



去除混合噪音的一种新方法

李兵^{①③*}, 刘全升^{①②}, 徐家伟^①, 罗晓军^①^① 长沙理工大学数学与计算科学学院, 长沙 410076^② LMAM, Université de Bretagne-Sud, Campus de Tohannic, Vannes 56017. Université Européenne de Bretagne, France^③ 中山职业技术学院, 中山 528404

* 通信作者. E-mail: libcs@263.net, quansheng.liu@univ-ubs.fr

收稿日期: 2008-06-30; 接受日期: 2009-09-30

国家自然科学基金 (批准号: 10871035)、湖南省教育厅重点科技项目 (批准号: 03A002) 和中山市科技局攻关项目 (批准号: 2008A245) 资助项目

摘要 文中首先从概率论角度对自然图像中的相似现象给出数学描述, 进而得到主要结果之一——相似原理, 它揭示了非局部加权平均算法的数学原理. 然后我们依据该原理设计一种新的适合于高斯噪音和一致脉冲噪音之混合噪音的滤波方法, 简称“MNF 算法”. 实验结果表明, MNF 算法不但在去除图像中混合噪音时其效果明显优于最近 Garnett 等人提出的 Trilateral 滤波方法及已有的其他方法, 而且在去除脉冲噪音或高斯噪音时其效果亦可与已有之先进方法媲美. 此外, 文中对 MNF 算法的控制参数建议了简单计算公式并使参数个数达到最小因而更便于应用.

关键词混合噪音
高斯/脉冲噪音
图像复原
非线性滤波器
去噪
相似原理

1 引言

一个数字图像 u 可看成一个 $M \times N$ 矩阵, 其元素 $u(i)$ 为点 i 处像素点的灰度值 ($0 \leq u(i) \leq 255$), 其中 $i \in I := \{0, 1, \dots, M-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\}$. 人们知道两种噪音模型是最常见的, 即高斯噪音和脉冲噪音. 前者常在图像的获取过程中产生, 后者常由于传输引起^[1]. 这两种噪音的混合是不可避免的, 例如在用某些设备传送含噪音的图像时混合噪音就常常出现. 本文中总用 u 表示原图像, v 表示观察到的含噪音的图像. 高斯噪音模型为: $v(i) = u(i) + n(i)$, 其中 n 为高斯噪音, 即 $n(i)$ 是相互独立的均值为 0 标准差为 σ 的高斯变量; 随机脉冲噪音模型为: $v(i)$ 以概率 p 取值 $n(i)$, 以概率 $1-p$ 取值 $u(i)$, 其中 p 是脉冲噪音的发生概率, $n(i)$ 是相互独立的取值于 $\{0, 1, \dots, 255\}$ 中的随机变量, 服从均匀分布. 我们约定: 本文中所论混合噪音仅指这两种噪音的混合噪音.

图像处理的一个十分重要的问题就是从含噪音的图像 v 出发, 有效地恢复原图像 u . 近几年来针对上述噪音的去噪算法研究引起了许多国内外知名学者的关注并已取得若干重要成果. 例如在去除高斯噪音方面, 有 Morel 等人^[2]提出的非局部均值 (NL-means) 滤波方法及其变种 (例如文献^[3]), 其他有全变差方法^[4]及小波方法^[5]等; 在去除一致脉冲噪音方面, 有 Garnett 等人最近引入的基于 ROAD(rank ordered absolute difference) 统计量的 Trilateral 滤波方法^[1]及其变种^[6], 其他有文献

[7 ~ 14] 等; 在去除混合噪音方面, 已有的最先进方法也是 Trilateral 滤波方法^[1]. 但研究中有待解决的问题仍很多, 例如 Trilateral 滤波方法去除混合噪音时若高斯噪音较大则效果不理想, 又如针对纯高斯噪音的非局部均值滤波方法去噪效果虽很好但至今仍缺乏满意的理论依据, 等等.

为此, 本文首先从概率论角度借助随机变量等观念对自然图像中大量存在着的相似现象给出数学描述 (见 2.3 小节中的“相似假设”). 进而, 我们给出本文主要结果之一——相似原理, 它揭示出非局部加权平均滤波方法的数学原理. 然后依据这个原理我们提出一种新的适合于混合噪音的滤波方法, 称为混合噪音非局部滤波方法, 简称 MNF 算法. 这个新算法的关键思想之一是构造一个新的加权“范数”(称为“脉冲过滤范数”), 它具备消除脉冲噪音点影响之功能. 实验结果表明, 根据上述理论所设计的混合噪音滤波方法不但在去除图像中混合噪音时其效果明显优于 Trilateral 滤波方法及已有的其他方法, 而且在去除图像中纯脉冲噪音和纯高斯噪音时其效果亦可与已有的先进方法媲美. 此外, 文中对 MNF 算法的控制参数建议了简单计算公式并使参数个数达到最小, 因而更便于应用.

