

控制科学与工程研究生系列教材

# 决策理论与方法

岳超源 编著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了基于定量分析的决策理论与方法。内容包括三部分。第一部分是随机性决策,以统计决策理论为主,兼及优势原则与行为决策理论;第二部分是多目标决策;第三部分是群决策或称多人决策,包括社会选择理论、专家咨询和冲突分析。

为了使读者掌握所介绍的理论和方法,本书各章给出了习题并给出参考答案与提示。

本书可作为高等院校经济、管理、系统工程、应用数学和相关专业研究生和高年级本科生教材,也可供各级行政干部、企业管理人员、工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

决策理论与方法/岳超源编著. —北京:科学出版社,2003  
(控制科学与工程研究生系列教材)

ISBN 7-03-010816-7

I. 决… II. 岳… III. 决策论-研究生-教材 IV. O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 079444 号

责任编辑:马长芳 / 责任校对:朱光光

责任印制:安春生 / 封面设计:王 浩

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2003 年 3 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004 年 4 月第二次印刷 印张:29

印数:3 001—6 000 字数:562 000

定价:40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

# 《控制科学与工程研究生系列教材》

## 编委会

名誉主编 陈太一 保 铮 王 越 陈 珽

主 编 费 奇 孙德宝

编 委 (按姓氏笔画排序)

万淑芸 王永骥 王红卫 齐 欢

关治洪 李昌禧 黄心汉

# 序 言

随着社会经济和科学技术的飞速发展,服务于人类社会进步的控制科学与工程学科面临着严峻的挑战。计算机技术与网络通信技术的迅速普及,为控制科学与工程的发展提供了理想的舞台。可以预见,本世纪初叶将会是控制科学与工程发展的黄金时代,各行各业都将渴望着那些掌握控制科学与工程技术的人才加盟。

面对现实的挑战,控制科学与工程发展的最大困难莫过于系统的复杂性不断提高。惯用的针对简单大系统的控制理论遇到了难于逾越的障碍。如何拓宽思路,运用处理复杂问题的手段来解决复杂系统的控制问题,是一个具有革命性的挑战。智能与复杂系统理论的出现,将控制科学、系统科学与系统工程紧密结合,是克服目前所遇困难的理想途径。为此,培养具有控制理论和系统科学与系统工程理论基础的专业人才成为当务之急。

华中科技大学(原华中理工大学)在 20 世纪 50 年代设立了控制科学与工程的相应专业,60 年代开始培养研究生,在 70 年代末 80 年代初,作为我国首批硕士学位和博士学位点,开始大量地培养研究生,在长期的科学研究与教学活动中积累了丰富的经验。在 90 年代完成了控制科学一级学科博士点和系统科学博士点的基本建设,为 21 世纪初建立控制科学与工程和系统科学与工程相结合的人才培养结构奠定了组织基础。

为了培养具有控制科学和系统科学与系统工程理论基础的专业人才,我们组织了部分有经验的教师编著了这套面向研究生培养的系列教材,拟为研究生培养的新模式探索一条新路。

费 奇 孙德宝

2001 年 12 月于武汉喻家山

# 前 言

20 世纪中叶,决策理论就已经成为经济学和管理科学的重要分支,但由于种种原因,决策理论和方法直到“文革”之后才逐渐引入我国。陈珽先生编著的《决策分析》作为我国介绍决策理论的经典之作,自出版之后即受到广泛关注,被许多院校用作相关专业的研究生教材。作者自 1985 年接替陈先生讲授决策理论与方法这门课程以来,也一直使用该书作为主要参考书进行教学。

这些年来,除了研究生外,还为在职硕士生、工程硕士生和本科生开设本课程。在教学过程中,学生,尤其是本科生反映《决策分析》数学内容偏多,通读全书存在较大困难;加之决策理论本身不断有新的进展,因此,从 20 世纪 90 年代开始,作者开始编写提纲式的讲稿,稍后形成电子文档并不断修改补充,以期学生易于阅读,并在有限的教学时间内掌握更多的内容。

一方面,积十余年的增补,讲稿的内容有了较大的变动;另一方面,由于课题组所承接科研项目的需要,较多地涉及了群决策问题,作者在 20 世纪 90 年代初编写了一本《群决策》讲义,其中的主要内容也在决策理论和方法课程中讲授。现借华中科技大学控制科学与工程学科编写研究生教材之机,将上述两部分内容合并并加以充实,形成这本《决策理论与方法》。为了便于阅读和理解,本书尽可能在不影响论述严密性的前提下减少数学内容及证明(对数学证明感兴趣的读者可以参阅相关文献);对所给出的数学公式也尽量用文字解释其实际意义。

本书的内容包括四部分。第一部分包括 1~3 章,是决策理论的基础;第二部分是随机性决策,以统计决策理论为主,兼及优势原则与行为决策理论;第三部分是多目标决策,包括多属性效用理论、多属性决策与评价、多目标决策。多目标决策问题的算法与运筹学中的数学规划有较多的重叠,在不影响本书完整性的情况下对这部分内容尽可能地简化;第四部分是群决策或称多人决策,包括社会选择理论、专家咨询和冲突分析。

广义的决策理论还应包括序贯决策、模糊决策和灰色决策等等。由于篇幅所限,本书均未涉及。即使如此,本书的内容也超出了 40~60 学时所能讲授的范围,教师在讲授时可以根据实际情况作适当取舍,本书目录中加有“\*”号的各节可优先舍弃(在节中部分内容可舍弃时,\*号加在小节前)。

自然科学研究的是客观世界,是客观世界中的事实元素,采用的方法以定量为主;而社会科学主要研究由人组成的社会、社会中的人以及人际关系,其核心价值元素,使用的方法以定性为主。而决策理论的特点是要用定量化的方法处理决

策人的价值判断,它是自然科学与社会科学的交叉;它所采取的研究方法既不同于纯自然科学,也有别于传统的社会科学。因此,读者,尤其是理工科专业的读者,要注意本课程区别于其他纯自然科学课程之处:决策结果的优劣与决策人的主观愿望即价值判断有关,是因人而异的。在随机性决策中后果对决策人的效用,多目标决策中指标体系的确定、各指标或属性权重的设定等等,都会因决策人价值判断而异。

决策理论和方法具有较强的理论性,同时又有很强的实用价值。为了使读者尽快建立正确的基本概念,掌握解决实际问题的思路,在编写本书的过程中,凡涉及新概念时均不厌其烦地通过实例加以阐述;介绍问题求解方法时则以算例说明;读者倘若能结合生活、工作、学习中的实际问题,勤于思考,效果一定会更好。

众所周知,在学习一门课程时,从掌握基础知识与方法到运用这些知识去解决实际问题之间有着很大的距离,而缩小这一距离的行之有效的方法是求解有实践背景的习题。为此,作者从讲授本课程之初即收集并精选和编写习题,要求学生全部独立完成。本书各章大都附有习题,供读者练习,并在附录中给出求解的提示或参考答案。

