第三次

李钦 2024312371
li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

Problem 1. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P282 4.

用 Chebyshev 多项式 T_3 的零点在 $[-1,1]$ 上对函数 $f(x)=e^x$ 构造 2 次 Newton 插值多项式.

Solution. 为了使用 Chebyshev 多项式 T_3 的零点在区间 $[-1,1]$ 上对函数 $f(x)=e^x$ 构造 2 次 Newton 插值多项式, 我们首先需要找到 T_3 的零点. Chebyshev 多项式 $T_3(x)$ 的零点为:

$$x_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right),\quad k=1,2,3$$

计算这些零点:

$$x_1=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad x_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\qquad x_3=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此, Chebyshev 多项式 T_3 的零点为 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2=0$, $x_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 接下来, 我们计算这些点处的函数值 $f(x)=e^x$:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\qquad f(0)=e^0=1\qquad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

现在我们构造均差表:

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{0-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})$	$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-1)-\frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})}{\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{2}{3}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-2+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})$
0	1	$\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}=\frac{2}{\sqrt{3}}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-1)$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$		

根据均差表, 我们可以写出 Newton 插值多项式:

$$P_2(x)=f(x_1)+f[x_1,x_2](x-x_1)+f[x_1,x_2,x_3](x-x_1)(x-x_2)$$

代入具体值:

$$P_2(x)=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{2}{3}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-2+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})x$$

简化后得到:

$$P_2(x)=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{2}{3}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-2+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})(x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

这就是我们构造的 2 次 Newton 插值多项式.

Problem 2. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P282 7.

设 $f(x)=e^x$, $x\in[-1,1]$, 试求出 f 在 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 中的最佳平方逼近多项式 P_1^* 和 P_2^*.

Solution. 为了求解 $f(x)=e^x$ 在 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 中的最佳平方逼近多项式 P_1^* 和 P_2^*, 我们需要分别在 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 中找到使得误差平方和最小的多项式.

在 $\mathscr{P}_1$ 中的最佳平方逼近多项式 P_1^* 在 $\mathscr{P}_1$ 中, 多项式形式为 $P_1^*(x) = a_0 + a_1 x$. 我们需要最小化误差平方和:

$$E = \int_{-1}^{1} [e^x - (a_0 + a_1 x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

通过最小化 E, 我们可以得到 a_0 和 a_1 的值. 首先, 计算内积:

$$(1,1) = \int_{-1}^{1} 1^2 \, \mathrm{d}x = 2 \qquad (x,x) = \int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \qquad (1,x) = \int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = 0$$

以及 $f(x)$ 与基函数的内积:

$$(f,1) = \int_{-1}^{1} e^x \, \mathrm{d}x = e - \frac{1}{e}$$

$$(f,x) = \int_{-1}^{1} xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x \, \mathrm{d}x = e + \frac{1}{e} - (e - \frac{1}{e}) = \frac{2}{e}$$

构造法方程组:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,1) \\ (f,x) \end{pmatrix}$$

代入已知内积值:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e - \frac{1}{e} \\ \frac{2}{e} \end{pmatrix}$$

解这个方程组:

$$2a_0 = e - \frac{1}{e} \implies a_0 = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

$$\frac{2}{3} a_1 = \frac{2}{e} \implies a_1 = \frac{3}{e}$$

因此, $\mathscr{P}_1$ 中的最佳平方逼近多项式为:

$$P_1^*(x) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3x$$

在 $\mathscr{P}_2$ 中的最佳平方逼近多项式 P_2^* 在 $\mathscr{P}_2$ 中, 多项式形式为 $P_2^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. 我们需要最小化误差平方和:

$$E = \int_{-1}^{1} [e^x - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)]^2 \, \mathrm{d}x$$

通过最小化 E, 我们可以得到 a_0、a_1 和 a_2 的值. 首先, 计算内积:

$$(1,1) = 2 \qquad (x,x) = \frac{2}{3} \qquad (x^2,x^2) = \int_{-1}^{1} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

$$(1,x) = 0 \qquad (1,x^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \qquad (x,x^2) = \int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x = 0$$

以及 $f(x)$ 与基函数的内积:

$$(f,1) = e - \frac{1}{e}, \qquad (f,x) = \frac{2}{e}, \qquad (f,x^2) = \int_{-1}^{1} x^2 e^x \, \mathrm{d}x$$

使用分部积分法计算 (f,x^2):

$$\begin{aligned} (f,x^2) &= x^2 e^x \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2xe^x \, \mathrm{d}x \\ &= e - \frac{1}{e} - 2 \cdot \frac{2}{e} \\ &= e - \frac{5}{e} \end{aligned}$$

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

构造法方程组:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e - \frac{1}{e} \\ \frac{2}{e} \\ e - \frac{5}{e} \end{pmatrix}$$

通过解这个线性方程组, 我们可以得到 a_0, a_1, a_2 的值:

$$a_0 = -\frac{3}{4}e + \frac{33}{4}e^{-1}, \qquad a_1 = \frac{3}{e}, \qquad a_2 = \frac{15}{4}e - \frac{105}{4}e^{-1}$$

最终, $\mathscr{P}_2$ 中的最佳平方逼近多项式为:

$$P_2^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

其中 a_0, a_1, a_2 的值如上.