本文的主要工作分别在第 2 节和第 4 节中介绍. 全文安排如下: 第 2 节在对文献 [2] 中提出的非局部均值滤波方法作一个简单介绍后, 给出了我们提出的相似假设和相似原理及其证明; 第 3 节对文献 [1] 中提出的 Trilateral 滤波方法作了一个简单回顾; 在第 4 节中较详细地介绍我们提出的 MNF 算法, 并给出一些实验结果和比较分析; 第 5 节是结论.

2 非局部均值滤波方法与相似原理

2.1 非局部均值滤波方法

如文献 [2,3] 所示, 在已有去除高斯噪音的思想方法中非局部均值滤波思想是最先进的. 它利用了一般自然图像普遍存在的相似现象 (即如果在图像中取定一个小窗口 N , 那么在该图像中会有一些与 N 相似的小窗口, 特别是在邻近处), 其基本想法是依靠这些相似小窗口的均值来恢复所取窗口 N 的中心点的灰度值 (因而图像中相似现象越多就越适合用该方法去噪).

上述想法是通过设计适当的权重函数来实现的 (故也称该滤波方法为“非局部加权平均算法”). 现描述其算法如下:

设含高斯噪音的图像 $v = \{v(i) | i \in I\}$ 被恢复后所得之图像为 $NL(v)$. 那么对于每一个像素点 $i \in I$, 灰度值 $NL(v)(i)$ 定义为 v 中每个像素的灰度值的加权平均:

$$NL(v)(i) = \frac{\sum_{j \in I} w(i, j) v(j)}{\sum_{j \in I} w(i, j)}, \quad (1)$$

这里权重 $\{w(i, j)\}_{j \in I}$ 取决于像素点 i 处和 j 处的相似程度, 其定义为

$$w(i, j) = e^{-\frac{\|v(N_i) - v(N_j)\|_{2,a}^2}{2h^2}}, \quad (2)$$

其中 $h > 0$ 是滤波器控制参数, $v(N_j) = (v(k) : k \in N_j)$ 表示由以 j 为中心的窗口 N_j 内所有像素点的灰度值依次构成的向量 (设所有的窗口取定同一方向), $\|v(N_i) - v(N_j)\|_{2,a}^2$ 为向量 $v(N_i) - v(N_j)$ 的一种加权范数:

$$\|v(N_i) - v(N_j)\|_{2,a}^2 = \sum_{k \in N_i} a(i, k) |v(k) - v(Tk)|^2, \quad (3)$$

这里 $T = T_{ij}$ 是平面中将点 i 变为 j 的平移变换 (因此 $N_j = TN_i$) 而 $a(i, k) > 0$ 是一种取定的权重. 在文献 [2] 里 $a(i, k)$ 是一个关于欧氏范数 $\|i - k\|$ 递减的函数 (应用时可有不同的选取).

在实践中 (1) 式里的 I 常用足够大的窗口来代替, 我们称这样的大窗口为 (以 i 为中心的) “邻近区域”, 而称 N_i 为 “相似窗口”. 如文献 [2] 所示, 取邻近区域为 21×21 或 15×15 , 相似窗口为 7×7 、 9×9 (对灰度图) 就可得到较满意的效果.

2.2 相似假设与相似原理

尽管非局部均值滤波方法已在去除高斯噪音的实践中取得了引人注目的成效, 且自然图像中普遍存在的相似现象 (特别是像素点与像素点处的相似观念) 早已被大量用于实践, 但至今还缺乏满意的理论依据和数学表述. 为从理论上证明该算法的合理性, 下面我们首先用概率论的观点对相似现象给出一个数学描述, 称之为相似假设.

对 $i \in I$, 令 $N_i(d)$ 是以像素点 i 为中心的 $d \times d$ 窗口 (一般取 $d = 3, 5, \dots$), $N_i^0(d)$ 表示去掉 $N_i(d)$ 的中心点 i 所得之集, 它们有时也分别简记为 N_i 和 N_i^0 .

假设 1 (相似假设) 对于每个固定的 $i \in I$, 存在 $I_i \subset I$ 使得 $v(N_j)$ ($\forall j \in I_i$) 是一族与 $v(N_i)$ 同分布的随机变量.

