άσκηση 3

Κατασκευάστε ένα απλό συνεκτικό γράφο με 11 κορυφές και σύνολο βαθμών το {3,4,5,8,10}

Λύση

Παρακάτω δίνονται οι γράφοι για τα σύνολα βαθμών $\{3, 4, 5, 8, 10\}, \{1, 2, 5\}$ αντίστοιχα. Οι γράφοι φτιάχτηκαν μέσω της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για την απόδειξη του θεωρήματος Kapoor-Polimeni-Wall.





Άσκηση 4

Το θεώρημα του Koning λέει ότι «κάθε απλό γράφημα G με μέγιστο βαθμό $\Delta(G)$ είναι επαγώμενο υπογράφημα κάποιου απλού $\Delta(G)$-κανονικού γραφήματος» (για την απόδειξη δείτε σελ. 33 των σημειώσεων).

i. Βρείτε πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για την κατασκευή του $\Delta(G)$-κανονικού γραφήματος, όπως περιγράφεται στην απόδειξη του θεωρήματος.

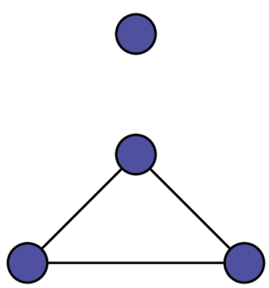
ii. Έστω ότι αναζητούμε απλό $\Delta(G)$-κανονικό γράφημα που να περιέχει το G ως υπογράφημα (όχι απαραίτητα επαγώμενο). Είναι εφικτό μόνο με την προσθήκη ακμών στο G; Δώστε παράδειγμα με λίγες κορυφές στην περίπτωση του $\Delta(G) = 3.4$.

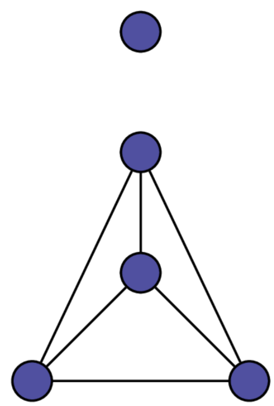
Λύση

i. Θα χρειαστούν $\Delta(G) - \delta(G)$ επαναλήψεις αφού σε κάθε επανάληψη κάθε κόμβος με βαθμό μικρότερο απο $\Delta(G)$ αυξάνεται κατά ένα.

ii. Δεν είναι πάντα εφικτό να βρούμε απλό $\Delta(G)$-κανονικό γράφημα που να περιέχει το G ως υπογράφημα μόνο με την προσθήκη ακμών στο G. Συγκεκριμένα, μπορούμε για κάθε αριθμό κόμβων να κατασκευάσουμε γράφο G που είναι ένωση ενός $(|V(G)| - 1)$-κανονικού γράφου και ενός κόμβου μηδενικού βαθμού. Οποιαδήποτε προσθήκη ακμής σε αυτόν τον γράφο θα δημιουργούσε κόμβο βαθμού μεγαλύτερου του $\Delta(G)$.

   Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ωστόσο είναι εφικτό:





Άσκηση 5

Ορίζουμε ως γέφυρα ενός συνεκτικού γραφήματος G μία ακμή $e \in E(G)$ για την οποία ισχύει ότι το G e δεν είναι συνεκτικό. Δείξτε ότι ένα απλό κανονικό συνεκτικό διμερές γράφημα με βαθμό τουλάχιστον 2, δεν περιέχει γέφυρα.

Λύση

Έστω πως υπάρχει γέφυρα $e \in E(G)$ αφαιρώντας την οποία σπάμε τον γράφο σε δύο συνιστώσες V_1 και V_2. Η V_1 είναι διμερές γράφος που αποτελείται απο δύο σύνολα διαμέρισης X_1 και X_2 ενώ η e ήταν προσπίπτουσα ακμή κόμβου που άνηκε στον X_1. Είναι γνωστό πως επειδή ο V_1 είναι διμερής, συνεκτικός και σχεδόν κανονικός γράφος (όλοι οι κόμβοι εκτός απο τον κόμβο στον οποίο η e ήταν προσπίπτουσα έχουν ίδιο βαθμό), θα έχουμε $|V(X_1)| = |V(X_2)|$ ενώ θα ισχύει επίσης πως οι προσπίπτουσες στον X_1 να είναι κατα ένα μικρότερες απο τις προσπίπτουσες στον X_2. Αυτή η διαφορά στον αριθμό των προσπιπτουσών σημαίνει πως μία ακμή του X_2 θα πρέπει να συνδέεται με έναν κόμβο του V_2 το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει γέφυρα.

