北京大学2016—2017学年度第2学期通选课期末试卷

逻 辑 导 论

参考答案与评分标准

1. 填空题。（共20分）

1.（3分）（1）(*p*→¬*q*)→¬*r*；（2）¬((*p*→¬*q*)→¬(¬*q*→*p*))；

（3）*p*→*p*（或((*p*→¬*q*)→¬(*q*→¬*r*))→¬((¬*p*→*q*)→¬*r*)）。

【评分细则】每空1分。与参考答案逻辑等值的仅以¬和→为联结词的公式均可得分。

2.（2分）ACEF。

【评分细则】全部选对得2分，多选或少选1项得1分；其余情况不得分。

3.（2分）A。

4.（3分）（1）所有的打印纸都是非黑色的。（2）所有黑色的（东西）都不是打印纸。（3）并非有些打印纸是黑色的。

【评分细则】每空1分。

5.（2分）（1）一；（2）OAO；（3）中项至少周延一次。

【评分细则】（1）（2）每空0.5分，（3）1分。

6.（3分）（1）；（2）；（3）。

【评分细则】每个三段论1分。

7.（2分）ABCDF。

【评分细则】全部选对得2分，多选或少选1项得1分；其余情况不得分。

8.（3分）

*D P a*

*b*

*c*

*Q R*

【评分细则】每个元素位置正确得1分。

1. 判定题。（每小题4分，共16分）

9.【解】

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *p* | *q* | *r* | *p*→*q* | *q*→*r* | (*p*→*q*)∧(*q*→*r*) | *p*→*r* | ¬(*p*→*r*) | (*p*→*q*)∧(*q*→*r*)→¬(*p*→*r*) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

由最后一列可知，原公式在有些赋值下为真有些赋值下为假，故为偶真式。

【评分细则】正确制表3分，根据表中事实得出结论（独立于表中真值判断是否正确）1分。

10.【解】

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( | ( | *p* | → | ¬ | *r* | ) | ∨ | ( | *q* | → | ¬ | *s* | ) | ) | ∧ | ¬ | ( | *p* | ∧ | *q* | → | ¬ | *r* | ∨ | *s* | ) |
|  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 0 |  |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |

将主联结词赋值为1没有矛盾，故原式可满足。

【评分细则】赋值正确3分，根据赋值事实得出结论（独立于赋值是否正确）1分。若考生判定的是原公式是否有效，赋值和结论都正确的至多得1.5分。下附判定原公式是否有效的参考答案：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( | ( | *p* | → | ¬ | *r* | ) | ∨ | ( | *q* | → | ¬ | *s* | ) | ) | ∧ | ¬ | ( | *p* | ∧ | *q* | → | ¬ | *r* | ∨ | *s* | ) |
|  |  | 1 | 0 | 0 | 1 |  | 0 |  | 1 | 0 | 0 | 1 |  |  | 0 | 0 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |

将主联结词赋值为0没有矛盾，故原式不是重言式。

11.【解】

可满足式

重言式 PN定理

“＋”号并不一定画在“重言式”和“PN定理”的公共区域之中，故该推理形式不有效。

【评分细则】作出文恩图基本样式1分，荫蔽正确1分，“＋”号位置正确1分，分析图中事实得出结论1分。

12.用树形图方法判定公式∃*x*(*Px*∨*Qx*)↔∃*xPx*∨∃*xQx*是否有效。

¬(∃*x*(*Px*∨*Qx*)↔∃*xPx*∨∃*xQx*)√

/ \

∃*x*(*Px*∨*Qx*)√ ¬∃*x*(*Px*∨*Qx*)

