# 第五节　极坐标简介

一、极坐标系

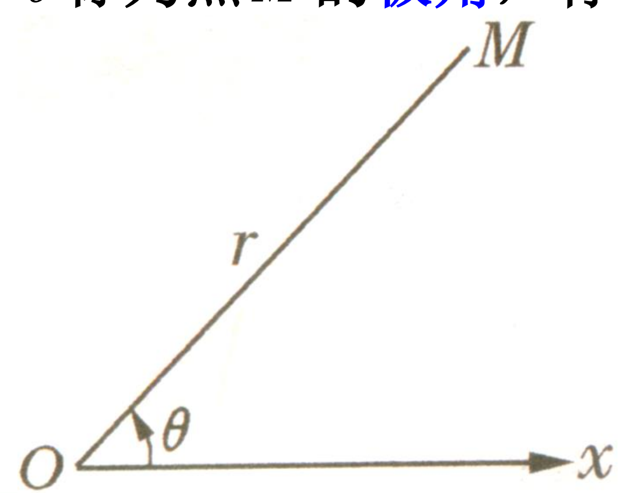
二、极坐标方程

三、直角坐标系和极坐标系的关系

# 一、 极坐标系

**定义 1.** 在平面内取一个定点 $O$，称为极点，引一条射线 $Ox$，称为极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向），所建立的坐标系称为极坐标系.（如图）

对于平面内任意一点 $M$，用 $r$ 表示线段 $OM$ 的长度，$\theta$ 表示从 $Ox$ 到 $OM$ 的角度，$r$ 称为点 $M$ 的极径，$\theta$ 称为点 $M$ 的极角，有序数组 $(r,\theta)$ 称为 $M$ 的极坐标



建立极坐标系后，对于给定的$r$和$\theta$，就可以在平面内确定惟一一点$M$；反过来，给定平面内一点$M$，也可以找到它的极坐标$(r,\theta)$．但和直角坐标系不同的是，平面内任意一点的极坐标可以有无数种表示法.

**例如**：对任意的$\theta$，$(0,\theta)$均表示极点$O$．又如$(6,\frac{\pi}{3})$以及$(6,\frac{\pi}{3}+2\pi)$和$(6,\frac{\pi}{3}-2\pi)$也都表示同一点．这是因为$(r,\theta)$和$(r,2n\pi+\theta)$（$n$为任意整数）是同一点的极坐标．但如果限定$0\le\theta<2\pi$或$-\pi<\theta\le\pi$，那么**除极点外，平面内的点和极坐标就一一对应了**.

**注：** 一般$r\in[0,+\infty),\theta\in[0,2\pi]$

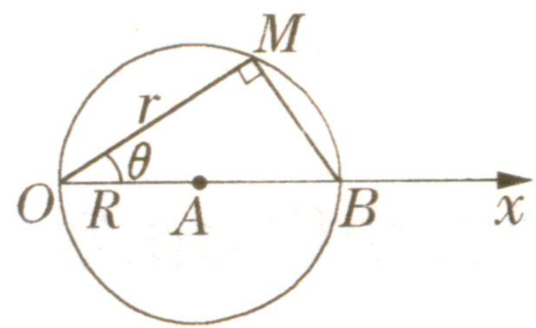
# 二、 极坐标方程

在极坐标系中，曲线可以由含有 $r,\theta$ 这两个变量的方程 $\varphi(r,\theta)=0$ 来表示，这种方程称为曲线的**极坐标方程.**

**例 1.** 圆心在极点 $O$，半径为 $R$ 的圆的极坐标方程为

$$r=R.$$

**例 2.** 圆心是 $A(R,0)$，半径为 $R$ 的圆的极坐标方程为 $r=2R\cos\theta$ .

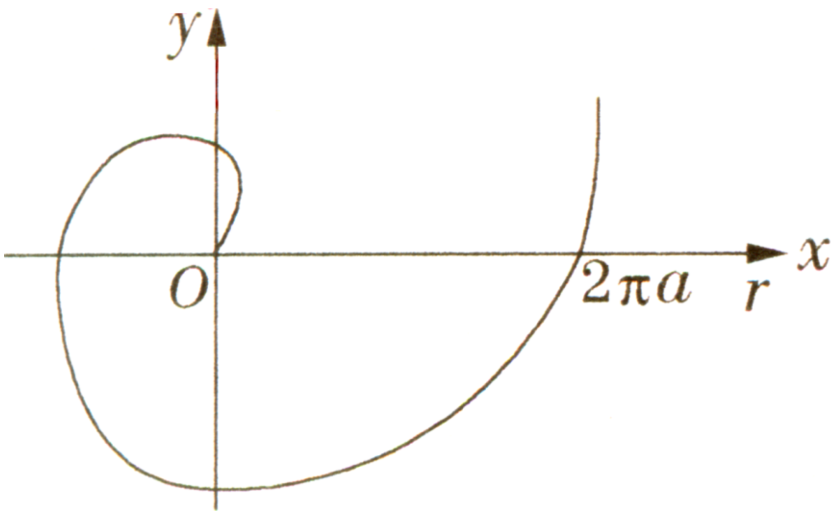



提示：$|OM|=|OB|\cos\theta$ .