这时我们说窗口 N_j ($j \in I_i$) 与窗口 N_i 相似. 相似假设中利用同分布概念描述窗口的相似性. 不但许多特殊的图像 (例如具有周期性的图像、组织结构图、纹理图等等) 具有明显相似现象, 而且一般的自然图像亦在不同程度上具有相似性 (参见文献 [2]). 这时我们说相似假设成立, 且 $|I_i|$ 足够大, 其中 $|I_i|$ 为集 I_i 之势, $|I_i|$ 越大, 相似性越强. 在下述的相似原理中, 我们要求 $|I_i| \rightarrow \infty$.

定理 1 (相似原理) 在相似假设下, 下列等式几乎必然成立:

$$\lim_{|I_i| \rightarrow \infty} v^0(i) = u(i),$$

其中

$$v^0(i) = \frac{\sum_{j \in I_i} w^0(i, j) v(j)}{\sum_{j \in I_i} w^0(i, j)}, \quad (4)$$

而

$$w^0(i, j) = e^{-\frac{\|v(N_i^0) - v(N_j^0)\|_{2,a}^2}{2h^2}}. \quad (5)$$

相似原理说明, 在 $|I_i|$ 足够大时, $v^0(i)$ 就可以足够接近于原图像的灰度值 $u(i)$.

当窗口 N_j 与 N_i 相似时, 对于充分大的 θ , 事件 “ $\|v(N_j) - v(N_i)\| \leq \theta$ ” 的概率接近 1. 在实际应用中, 可以取定某一临界值 θ , 当 $\|v(N_j) - v(N_i)\| \leq \theta$ 时, 我们就认为窗口 N_j 与 N_i 是相似的, 否则认为二者不相似. 对于不相似的窗口 N_j , 由于 $\|v(N_j) - v(N_i)\|$ 足够大, 所以相应的权重 $w^0(i, j)$ 足够小, 从而和 (4) 式中对应的项可以忽略. 此外不难看出, 我们也可以近似地用 $w(i, j)$ 来取代 $w^0(i, j)$, 所以我们有

$$NL(v)(i) \approx v^0(i) \approx u(i). \quad (6)$$

这就从理论上解释了非局部加权平均算法的合理性.

相似原理建立在相似假设的基础上. 在后续的工作里, 我们将引入相似度的概念, 并证明图像的相似度越高, 恢复效果越好.

为了证明相似原理, 我们需要基于下述关于 l - 相关随机变量列的大数定理. 固定 $l \in \mathbb{N}$, 我们称一列随机变量 X_1, X_2, \dots 是 l - 相关的, 假如其中任何一族相互距离大于 l 的随机变量 X_{i_1}, \dots, X_{i_n} 是相互独立的, 其中 $i_k < i_{k+1} + l, k \geq 1$.

引理 1 设 X_1, X_2, \dots 为一列 l - 相关的同分布的可积实随机变量, 则几乎必然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mathbb{E}X_1.$$

这个引理是经典大数定理的直接推论, 因为对于每个固定的 $j \in \{1, \dots, l+1\}$, $\{X_{i(l+1)+j} : i \geq 0\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$X_1 + \dots + X_n = \sum_{j=1}^{l+1} \sum_{i=0}^{m-1} X_{i(l+1)+j} + \sum_{1 \leq j \leq k} X_{m(l+1)+j},$$

其中 $m, k \in \mathbb{N}$ 满足 $n = m(l+1) + k$, $0 \leq k \leq l$.

相似原理的证明 对 $x \in \mathbb{R}^{|N_i^0|}$ (注意 $|N_i^0|$ 表示集合 N_i^0 的势) 和 $j \in I_i$, 记

$$\omega^0(x, j) = e^{-\frac{\|x - v(N_j^0)\|_{2,a}^2}{2h^2}}.$$

注意到当 $N_{j_1}^0$ 与 $N_{j_2}^0$ 不交时, $v(N_{j_1}^0)$ 与 $v(N_{j_2}^0)$ 相互独立. 因此容易看出, 对于充分大的 $l \in \mathbb{N}$, $\{\omega^0(x, j) : j \in I_i\}$ 必为一族 l - 相关的实随机变量. 由上述引理则几乎必然有

$$\lim_{|I_i| \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_i|} \cdot \sum_{j \in I_i} \omega^0(x, j) = \mathbb{E}\omega^0(x, j_0),$$

其中我们取定 $j_0 \in I_i$. 同样地, 几乎必然有

$$\lim_{|I_i| \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_i|} \cdot \sum_{j \in I_i} \omega^0(x, j)v(j) = \mathbb{E}\omega^0(x, j_0)\mathbb{E}v(j_0) = \mathbb{E}\omega^0(x, j_0)u(i),$$