有些文献在本书中虽未具体引用,但是对决策理论的发展有较大影响,作者亦予收录,目的是为从事该领域专题研究的读者提供一些方便。

上述种种想法都是作者的主观愿望,至于客观效果,限于作者的学识和水平,未必能如人意。书中错误也在所难免,恳请赐教、指正。

作者的 e-mail 地址:cyyue@public.wh.hb.cn。

岳超源

2002 年 9 月

# 目 录

第一章 随机性决策的基本概念	1
1.1 引言	1
1.1.1 决策与决策论的定义	1
1.1.2 决策论的发展简史	3
1.1.3 决策论与其他学科的关系	4
1.2 随机性决策问题的基本特点与要素	5
1.2.1 例	5
1.2.2 决策问题的特点	6
1.2.3 决策问题的要素	7
1.3 决策问题的分类	8
1.4 随机性决策问题的分析方法和步骤	10
习题	14
第二章 主观概率	15
2.1 概率的基本概念	15
2.2 先验分布及其设定	18
2.3 设定主观概率的案例	27
习题	30
第三章 效用函数	31
3.1 引言	31
3.2 效用的定义和公理系统	32
3.2.1 效用的定义	33
3.2.2 效用存在性公理	35
3.2.3 效用的公理化定义和效用的存在性	38
3.2.4 基数效用与序数效用	38
3.3 效用函数的构造	40
3.4 风险与效用	45
3.4.1 风险的含义	45
3.4.2 效用函数包含的内容	47
3.4.3 相对风险态度	50
3.5 货币的效用	51

习题 .....	53
第四章 随机性决策问题的决策准则 .....	56
4.1 引言 .....	56
4.2 严格不确定型决策问题的决策准则 .....	58
4.2.1 求解严格不确定型决策问题的四种主要决策准则 .....	58
4.2.2 理想的决策规则应当具备的几种性质 .....	62
4.2.3 对决策准则的分析 .....	66
4.3 风险型决策问题的决策准则 .....	72
4.4 贝叶斯定理 .....	77
4.5 贝叶斯分析 .....	79
4.5.1 贝叶斯风险与贝叶斯规则 .....	79
4.5.2 正规型贝叶斯分析 .....	81
4.5.3 贝叶斯分析的扩展型 .....	81
4.5.4 信息的价值 .....	83
4.5.5 贝叶斯分析的例 .....	84
* 4.5.6 序贯分析 .....	88
* 4.5.7 非正常先验与广义贝叶斯规则 .....	89
4.6 一种具有部分先验信息的贝叶斯分析法 .....	90
习题 .....	95
第五章 随机优势 .....	99
5.1 随机优势概述 .....	99
5.2 随机优势决策规则 .....	101
5.3 第一等随机优势 .....	103
5.3.1 第一等随机优势的定义 .....	103
5.3.2 第一等随机优势的决策规则 .....	103
5.3.3 第一等随机优势的图解法 .....	106
5.3.4 第一等随机优势的示例 .....	107
5.4 第二等随机优势 .....	109
5.4.1 第二类效用函数 $U_2$ .....	109
5.4.2 第二等随机优势的决策规则 .....	111
5.4.3 第二等随机优势的图解法 .....	113
* 5.4.4 第二等随机优势的直观解释 .....	116
* 5.5 第三等随机优势 .....	117
5.5.1 第三类效用函数 $U_3$ .....	117
5.5.2 第三等随机优势的决策规则 .....	120



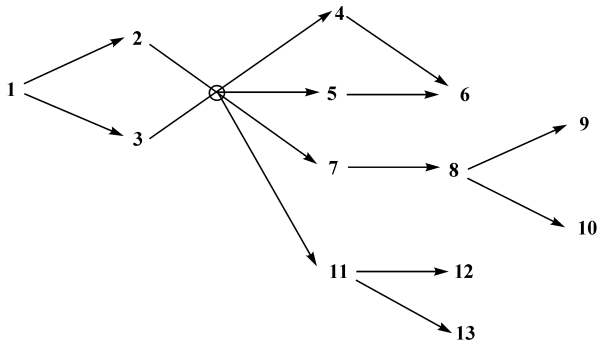
5.5.3 第三等随机优势的图解法 .....	121
5.5.4 第三等随机优势的直观解释 .....	123
5.6 均值与方差在随机优势决策规则中的作用 .....	125
5.7 随机优势小结 .....	126
习题 .....	127
<b>第六章 随机性决策的应用与行为决策理论</b> .....	129
6.1 随机性决策的若干基本问题 .....	129
6.2 决策分析的案例 .....	136
6.3 决策过程中人的行为 .....	139
习题 .....	149
<b>第七章 多目标决策的基本概念</b> .....	151
7.1 多目标决策及其特点 .....	151
7.2 多目标决策与多目标评价 .....	153
7.3 多目标决策问题的要素 .....	157
7.4 多目标决策问题的符号表示 .....	162
7.5 非劣解与最佳调和解 .....	164
<b>第八章 多属性效用理论</b> .....	170
8.1 优先序 .....	170
8.2 多属性价值函数 .....	173
8.2.1 基本概念 .....	173
8.2.2 两个属性的价值函数 .....	174
* 8.2.3 属性数大于 2 时的价值函数 .....	178
8.2.4 时间的偏好 .....	181
* 8.3 多属性效用函数 .....	183
8.3.1 两个属性的效用函数 .....	183
8.3.2 一般的多属性效用函数 .....	188
习题 .....	190
<b>第九章 多属性决策</b> .....	192
9.1 求解多属性决策问题的准备工作 .....	192
9.1.1 决策矩阵 .....	192
9.1.2 数据预处理 .....	193
9.1.3 方案筛选 .....	198
9.2 确定权的常用方法 .....	199
9.2.1 最小二乘法 .....	200
9.2.2 本征向量法 .....	201

9.2.3	最低层目标权重的计算 .....	202
9.3	加权法和 .....	204
9.3.1	一般加权法和 .....	204
9.3.2	字典序法 .....	206
9.3.3	层次分析法(AHP) .....	206
* 9.4	加权积法 .....	209
9.5	TOPSIS 法 .....	212
9.6	基于估计相对位置的方案排队法 .....	214
9.7	ELECTRE 法 .....	220
9.7.1	级别高于关系的定义与性质 .....	220
9.7.2	ELECTRE-Ⅰ法 .....	221
9.7.3	ELECTRE-Ⅱ法 .....	223
9.7.4	其他 ELECTRE 法 .....	226
9.7.5	讨论 .....	229
9.8	PROMETHEE 法 .....	230
9.8.1	优先函数 .....	230
9.8.2	几种典型的优先函数 .....	231
9.8.3	赋值的级别高于关系图 .....	234
9.8.4	PROMETHEE-Ⅰ法 .....	235
9.8.5	PROMETHEE-Ⅱ法 .....	235
9.8.6	示例:研究生院综合评估 .....	236
9.8.7	PROMETHEE 法的特点 .....	237
9.9	关于多属性决策方法的若干问题讨论 .....	239
* 9.9.1	其他某些较常用的多属性决策方法存在的问题 .....	239
9.9.2	各种多属性决策问题求解方法的简单评述 .....	241
9.9.3	多属性决策的敏感性分析 .....	242
9.9.4	统一解题步骤 .....	244
习题	.....	245
第十章	多目标决策 .....	247
10.1	引言 .....	247
10.2	事先索取偏好的方法 .....	249
10.3	目的规划法 .....	253
10.3.1	目的规划问题的一般表示 .....	254
10.3.2	线性目的规划 .....	256
* 10.3.3	字典序法 .....	261

* 10.3.4 非线性目的规划 .....	261
10.4 逐步法 .....	262
10.5 调和解和移动理想点法 .....	266
* 10.6 多目标问题的序贯解法 .....	271
* 10.7 基于目标间权衡的多目标决策方法 .....	273
10.7.1 关于目标之间的权衡 .....	273
10.7.2 Zions-Wallenius 法 .....	277
10.7.3 Geoffrion 法 .....	279
10.7.4 基于目标权衡的方法小结 .....	285
* 10.8 代理价值置换法 .....	286
习题 .....	291
<b>第十一章 群决策概论与社会选择理论</b> .....	294
11.1 群决策概论 .....	294
11.1.1 引言 .....	294
11.1.2 群决策的分类 .....	295
11.1.3 社会选择问题 .....	297
11.2 投票表决 .....	298
11.2.1 非排序式选举 .....	299
11.2.2 排序式选举与投票悖论 .....	304
11.2.3 其他投票表决规则 .....	308
11.2.4 策略性投票 .....	309
11.3 社会选择函数 .....	312
11.3.1 引言 .....	312
11.3.2 社会选择函数的几个性质 .....	312
11.3.3 Condorcet 函数 .....	314
11.3.4 Borda 函数 .....	315
11.3.5 Copeland 函数 .....	316
11.3.6 Nanson 函数 .....	318
11.3.7 Dodgson 函数 .....	319
* 11.3.8 Kemeny 函数 .....	321
* 11.3.9 Cook-Seiford 函数 .....	324
* 11.3.10 本征向量函数 .....	328
* 11.3.11 Bernardo 法 .....	330
11.4 社会福利函数 .....	335
11.4.1 社会福利函数的基本概念 .....	335

