



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

第三节 初等函数

一、基本初等函数

二、初等函数

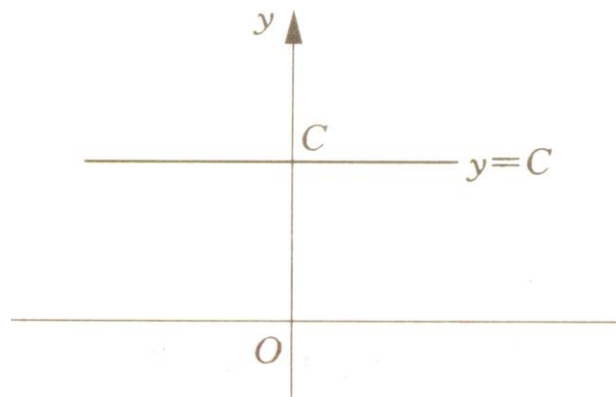




一、基本初等函数

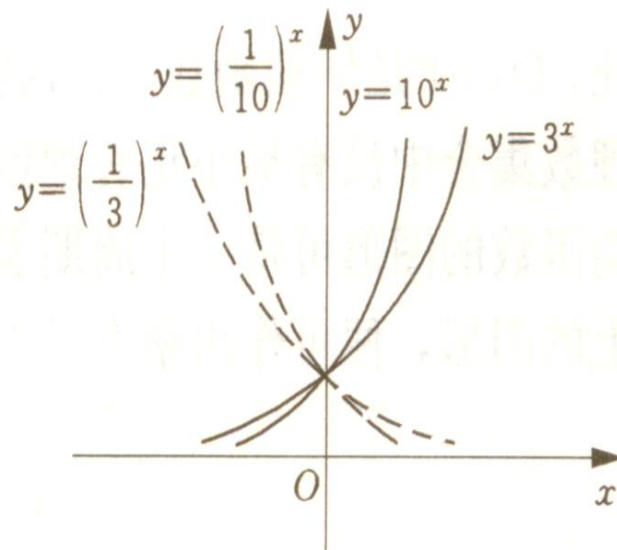
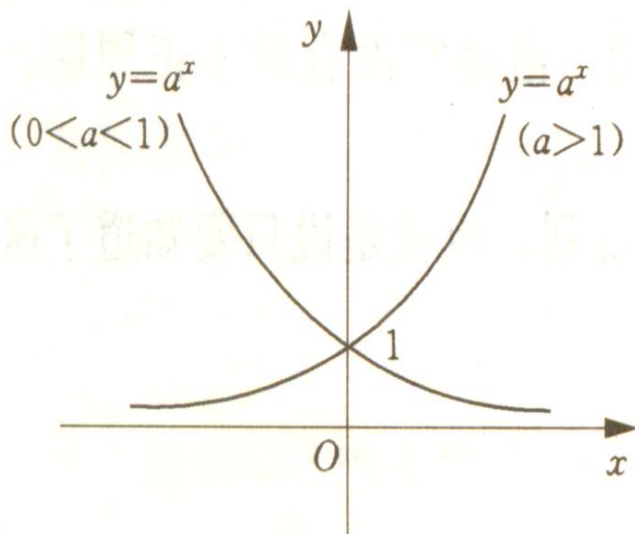
(一) 常数函数

$$y = C, x \in (-\infty, +\infty).$$



(二) 指数函数

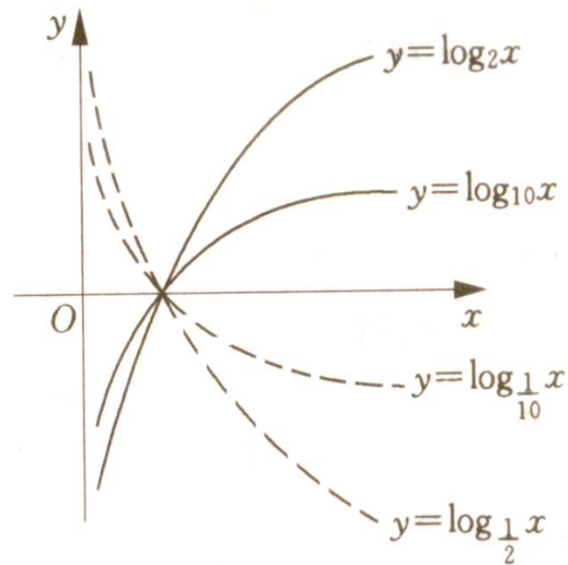
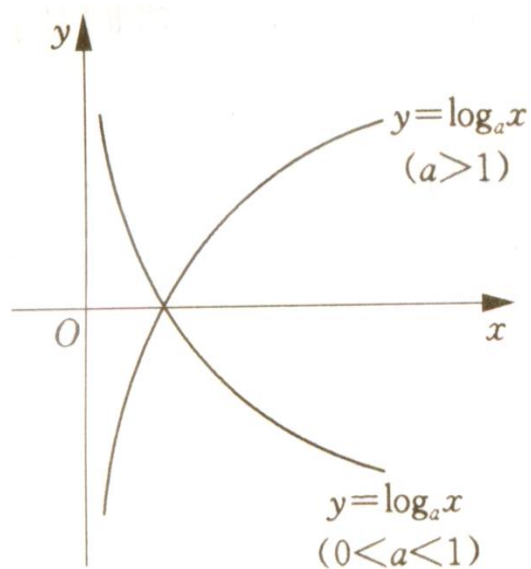
$$y = a^x (a > 0, a \neq 1), x \in (-\infty, +\infty).$$