¬(∃*xPx*∨∃*xQx*)√∃*xPx*∨∃*xQx*√

| / \

¬∃*xPx* ∃*xPx*√∃*xQx*√

¬∃*xQx* | |

| *Pa Qa*

*Pa*∨*Qa*√ | |

/ \ ¬(*Pa*∨*Qa*)√ ¬(*Pa*∨*Qa*)√

*Pa Qa* | |

| | ¬*Pa* ¬*Pa*

¬*Pa* ¬*Qa* ¬*Qa* ¬*Qa*

× × × ×

所有的枝均封闭，故原公式的否定不可满足，即原公式有效。

【评分细则】作图3分，结论1分。若考生判定的是原公式是否可满足，作图和结论都正确的至多得2分。

1. 复合判断题。（每小题6分，共18分）

13.（6分）【解】

（1）假。取*A*为*p*，*B*为¬*p*，(*A*∨*B*)即(*p*∨¬*p*)是重言式，但*p*与¬*p*都不是重言式。

（2）真。(*A*∧*B*)是重言式⇔任意赋值下(*A*∧*B*)为真⇔任意赋值下*A*真且*B*真⇔任意赋值下*A*真且任意赋值下*B*真⇔ *A*是重言式且*B*是重言式。

14.（6分）【解】

（1）真。⇒：由∧+规则立即可得；⇐：由∧-规则立即可得。

（2）假。取*A*为*p*，*B*为*q*，*C*为*q*。则有*p*∧*q*├*q*，但没有*p*├*q*。

15.（6分）【解】

（1）真。若唯一一个不周延的项在结论中，则前提的4个项均周延，故两个前提均为E命题，与“两个否定前提不能得出结论”矛盾。故结论的2个项均周延，所以结论必为SEP。

（2）真。若前提有I命题，则至少有了2个不周延的项，矛盾。若前提有一个O命题，O命题主项不周延，故另一前提2个项均周延，所以另一前提为E命题，与“两个否定前提不能得出结论”矛盾。所以两个前提既没有I命题，也没有O命题，所以必为全称。

【评分细则】每个命题3分。其中，真值判断正确1分，理由说明正确2分。真值判断错误，但理由有合理因素的，可酌情给分。

1. 问答与分析。（共8分）

16.（8分）【答】

（1）命题*p*的真值。（1分）

（2）小甲构建了一个（第一格EAE式）三段论推理来证明“所有的正五面都没有100个面”，该推理前提真实，形式有效，故结论正确。（1分）从“所有的正五面都没有100个面”为真，推出“所有的正五面体都有100个面”为假，是基于对当关系中的反对关系（1分）的直接推理，这用在一般日常问题的推理上是正确的。

小乙用一阶谓词逻辑公式刻画命题*p*，公式的形式翻译恰当（1分），真值条件说明正确（1分），故小乙的结论也具有合理性。

两人的意见均有合理性，但结论却截然相反。问题在于，“正五面体”的外延为空（1分），而小甲用到的基于反对关系的直接推理只有在主项外延非空时才是有效的（1分），所以，（从纯粹外延逻辑的观点看，虽然有些不合直观，但）小甲的结论不正确（1分）。

【评分细则】第（1）问1分，第（2）问7分。第（2）问中，分析小甲三段论的合理性1分，指出“基于反对关系的推理”1分，分析小乙论证的合理性2分（语形、语义各1分），触及“问题的关键在于主项是否为空”1分，指出“基于反对关系的推理在主项为空时不有效”1分，总结与结论1分（结论可与参考答案的不同）。

【评分建议】若考生从空名与虚构对象、外延逻辑与内涵逻辑、反事实条件句等其他角度进行合理分析，皆可酌情给分。

1. 解答与证明。（共20分）

17.（10分）【解】

（1）∀*x*(*Px*→¬*Mx*)∧∃*x*(*Mx*∧*Sx*)→∃*x*(*Sx*∧¬*Px*)。

（2）*N0*∧∀*x*(*Nx*∧¬*x*=*0*→＜*0x*)（或*N0*∧¬∃*x*(*Nx*∧＜*x0*)）。

（3）∀*x*∀*y*(*Cx*∧*Kyx*→∀*z*(*Kzx*→*z*=*y*))。

（4）∀*x*∃*y*(*Px*→(*Qym*∧*Rxy*))，∃*y*∀*x*(*Qym*∧(*Px*→*Rxy*))。

（5）∃*x*∃*y*∃*z*(¬*x*=*y*∧¬*y*=*z*∧¬*x*=*z*∧∀*w*(*w*=*x*∨*w*=*y*∨*w*=*z*))（或∀*xPx*∧∃*x*∃*y*∃*z*(*Px*∧*Py*∧*Pz*∧¬*x*=*y*∧¬*y*=*z*∧¬*x*=*z*)∧∀*x*∀*y*∀*z*∀*w*(*Px*∧*Py*∧*Pz*∧*Pw*→*x*=*y*∨*x*=*z*∨*x*=*w*∨*y*=*z*∨*y*=*w*∨*z*=*w*)）。

