北京大学线性代数 B 期末试题
2021-2022 年度第一学期

考试时间：2022 年 1 月 5 日上午

1. (20 分) 设实对称矩阵

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & a \end{bmatrix}.$$

已知 -5 是 A 的重数为 2 的特征值。

(1) 求 a 的值.

(2) 求一个正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

2. (15 分) 令 $\alpha_1 = (1,2,1,0)$,$\alpha_2 = (-1,1,1,1)$,$\beta_1 = (2,-1,0,1)$,$\beta_2 = (1,-1,3,7)$。求向量 α_1, α_2 生成的子空间与由向量 β_1, β_2 生成的子空间的交的基。

3. (15 分) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的，求 t 的取值范围。

4. (10 分) 设 A, B 分别为 $s\times n$,$n\times s$ 矩阵，证明：$|I_s - AB| = |I_n - BA|$。

5. (10 分) 令 V 是域 k 上的 n-维线性空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基。定义 $Hom_k(V,V)$ 到 $M_{n\times n}(k)$ 映射 σ, 对于任意线性变换 $\mathcal{A} \in Hom_k(V,V)$ 都有

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha_1) \\ \cdots \\ \mathcal{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = \sigma(\mathcal{A}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

证明：

(i) σ 是线性同构。

(ii) 判断对于任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Hom_k(V,V)$ 是否满足 $\sigma(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$, 并给出证明或反例。

6. (10 分) 设 A 为实数域中的任一个 m 行 n 列非零矩阵。证明一定存在 m 行 m 列的正交矩阵 P 和 n 行 n 列的正交矩阵 Q，使得

$$A = P\begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q,$$

其中的 D_r 为 r 行 r 列的对角矩阵，对角元都是正数，$r = \mathrm{rank}(A)$；三个 0 表示相应大小的零矩阵。

7. (10 分) 设 n-阶方阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 证明：A 可以对角化。

8. (10 分) 令 V 是域 k 上维数大于 1 的线性空间，$V^* = Hom_k(V, k)$ 是 V 到 k 上的所有线性映射的集合。对 $i = 1, 2$ 取集合 $V^* \times V$ 中的元素 (ϕ_i, w_i) 满足如下条件：$0 \neq \phi_i \in V^*$, $0 \neq w_i \in V$ 且 $\phi_i(w_i) = 0$. 定义 V 上的线性变换 $\tau_i(v) = v + \phi_i(v)w_i$。证明：

   (i) τ_i 是可逆线性变换。

   (ii) 存在 V 上的可逆线性变换 g 使得 $g^{-1}\tau_1 g = \tau_2$。

$\lambda^3 + (9-a)\lambda^2 + (24-a)\lambda$

$+ \quad 4\lambda^2 + 4(9-a)\lambda + 4(24-a)$

$- 8\lambda \quad - 4(9-a)$