Problem 3.

求 x^2 在区间 $[0, 1]$ 上的最佳一次一致逼近多项式

Solution. 假设函数 g 是函数 f 的最佳一次逼近多项式. 则 $f - g$ 的内部极值点是唯一的; 设 $\{0, x^*, 1\}$ 是一个交错点组, $g(x) = cx + d$. 则

$$f(1) - f(0) = c(1 - 0) \implies c = 1$$

由于 x^* 是极值点, 于是

$$f'(x^*) - c = 0 \implies x^* = \frac{1}{2}$$

再由

$$f(0) - g(0) = -[f(x^*) - g(x^*)] \implies d = -\frac{1}{8}$$

因此, $g(x) = x - \frac{1}{8}$.

Problem 4. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P340 3.

用梯形公式和 Simpson 公式计算下列积分并估计其误差

(1) $\displaystyle\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x$

Solution. 我们将使用梯形公式和 Simpson 公式来计算积分 $\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x$, 并估计其误差.

梯形公式 梯形公式的形式为:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

对于 $\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x$, 我们有 $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \ln x$. 计算 $f(a)$ 和 $f(b)$:

$$f(1) = \ln 1 = 0, \qquad f(2) = \ln 2$$

代入梯形公式:

$$\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x \approx \frac{2-1}{2}[0 + \ln 2] = \frac{1}{2}\ln 2$$

梯形公式的误差估计 梯形公式的误差估计公式为:

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

其中 $\xi \in [a,b]$. 计算 $f''(x)$:

$$f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x} \implies f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

在区间 $[1,2]$ 上, $f''(x)$ 的最大值出现在 $x=1$:

$$f''(1) = -1$$

代入误差估计公式:

$$E_T = -\frac{(2-1)^3}{12}(-1) = \frac{1}{12}$$

Simpson 公式 Simpson 公式的形式为:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

对于 $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$, 我们有 $a=1$, $b=2$, $f(x)=\ln x$. 计算 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5, \qquad f(1.5) = \ln 1.5$$

代入 Simpson 公式:

$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \approx \frac{2-1}{6}(0 + 4\ln 1.5 + \ln 2) = \frac{1}{6}(4\ln 1.5 + \ln 2)$$

Simpson 公式的误差估计 Simpson 公式的误差估计公式为:

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

其中 $\xi \in [a,b]$. 计算 $f^{(4)}(x)$:

$$f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x} \implies f''(x) = -\frac{1}{x^2} \implies f'''(x) = \frac{2}{x^3} \implies f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

在区间 $[1,2]$ 上, $f^{(4)}(x)$ 的最大值出现在 $x=1$:

$$f^{(4)}(1) = -6$$

代入误差估计公式:

$$E_S = -\frac{(2-1)^5}{2880}(-6) = \frac{6}{2880} = \frac{1}{480}$$

最终结果 梯形公式计算结果:

$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\ln 2$$

误差估计:

$$E_T \approx \frac{1}{12}$$

Simpson 公式计算结果:

$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}(4\ln 1.5 + \ln 2)$$

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

误差估计:

$$E_S \approx \frac{1}{480}$$

因此, 梯形公式和 Simpson 公式的计算结果及其误差估计分别为:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln 2} \quad 和 \quad \boxed{\frac{1}{6}(4\ln 1.5 + \ln 2)}$$

误差估计分别为:

$$\boxed{\frac{1}{12}} \quad 和 \quad \boxed{\frac{1}{480}}$$

Problem 5. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P340 8.