【评分细则】每问2分。答案不唯一。公式出现左右括号不匹配但不引起歧义的，每个公式扣且只扣0.5分。

18.（8分）【证明】

（1）令*D*＝{0,1}，*I*(*P*)＝{0}，*I*(*Q*)＝{1}，则对任意*D*中个体*x*，都有*x*∈*I*(*P*)或*x*∈*I*(*Q*)，故∀*x*(*Px*∨*Qx*)在<*D*, *I*>上为真；但*D*中存在0不属于*I*(*Q*)，存在1不属于*I*(*P*)，故∀*xPx*∨∀*xQx*在<*D*, *I*>上为假，所以原公式在在<*D*, *I*>上为假，所以原公式不普遍有效。

（2）任取*D*，令*I*(*P*)＝*I*(*Q*)＝∅，则*D*中有元素既不属于*I*(*P*)也不属于*I*(*Q*)，故∀*x*(*Px*∨*Qx*)在<*D*, *I*>上为假，所以原公式在在<*D*, *I*>上为真，所以原公式可满足。

【评分细则】证明不有效和可满足各4分。解释构造规范、正确2分，真值条件说明正确1分，通过真值得出不有效或可满足的结论1分。

1. 形式推演构造。（共20分）

19.（4分）仅限使用PN初始规则，证明：├*A*∨(*B*∧*A*)→*A*

【证明】

(1)○*A*∨(*B*∧*A*) 假设 0.5分

(2) ○*A* 假设 0.5分

(3) *A*→*A* (2)(2)→+ 0.5分

(4) ○*B*∧*A* 假设 0.5分

(5) *A* (5)∧- 0.5分

(6) *B*∧*A*→*A* (4)(5)→+ 0.5分

(7) *A* (1)(3)(6)∨- 0.5分

(8) *A*∨(*B*∧*A*)→*A* (1)(7)→+ 0.5分

20.（4分）├∀*x*(*Px*→∃*y*(*Qy*∧*Rxy*))→∀*x*∃*y*(*Px*→(*Qy*∧*Rxy*))。

【证明】

(1)○∀*x*(*Px*→∃*y*(*Qy*∧*Rxy*)) 假设 0.25分

(2) ○*Px* *x*,假设 0.5分

(3) *Px*→∃*y*(*Qy*∧*Rxy*) *x*,(1)∀- 0.5分

(4) ∃*y*(*Qy*∧*Rxy*) *x*,(3)(2)→- 0.5分

(5) *Qa*∧*Rxa* *x*,(4)∃- 0.5分

(6) *Px*→*Qa*∧*Rxa* (3)(5)→+ 0.5分

(7) ∃*y*(*Px*→(*Qy*∧*Rxy*)) (6)∃+ 0.5分

(8) ∀*x*∃*y*(*Px*→(*Qy*∧*Rxy*)) (7)∀+ 0.5分

(9)∀*x*(*Px*→∃*y*(*Qy*∧*Rxy*))→∀*x*∃*y*(*Px*→(*Qy*∧*Rxy*)) (1)(8)→+ 0.25分

21.（6分）∀*x*∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*),∀*x*∀*y*(*Rxy*→*Ryx*),∀*x*∃*yRxy*├∀*xRxx*。