11.4.2	社会福利函数的 Arrow 条件	337
11.4.3	Arrow 的定理	339
11.4.4	Black-Arrow 单峰偏好	343
11.4.5	Coombs 条件	345
* 11.4.6	Bowman-Colantoni 法	348
* 11.4.7	Goodman-Markowitz 法	353
* 11.4.8	基数效用函数	356
11.4.9	社会福利函数小结	359
11.5	社会福利函数与社会选择函数的比较	360
11.5.1	Arrow 条件与评价社会选择函数的性质之间的关系	360
11.5.2	各种社会选择函数的性质	361
	习题	362
第十二章	专家咨询	365
12.1	引言	365
12.2	多目标群决策方法	367
12.2.1	用于方案评价与选择的多目标群决策方法	367
12.2.2	序数法	369
12.2.3	基数法	373
* 12.3	集体参与分配网	375
* 12.4	反复迭代的公共规划方法	378
* 12.5	专家咨询问题的系统方法	380
第十三章	冲突分析	383
13.1	谈判与协商	383
13.1.1	Nash 谈判模型	383
13.1.2	其他谈判模型	385
13.1.3	谈判问题与效用	389
13.2	仲裁与调解	391
13.3	多人合作对策	393
* 13.4	投资分摊	399
13.4.1	投资分摊问题的表述	399
13.4.2	基于合作对策的投资分摊	400
13.4.3	评价投资分摊方法优劣的标准	405
* 13.5	协调规划法	406
13.5.1	协调规划法的基本形式与性质	407
13.5.2	协调规划法的改进	409

13.5.3 示例 .....	410
13.5.4 三峡工程的投资分摊 .....	412
13.5.5 小结 .....	416
习题 .....	417
参考答案与提示 .....	419
参考文献 .....	440



各章间的关系图

# 第一章 随机性决策的基本概念

## 1.1 引言

### 1.1.1 决策与决策论的定义

“决策”一词经常出现在各种出版物和人们的口语中,不同的人在使用这个词时对它的理解也不尽一致。决策理论作为一门课程,在对其进行讨论之前,先探究一下“决策”和“决策理论”的确切含义。首先讨论“决策”,下面选几个有代表性的决策的定义。

1) “决策”一词在英语中是 decision,它在《牛津词典》中有如下解释:

the act of deciding (作决定的行动)

a conclusive judgment (最终判决,结论性的判断)

the conclusion arrived at (得出的结论)

2) 《中国大百科全书·自动控制与系统工程卷》中:

“决策”为最优地达到目标,对若干个备选的行动方案进行的选择。

3) 《苏联大百科全书》中:

“决策是自由意志行动的必要元素……和实现自由意志行动的手段。自由意志行动要求先有目的和行动的手段,在体力动作之前完成智力行动,要考虑完成或反对这次行动的理由等等,而这一智力行动以制订一项决策而告终。”

在这个解释中,有两点是前面的定义中没有强调的:① 决策是智力行动;② 决策是意志行动。因此,决策与人的意志、主观愿望和价值判断有关,即决策的结果因人而异,不惟一。

4) 《大英百科全书》中:

“决策”是“社会科学中用来描述人类进行选择的过程的术语”。

这一定义强调了“决策”的社会科学属性。

5) 《哈佛管理丛书》中:

“决策是指考虑策略(或办法)来解决目前或未来问题的智力活动。”

这一定义突出了决策的目的性和目标是为了解决问题,同时也说明决策是智力活动。

按照以上解释,决策是进行选择的行动或行动的结果,并有作决策(decision making)即制订决策的过程的含义。

关于决策论(decision theory)和决策分析(decision analysis),有下列定义。

1)《中国大百科全书·自动控制与系统工程卷》中:

决策论:根据系统的状态信号和评价准则选择最优策略的数学理论。

决策分析:研究不确定性决策问题的一种系统分析方法,其目的是改进决策过程,从一系列备选方案中找出一个能满足一定目标的合适方案。

2)《美国大百科全书》的“Decision Theory”条:

“所谓作决策,就是在若干个可能的备选方案中进行选择。决策论则是为了对制订决策的过程进行描述并使之合理化而发展起来的范围很广的概念和方法。”

“广义的决策理论可以分为两种:

① Prescriptive decision theory (规定性决策理论),规定应当如何作决策;

② Descriptive decision theory(描述性决策理论),研究人们实际上是如何作决策的。”

“行为科学家、社会科学家和哲学家力图找到决策过程的更精细的描述性模型,以便为数学家、经济学家、战略分析家、商业管理人员和其他人员提供更高级的规定性决策过程。”

3)《大英百科全书》的“Decision theory”条:

决策论是“在统计学中探讨用公式表示并求解一般决策问题的理论和方法”。

4)《认知科学百科全书》“Decision making”条:

“决策是从一集备选方案中选择所偏爱的方案或行动路线的过程,它渗透到生活的各个方面,包括买什么,选举时投谁的票,找什么工作等等。决策通常涉及外部世界的不确定性(例如,天气会怎么样)以及与个人偏好的冲突(例如,应该获取更高的薪金还是更多的闲暇);决策过程常常从信息的集聚开始,通过似然率(主观概率)的估计和审议直到选定最终行动……。”

“决策的分析方法有三种:规范性、描述性和规定性。规范性方法假设一个合乎理性的决策人,它具有定义明确的、满足理性行为公理要求的偏好;它被称为理性选择理论;它主要基于先验的考虑而非以实验为基础的观察。描述性的决策方法以实验为基础,对选择行为进行观察和研究;它主要考察在决策形势下指导决策人行为的心理因素。实验证据表明,人们常常与合乎理性的规范性决策所要求的不同。据此,规定性方法的目标是改进决策方法,使之符合规范性要求。”

我们还可以继续列举决策、决策论和决策分析的有关定义。但是从上面给出的各种定义已经不难看出,所谓决策,狭义上是要从若干可能的方案中,按某种标准(准则)选择一个,而这种标准可以是最优、满意、合理等等;广义上相当于决策分析,是人们为了达到某个目标,从一些可能的方案(途径)中进行选择的分析过程,是对影响决策的诸因素作逻辑判断与权衡。作为一门学科或学科分支,决策理论是研究在有风险或不确定性情况下制订决策的定量分析方法。

