北京大学 2018-2019 学年度第 2 学期通选课期末考试试卷

逻辑导论

答卷须知

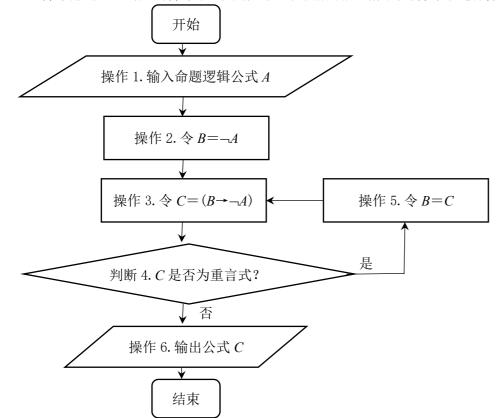
- 1. 本卷共 2 页, 卷面满分 100 分, 答题时限 170 分钟。
- 2. 请在答题纸的规定区域内作答。在试卷、草稿纸或答题纸密封区域内作答无效。
- 3. 考试结束后,请将试卷、答题纸和草稿纸按顺序整理好后上交。

约定

- 1. 为简明起见,本卷中的谓词逻辑公式 $P(t_1, \dots, t_n)$ 均简写为 $Pt_1 \dots t_n$ 。考生可自行选择简写或不简写。
- 2. 题目形式为不定项选择的,考生得分=[(选对数一选错数)×(该题分值÷正确选项数)] $_{\text{近倾取 0.5 的整数倍}}$; 最低计 0 分。

一、填空题。(共16分)

- 1. (2分)按要求对命题逻辑公式做等值变形。
- (1) 根据德-摩根律, $p \land q$ 等值于
- (2) 根据合取对取析的分配律, $\neg p \land (s \lor q)$ 等值于 ;
- (3) 用¬和∨定义→: $p \rightarrow q$ 等值于 。
- (4) 将公式 $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ 等值地化为最简(公式长度最短)。该式等值于____。
- 2. (2分)公式实质上是由符号排列组合而成的符号串。现用如下流程图所确定的规则对符号串进行操作:



分析该流程图可发现:该程序陷入死循环(即永远无法结束),当且仅当,输入的公式A为。

- 3. (3 分) 任给题逻辑公式 A, 现定义 A 的"秩" rk(A) 如下:
- I. 若 A 是命题变元,则 rk(A) = 0;
- II. 若 A 形如 $\neg B$,则 rk(A) = rk(B) + 1;

III. 若 A 形如 $(B \land C)$, $(B \lor C)$, $(B \to C)$ 或 $(B \leftrightarrow C)$, 则 $rk(A) = \max\{rk(B), rk(C)\} + 1$ 。其中 $\max\{rk(B), rk(C)\}$ 表示 rk(B) 和 rk(C) 中较大的一个。

根据上述定义填空:

- $(1) rk(p \lor q \rightarrow \neg r) = \underline{\hspace{1cm}}.$
- $(2) rk(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) = \underline{\hspace{1cm}}.$
- (3) 若 rk(B) = 3,则 $rk(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ 的取值范围是
- 4. (2分)以下为将一个非第一格三段论化归为第一格的流程图。根据提示将化归步骤补充完整:



5. (2分) 现有如下无效的三段论推理:

没有一只柯基犬不是短腿的,并非有的曼赤肯猫不是短腿的,所以,有的柯基犬是曼赤肯猫。

如果将"短腿的(动物)"视为中项,则上述三段论推理整理为标准形式后,属于第_____格____式。它是无效的,因为它违反了三段论的一般规则:

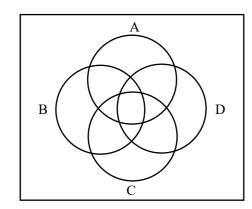
6. (3分)连线题:将下列8个公式中彼此逻辑等值的公式用线段连结起来(不等值的不要连,等值的都要连,评分适用约定2)。

 $\textcircled{4} \forall x (\forall y Rxy \rightarrow \forall y Ryx) \qquad \textcircled{5} \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$

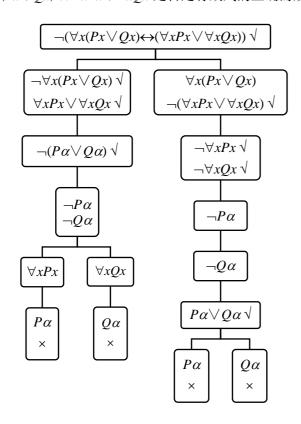
A. Pa B. $\exists x Px$ C. $\forall x Px$ D. $\exists x (Px \land Qx)$ E. $\forall x (Px \rightarrow Qx)$ F. $Oa \rightarrow Pa$