这里我们用到了 $\omega^0(x, j_0)$ 与 $v(j_0)$ 的独立性, 以及

$$\mathbb{E}v(j_0) = \mathbb{E}v(i) = u(i).$$

所以对任意的 $x \in \mathbb{R}^{|N_i^0|}$, 几乎必然有

$$\lim_{|I_i| \rightarrow \infty} \sum_{j \in I_i} \omega^0(x, j)v(j) / \sum_{j \in I_i} \omega^0(x, j) = u(i).$$

由于除了有限多个 $j \in I_i$ 外, $v(N_j^0)$ 与 $v(N_i^0)$ 相互独立, 因此在上式中我们可以用 $v(N_i^0)$ 代替 x , 从而得到了所需结论.

3 Trilateral 滤波方法

Trilateral 滤波方法是 Bilateral 滤波方法^[15]的一种改进. 由于设计了一个用于检测随机脉冲噪音像素的统计量——ROAD 并巧妙地把它融入到权重公式中, 使得其滤波行为可以根据 ROAD 值的大小而相应地改变, 因而具有同时去除一致脉冲噪音和高斯噪音的能力.

ROAD 在算法中起着关键的作用, 其定义为: $\text{ROAD}(i) = r_1(i) + \dots + r_m(i)$, 这里 $r_k(i)$ 是 $\{|u(i) - u(j)| : j \in N_i^0(d)\}$ 中第 k 个最小的量, 其中 m 是常数, 文献 [1] 中取 $m = 4$. 实验结果和分析表明: 如果 i 为脉冲噪音点, 则 $\text{ROAD}(i)$ 的值高, 否则低. 把恢复后的图像记为 $\text{TriF}(v)$, 那么

$$\text{TriF}(v)(i) = \frac{\sum_{j \in N_i(L)} w(i, j)v(j)}{\sum_{j \in N_i(L)} w(i, j)}, \quad (7)$$

这里, 权重 $w(i, j)$ 由 3 个权重因子即空间因子 $w_S(i, j)$ 、相似因子 $w_R(i, j)$ 、脉冲因子 $w_I(j)$ 和一个联合脉冲因子 $J_I(i, j)$ 构成:

$$w(i, j) = w_S(i, j)w_R(i, j)J_I(i, j)w_I(j)^{1-J_I(i, j)}, \quad (8)$$

其中 $w_S(i, j) = e^{\frac{-|i-j|^2}{2\sigma_S^2}}$, $w_R(i, j) = e^{\frac{-|v(i)-v(j)|^2}{2\sigma_R^2}}$, $w_I(j)$ 和 $J_I(i, j)$ 均依赖于 ROAD 的值:

$$w_I(j) = e^{-\frac{\text{ROAD}(j)^2}{2\sigma_I^2}}, \quad (9)$$

$$J_I(i, j) = e^{-\frac{((\text{ROAD}(i)+\text{ROAD}(j))/2)^2}{2\sigma_J^2}}, \quad (10)$$

这里 $\sigma_S, \sigma_R, \sigma_I, \sigma_J$ 均为控制参数. 文献 [1] 中定义 $J(i, j) = 1 - J_I(i, j)$ 作为脉冲指数; 我们发现引入脉冲因子 $J_I(i, j)$ 更自然 (对照单脉冲因子 $w_I(j)$ 的定义), 而且能简化我们将引入的新滤波器的定义 ((11) 式). 不难看出, 当像素点 i, j 中至少有一个点为脉冲噪音点时 $J_I(i, j)$ 接近于 0, 否则接近于 1.

4 一个新的混合噪音滤波方法: MNF 算法

如前所述, Trilateral 滤波方法的主要缺陷是当混合噪音中高斯噪音份量较大时其去噪效果不理想. 所以从理论上讲, 可以期望运用非局部均值思想得到更好的方法. 从理论分析和实验结果都容易看出, 单纯的非局部均值滤波方法并不适合混合噪音, 所以在进行混合噪音滤波时须要恰当地运用非局部均值手段. 本节中我们提出一个新的混合噪音滤波方法, 称为混合噪音非局部滤波方法, 简称 MNF 算法.

