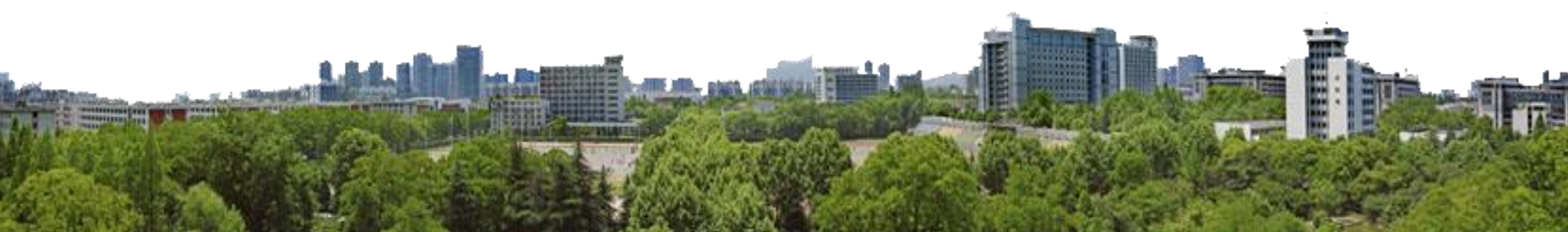
第二节　函数的几种特性

一、　有界函数

二、　单调函数

三、　奇函数和偶函数

四、　周期函数



理论
证明

一、 有界函数

定义 1. 设 $y=f(x)$,定义域 D，数集 $X\subset D$， $\boxed{若\exists M>0}$,使对于 $\boxed{\forall x\in X}$，都有 $|f(x)|\le M$，就称函数 $f(x)$ 在 X 上（内）**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上（内）的**有界函数**．否则是无界的

注 1： $f(x)$ 是 X 上（内）的无界函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\boxed{\forall M>0}$（不论 M 多么大），总 $\boxed{\exists x_0\in X}$,使 $|f(x_0)|>M$

例 1. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

证 对 $\forall M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，则有 $|f(x_0)|=\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$，

故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

定义 2. 设 $y=f(x)$,定义域 $\boldsymbol{D}$，数集 $\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{D}$，如果 $\exists M$（或 m），使对于 $\forall\, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$，都有 $f(x)\le M$（或 $f(x)\ge m$），就称函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上（内）**有上界**（或**有下界**），并称 M（或 m）为函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上（内）的一个上界（或下界）.

例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界 $m=0$，但没有上界.

注 2: 如果函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上（内）有界（或有上界或有下界），则函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上（内）的界（或上界或下界）不惟一.

有界的充要条件 函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上(内)有界函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $\boldsymbol{X}$ 上(内)既有上界，又有下界.

二、 单调函数

定义 3. 设 $y=f(x)$,定义域 D，区间 $I\subset D$，如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），就称 $f(x)$ 是区间 I 上（内）的**单调增加函数**（或**单调减少函数**），也称 $f(x)$ 在 I 上（内）**单调增加**（或**单调减少**）.

注 1： 单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**.

注 2： 如果对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\le f(x_2)$（或 $f(x_1)\ge f(x_2)$），就称 $f(x)$ 在 I 上（内）**单调不减**（或**单调不增**）.

定理 1. 单调递增（减）的函数必有反函数，且其反函数也是单调递增（减）函数.

三、奇函数和偶函数

定义 4. 设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即当 $x \in D$ 时,均有 $-x \in D$),如果对 $\forall x \in D$,总有 $f(-x) = -f(x)$ （或 $f(-x) = f(x)$ ），就称 $f(x)$ 是**奇函数**（或**偶函数**）.

例如: $x, x^3, \sin x, \operatorname{sgn}(x)$ 等均为奇函数;

$1, x^2, \cos x, |x|$ 等均为偶函数.

从几何上看,

奇函数的图形关于原点对称,

偶函数的图形关于 y 轴对称.

四、周期函数

定义 5. 设 $f(x)$ 的定义域为 D，如果 $\exists T>0$，对任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，就称 $f(x)$ 是**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

注 1： 如果 T 是周期函数 $f(x)$ 的周期，则 $2T,3T,\cdots$ 都是 $f(x)$ 的周期．通常周期函数的周期是指它的最小正周期（如果存在的话）.

例如：函数 $y=\sin x$ 的周期为 2π，且 2π 为它的最小正周期；

函数 $y=|\sin x|$ 的周期为 π，且 π 为它的最小正周期.

从几何上知，

周期函数的图形可将一个周期上的图形逐段平移而得到，即只要知道了函数在一个周期上的图形，便可作出整个函数的图形.