- 二、辨析题。判断下列命题的真假,然后给出支持你的判断的充分理由。没有理由或理由完全错误均不得分。 (每小题 2 分, 共 12 分)
- 8. 在使用归谬赋值法时,如果给一个公式的主联结词赋值为 1 且最后得到了无矛盾的赋值结果,则可以证明原公式是重言式。
 - 9. 在 P^N 推演中,如果前提集 Γ 可推演出 A,前提集 Δ 可推演出 $\neg A$,则前提集 $\Gamma \cup \Delta$ 一定可推演出任意公式 B。

- 10. 对当方阵中,反对关系就是矛盾关系。
- 11. 四个词项的概念外延间的逻辑关系可以用如下形式的文恩图来表示:



- 12. 设一阶公式 A(x) 和 B(x) 含有自由变元 x。如果 $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ 和 $\forall x A(x)$ 都是有效的,那么 $\forall x B(x)$ 是有效的。
 - 13. 用树形图方法检验 $\forall x (Px \lor Ox) \leftrightarrow \forall x Px \lor \forall x Ox$ 是否是有效式的正确而规范的解法如下:



图中所有的枝均封闭, 所以原公式是有效式。

三、证明题。写出必要的证明过程。(共14分)

- 14. $(8 \, f)$ 现为命题逻辑语言引进一个新的符号" \bot ",并在公式的定义中新增: \bot 是公式。并规定:对任意赋值, \bot 的值总为假。同时,在 P^N 推演系统中新增关于" \bot "的如下两条推演规则:
 - I. ⊥消去规则 (记作 \bot -): \bot \vdash A。即 \bot 可推出任意公式 A。
 - II. ⊥引入规则(记作⊥+): A, ¬A \vdash ⊥。即从 A, ¬A 可推出⊥。
 - (1) 证明: *A*↔(¬*A*→⊥)是重言式。

- (2)在增加以上规则后的 P^N 中证明: ①¬⊥是 P^N 定理; ②A ↔ (¬A → ⊥) 是 P^N 定理。(仅限使用初始规则外加以上两条规则。)
 - (3)(填空)用"→"和"⊥"定义"¬"和"△": ①¬A定义为 ; ②A△B定义为
 - 15. (6分) 构造恰当的模型,证明:
 - (1) 公式 $\exists x (Px \land Qx) \leftrightarrow \exists x Px \land \exists x Qx$ 不有效。
 - (2) 公式 $\forall x (Rxx \rightarrow \neg \exists y Rxy)$ 可满足。

四、解答题。写出必要的解答步骤及过程。(共12分)

- 16. (4分)基于主项存在假设,作文恩图验证如下三段论推理形式是否有效: MEP, MAS, 所以 SOP。
- 17. (8分)运用三段论一般规则,求大前提为特称肯定命题的所有三段论有效格式。

五、一阶形式化。根据要求运用一阶语言表达命题。(共 14 分)

- 18. $(4 \, f)$ 设一元谓词 S、P、Q 分别表示集合 S、P、Q。用一阶公式表达下列命题(谓词符号只能使用 S、P、Q):
 - (1) S 包含于 P。
 - (2) 相对于 S 而言, P 和 Q 呈反对关系。
 - (3) S和P的交集是Q。
 - (4) S和P都非空且是全异关系。
- 19. (10分)用一阶公式翻译下列自然语言的句子。要求: ①取个体域为全域; ②根据需要使用等词; ③不标注各种符号的语义解释。
 - (1) 每个人都认识一些人,但没有人被所有人认识。
 - (2) 所有的大一学生和大二学生都互相认识。
 - (3) 如果一个国家有国王,那么其国王是唯一的。
 - (4) 如果一条直线与一个平面垂直,那么这条直线与这个平面内的任意一条直线都垂直。
 - (5) 教室内恰有2个人。

六、应用题。阅读材料回答问题。(共12分)

20. (8分)现有如下三段论推理:

所有的有神论者都不是共产主义者,有的有神论者是基督教徒,所以,有的基督教徒不是共产主义者。问题: (1) 指明该三段论推理的格式。

- (2) 用一阶语言将上述推理形式化。用一元谓词S、M、P 分别表示小项、中项和大项。
- (3) 在 Q^N 中证明该推理是正确的。
- 21. (4分)某学生拒绝完成教师布置的课后习题,理由如下:这些习题如果我已经会做了,那么就根本没必要去做;如果我还不会做,那么想做也做不出来。我要么已经会做,要么还不会做。所以,做习题或者无必要,或者不可能。因此我不做习题。

问题: 从形式和内容两方面简要分析和评价该学生的上述论证。

- 七、形式推演。写出规范的推演过程。限用初始规则的题目,使用导出规则或定理应附证明。(共 20 分)
- 22. (10 分) 限用 P^N 初始规则,证明: $A \land B \leftrightarrow \neg ((B \to A) \to \neg B)$ 是 P^N 定理。
- 23. (10 分) 限用 Q^N 初始规则,证明: $(\forall xPx \rightarrow \exists xQx) \leftrightarrow \exists x(Px \rightarrow Qx)$ 是 Q^N 定理。