(三) 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1), \quad x \in (0, +\infty).$$

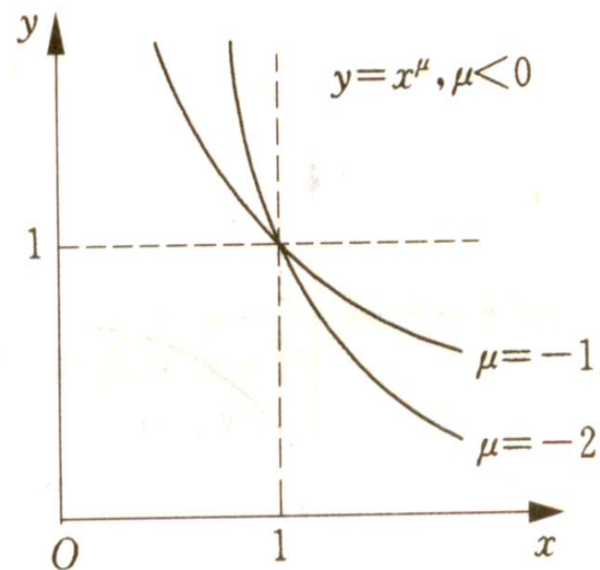
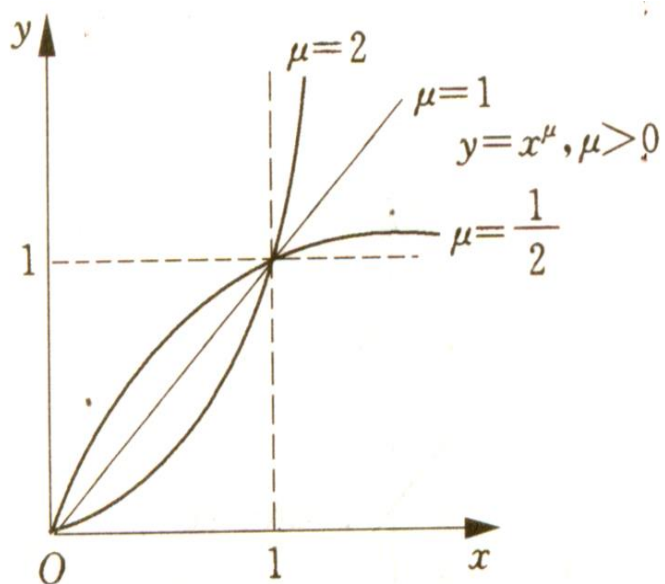


对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数,



(四) 幂函数

$$y = x^{\mu}, \mu \neq 0.$$



幂函数的定义域有点复杂。



(五) 三角函数(书上P13)

表 1-3-1 三角函数以及特性

三角函数	定义域	值域	有界性	周期	奇偶性
$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	有界函数	2π	奇函数
$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	有界函数	2π	偶函数
$y = \tan x$	$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, +\infty)$	无界函数	π	奇函数
$y = \cot x$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, +\infty)$	无界函数	π	奇函数
$y = \sec x$	$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	无界函数	2π	偶函数
$y = \csc x$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	无界函数	2π	奇函数

上表中的 \mathbb{Z} 为整数集.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$$



(六) 反三角函数 (书上P13)

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1], y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$

(2) 反余弦函数 $y = \arccos x, x \in [-1, 1], y \in [0, \pi];$

(3) 反正切函数 $y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$

(4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x, x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, \pi).$