当然,决策一词还有其他含义,例如,决策的政治含义是指政策的制订过程

(Lindblom 1968),但这些已与本书要研究的内容无关了。

### 1.1.2 决策论的发展简史

古代的田忌与齐王赛马,严格地讲是对策(博弈)问题,但也是广义的决策问题。作为学科的决策论的产生则与赌博有关,16~17 世纪法国宫廷设有赌博顾问,他们是研究概率论、对策论的先驱,而概率论、对策论则是决策论形成的先导。虽然早在 1738 年 Bernoulli 就提出了效用和期望效用的概念,但是到了 20 世纪 20 年代以后,决策论才从对策论中分离出来;对策论研究人与智能的对手(人)之间的对抗;而决策论则处理人与非智能对手即自然界之间的关系。Ramsay(1926)在效用和主观概率的基础上提出了制订决策的理论;De Finetti(1937)则对主观概率的构造做出了重大贡献;Von Neumann 和 Morgenstern(1944)建立了效用的公理体系,为形成和完善不确定性条件下制订决策的效用理论奠定了坚实的基础。20 世纪 50 年代,Wald(1950)用对策论的定理解决统计决策中的一些基本问题;Blackwell 和 Girshick(1954)把主观概率和效用理论整合成一个求解统计决策问题的条理清晰的过程;Savage(1954)建立了具有理论体系并形成具有严格的哲学基础和公理框架的统计决策理论。一旦理论形成,许多人把它用于涉及不确定性和数学上结构良好的随机试验样本的决策问题,形成了以贝叶斯分析为基础的统计决策理论;到 20 世纪 60 年代,统计决策理论取得长足进展,出现了实用统计决策与最优化统计决策等面向实际应用的决策理论和方法(Raiffa et al. 1961, Pratt et al. 1965 和 DeGroot 1970)。尤其是 Howard(1966)采用决策分析一词,并把系统分析方法引入统计决策理论,从理论和应用两个方面推进决策论的发展。

半个多世纪以来,决策论的大部分内容与规范性决策论有关。由于经济学家、数学家以及系统科学家的努力,决策分析日益广泛地用于商业、经济、实用统计、法律、医学、政治等各方面;而行为科学家对描述性决策和效用的测度等问题的研究,使排序、有界区间的度量技术等因此而获得发展。

二次大战开始后发展起来的运筹学在决策论的概念、方案的优化、统计决策理论、决策方法中有着坚实的基础,使决策理论成为运筹学中的一支。

从 20 世纪 70 年代开始,决策分析已经成了工业、商业、政府部门制订决策所使用的一种重要方法。一些规范性的决策方法,如成本效益分析、资源分配、计划评审技术(PERT)、关键路径法(CPM)等的应用得到普及;多目标决策问题的研究也逐步深入,方法层出不穷。

计算机的飞速发展与普及以及信息处理、数据存储与检索手段的进步,加上决策理论的进展(程序化决策方法能解决问题日益增加,非程序化决策方法研究的深入)导致统计数据、研究资料迅速更新(决策矩阵的迅速更新)和决策模型的日臻完善,以及人工智能的发展、知识库的形成,使得根据新信息及时乃至自动修改策略



成为可能;决策支持系统的产生和发展不仅为决策人提供问题求解所需的相关信息和适当的模型,也使某些常规性问题有可能自动求解。

模糊决策、序贯决策、群决策和组织决策及其支持系统等领域的研究也在不断深入。决策理论和方法至今仍是生气勃勃、不断发展着的研究领域。

### 1.1.3 决策论与其他学科的关系

1) 决策论是运筹学的一支。本书的前六章介绍的是随机性决策问题,而随机性(probabilistic)一词在英文中是由 probability(概率)的前半部分和 statistic(统计)的后半部分组合成的,由此可见决策论与概率论和数理统计之间的关系。中国运筹学会设有决策理论和方法专业委员会;在国际运筹学会(IFORS)中设有对策与决策组,每次开学术会议决策论都是其主要内容之一。

2) 决策论也是经济学和管理科学的重要组成部分。从学科分类看,管理科学作为一级学科,管理理论是其中最主要的一部分,而决策理论则是管理理论中的重要内容。决策论的许多重要著作的作者是经济或管理科学方面的教授,如 Arrow 和 Hicks(1972)、Simon (1978)、Buchanan(1986)、Allais(1988)、Nash 和 Harsanyi(1994)、Mirrlees 和 Vickrey(1996)、Sen(1998)、Savage、Sage、Keeney……其中许多人是诺贝尔经济学奖的得主(括号内是获得诺贝尔经济学奖的年份)。图书目录的编排上,统计决策理论归入数学中的 O212,一般的决策理论和方法,归入 C 类,尤其是多目标决策,属管理科学类,归入 F 类。国际上著名的管理方面的杂志《Management Science》中有大量决策方面的文章,经常刊出有关决策的专集。

3) 决策论还是控制论的延伸。当控制变量为离散型时,控制问题实质上就是决策问题。决策与控制有着极其密切的联系,用控制论的方法研究决策,把反馈、敏感性分析、系统分析等方法引入决策过程,形成了决策分析方法,大大推进了决策理论的实际应用。在这方面,以 Howard 为首的斯坦福大学的决策分析研究所功不可没。在哈佛大学应用科学系中设有控制与决策组。我国也有专门的《控制与决策》杂志。许多学者都是经由控制论到系统分析再到决策分析的发展过程。在学科分类上,信息学部设有控制科学与工程一级学科,其中二级学科有系统工程,而决策理论、MIS 与 DSS 是系统工程专业中重要的研究方向。

4) 决策论也是系统科学和系统工程中的重要部分。系统是单元的集合,这些单元以整体完成某种目的,对系统的研究包括规定概念、确定系统、获取并运行系统。而确定系统即系统分析(设计、评价)是核心,决策论为系统分析,尤其是存在不确定性的系统的分析提供了必要的方法。当然,系统分析和决策分析之间还是有所区别的,系统分析侧重对系统的整体性能进行客观的分析判断,决策分析则在进行客观分析的同时还注意决策人的价值判断与偏好分析。在系统工程领域的重要期刊《Systems, Men and Cybernetics》中,经常有决策方面的文章和专集。

5) 决策理论是社会科学与自然科学的交叉,是典型的软科学。我们知道,自然科学研究的是客观世界,是客观世界中的事实元素,使用的研究方法以定量为主;由于事实元素是可以仪器加以检测(或者通过变换后可以检测)的,自然科学的研究成果有可重现性和客观的衡量标准。而社会科学主要研究由人组成的社会,社会中的人以及人际关系,其核心是价值元素,关键在于价值判断,使用的研究方法以定性为主,研究成果难以用客观标准衡量。所谓软科学,是要用定量方法研究价值元素,即对社会科学采用定量化的研究方法;决策论正是要用定量化的方法处理决策人的价值判断。在对价值的研究方面,各类研究人员的研究内容各有侧重:哲学家研究人如何决定什么是有价值的;行政管理人员关心人们如何使一个组织为其目标服务;经济学家力图回答人如何在不同方案中抉择使自己尽量满足;心理学家则探索何为满足,人如何动脑筋解决问题;数学家尽力提供各种数学模型帮助解决这些问题。至于决策的程序化、民主化则是政治问题,要由政治家来解决。

## 1.2 随机性决策问题的基本特点与要素

无论是个人还是企业和政府部门,无论在日常生活中还是经营、管理过程中,都会遇到各种各样的需要人们作判断和选择的问题,这些问题都是决策问题。但是在有些决策问题中,所有与问题有关的事实和因素都是事先确切知道的,我们称之为确定条件下的决策,这时决策失误的原因除了考虑不周之外,就是问题的计算过于复杂。这类决策问题应该属于运筹学的研究范畴,不是决策理论研究的重点对象,尤其是在前六章,主要研究不确定条件下的决策。我们先来看几个随机性决策问题的例子。

### 1.2.1 例

1) 火灾保险问题 一个商店的负责人考虑是否购买火灾保险。在保险期内,商店可能遇上火灾,设商店在保险期内发生火灾的可能性为  $p$ ,也可能不发生火灾,可能性是  $1-p$ ;买火灾保险要花一笔保险费,通常保险费是资产总额  $G$  的一定比率  $r$ ,不买保险则一旦发生火灾损失就太大了。