4.1 脉冲过滤范数

通过分析可知, 当要应用非局部均值原理处理混合噪音中的高斯噪音点时, 相似窗口中所含的脉冲噪音点将成为困难所在. 我们解决这个问题基本思想是构造一个新的加权“范数”, 称为脉冲过滤范数, 它有消除脉冲噪音点之影响的功能, 其定义如下:

对窗口 N_i 和 $N_j = T(N_i)$, 向量 $v(N_i) - v(N_j)$ 的脉冲过滤范数记为 $\|v(N_i) - v(N_j)\|_M$, 我们定义

$$\|v(N_i) - v(N_j)\|_M^2 = \frac{\sum_{k \in N_i} J_I(k, T(k)) |v(k) - v(T(k))|^2}{\sum_{k \in N_i} J_I(k, T(k))} \quad (11)$$

(回忆 $T = T_{ij}$ 是平面中将点 i 变为 j 的平移变换). 这里之所以用了“范数”一词, 是因为对于固定的 i 和窗口 N_i 以及权重 $a_k = a_{i,k} > 0, k \in N_i$, 由下式定义的 $\|x\|_M \geq 0$ 是 $\mathbb{R}^{|N_i|}$ 上的一个范数 (我们记 $|N_i|$ 为 N_i 的势):

$$\|x\|_M^2 = \sum_{k \in N_i} a_k x_k^2;$$

它是内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \in N_i} a_k x_k y_k, \quad x = (x_k : k \in N_i), \quad y = (y_k : k \in N_i)$$

所诱导的范数.

定义中我们使用了联合脉冲因子 $J_I(k, T(k))$ ((10) 式). 由于当 k 或 $T(k)$ 为脉冲噪音点时 $J_I(k, T(k))$ 接近于 0, 故此时分量 $v(k) - v(T(k))$ 对 $\|v(N_i) - v(N_j)\|_M$ 的影响较小. 因此, 脉冲过滤范数应该较接近于一个撇开脉冲噪音点之后的只受高斯噪音影响的加权范数.

4.2 MNF 算法的描述

取定正整数 $D > d$, 我们将使用大窗口 $N_i^0(D)$ 作为 (以 i 为中心) 的邻近区域, 小窗口 $N_j(d)$ 作为以 j 为中心的相似窗口. 用 MNF 算法恢复后的图像定义为

$$\text{MNF}(v)(i) = \frac{\sum_{j \in N_i^0(D)} w(i, j) v(j)}{\sum_{j \in N_i^0(D)} w(i, j)}, \quad (12)$$

其中权重 $w(i, j)$ 由两个因子组成, 即 “脉冲权重因子 $w_I(j)$ ” 和 “混合权重因子 $w_M(i, j)$ ”:

$$w(i, j) = w_I(j) w_M(i, j), \quad (13)$$

混合权重因子依赖于脉冲过滤范数

$$w_M(i, j) = e^{-\frac{\|v(N_i) - v(N_j)\|_M^2}{2\sigma_M^2}}, \quad (14)$$

而脉冲权重因子 $w_I(j)$ 与文献 [1] 同, 其定义见 (9) 式. 从权重的定义可见, 对于 $N_i^0(D)$ 中的所有脉冲噪音点 j , $w(i, j)$ 大致接近于 0. 因而 MNF 算法的基本思想可以简单地概括为: 以权重消去脉冲噪音点的影响后对剩下的 (只含高斯噪音的) 部分应用相似原理.

值得指出的是, 在脉冲过滤范数 (11) 以及加权平均 (12) 中, 我们也可引入空间因子, 以使滤波效果略微提高. 但空间因子的影响较相似因子和脉冲因子要小很多. 为简单起见, 在本文中不予考虑.

4.3 实验结果的比较分析

我们对许多图片进行了实验. 限于篇幅这里仅给出 3 幅图片 (不同景物) 复原效果的部分实验数据. 图 1 是其中一幅实验图像的原图. 图 2, 3 都是混合噪音去噪效果的比较, 为方便起见我们把这两组图中的结果比较归结成表 1. 在表 2 中我们列出了更多混合噪音去噪效果的比较结果. 表 3, 4 分别为纯高斯噪音和脉冲噪音的去噪效果比较 (图 4 只是表 3 第一列中两个数据的直观效果).



图 1 Lena 原图 (512×512)

噪音图像a($\sigma=10, p=0.2$)噪音图像b($\sigma=20, p=0.2$)

Trilateral用于噪音图像a的效果, PSNR=31.79



MNF用于噪音图像a的效果, PSNR=32.84



Trilateral用于噪音图像b, PSNR=27.73



MNF用于噪音图像b, PSNR=30.23

图 2 Trilateral 滤波器与 MNF 滤波器去噪效果比较 (1)

由于 Trilateral 滤波方法^[1]是已有的最能有效去除混合噪音的方法, 所以我们主要把 MNF 算法的去噪效果与它进行比较. 比较去除纯高斯噪音的效果时也列出了非局部均值 (NL-means) 滤波方法^[2]的结果.