【证明】

(1) ∀*x*∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*) 前提

(2) ∀*x*∀*y*(*Rxy*→*Ryx*) 前提 0.5分

(3) ∀*x*∃*yRxy* 前提

(4) ∃*yRxy* (3)∀- 0.5分

(5) *Rxax ax*,(4)∃- 0.5分

(6) ∀*y*(*Rxy*→*Ryx*) (2)∀- 0.5分

(7) *Rxax*→*Raxx* *ax*,(6)∀- 0.5分

(8) *Raxx* *ax*,(7)(5)→- 0.5分

(9) ∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*) (1)∀- 0.5分

(10)∀*z*(*Rxax*∧*Raxz*→*Rxz*) *ax*,(9)∀- 0.5分

(11)*Rxax*∧*Raxx*→*Rxx* *ax*,(10)∀- 0.5分

(12)*Rxax*∧*Raxx* *ax*,(5)(8)∧+ 0.5分

(13)*Rxx* (11)(12)→- 0.5分

(14)∀*xRxx* (13)∀+ 0.5分

从传递性、对称性和持续性推出自反性是正确的。按如上方法（用*x*给*a*加标记，要求∀+规则不能用在有*ax*的公式上）可证出。但若按照书上所给的∃-规则的限制(ii)（用*a*给*x*加标记，，要求∀+规则不能用在有*xa*的公式上）则无法证出，如下所示，对第(13)行无法使用∀+规则。

(1) ∀*x*∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*) 前提

(2) ∀*x*∀*y*(*Rxy*→*Ryx*) 前提 0.5分

(3) ∀*x*∃*yRxy* 前提

(4) ∃*yRxy* (3)∀- 0.5分

(5) *Rxa xa*,(4)∃- 0.5分

(6) ∀*y*(*Rxy*→*Ryx*) (2)∀- 0.5分

(7) *Rxa*→*Rax* (6)∀- 0.5分

(8) *Rax* *xa*,(7)(5)→- 0.5分

(9) ∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*) (1)∀- 0.5分

(10)∀*z*(*Rxa*∧*Raz*→*Rxz*) (9)∀- 0.5分

(11)*Rxa*∧*Rax*→*Rxx* (10)∀- 0.5分

(12)*Rxa*∧*Rax* *xa*,(5)(8)∧+ 0.5分

(13)*Rxx* *xa*,(11)(12)→- 0.5分

(14)∀*xRxx* (13)∀+（错误） 0.5分

若此问题不解决，可暂时调整为下题。难度差别不大，但理论意义差一些。

21'.（6分）∀*x*∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*),∀*x*∀*y*(*Rxy*→*Ryx*), ∃*y*∀*xRxy*├∀*xRxx*。

【证明】

(1) ∀*x*∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*) 前提

(2) ∀*x*∀*y*(*Rxy*→*Ryx*) 前提 0.5分

(3) ∃*y*∀*xRxy* 前提

(4) ∀*xRxa* (3)∃- 0.5分

(5) *Rxa* (4)∀- 0.5分

(6) ∀*y*(*Rxy*→*Ryx*) (2)∀- 0.5分

(7) *Rxa*→*Rax* (6)∀- 0.5分

(8) *Rax* (7)(5)→- 0.5分

(9) ∀*y*∀*z*(*Rxy*∧*Ryz*→*Rxz*) (1)∀- 0.5分

(10)∀*z*(*Rxa*∧*Raz*→*Rxz*) (9)∀- 0.5分

(11)*Rxa*∧*Rax*→*Rxx* (10)∀- 0.5分

(12)*Rxa*∧*Rax* (5)(8)∧+ 0.5分

(13)*Rxx* (11)(12)→- 0.5分

(14)∀*xRxx* (13)∀+ 0.5分

22.（6分）【证明】

（1）├¬(*A*†*A*)。

(1)○*A*†*A* 假设 0.5分

(2) ¬*A* (1)†- 0.5分

(3) *A* (1)†- 0.5分

(4)¬(*A*†*A*) (1)(3)(2)¬+ 0.5分

（2）├(*A*†¬*B*)→(*B*†¬ *A*)。

(1)○*A*†¬*B* 假设 0.5分

(2) ¬*A* (1)†- 0.5分

(3) ¬*B* (1)†- 0.5分

(4) ○¬ *A*→*B* 假设 0.5分

(5) *B* (4)(2)→- 0.5分

(6) *B*†¬ *A* (4)(5)(3)†+ 1分

(7)(*A*†¬*B*)→(*B*†¬ *A*) (1)(6)→+ 0.5分