第一章　函　　数

预备知识：

1. 集合： 定义、表示法、运算及其法则和几个特殊集合

2. 区间： 设$a,b\in R, a<b$

有限区间：$[a,b]$、(a,b)、$[a,b)$、$(a,b]$

无限区间：$(-\infty,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b]$

注：$-\infty,+\infty$为抽象符号，不表示具体数字.

3. 邻域：

（1）数轴上：

称$\{x \mid |x-a|<\delta, a\in R, \delta>0\}$是以$a$为中心$\delta$，$\delta$为半径的点$a$的$\delta-$邻域，记为：$U(a,\delta)=(a-\delta, a+\delta)$

注：$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta, a\in R, \delta>0\}$——去心邻域

（2）平面上：

$$\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{(x,\ y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta, P_0(x_0,y_0),\ \delta>0\}$$

或$\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|P_0P|<\delta, P_0(x_0,y_0), \delta>0\}$

（3）空间上：

$$\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{(x,\ y,z)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta,$$

$$P_0(x_0,y_0,z_0),\delta>0\}$$

一、 函数的概念

1、函数的定义

定义 1 设 x 和 y 为两个变量，D 为一非空的数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的对应法则 f，总有确定的数值与之对应，就称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**. 函数值的集合 $\{f(x)\,|\,x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

注 1： 函数的记法除上述 $y=f(x)$ 外，通常还记为

$$y=g(x), y=\varphi(x), y=F(x), y=\Phi(x) \text{ 等等.}$$

注 2： 函数的**定义域**是指使得函数有意义的自变量的取值范围.

定义域确定方法：使解析表达式有意义；实际情况。

定义域表示法：集合、区间或邻域

注 3： **同一函数** 如果两个函数的定义域相等，对应法则相同，就称此两个函数为同一函数.

如： $y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 与 $s = t^2, t \in [0, +\infty)$ 为同一函数.

注 4： 称平面点集 $C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 为函数 $y = f(x)$ 的**图形**，

$y = f(x)$ 称为 C 的**方程**.

注 5： 单值函数与多值函数.

如： $y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 为单值函数； $x^2 + y^2 = 1$ 为多值函数.

2、 几种常用的函数表示

（一） 显函数，如：$y=f(x)$

（二） 分段函数

设 D_1，D_2 是两个互不相交的实数集合，$\varphi(x)$和$\psi(x)$是两个不同的表达式，就称定义在集合 $D_1 \cup D_2$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in D_1,\\ \psi(x), & x\in D_2\end{cases}$$

有线段
无限段

为分段表示的函数．还可以更多分段．

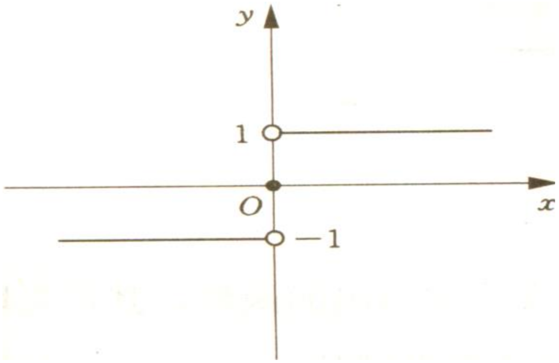
例如：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

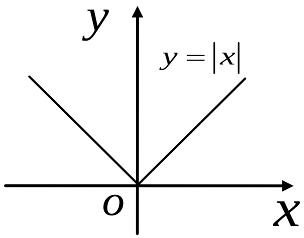
两种
类型

例 1. 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

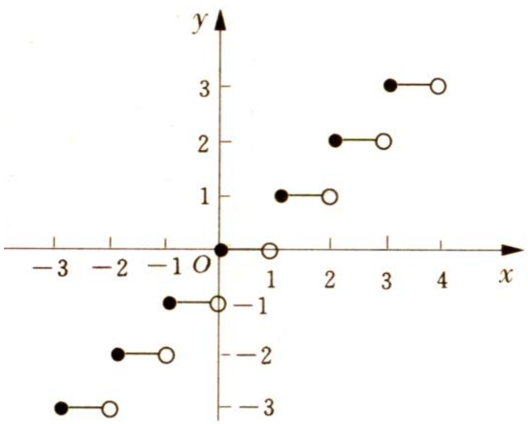


其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$.



绝对值函数 $|x|==\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}=x\operatorname{sgn}(x)$,

例 2. 取整函数 $y=[x]$,



对于任意的实数 x，$[x]$表示取不超过 x 的最大整数. 如$[2.1]=2, [\pi]=3, [-1]=-1, [-1.5]=-2$.

定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是整数集$\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

（三）隐函数

隐函数 指通过一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定变量 y 与 x 之间的函数关系.

例如：

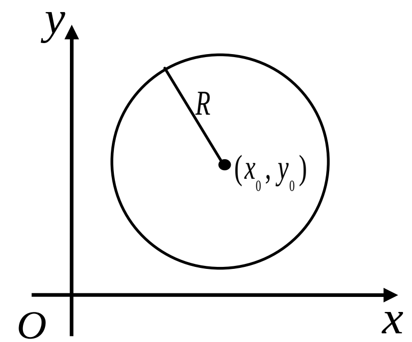
$$x+y=1,\quad x^2+y^2=1,\quad x^3+y^3-3axy=0。$$

（四）参变量函数

参变量函数 **通过**引入第三个变量（例如 t），通过分别建立 x 与 t 和 y 与 t 之间的函数关系 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$，表达 y 与 x 的函数关系，这类函数称为**参变量函数**，其中 t 称为**参数**，即

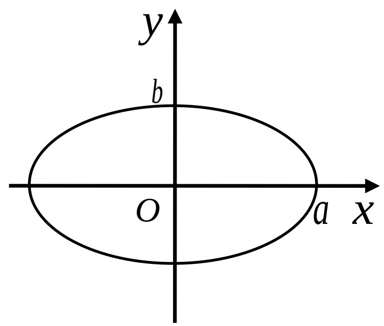
$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in I(I\text{为非空数集}).$$

(1) 圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$



参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$.