此外, 依惯例我们用峰值信噪比 PSNR(peak signal-to-noise ratio) 来衡量复原图像的质量: 如果 u 是原图像, \tilde{u} 是复原图像, 那么 $\text{PSNR}(\tilde{u}) = 10 \log_{10}(255^2/\text{MSE})$, $\text{MSE} = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} [\tilde{u}(i) - u(i)]^2$ (可参见文献 [1]). PSNR 值越大说明去噪效果越好.

在每组图片中, 我们都会先列出噪音图像, 然后列出恢复图像, 所有图片均为 512×512 .

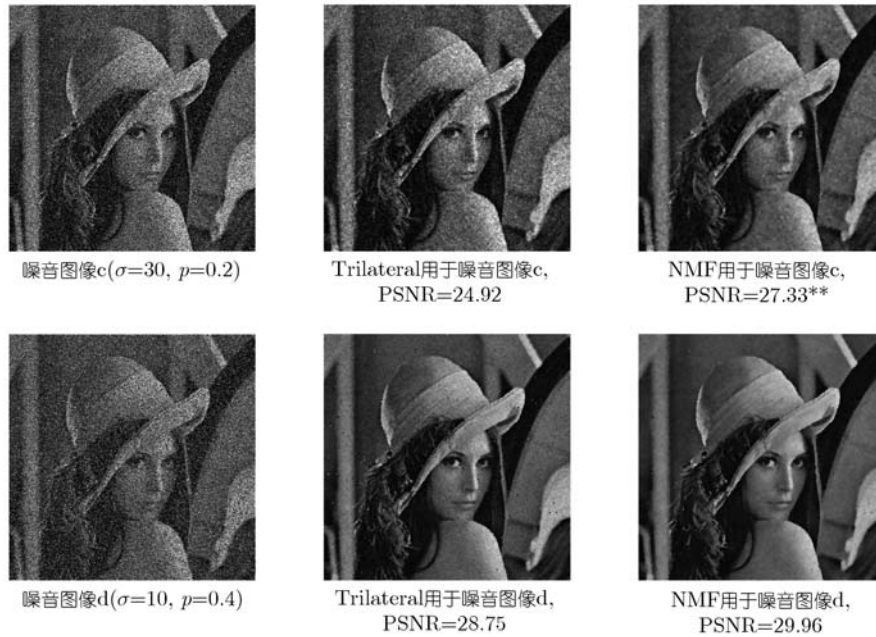


图 3 Trilateral 滤波器与 MNF 滤波器去噪效果比较 (2)



图 4 Trilateral 滤波器与 MNF 滤波器去噪效果比较 (3)

从理论上讲, 非局部均值滤波方法适合纯高斯噪声而不适合脉冲噪声. 大量的实验结果也说明, 只要在含高斯噪声的图像中再加入一定概率的一致脉冲噪声, 其去噪效果就会大大下降, 且显然不能与 Trilateral 滤波方法和 MNF 算法相比.

从表 1,2 中可见, 当混合噪声中高斯噪声的标准差在 10 左右时, 用 Trilateral 算法所得的峰值信噪比已经比较理想, 与用 MNF 算法的结果也较接近; 但是当高斯噪声的标准差增大后, 用 Trilateral 算法时峰值信噪比下降较快, 与 MNF 算法相比有明显的差距.

由于 MNF 算法在一定程度上同时具备非局部均值滤波方法和 Trilateral 滤波方法的长处, 所以即使在去除纯一致脉冲噪声或纯高斯噪声时, 一般也能分别达到或接近它们去噪的效果, 参见表 3,4. 在 MNF 算法中引入脉冲过滤范数使得它与以前的滤波方法有本质的不同. 而且在设计脉冲过滤范数时充分考虑它与脉冲权重因子之间的配合也是十分重要的.