2) 出门带伞问题 晴雨未卜,出门是否带伞。如果不下雨,带伞是个累赘;如果下雨,带伞可以避免挨淋,不带伞就要淋雨。

3) 进货问题 某个零售商准备进一批易腐农产品,进了货若不能在当天内售完,商品就会腐败变质,造成损失。零售商并不知道当天顾客对这种商品的需求量,进货多了卖不掉是损失;进货太少满足不了顾客需求,不但钱少赚了,还影响顾客的回头率。但是无论如何他必须事先确定进货的数量。卖报人从批发商处拿多少当天报纸也与此类似,报纸的销售量与天气、报纸内容有关,卖报人必须事先确定进货的数量。

4) 加工方法问题 机械零件制造商承接了一份加工新产品的订单,为此要安排加工工具。新产品的加工有两种方法:一种是用现成的通用设备,加工能力较差且劳务成本较高;一种是购置专用设备,加工能力较强且劳务成本低。若今后新产品的需求量大,购置专用设备比采用通用设备好,需求量小时采用通用设备比购置专用设备经济。问题是新产品在今后的加工量现在并不清楚,但是制造商需要在专用设备和通用设备中选择一种进行生产并按时交货。

5) 项目申请问题 课题组的负责人获悉,某个单位有一个科研项目准备招标,他感到课题组有能力承接该项目,因为研究方向相符,并已经有一定的研究基础;但是,其他几个单位也准备投标,而且不乏有竞争力者。若参加投标,要耗费相当数量的人力和费用,投标后有中标的可能性,只要能中标总会有效益;投标后不能中标的可能性也很大,不能中标则投入的人力和费用就没有回报。若不参加投标,没有耗费也没有收益。他必须决定是否参加投标。

上面所举的例子都是简化了的决策问题,实际的决策问题远比它们复杂。以项目申请问题为例,课题组的负责人在考虑这一问题时至少还会涉及下述因素:按期完成项目的可能性有多大;根据本课题组现有的研究力量与在研项目的情况以确定争取项目的紧迫性,若该课题组的任务不足,应该尽力争取、志在必得,若任务饱满则另当别论;了解其他投标者的情况,分析各投标方的实力,判断本单位中标的可能性;由于中标的可能性还与投标时的报价有关,因此在实际的决策问题中,如果参加投标,报价就成了关键;此外,作为科研项目,完成研究所需的人、财、物消耗与工程项目不同,也有较高的不确定性。决策人必须确定如何收集相关的信息,以及如何根据所收集到的信息做出适当决策。

### 1.2.2 决策问题的特点

从上面的例子可以看出,在随机性决策问题,也就是存在不确定性的决策问题中,决策人可以在各种可能的行动中进行选择;但是有些因素是决策人所无法控制的。我们把决策问题中决策人无法控制的所有因素,即凡是能够引起决策问题的不确定性的因素,统称作自然状态。这里的自然状态(简称状态)是广义的,在下雨带伞问题中的下不下雨是自然状态,在购买火灾保险中的保险期内是否发生火灾,加工方法的选择问题中今后新产品的加工数量多少,加工非标准件的过程中报废零件的数量都是自然状态。由于未来自然状态的不确定性,决策人无论采取什么行动,都会因为自然状态的不同而出现不同的后果(或者称为结果、结局)。这时的决策人实际上是被迫进行赌博,只要他采取行动,就已经处于参与赌博的位置上。他希望能赢,但也可能会输。

由此可知,随机性决策问题具有如下特点:

1) 决策人面临选择,可以采取的行动(即备选方案)不惟一;

- 2) 自然状态存在不确定性,由于自然状态的不确定性会导致后果不确定;
- 3) 后果的价值待定。

特点 2)将在第二章中进行分析,特点 3)则在第三章讨论。

1.2.3 决策问题的要素

从以上的讨论可知,要能全面表述一个决策问题,需要给出下列要素。

(1) 行动集

行动集亦称方案集,记作  $A = \{ a_1, \cdots, a_m \}$ ,用来表示决策人可能采用的所有行动的集合,在有观测值时亦称策略集或策略空间,记作  $\Delta$  或  $D$ 。在简化的火灾保险问题中,  $A = \{ a_1, a_2 \}$ ,其中  $a_1$  表示购买火灾保险,  $a_2$  表示不买火灾保险。

(2) 自然状态集

自然状态集或称状态空间、参数空间,用来表示所有可能的自然状态,记作  $\Theta = \{ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \}$ (亦可记作  $S$  或  $\Omega$ )。在火灾保险问题中,  $\Theta = \{ \theta_1, \theta_2 \}$ ,其中  $\theta_1$  表示在保险有效期内发生火灾,  $\theta_2$  表示在保险有效期内不发生火灾。

(3) 后果集

后果集  $C = \{ c_{ij} \}$ ,决策问题的各种可能的后果  $c_{ij}$  ( $i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n$ )的集合,  $c_{ij}$ 用来表示决策人采取行动  $a_i$ 、真实的自然状态为  $\theta_j$  时的后果,即  $c_{ij} = c(a_i, \theta_j)$ 。在火灾保险问题中,  $c_{11}$  表示购买了火灾保险,在保险有效期内发生火灾时的后果。在第三章我们讨论了后果对决策人的实际价值后,就用效用( $U$ )、价值( $V$ )或损失( $L$ )等表示后果集。

需要说明的是,在有些决策问题中的后果是数字量,即  $c_{ij}$ 是具体的带有单位的数值。比如说,购买火灾保险问题中的后果。而有的决策问题中的后果就只能用语言或文字描述,像下雨带伞问题中的后果。有时既有数字又有语言或文字,如文献(Savage 1972)所举的例子(鸡蛋放久了总会有坏的):某人回到家时,他的妻子已经打了 5 个鸡蛋放在碗里;她由于某种原因要丈夫来做炒鸡蛋,还没有打破的第六个鸡蛋还放在碗旁;他要么把第六个蛋加进去,做成六个蛋的炒蛋,或者把第六个鸡蛋扔掉,这时他要决定怎么办。对此可以先作一点简化,他面临三种选择:把第六个蛋打破放进已经盛有 5 个蛋的碗里;把蛋打破放到碟子里观察一下;不管鸡蛋是好是坏,把它扔掉。这三个行动的相应后果与鸡蛋的状态有关,见表 1.1。

表 1.1

行 动	第六个鸡蛋是好的	第六个鸡蛋是臭蛋
直接打入碗内	炒 6 个鸡蛋	连同 5 个好鸡蛋全部扔掉
打破放入碟子	炒 6 个鸡蛋、洗碟子	炒 5 个蛋、洗碟子
扔掉	炒 5 个蛋	炒 5 个蛋

在这个例子中,后果既有数字,又有文字。

通常,方案、自然状态和后果三个要素是决策问题的基本元素。在有些决策问题中还有另一个重要因素,这就是信息。

#### (4) 信息集 $X$

信息集亦称样本空间(或观测空间、测度空间)。在决策时,为了获取与自然状态  $\Theta$  有关的信息以减少其不确定性,往往需要进行调查研究,调查所得的结果是随机变量,记作  $x$ ;如果是随机向量,则用黑体  $\mathbf{x}$  表示,信息集  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 。

## 1.3 决策问题的分类

笛卡儿(R Descartes 1596~1650)说过,分类是使事物(研究对象)条理化的方法,应该“将试图解决的问题,尽可能按你便于解决的需要划分为许多问题”。莱布尼兹(G W Leibniz 1646~1716)则认为笛卡儿的方法不切实际,因为划分的艺术无法说明。笛卡儿强调了分类的重要性,而莱布尼兹强调了分类的困难性和分类方法的多样性。为了讨论方便,我们还是根据笛卡儿的观点,对决策问题进行分类。