类型：

1. 反正弦函数：

正弦函数 $y = \sin x$ 在其**主值区间** $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上有反函数，

而值域 $y \in [-1, 1]$ ，其反函数记为 $y = \arcsin x$ ，

反函数的定义域为 $x \in [-1, 1]$ ，值域为 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

注： 正弦函数在其他的单调区间有反函数吗？

有！

其反函数的解析表达式如何写？



例. 正弦函数 $y = \sin x$ 在其 **区间** $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上的反函数的解析式为_____

解: $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow -x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

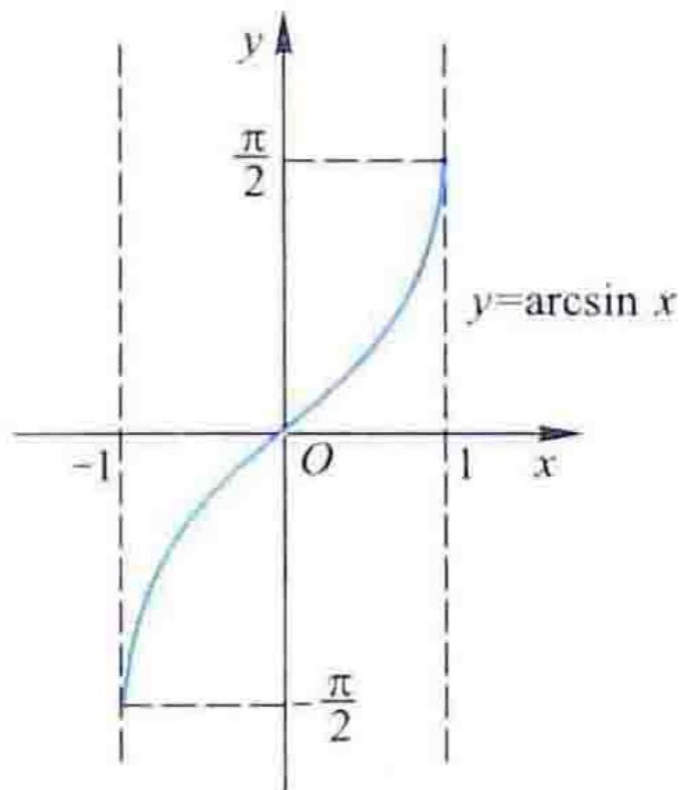
$$\Rightarrow y = \sin x = \sin(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \pi - x = \arcsin y \Rightarrow x = \pi - \arcsin y$$

$$\Rightarrow \text{此区间上反函数解析式: } y = \pi - \arcsin x$$



$y = \arcsin x$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上图形



$y = \arcsin x$ 的性质：单调增加、有界、奇函数、非周期



2. 反余弦函数:

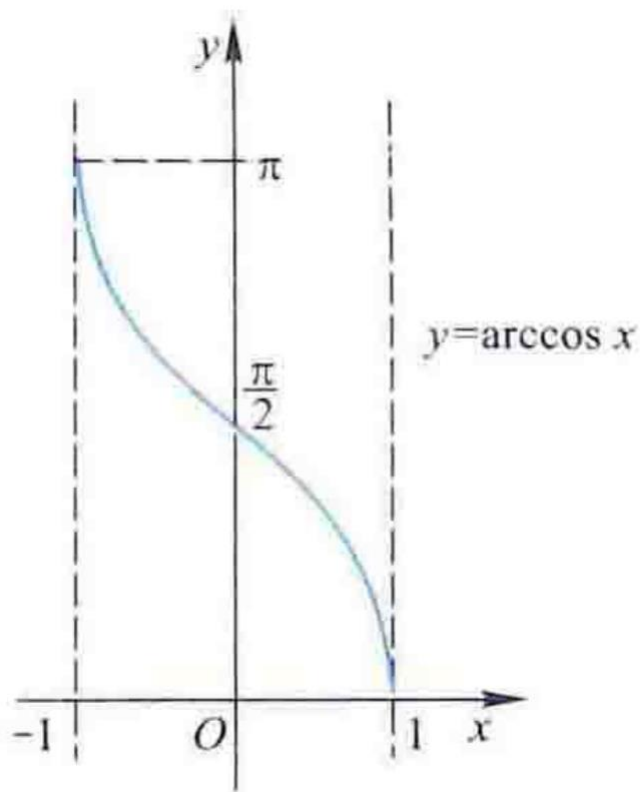
余弦函数 $y = \cos x$ 在其主值区间 $x \in [0, \pi]$ 上有反函数,