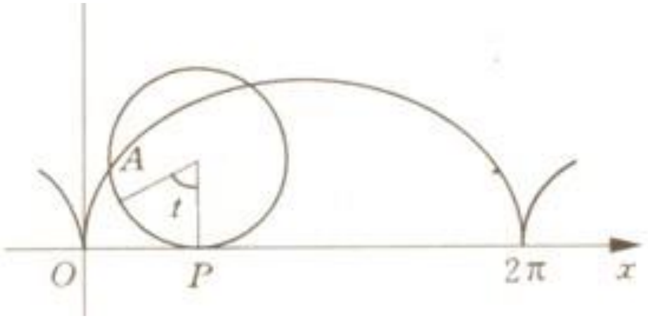
(2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



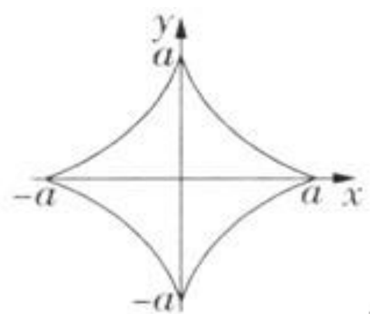
参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$.

(3) 摆线

$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $t\in[0,+\infty)$.



(4) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$



参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta, \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$ 其中 $a>0$

3、 复合函数与反函数

（一）复合函数

定义 2. 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，且其值域是 U 的子集，因而 $y=f(\varphi(x))$ 是定义在 D 上的函数，称之为以 $y=f(u)$ 为外函数，以 $u=\varphi(x)$ 为内函数的**复合函数**，变量 u 称为**中间变量**.

例如 外函数 $y=\sin u$ 和内函数 $u=2x$ 复合，所得复合函数为

$$y=\sin(2x).$$

注意：$y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 不能复合，因为表达式 $\ln(-x^2)$ 对任何实数 x 都没有意义.

多个函数复合

例如，三个函数

$$y = \sin u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = e^x + 1$$

产生的复合函数是

$$y = \sin(\sqrt{e^x + 1}), \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

复合函数的分解

重点

例如，复合函数

$$y = 2^{\arctan(x^2+1)}$$

是由下列三个简单函数复合而成的

$$y = 2^u, u = \arctan v, v = x^2 + 1.$$

（二） 反函数

定义 3． 设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对其值域 Y 中的任一值 y，都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D 中确定惟一的一个 x 与它对应，便得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $\boxed{x=f^{-1}(y)}$，或 $\boxed{y=f^{-1}(x)}$.

x是自变量
y是函数

例如 $y=x^3$ 的反函数为

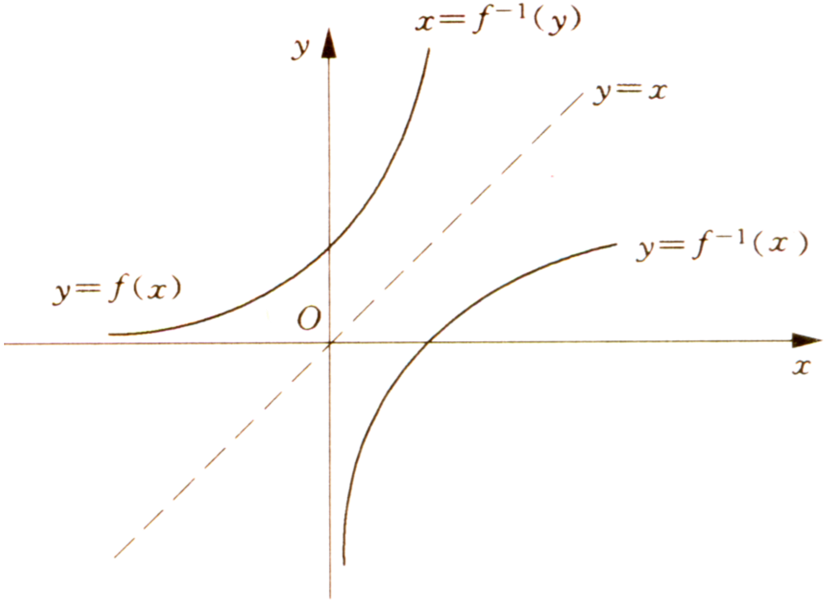
x是函数
y是自变量

$$x=y^{\frac{1}{3}} \text{ 或 } y=x^{\frac{1}{3}}.$$

注意：$y=x^2$ 没有反函数，因为 $y=x^2$ 中，x 与 y 并非一一对应.

反函数存在条件 函数 $y=f(x)$ 存在反函数的条件是 f 在 D 与 Y 之间建立了一个一一对应的关系.

设 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，或 $y=f^{-1}(x)$，则其图形的关系为



反函数的运算　设 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，则

$$f^{-1}(f(x))=x,\ \ x\in D;\qquad f(f^{-1}(y))=y,\ \ y\in Y.$$