Άσκηση 6

Ένα σύνολο ανεξάρτητων κορυφών είναι ένα σύνολο απο κορυφές του γραφήματος οι οποίες δεν ενώνονται μεταξύ τους με καμία ακμή. Συμβολίζουμε με $\beta_0(G)$ το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων κορυφών του γραφήματος G. Δείξτε ότι αν το G είναι απλό και περιέχει τρίγωνο τότε $\Delta(G) \leq \beta_0(G)$ και $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|\beta_0(G)}{2}$.

Λύση

Ο κόμβος $v \in V(G), d(v) = \Delta(G)$ έχει $\Delta(G)$ γείτονες. Ωστόσο αυτοί οι γείτονες δεν πρέπει να συνδέονται αφου τότε ϑα δημιουργόταν τρίγωνο. Άρα οι γείτόνες του v αποτελούν ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέϑους $\Delta(G)$. Άρα $\Delta(G) \leq \beta_0(G)$. Επίσης,

$$2E(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v) \leq |V(G)|\Delta(G) \leq |V(G)|\beta_0(G)$$

Επομένως

$$E(G) \leq \frac{|V(G)|\beta_0(G)}{2}$$

Άσκηση 7

Έστω A ο πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος G με n κορυφές.

i. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε ζεύγος από δείκτες i και j με $1 \leq i, j \leq n$ το (i, j) στοιχείο του πίνακα A^l όπου $1 \leq l \leq n$ είναι ίσο με τον αριθμό των μεταξύ τους διαφορετικών (v_i, v_j) περιπάτων μήκους l στο G.

ii. Έστω $Y = A + A^2 + ... + A^{n-1}$. Αν κάποιο μη διαγώνιο στοιχείο του Y είναι 0, τότε τι συμπεραίνετε για το γράφημα G;

iii. Έστω τετραγωνικός πίνακας M. Σύμβολίζουμε με $Tr(M)$ το ίχνος του πίνακα, δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του. Δείξτε ότι αν το γράφημα G δεν έχει βρόγχους, τότε το πλήθος των τριγώνων στο G ισούται με $\frac{Tr(A^3)}{6}$.

Λύση

i. Για $l = 1$ προφανώς ισχύει. Έστω πως ισχύει για $l = m$, τότε:

$$A_{ij}^{m+1} = \sum_{1 \leq k \leq n} A_{ik}^m * A_{kj}$$

Το πλήθος των μονοπατιών (v_i, v_j) μήκους $m + 1$ ισούτε με το πλήθος των μονοπατιών (v_i, v_k) μήκους m για τα οποία υπάρχει η ακμή $v_k v_j$. Αυτός ο αριθμός ωστόσο συμπίπτει με το παραπάνω άθροισμα γινομένων και επομένως θα ισχύει και για $l = m + 1$. Επαγωγικά θα ισχύει για όλα τα $l \geq 1$

ii. Όπως φαίνεται και απο το προηγούμενο ερώτημα κάθε στοιχείο Y_{ij} θα εκφράζει το πλήθος όλων των μονοπατιών (v_i, v_j). Αν κάποιο στοιχείο είναι 0 τότε οι αντίστοιχοι κόμβοι δε συνδέονται μεταξύ τους και επομένως ο γράφος δεν είναι συνεκτικός.

iii. Κάθε στοιχείο A_{ii}^3 της διαγωνίου υποδηλώνει τον αριθμό των μονοπατιών μήκους 3 που αρχίζουν απο και τελειώνουν στον κόμβο v_i. Προστίθοντας τα παίρνουμε το σύνολο όλων των κύκλων μήκους 3. Για να πάρουμε τον αριθμό των τριγώνων θα πρέπει πρώτα να διαιρέσουμε με το 2 για να μην ξαναμετρήσουμε ίδιους κύκλους διαφορετικής φορας, αλλα και με το 3 διότι ο ίδιος κύκλος θα ξαναμετρηθεί για κάθε ένα απο τους 3 κόμβους ενός κύκλου. Έτσι ο συνολικός αριθμός τριγώνων είναι $\frac{Tr(A^3)}{6}$

Άσκηση 9

Έστω απλό γράφημα G με ακολουθία βαθμών $d = d(v_1) \leq d(v_2) \leq ... \leq d(v_n)$ έτσι ώστε για κάθε αριθμό $k \leq n-1-d(v_1)$ να ισχύει $d(u_{n-k+1}) \geq k$. Δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό.