### 1. 按容易区分的因素划分

如果按决策问题涉及的决策人数量划分,可以把决策问题分成单人决策和多人决策(或称群决策)两类;若根据决策问题涉及的目标的数量,可以把决策问题分成单目标决策与多目标决策;还可以根据决策问题的求解步骤,把一次性求得问题的解的称作单步决策,而把需要多次求解,根据前一次求解的结果或执行的情况再作下一次决策的称作多步决策,或称序贯决策;根据决策时所掌握的信息的完备程度,可把决策问题分为确定性决策、风险型决策、严格不确定型决策、模糊决策等等。本课程主要讨论的是单目标的风险型决策和严格不确定型决策问题、确定性的多目标决策问题(决策变量包括离散型和连续型)和多人决策问题。由于确定性的单目标决策问题、多步决策问题是运筹学中的内容,本课程不予讨论。

### 2. 按涉及面的宽窄划分

按决策问题涉及面的宽窄,亦即决策所要解决的问题性质,可以分成战略决策(strategic decision)、管理决策(administrative decision)和业务决策(operating decision)三类。这三类决策问题的特点与差异见表 1.2。

表 1.2 三类决策的特点比较

	战略决策	管理(行政)决策	日常事务(业务)决策
决策权	集中	集中与分散结合	分散
所需信息	不全	较全	完全
问题结构	不良	一般	良好
涉及的风险	大	一般	小
决策的组织工作	复杂	一般	简单
决策程序	复杂	一般	简单
目标数量	多	中等	少
时限	长期	中期	短期

战略决策是具有一定规模的组织机构,为了自身与变化着的环境相适应或谋求发展的决策。战略决策具有总体性、重大性和目标长远的特点,通常由组织中的最高管理层负责。管理决策或称行政决策,是为了实现既定战略而进行的计划、实施、控制与管理的决策。业务决策则是具体业务部门为了提高工作质量与效益进行的决策。

对这种分类和其中各类决策问题感兴趣的是研究描述性决策理论为主的行为科学家。

3. 个人事务决策与公务决策

决策的另一个重要的分类方法是把决策问题分成个人事务决策与公务决策两大类。

对决策问题进行系统的理论性研究发端于西方国家,促使决策理论得以发展的直接动因则是商业管理人员和企业经理所面临的经济问题。西方国家资本的私人占有性导致了决策论从形成开始,就在解决经济问题时强调决策者个人的意志和价值观;在决策分析时要对决策者个人的价值判断、意见、感觉进行量化,由此进行合乎逻辑的分析、推理并作出决策。作为个人事务决策,这样做是必要而合理的。在我国,私有企业的决策也是个人事务决策;但是,我国的公职人员,包括行政部门的领导和国有及集体企业的负责人所做出的决策应该属于公务决策。只要是公务决策,他所代表的就绝不是个人,即使是实行首长负责制的部门的首长,实行厂长负责制的工厂的厂长,在决策时就不能也不允许他仅仅从个人的好恶出发来考虑问题,而是要从本部门 and 部门全体成员乃至整个国家的利益出发进行价值判断,即使以他个人的名义进行决策,实质上也是受国家和集体的委托行使职权,应该强调价值判断的客观性和理性化。高级行政部门的重大问题的决策尤其是这样,特别重大的问题要由决策问题所涉及的群众、集体进行价值判断,不能由部门

或企业的领导人作为个人事务决策处理。

#### 4. 决策人与决策分析人的角色分化

决策人所面临的实际的决策问题通常是在利益冲突、信息不全、资源有限和环境十分复杂的情况下进行的。建立复杂决策问题的适当的数学模型并用现代化的科学手段求解,需要专门知识和技能。因此,微观经济学和决策论假定,制订决策的决策人是经济人。所谓经济人是指行为合乎理性的人,他有经济头脑,知道自己的目标和如何达到该目标;他会收集所有必要的信息,通晓自然科学,至少精通运筹学;他对决策环境十分了解,有很强的判断能力和稳定而一致的选择能力;能按照最经济、最有效的方式分配有限的资源去获得最大的经济利益。

在现实社会中,能满足经济人要求的决策人即使存在也十分罕见,由此出现了决策人和决策分析人的分工。由具有丰富实际经验和卓越的领导与管理才能的决策人对环境(形势)进行分析、对后果作价值判断;而由决策分析人建立复杂决策问题的适当的数学模型,并提供用现代化的科学手段解决决策问题所需的专门的知识 and 技巧,即由决策分析人运用决策论和系统、科学的方法进行分析、推理,为决策人制订正确决策提供逻辑判断,使决策人更好地达到预期目标。

在决策过程中,决策人和决策分析人以及计算机结合构成决策单元。决策单元的主要作用是收集并处理各种信息,使之成为系统的知识,产生或挑选决策规则,做出决定等等。

## 1.4 随机性决策问题的分析方法和步骤

### 1. 决策树

在前面列举的各种决策问题可以用一种称作决策树的树状图方便而又直观地表示出来。图 1.1 所示为决策人面临两种备选方案,有两种可能的自然状态的决策树。其中最左侧的小方框称为决策点,表示决策人面临一个决策问题。从决策点向右发出的枝叫决策枝,每一枝代表决策人可能采取的一种行动(或方案)并在该决策枝上作相应的标记  $a_i, i=1, \dots, m$ ; 决策人必须从这些决策枝中选择一枝继续向前。决策枝的终点是小圆点,称为机会点。从机会点向右发出的枝叫机会枝,每一机会枝代表一种自然状态,有几种可能的自然状态就有几条机会枝;在各机会枝上可以标注自然状态的记号  $\theta_j$  或该状态出现的概率  $\pi(\theta_j), j=1, \dots, n$ ; 决策人在机会点处无法控制沿哪条机会枝继续向前。机会枝的终点是小三角形的点,称为后果点,可以用  $c_{ij}$  表示决策人采用某种行动  $a_i$ 、出现某种真实的自然状态  $\theta_j$  时决策人面临的后果;为了表述简单,也可以用  $c_k (k=1, 2, \dots, r; r=mn)$  表示后果。具体的后果,无论是数值还是文字型后果,标在后果点右侧或上、下方。

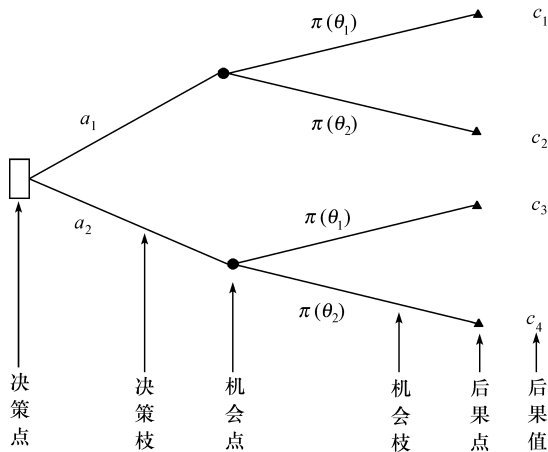


图 1.1 决策树

根据以上说明,可以做出有关问题的决策树。

**例 1.1** 火灾保险问题。图 1.2 中,  $a_1$  为购买保险,  $a_2$  为不买保险;  $\theta_1$  为保险期内发生火灾,发生火灾的可能性是  $\pi(\theta_1) = p$ ;  $\theta_2$  为无火灾,保险期内不发生火灾的可能性是  $\pi(\theta_2) = 1 - p$ 。