4.4 控制参数的确定

Trilateral 滤波方法需要用 4 个控制参数 (文献 [1] 给出了其中 3 个的取值范围及一个参数的经验表达式). 一般而言, 在去除混合噪声的算法中应该需要不少于两个控制参数, 因为去噪效果显然与

表 1 去除混合噪音的效果 (一)

噪音图像	Lena, $\sigma = 10, p = 0.2$	Lena, $\sigma = 20, p = 0.2$	Lena, $\sigma = 30, p = 0.2$	Lena, $\sigma = 10, p = 0.4$
PSNR by Trilateral	31.79(31.64)	27.73	24.92	28.75
PSNR by MNF	32.84	30.23	27.33**	29.96

表 2 去除混合噪音的效果 (二)

噪音图像	Boats, $\sigma = 10, p = 0.2$	Boats, $\sigma = 20, p = 0.2$	Peppers, $\sigma = 10, p = 0.2$	Peppers, $\sigma = 20, p = 0.2$
PSNR by Trilateral	30.21	27.11	29.00	26.75
PSNR by MNF	30.88	28.56	29.68	28.4

注(1) 非局部均值滤波方法在去除混合噪音时没有优势, 故未将其效果列入表 1,2 中进行比较.

(2) 关于各表中用 Trilateral 算法的峰值信噪比数据来源: 文献 [1] 中已经给出的数据加了括号; 加 * 的数据是通过使用一种遗传算法搜索到的最佳 PSNR 值; 其他是按照文献 [1] 建议的控制参数取值 ($\sigma_S = 5, \sigma_I = 40, \sigma_J = 50$) 计算得到的.

(3) 关于 MNF 的窗口大小的选取, 为了提高运算速度, 一般均使用较小的窗口, 即邻近区域为 7×7 , 相似窗口为 3×3 ; 只有加 ** 号的数据是使用稍大的窗口 (例如邻近区域和相似窗口分别取 9×9 和 5×5 或者 15×15 和 7×7) 得到的. 关于 MNF 算法的控制参数取值见 4.4 小节.

表 3 3 种算法去除纯高斯噪音的效果比较

噪音图像	Lena, $\sigma = 10$	peppers, $\sigma = 30$	Boats, $\sigma = 20$
PSNR by Trilateral	33.23*(33.23)	25.18	24.92
PSNR by MNF	34.86	28.55**	30.30
PSNR by NL-means	35.01	28.67	30.94

表 4 2 种算法去除纯脉冲噪音的效果比较

噪音图像	Lena, $p = 0.2; 0.3; 0.4$	Peppers, $p = 0.2; 0.3; 0.4$	Boats, $p = 0.2; 0.3; 0.4$
PSNR by Trilateral	(35.03); (33.16); (31.36)	30.08; 29.43; 27.75	31.99; 30.29; 28.16
PSNR by MNF	34.62; 33.12; 31.43**	30.07; 29.42; 28.12**	32.58; 30.51; 28.36**

高斯噪音和脉冲噪音的大小都是有关的.

在 MNF 算法中可用 3 个控制参数 $\sigma_I, \sigma_J, \sigma_M$ 调节去噪效果. 文献 [1](对一致脉冲噪音概率 $p \in [0, 50]$ 的情形) 讨论了噪音点和非噪音点处 ROAD 的平均值, 这是我们选取控制参数时参考的一个依据. 尽管可以取不同的 σ_I 和 σ_J , 但由于它们都用来控制脉冲噪音点的识别, 所以一般情况下取 $\sigma_I = \sigma_J$ 应该是可行的, 实验结果说明了这一点. 这就使得我们可以减少一个控制参数, 从而更便于算法的实际应用. 但有时让 σ_I, σ_J 取不同的值确实可以得到更好的效果, 例如对噪音图像 Peppers, $\sigma = 30$, 当取 $\sigma_I = 300, \sigma_J = 25$ 时, 复原图像的 PSNR 可以超过 29.9, 这比用非局部均值滤波方法的复原效果更好 (表 3).

从去噪原理出发, 通过从数学的角度分析权重因子并结合对大量实验结果的拟合, 我们发现对 $\sigma_I = \sigma_J$ 取如下线性逼近, 效果就可以了,

$$\sigma_I = \sigma_J = 100 + \sigma - 160p, \quad (15)$$

其中 σ 是高斯噪音的标准差, p 是脉冲噪音概率 (这里系数 160 也可以在区间 $[150, 180]$ 中变化, 总体效果不会有太大变化). 由于对 σ_M 用线性逼近和二次逼近时效果均不够理想, 所以我们对 $2\sigma_M^2$ 采用

了三次逼近:

$$2\sigma_M^2 = 18\sigma + 400(p + p^2) + 0.4\sigma^2 p, \quad (16)$$

其中系数也可以在适当的区间中变化.

与 Trilateral 滤波方法相比, 我们不但通过减少 MNF 算法中的权重因子使控制参数减少了一个, 而且还从两个方面进一步简化了控制参数的选取: 一方面令 $\sigma_I = \sigma_J$ 使控制参数的个数达到了最小, 同时对两个控制参数提供了选取公式. 同时我们也发现, 在公式建议值的邻域里选取适当值, 有时可以改善恢复效果, 尤其是当我们处理单纯噪音的时候.

