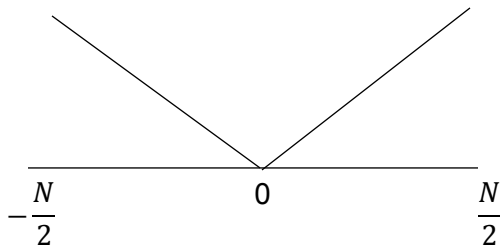


תשובות למבחן 1, 2014

1) שאלת פורייה.

(1) בתחום התדר, הגדרנו גזירה בכיוון ציר x כך: $u \cdot \frac{2\pi i}{N} \cdot F(u, v)$. כלומר, כל מקדם בתדר (u, v) הוכפל ב: $D(u, v) = \frac{2\pi i}{N} \cdot u$ ולכן חתך מספקטרום פורייה של D ייראה כך: $|u| \cdot \text{const}$ או בצורת גרף



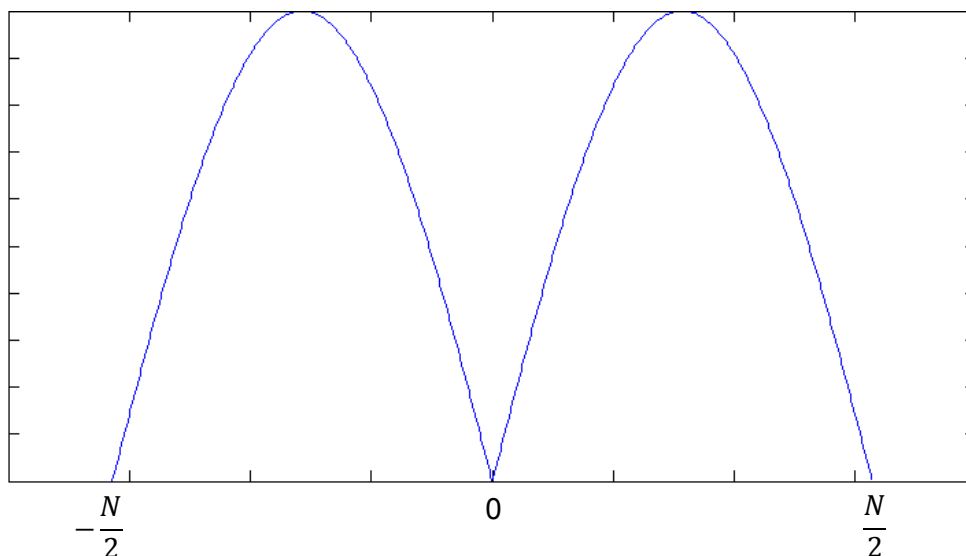
(2) לפי ההגדרה, טרנספורם פורייה של $[1 \ 0 \ -1]$ הפועל על תמונה ברוחב N הוא:

$$e^{\frac{-2\pi i u}{N}} - e^{\frac{2\pi i u}{N}} = \cos\left(\frac{-2\pi u}{N}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi u}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi u}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi u}{N}\right) = -2i \sin\left(\frac{2\pi u}{N}\right)$$

ולכן ספקטרום פורייה שלו הינו:

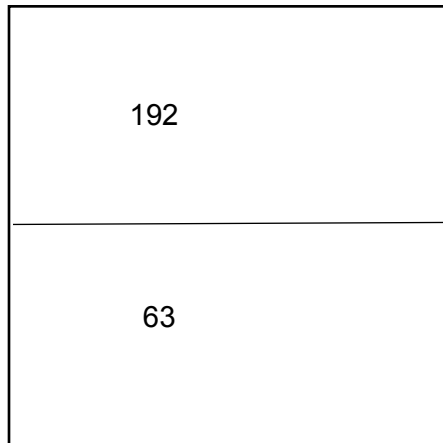
$$\left| -2i \sin\left(\frac{2\pi u}{N}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{2\pi u}{N}\right) \right|$$

או בצורת גרף:



(2) שאלת היסטוגרמה+קוונטיזציה.

(1) א. תמונה A: מכוון שבכל דרגת אפור יש מספר שווה של פיקסלים, שיווי ההיסטוגרמה לא ישנה כלום ולכן נקבל חלוקה לחצי מכמות הפיקסלים מתחת ל-127 וחצי מכמות הפיקסלים מעל ל-127 עם ממוצע $63 = \frac{0+127}{2}$ ו- $192 = \frac{128+155}{2}$ בהתאמה.



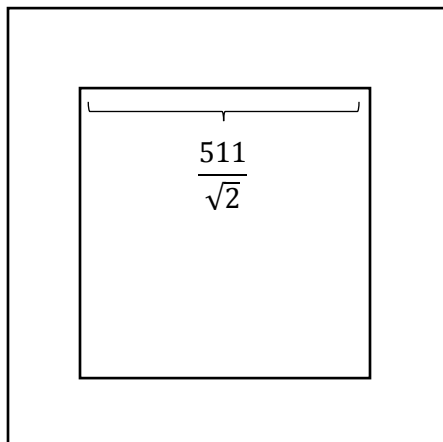
תמונה B: אנחנו לא יודעים בדיוק מה יעשה השווי אבל אנחנו יכולים להגיד בוודאות שהגדרת הסף ב-127 אחרי השוויון תעביר **מחצית** מהפיקסלים לצד אחד של הסף ו**מחצית** מהפיקסלים לצד השני. כלומר נקבל ריבוע מרכזי ששטחו **מחצית** משטח התמונה. אורך צלעו של הריבוע המרכזי הוא: $\frac{511}{\sqrt{2}}$.
הסף בדרגת האפור המקורית הוא בערך 180, לפי 255 פחות מחצית אורך הצלע הפנימית (זהו הערך שעבר לאחר השיווי ל-127).

ממוצע פנימי:

$$M_1 = \frac{2}{511^2} \sum_{i=0}^{180} h(i) \cdot i = \frac{2}{511^2} \sum_{i=0}^{180} (8 \cdot i) \cdot i$$

ממוצע חיצוני:

$$M_2 = \frac{2}{511^2} \sum_{i=181}^{255} h(i) \cdot i = \frac{2}{511^2} \sum_{i=181}^{255} (8 \cdot i) \cdot i$$



ב. שגיאה בתמונה A:

$$\sum_{i=0}^{127} 256 \cdot (i - 64)^2 + \sum_{i=127}^{255} 256 \cdot (i - 192)^2$$

שגיאה בתמונה B:

$$\sum_{i=0}^{180} 8 \cdot i \cdot (i - M_1)^2 + \sum_{i=181}^{255} 8 \cdot i \cdot (i - M_2)^2$$

(2) תמונה A: לא ניתן לשפר קוונטיזציה. כי אם נסתכל באיטרציות של הקוונטיזציה האופטימלית כל איזור מיוצג ע"י הממוצע המשוקלל והגבול בין האיזורים נמצא כבר באמצע $\frac{192+63}{2} = 127$

תמונה B: כן, ע"י קוונטיזציה אופטימלית. כל איזור מיוצג ע"י הממוצע המשוקלל שלו אבל הגבול (~180) בין האיזורים לא נמצא באמצע בין הממוצעים. ולכן, נקבל בתהליך הקוונטיזציה האופטימלית איטרציות שממשיכות להתכנס לשגיאה קטנה יותר. הממוצע המשוקלל בריבוע הפנימי יותר רחוק מהגבול (~180) ולכן הגבול יתקרב אליו. כלומר, נקבל שוב ריבוע בתוך ריבוע, אך כאשר הריבוע הפנימי יותר קטן מסעיף 1א.

