TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik – Institut für Nachrichtentechnik – Professur für Informationstheorie und maschinelles Lernen

Dr. Martin Mittelbach, Dr. Anne Wolf 06.04.2023

1. Übung zur Lehrveranstaltung Informationstheorie

Die Lösungen zu den Aufgaben werden nach der 1. Übung auf der Webseite der Lehrveranstaltung bereitgestellt. Wir bitten Sie jedoch, sich zuerst eigenständig mit den Aufgaben zu beschäftigen, bevor Sie die entsprechenden Lösungen anschauen.

Auf der Webseite finden Sie auch einen Selbsttest zu ausgewählten mathematischen Grundlagen (überwiegend aus dem Themenkomplex Stochastik), die im Rahmen der Lehrveranstaltung benötigt werden. Diesen Selbsttest können Sie wahlweise vor oder nach den Aufgaben der 1. Übung bearbeiten.

Aufgabe 1: (Diskrete Zufallsgröße, Erwartungswert, Transformation von Zufallsgrößen)

Gegeben sei die diskrete Zufallsgröße X mit dem Alphabet $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X.

x	1	2	3	4
$p_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0

a) Geben Sie für die Zufallsgröße X den Träger $\mathcal{S}_X$ an.

b) Berechnen Sie für die Zufallsgröße X den Erwartungswert $\mathbb{E}\left(X\right)$.

c) Sei g eine Funktion, die wie folgt definiert ist:

$$g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2.$$

Berechnen Sie für die Zufallsgröße

$$Y := g(X)$$

den Erwartungswert $\mathbb{E}\left(Y\right) = \mathbb{E}\left(g(X)\right)$.
Berechnen Sie mit Hilfe dieses Erwartungswertes die Varianz $\operatorname{var}\left(X\right)$ der Zufallsgröße X.

d) Sei $\tilde{g}$ eine weitere Funktion, die wie folgt definiert ist:

$$\tilde{g}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\log_2\big(p_X(x)\big).$$

Berechnen Sie für die Zufallsgröße

$$Z := \tilde{g}(X)$$

den Erwartungswert $\mathbb{E}\left(Z\right) = \mathbb{E}\left(\tilde{g}(X)\right)$.

Aufgabe 2: (Gemeinsame und Randwahrscheinlichkeitsfunktion, Unabhängigkeit von Zufallsgrößen)

Gegeben seien die diskreten Zufallsgrößen X und Y mit den Alphabeten $\mathcal{X} = \{1, 2\}$ bzw. $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$. Wir wollen für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgrößen X und Y folgende zwei Fälle betrachten.

(1)

$p_{X,Y}(x,y)$		$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0
	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

(2)

$\tilde{p}_{X,Y}(x,y)$		$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
x	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
	2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

a) Berechnen Sie für die Fälle (1) und (2) die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X, d. h. p_X bzw. $\tilde{p}_X$, und die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße Y, d. h. p_Y bzw. $\tilde{p}_Y$, wobei $p_{X,Y}$ bzw. $\tilde{p}_{X,Y}$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y sein soll.

b) Berechnen Sie für alle Paare $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ die Werte $p_X(x)\, p_Y(y)$ und $\tilde{p}_X(x)\, \tilde{p}_Y(y)$ und vergleichen Sie diese mit den entsprechenden Werten der Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_{X,Y}$ bzw. $\tilde{p}_{X,Y}$. In welchem Fall sind die Zufallsgrößen unabhängig?

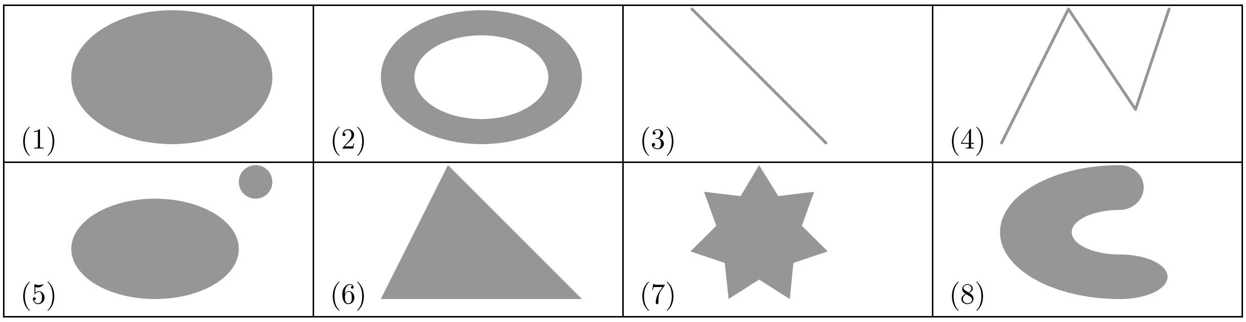
Aufgabe 3: (Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ und $\operatorname{var}(X_1) = \sigma^2$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße

$$Z := a \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: (Konvexität von Mengen)

a) In der folgenden Tabelle sind Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ graphisch dargestellt. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um konvexe Mengen handelt.



b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n : x_k \leq a_k \text{ mit } a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

konvex ist.

Hinweis: $(x_k)_{k=1}^n$ ist eine Schreibweise für den Vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, siehe Skript Anhang A.2.

Aufgabe 5: (Konvexität von Funktionen)

Gegeben seien die folgenden reellen Funktionen. Bestimmen Sie die größtmöglichen Intervalle, auf denen die Funktionen konvex oder konkav sind.

$$\begin{aligned} g_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2 - 5 \\ g_2 &: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, & x &\mapsto \ln(x) \\ g_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto x^3 - 6x^2 + 7x + 3 \end{aligned}$$

Hinweis: $\mathbb{R}_+^*$ bezeichnet die Menge der positiven reellen Zahlen, d. h. $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, siehe Skript Anhang A.1.