

# 第四节 一些常用等式和不等式

- 一、三角函数的基本不等式
- 二、均值不等式
- 三、三角函数和反三角函数有关等式





### 一、 三角函数的基本不等式

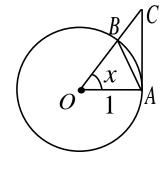
**结论 1.** 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时, 有

$$\sin x < x < \tan x$$

证 做半径为1的圆,如图 1-4-1,

由于 三角形 OAB 的面积 < 扇形 OAB 的面积





故得

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$
,即得 $\sin x < x < \tan x$ .

结论 2. (1) 
$$\sin x \begin{cases} < x, & x > 0, \\ = x, & x = 0, \\ > x, & x < 0, \end{cases}$$
 (2)  $|\sin x| \le |x|$ .   
证 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,由结论 1,有  $\sin x < x$ ;

当
$$x \ge \frac{\pi}{2}$$
时, $\sin x \le 1 < \frac{\pi}{2} \le x$ ;

所以, 当x > 0时,有 $\sin x < x$ .

由于  $\sin x$  与 x 均为奇函数, 故当 x < 0 时, 有  $\sin x > x$ .

又当x = 0时,有 $\sin x = 0 = x$ ,故证得(1)成立.

同理可证(2)成立.



#### 二、 均值不等式

结论 3. 对任意 n 个正数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,有

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

其中 
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$
 和  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$  分别称为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的

算术平均值和几何平均值.

证明从略。



## 三、 三角函数和反三角函数有关等式

### 结论4. (和差化积)

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \le x \le 1.$$

结论 6. 
$$\arctan x + \operatorname{arc} \cot x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty$$
.

#### 结论7

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$