5 结论

本文的主要工作分两个方面. 第一, 我们从概率论角度借助随机变量等观念对自然图像中大量存在的相似现象给出了数学描述, 提出了相似假设 (文中假设 1), 并进一步给出了本文主要理论结果一相似原理 (定理 1). 从而较好地解决了非局部均值滤波方法虽然在去除高斯噪音实践中效果很好但一直缺乏满意的理论依据这个问题. 第二, 在相似原理的指引下我们设计了一种新的适合于高斯噪音和一致脉冲噪音之混合噪音的滤波方法, 称为混合噪音非局部滤波方法, 简称 MNF 算法. 在 MNF 算法中, 一个新的概念是脉冲过滤范数. 由于脉冲过滤范数具有“滤除”脉冲噪音点的功能, 使得非局部均值滤波思想得以用来较好地去除高斯和一致脉冲噪音之混合噪音.

从第 4 节中的讨论可以看出, 该方法还具有一定的可扩展性. 例如在 MNF 算法的框架下, 也可以用一些与本文中不同的方法来实施可疑脉冲噪音点的确定, 等等.

实验结果表明, MNF 算法在去除图像中混合噪音时其效果明显优于 Garnett 等人最近提出的 Trilateral 滤波方法及其他已有的混合噪音滤波方法. 而且, 由于 MNF 算法在一定程度上同时具备非局部均值滤波方法和 Trilateral 滤波方法的长处, 所以即使在处理除纯一致脉冲噪音或纯高斯噪音时, 一般也能分别达到或接近它们去噪的效果. 此外, 我们对 MNF 算法的控制参数建议了简单计算公式并使参数个数达到最小, 因而更便于应用.

致谢 感谢 Syoyo 本文之研究工作得益于作者李兵对法国南布列塔尼大学和刘全升对长沙理工大学几次学术访问, 也得益于在两个大学举办的多次国际性专题学术活动. 作者对两个大学的支持表示衷心感谢. 另外, 作者对评审人给本文提出的修改意见和建议表示诚挚的谢意.

参考文献

- 1 Garnett R, Huegerich T, Chui C, et al. A universal noise removal algorithm with an impulse detector. IEEE Trans Image Process, 2005, 14: 1747–1754
- 2 Buades A, Coll B, Morel J M. A review of image denoising algorithms, with a new one. Multiscale Model Simul, 2006, 4: 490–530
- 3 Kervrann C, Boulanger J. Local adaptivity to variable smoothness for exemplar-based image regularization and representation. Int J Comput Vision, 2008, 79: 45–69
- 4 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Phys D, 1992, 60: 259–268
- 5 Osher S, Xu J. Iterative regularization and nonlinear inverse scale space applied to wavelet-based denoising. IEEE Trans Image Process, 2007, 16: 534–544
- 6 Dong Y, Chan R H, Xu S. A detection statistic for random-valued impulse noise. IEEE Trans Image Process, 2007, 16: 1112–1120

- 7 Aizenberg I, Butakoff C, Paliy D. Impulsive noise removal using threshold Boolean filtering based on the impulse detecting functions. *IEEE Signal Proc Lett*, 2005, 12: 63–66
- 8 Luo W. A new efficient impulse detection algorithm for the removal of impulse noise. *IEICE Trans Fund Electr*, 2005, E88-A: 2579–2586
- 9 Chen R, Hu C, Nikolova M. An iterative procedure for removing random-valued impulse noise. *IEEE Signal Proc Lett*, 2004, 11: 921–924
- 10 Chen T, Wu H R. Adaptive impulse detection using center-weighted median filters. *IEEE Signal Proc Lett*, 2001, 8: 1–3
- 11 Lightstones E, Abreu M, Mitra S, et al. A new efficient approach for the removal of impulse noise from highly corrupted images. *IEEE Trans Image Process*, 1996, 5: 1012–1025
- 12 Guan X P, Zhao L X, Tang Y G. Mixed filter for image denoising. *J Image Graph(in Chinese)*, 2005, 10: 332–337
- 13 Hu X D, Peng X. Study of wavelet domain Gaussian mixture model with median filtering mixed image denoising. *Scope Acta Photo Sin(in Chinese)*, 2007, 36: 2381–2385
- 14 Sun M H, Su F. An improved algorithm for adaptive mixed noise filtering. *Comput Simulat(in Chinese)*, 2007, 24: 54–55
- 15 Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision*. Washington: IEEE Computer Society Press, 1998. 839–846