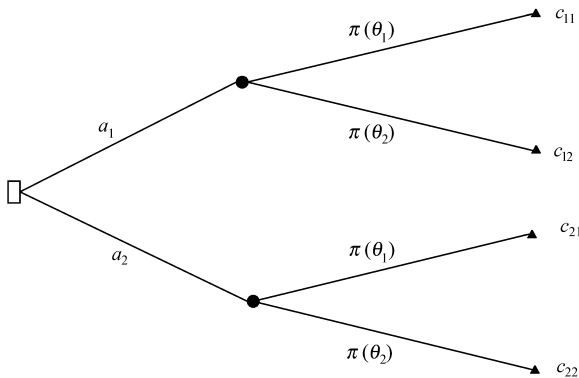


图 1.2 火灾保险问题的决策树

图中后果  $c_{ij}$  的值作为习题留给读者讨论。

**例 1.2** 出门带伞问题。只要令图 1.2 中的  $a_1$  为带伞,  $a_2$  为不带伞;  $\theta_1$  为有雨,  $\theta_2$  为无雨;  $c_{ij}$  表示相应的后果,其中  $c_{11}$  为带伞遇雨,  $c_{12}$  为带伞无雨,  $c_{21}$  为未带伞遇雨,  $c_{22}$  为未带伞无雨,则图 1.2 也就是出门带伞问题的决策树。

决策树不仅可以表示单步决策问题,也可以用来表示复杂的序贯决策问题,例如油井钻探问题。某个公司拥有一块可能有油的土地,决策人可以在这块土地上钻井,也可以不钻井;如果钻井费用为  $C$ ,有油的可能性为 0.2,有油时的净收益为



B。该问题的决策树如图 1.3 的左半部分所示。如果第一次钻井后没有出油,决策人又面临是否还钻第二口井的决策。第二次决策的决策树如图 1.3 右半部分所示。

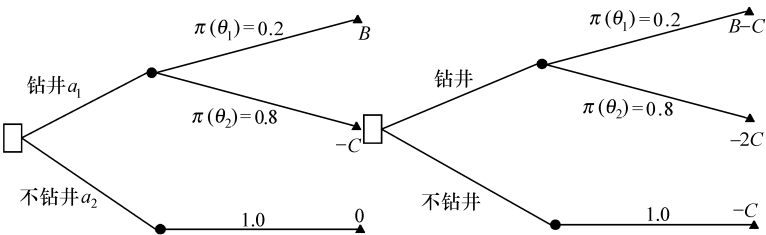


图 1.3 多级决策问题的决策树

2. 决策分析的基本步骤

求解一个实际的决策问题通常包括下列步骤：

第一步,构造决策问题。这一步要为决策问题提供可能的方案(或行动)并标定目标。对于一些简单的决策问题,可供采用的决策和要达到的目标都是非常清楚的,例如在带伞问题中,可采用的决策仅有两种(带伞和不带伞)。而希望达到的目标是在尽可能少地增加决策人负担的情况下不被淋湿。但在复杂的情况下,构造决策问题并不容易。例如,有的决策问题的备选方案很多,其中许多并不是好的决策。这时如能有办法删除那些“劣”的备选方案,就十分有利于下一步的分析。而有的决策问题,初看起来似乎没有合理的方案,这时需要启发人们的创造性,根据问题的目标来形成有效的方案。

第二步,确定各种决策可能的后果并设定各种后果发生的概率,具体方法在第二章讨论。

第三步,确定各种后果对决策人的实际价值,即确定决策人对后果的偏好,这一部分内容在第三章讨论。

第四步,对备选方案进行评价和比较。这一步的目的是在以上三步的基础上选择决策人最满意的决策。对一般的决策问题,评价方案优劣的依据是根据 Von Neumann-Morgenstern 的效用理论计算各种后果的效用进而计算各方案的期望效用,选择期望效用最大的方案;也可以根据问题的特点,选择其他评价准则。详细讨论在第四章进行。

决策问题的各求解步骤之间的关系见图 1.4。图 1.4 中包含有敏感性分析。一个复杂的决策问题往往有多个不确定因素影响决策的后果,所以它有多个状态变量。例如产品的销售额,不仅决定于顾客的爱好,还决定于该产品的质量、价格等。这些因素在开始研制产品时都是不确定的,要能够比较准确地估计所有状态

的概率是很困难的。因此,如果能把状态用它的标称值作为一个确定的量处理,分析起来就容易得多。要判断能否把一个不确定量作为一个确定量处理,就需要进行敏感性分析。

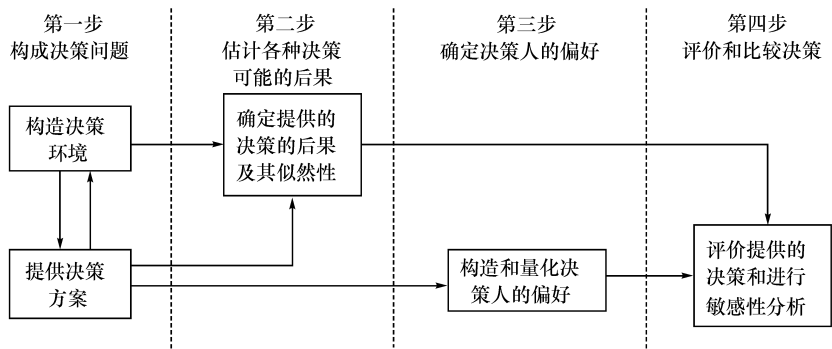


图 1.4 决策分析的基本步骤

敏感性分析有两种,一种称为确定的敏感性分析,另一种称为随机的敏感性分析。确定的敏感性分析是把所有的状态变量除一个以外都设定在它们的标称值上,然后让这个未设定的状态变量的值在一定范围内变化,观察它所产生的后果的相应变化,并计算其敏感性。如果通过敏感性分析发现某个状态变量的变化对其后果有严重的影响,则需要设定它的概率分布;否则,只需采用它的标称值就行了。由于我们只需要对状态变量能不能作为确定量处理作粗略估计,因此,一般可以采用确定的敏感性分析。但如果敏感性分析的精度要求比较高,就需要采用随机的敏感性分析。这种分析和确定的敏感性分析的不同之处在于它必须考虑状态变量是随机变量这一特点,在进行这种分析时,除了一个状态变量被规定在一定范围内取值外,其余的状态都作为随机变量,设定它们的条件分布密度。这种分析往往是在决策分析的第四步进行。对于十分灵敏的状态,有可能需要进一步收集新的信息,以改进其概率估计。

对决策变量作确定的敏感性分析也是很重要的。借助于这种分析可以找到其中关键的决策变量,这些决策变量对后果有重要的影响。

以上步骤并不是一成不变的,例如为了分析的方便,可把第三步放在第二步之前进行。如果决策人对于分析的结果感到不够满意,则需要收集新的信息,并把这种新信息运用到决策分析中去。这个问题我们将在第四章贝叶斯分析中介绍。

关于决策问题的分析步骤,在第六章我们还要作详细讨论。

## 习 题

## 一、回答下列问题：

1. 什么是决策？什么是决策分析？
2. 决策问题的特点是什么？决策问题有哪些要素？
3. 画出决策过程的流程图并作简要说明。
4. 决策问题可以分成哪几类？各有什么特点？

## 二、用决策树表示下列问题：

1. 火灾保险。
2. 易腐品进货问题。

3. 油井钻探问题：某公司拥有一块可能有油的土地，该公司可以自己钻井，也可以出租给其他公司开采。若出租土地，租约有两种形式：①无条件出租，租金 45 万元；②有条件出租，租金依产量而定：产量在 20 万桶或以上时，每桶提成 5 元；产量不足 20 万桶时不收租金。设钻井费用为 75 万元，有油时需另加采油设备费 25 万元，油价为 15 元/桶。油井产量简化为 4 种状态：无油、产油 5 万桶、产油 20 万桶、产油 50 万桶。