Λύση

Έστω πως ισχύουν οι συνθήκες όμως ο γράφος δεν είναι συνεκτικός. Τότε η συνιστώσα που περιέχει τον κόμβο με το μέγιστο βαθμό θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον $d(v_n) + 1$ κόμβους. Επομένως θα υπάρχει συνιστώσα X με $|V(X)| \leq n - 1 - d(v_n)$. Για $v \in V(X), d(v) = \Delta(X)$, έχουμε σίγουρα $d(v) < d(n - d(v_n) - 1)$. Όμως σύμφωνα με τις συνθήκες $d(v) \geq d(n - d(v_n) - 1)$ το οποίο είναι άτοπο. Επομένως άμα ισχύουν οι συνθήκες ο γράφος θα είναι συνεκτικός.

Άσκηση 10

Έστω ένα απλό γράφημα G με n κορυφές και έστω k με $1 < k < n-1$. Άν όλα τα επαγώμενα υπογραφήματα του G με k κορυφές έχουν το ίδιο πλήθος ακμών τότε το G είναι είτε το πλήρες γράφημα με n κορυφές είτε το κενό γράφημα με n κορυφές.

Λύση

Η αντίστροφη φορά εύκολα αποδεικνύεται.

Για να αποδείξω την κανονική φορά, πρώτα θα δείξω πως το G και όλα τα επαγώμενα υπογραφήματα $n-1$ κόμβων είναι κανονικά.

Για κάθε υπογράφημα με κορυφές $\{v_1, v_2, .., v_k, v_{k+1}\}$ μπορώ να διαλέξω τυχαία έναν κόμβο v_i. Το πλήθος των ακμών E_0 μεταξύ των υπολοίπων κόμβων του υπογραφήματος θα είναι σταθερός εξαιτίας των συνθηκών. Συνολικά στο υπογράφημα θα έχουμε $E_0 + d(v_i)$ ακμές. Ωστόσο το πλήθος των ακμών μέσα σε αυτό το υπογράφημα δεν αλλάζει ανεξάρτητα απο ποιο v_i διαλέξω και καθώς το E_0 είναι σταθερό για όλα τα υπογραφήματα k κορυφών, όλοι οι κόμβοι στο υπογράφημα θα έχουν τον ίδιο βαθμό λ. Άρα θα ισχύει πως $2(E_0 + \lambda) = \sum d(v) = \sum \lambda = (k+1)\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2E_0}{k-1}$. Αυτό υποδηλώνει πως όλα τα επαγώμενα υπογραφήματα $k+1$ κόμβων θα είναι κανονικα γραφήματα ίδιου βαθμού και επομένως θα έχουν και ίσο αριθμό ακμών. Επαγωγικά αποδεικνύουμε την παραπάνω πρόταση.

Κάθε κόμβος του γράφου θα έχει βαθμό r. Όλα τα υπογραφήματα $n-1$ κόμβων θα έχουν βαθμό r' για τον οποίον θα ισχύει είτε $r' = r$ είτε $r' = r-1$. Αν $r' = r$ τότε ο κόμβος που περισσεύει δε θα μπορεί να συνδεθεί με κανέναν άλλο κόμβο καθώς ο βαθμός του θα ξεπέρναγε το r. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει $r = r' = 0$ και επομένως υποχρεωτικά ο γράφος θα πρέπει να είναι ο κενός. Αν $r' = r-1$ τότε ο κόμβος που περισσεύει θα πρέπει να συνδεθεί με όλους τους αλλους $n-1$ κόμβους διαφορετικά θα έμενε κόμβος που δεν θα είχε βαθμό r. Έτσι υποχρεωτικά $r = n-1$ και ο γράφος είναι ο πλήρης n κορυφών.

Έτσι ο γράφος είναι υποχρεωτικά είτε κενός είτε πλήρης.