而值域 $y \in [-1, 1]$, 其反函数记为 $y = \arccos x$,

反函数的定义域为 $x \in [-1, 1]$, 值域为 $y \in [0, \pi]$



$y = \arccos x$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上图形



$y = \arccos x$ 的性质：单调减少、有界、非奇非偶、非周期



3. 反正切函数:

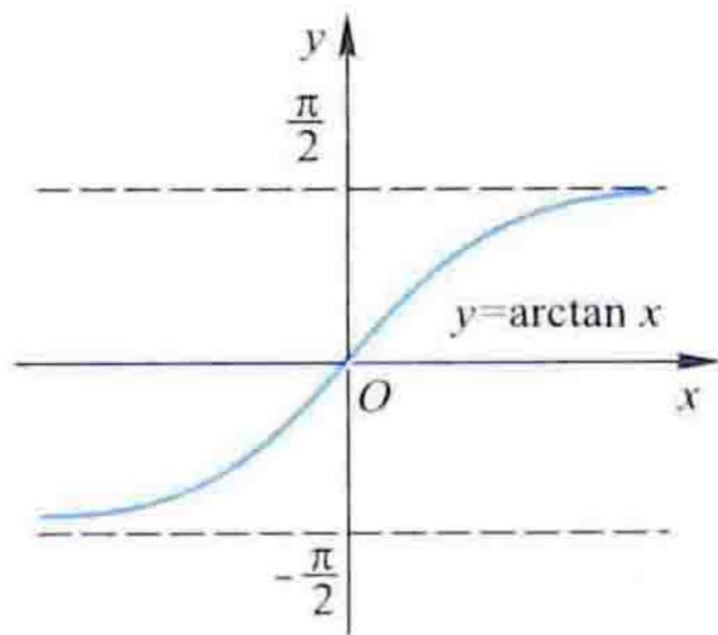
正切函数 $y = \tan x$ 在其主值区间 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内有反函数,

而值域 $y \in (-\infty, +\infty)$, 其反函数记为 $y = \arctan x$,

反函数的定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



$y = \arctan x$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上图形



$y = \arctan x$ 的性质：单调增加、有界、奇函数、非周期



4. 反余切函数:

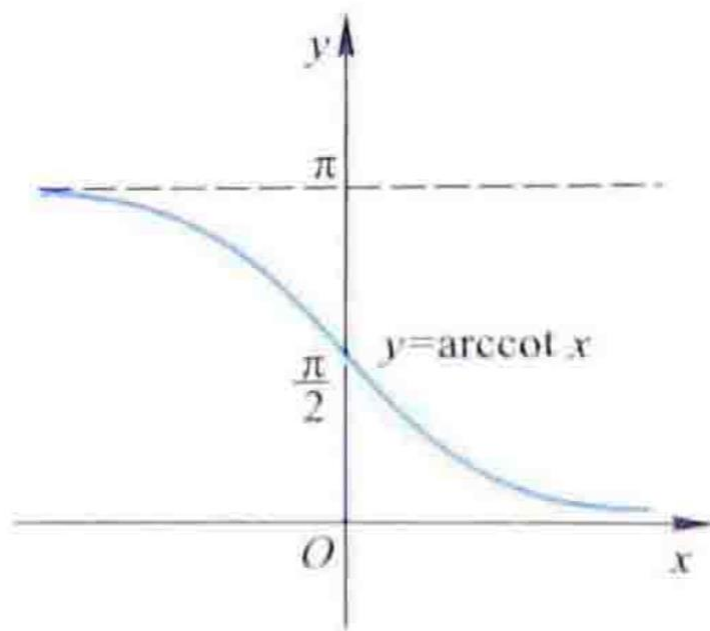
余切函数 $y = \cot x$ 在其主值区间 $x \in (0, \pi)$ 内有反函数,

而值域 $y \in (-\infty, +\infty)$, 其反函数记为 $y = \operatorname{arccot} x$,

反函数的定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为 $y \in (0, \pi)$



$y = \operatorname{arccot} x$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上图形



$y = \operatorname{arccot} x$ 的性质：单调减少、有界、非奇非偶、非周期



二、初等函数

(一) 初等函数

定义 1. 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的，并且可以用一个表达式表示的函数称为**初等函数**.

如

$$y = \frac{x^2}{x-1}, \quad y = \sin(2x+1), \quad \underline{y = |x| = \sqrt{x^2}} = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

等均为初等函数.

初等函数