三、设油井钻探问题如下：每次钻井费用 10 万元，有油时售油收入为 100 万元，有油的概率为 0.2。问无油时是否该继续钻井？若应该，钻几次仍无油时就要停止钻井？画出此决策问题的决策树。讨论结果的合理性，实际情况下你作何决策？

## 第二章 主观概率

第一章指出了决策问题的基本特点之一是自然状态的不确定性。由于自然状态的不确定性,决策人无论采取什么行动,所产生的后果都会因自然状态的不同而不同。为了能对决策进行定量化研究,有必要定量地表达自然状态的不确定性。如所周知,概率是定量表达不确定性的重要工具,这一章我们要对设定自然状态的概率分布所涉及的问题与相应的处理方法进行分析和讨论。

概率论中的大部分工作,是要设法从给定的简单事件的概率推导出某种复杂事件的概率;要研究根据新的信息,改变某种原先给定的概率;最终为进行有效决策提供基础和依据。如何决策的问题将留到后面几章讨论,这一章只处理基本事件发生的概率,即研究如何为基本的自然状态的概率赋值,使后续计算得以进行。

### 2.1 概率的基本概念

#### 1. 概率

##### (1) 频率与概率

为了描述随机事件发生的可能性的的大小,人们通常进行随机试验并观察试验结果。在相同条件下进行了  $n$  次试验,其中事件  $A$  发生的次数  $n_A$  称为事件  $A$  发生的频数,比值  $n_A / n$  称为事件  $A$  发生的频率,记作  $f_n(A)$ ,

$$f_n(A) \triangleq n_A / n \quad (2.1)$$

古典的**概率**(probability)的定义如下:

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) \quad (2.2)$$

##### (2) Laplace 的概率定义

Laplace(1812)把事件  $A$  发生的概率  $p(A)$  定义为

$$p(A) \triangleq k / n \quad (2.3)$$

式(2.3)中, $k$  为事件  $A$  所包含的基本事件数, $n$  为基本事件  $e_i$  的总数。显然,上述定义的适用条件是:

- ① 基本事件的数量有限,即试验的样本空间  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ;
- ② 每个基本事件都是等可能的,即  $p(e_1) = p(e_2) = \dots = p(e_n) = 1/n$ 。

### (3) 概率的公理化定义

Kormogorov 在 1930 年的著作中给出的概率的公理化定义如下。

**定义 2.1**  $E$  是随机试验,  $S$  是  $E$  的样本空间, 对  $E$  的每一事件  $A$ , 对应有确定的实数  $p(A)$ , 若  $p(A)$  满足:

① 非负性:  $p(A) \geq 0$ ;

② 规范性:  $p(S) = 1$ ;

③ 可列可加性: 对两两不相容事件  $A_k, k = 1, 2, \dots$  (两两不相容事件的定义是:  $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ ), 有

$$p\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k p(A_k)$$

则称  $p(A)$  为事件  $A$  发生的概率。

以上所述的几种概率的定义有一个共同的特点, 这就是概率是在多次重复试验中, 随机事件  $A$  发生的可能性的度量的度量。而在实际的决策问题中, 自然状态的概率往往无法通过重复试验求得, 通常也并不包含等可能的基本事件。例如, 在出门是否带伞的决策问题中可能会遇到明天是否下雨; 加工问题中新产品的加工数量; 项目申请问题中的中标可能性以及在实际决策中经常遇到的明年国民经济增长率的分布; 战争中对敌方下一步行动的估计等等广义的自然状态, 这些状态或事件显然是无法重复试验的, 其中也没有所谓的基本事件。而有些问题虽然不能完全不能重复试验, 但由于种种原因, 实际上不能施行。例如洲际导弹的命中率, 虽然在原则上可以通过相同条件下的重复试验获得, 但是每次试验费用过于昂贵、代价过大, 实际上不可能多次重复试验。在以上各种情况下, 前面提到的三种概率的定义均不适用。

由于上述原因, 需要有一种能在频率观点不适用、实际上无法进行随机试验时设定概率的方法, 这就是**主观概率**(subjective probability); 与此同时, 把上面三种定义所规定的概率称为**客观概率**(objective probability)。

## 2. 主观概率

根据 Savage(1954) 的观点, 主观概率是一种见解, 是合理的信念的测度。它是某人对特定事件发生的可能性的信念(或意见、看法)的度量, 即他相信或认为事件将会发生的可能性的度量。

这种相信的程度是一种信念, 是主观的, 但又是根据经验、各方面的知识以及对客观情况的了解, 利用相关信息进行分析、推理、综合判断而**设定**(assignment)的, 与主观臆测不同。

例如, 一个即将毕业的硕士生考虑下一步去向的时候, 面临着就业还是继续深造(考博士生)的选择问题。而是否考博士生在很大程度上取决于被录取的可能性

大小。他或她要根据自己的科研能力、有关学科的成绩、对导师生源状况的了解等等进行分析和判断,设定被录取的概率。如果这一概率还比较大,就会觉得值得一试;如果这一概率实在太小,还不如放弃继续深造的打算,直接就业。这种考博被录取概率的设定显然是主观的,但也不是随意的、毫无根据的,获得的相关信息越多、越准确,设定概率也越可信。如掷硬币,稍有常识的人都知道,只要硬币是均匀的,无需多次重复试验,也能判断正面朝上的概率是  $1/2$ 。又如,抛一枚图钉,它落地并最终静止时可能针尖朝上,也可能针尖朝下。要求一群学生估计针尖朝上的概率,虽然这些学生事先都没有抛过图钉,但是大部分学生都认为针尖朝上的概率大于  $1/2$ ,众数在  $0.55 \sim 0.7$ 。许多人是凭直觉判断的,但抛掷 10000 次以上的试验结果是针尖朝上的概率略大于 0.6。也就是说,即使凭直觉也可以做出相当不错的概率估计。

### 3. 概率的数学定义

在任何一本关于概率论的教材中,都有如下的概率定义。

**定义 2.2** 对非空集  $\Omega$ , 元素  $\omega$ , 即  $\Omega = \{\omega\}$ ,  $F$  是  $\Omega$  的子集  $A$  所构成的  $\sigma$  域 (即  $F$  满足如下条件: ①  $\Omega \in F$ ; ② 若  $A \in F$ , 则  $\bar{A} \in F$ ; ③ 若  $A_i \subset F, i=1, 2, \dots$ , 则  $\bigcup A_i \in F$ )。

若  $p(A)$  是定义在  $F$  上的实值集函数, 它满足:

① 非负性:  $p(A) \geq 0$ ;

② 规范性:  $p(\Omega) = 1$ ;

③ 可列可加性: 若  $A_1, \dots, A_n, \dots$  为两两不相容事件,  $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) =$

$\sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$ , 则称  $p(A)$  为事件  $A$  的(主观或客观)概率测度, 简称概率。

上述定义中,  $\omega$  为基本事件,  $A$  为事件, 三元总体  $(\Omega, F, P)$  称为概率空间。

需要注意的是, 定义 2.2 既适用于客观概率, 也完全可用于主观概率, 即两者有着完全相同的数学定义。因此, 由客观概率论者发展起来的概率论的整套推理和计算方法, 也都完全适用于主观概率。

### 4. 主客观概率的比较

#### (1) 基本属性

客观概率论者(以下简记为 O)认为: 概率是系统的固有的客观性质, 是在相同条件下重复试验时频率的极限。

主观概率论者(以下简记为 S)认为: 概率是观察者而非系统的性质, 是观察者对系统处于某状态的信任程度。

#### (2) 抛硬币: 正面向上概率为 $1/2$

O: 只要硬币均匀, 抛法类似, 次数足够多, 正面向上的概率就会是  $1/2$ , 这是