# 一些常用的曲线极坐标方程及其图形

## (1) 阿基米德(Archimedes)螺旋线

$$r = a\theta \; (a > 0)$$



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

$$r=a(1+\sin\theta)$$
$$r=a(1-\sin\theta)$$

## (2) 心形线

$$r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$$

（见图 1）

$$r=a(1-\cos\theta)\ (a>0)$$

（见图 2）

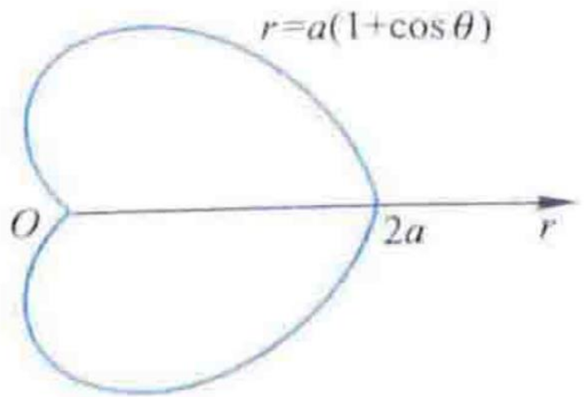



图 1

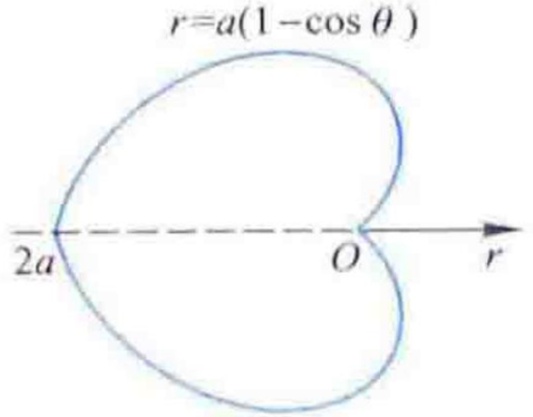
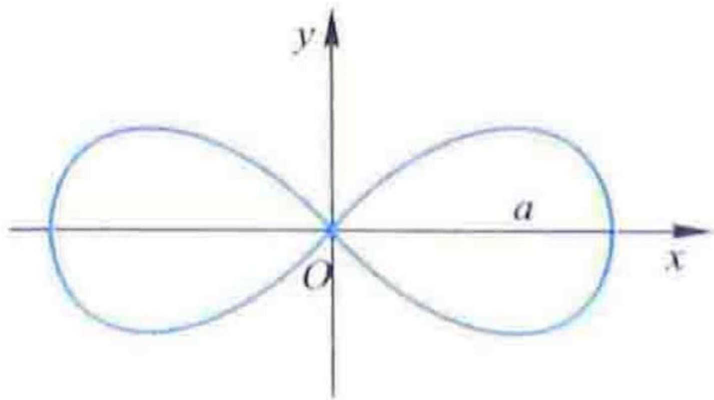



图 2

## (3) 双纽线

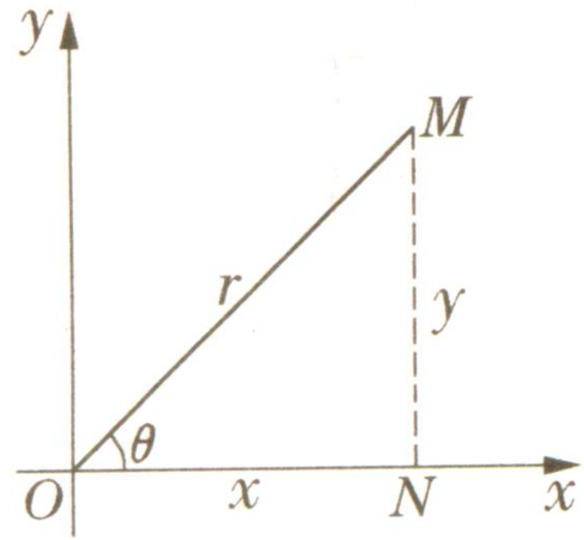
$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \ (a > 0)$$ （如图）




$$r^2 = a^2 \sin 2\theta$$
$$(a > 0)$$

# ★三、 直角坐标系和极坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$ 。




$$r^2 = x^2 + y^2,\qquad \tan\theta = \frac{y}{x}\,(x \neq 0)$$ 。

其中结合 $\tan\theta$ 的值以及点 $M$ 所在的象限，确定 $\theta$ 的取值.

**注：**上述关系式的建立的前提是

1、原点与极点重合；

2、$x$ 轴正向与极轴重合；

例 3. (1) 将点 $M$ 的极坐标 $(4,\dfrac{\pi}{3})$ 化为直角坐标；

(2) 将点 $M$ 的直角坐标 $(-2,2)$ 化成极坐标.

解 (1) $x = 4\cos\dfrac{\pi}{3} = 2, y = 4\sin\dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$

所以点 $M$ 的直角坐标为 $(2,2\sqrt{3})$.

(2) $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \tan\theta = -1$，因为点 $M$ 在第二象限，

故取为 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$，于是点 $M$ 的极坐标为 $(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4})$.

**例 4.** 将直角坐标方程 $y=1$ 表示的直线化为极坐标方程.

**解** 将直角坐标与极坐标的关系代入原方程，得

$r\sin\theta=1$，所以该直线的极坐标方程为 $r=\dfrac{1}{\sin\theta}$.

**同理**，直角坐标原方程 $x=1$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

**例 5.** 将极坐标方程 $r = 2\cos\theta$ 表示的曲线化为直角坐标方程.

**解** 将原方程化为 $r^2 = 2r\cos\theta$，

利用极坐标与直角坐标系的关系，得其直角坐标方程为

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

该曲线为圆心在 $(1,0)$，半径为 $1$ 的圆.

**经常将极坐标系问题转化为直角坐标系中参数方程问题.**

对于极坐标系中的曲线$r = r(\theta)$，在直角坐标系中表示为

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases}$$ 其中$\theta$为参数.

例如：极坐标系中的曲线$r = e^{\theta}\ (\theta \geq 0)$，在直角坐标系中表示为:

$$\begin{cases} x = e^{\theta}\cos\theta, \\ y = e^{\theta}\sin\theta, \end{cases}$$ 其中参数$\theta \geq 0$.