确定求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的节点 x_0, x_1 和系数 A_0, A_1 使该求积公式具有 3 次代数精度

Solution. 为了确定求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的节点 x_0, x_1 和系数 A_0, A_1 使其具有 3 次代数精度, 我们可以按照以下步骤进行:

第一步: 求正交多项式 φ_n 我们需要找到在区间 $[0,1]$ 上关于权函数 $\sqrt{x}$ 的正交多项式. 首先, 考虑一般的正交多项式形式:

$$\varphi_n(x) = x^n + 低次项$$

对于 $n = 2$, 我们需要找到 $\varphi_2(x)$ 使得:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\varphi_2(x) x^k\,\mathrm{d}x = 0 \quad 对于 \quad k = 0, 1$$

设 $\varphi_2(x) = x^2 + ax + b$, 则:

$$\int_0^1 \sqrt{x}(x^2 + ax + b)x^k\,\mathrm{d}x = 0 \quad 对于 \quad k = 0, 1$$

计算这些积分:

$$\int_0^1 \sqrt{x}(x^2 + ax + b)x^0\,\mathrm{d}x = \frac{2}{7} + \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b = 0$$
$$\int_0^1 \sqrt{x}(x^2 + ax + b)x^1\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9} + \frac{2}{7}a + \frac{2}{5}b = 0$$

因此, 我们有:

$$a = -\frac{10}{9}, \qquad b = \frac{5}{21}$$

所以, 正交多项式为:

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21}$$

第二步: 求正交多项式的根 x_0, x_1 解方程 $\varphi_2(x) = 0$:

$$x_0 = \frac{5}{9} - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}, \qquad x_1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}$$

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

第三步：计算系数 A_0, A_1 使用公式 $A_k = \int_0^1 \sqrt{x} l_k(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $l_k(x)$ 是拉格朗日基函数. 对于 $x_0 = \frac{5}{9} - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}$, 拉格朗日基函数为:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{9}{4}\sqrt{\frac{7}{10}}x + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{2}} + \frac{1}{2}$$

对于 $x_1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}$, 拉格朗日基函数为:

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{7}{10}}x - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{2}} + \frac{1}{2}$$

计算 A_0 和 A_1:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^1 \sqrt{x} l_0(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{300}\left(25\left(4 + \sqrt{70}\right) - 27\sqrt{70}x\right)\Bigg|_{x=0}^{1} \\
&= \frac{50 - \sqrt{70}}{150} \approx 0.277\,56 \\
A_1 &= \int_0^1 \sqrt{x} l_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{300}\left(27\sqrt{70}x - 25\left(\sqrt{70} - 4\right)\right)\Bigg|_{x=0}^{1} \\
&= \frac{50 + \sqrt{70}}{150} \approx 0.389\,11
\end{aligned}$$

最终求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{50 - \sqrt{70}}{150} f\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right) + \frac{50 + \sqrt{70}}{150} f\left(\frac{5}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)$$

$$\boxed{\frac{50 - \sqrt{70}}{150} f\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right) + \frac{50 + \sqrt{70}}{150} f\left(\frac{5}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)}$$

Problem 6. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》 P340 12.

用 Romberg 求积方法计算下列积分, 列出计算步骤表. 给出 T_3^0 作为近似值

(1) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Solution. 我们使用 Romberg 积分方法来计算积分

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Step 1: 梯形公式的应用 首先, 我们使用梯形公式对积分进行初步估计. 对于梯形公式, 积分的近似为

$$T_n^0 = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b)\right)$$

这里, 选择 $a = 0$, $b = 1$ 我们需要对不同的步长 h 进行计算. 选择的步长为 $h = 1$, $h = \frac{1}{2}$ 和 $h = \frac{1}{4}$. 设定:

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

- T_1^0 对应 $n=1$: 使用 $h=1$
- T_1^1 对应 $n=2$: 使用 $h=\frac{1}{2}$
- T_1^2 对应 $n=4$: 使用 $h=\frac{1}{4}$

函数 $f(x)=x^2e^{-x}$.

计算 T_1^0

$$T_1^0=\frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right)=\frac{1}{2}\left(0+e^{-1}\right)=\frac{1}{2}e^{-1}$$

计算 T_1^1

$$T_1^1=\frac{1}{4}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)$$

其中

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$$

因此

$$T_1^1=\frac{1}{4}\left(0+2\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}\right)=\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}e^{-1}$$

计算 T_3^0

$$T_1^2=\frac{1}{8}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right),$$

使用相应的函数值计算每个的贡献并代入公式. 类似的步骤分别计算每个附属值:

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}e^{-\frac{1}{4}},\qquad f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}e^{-\frac{3}{4}}$$

计算结果如下:

$$T_1^2=\frac{1}{8}\left(2\cdot\frac{1}{16}e^{-\frac{1}{4}}+2\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}+2\cdot\frac{9}{16}e^{-\frac{3}{4}}+e^{-1}\right)=\frac{1}{64}e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{16}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{9}{64}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{8}e^{-1}$$

Step 2: Romberg 外推 接下来我们使用 Romberg 方法通过递推关系

$$T_{k+1}^n=\frac{4^kT_k^n-T_k^{n-1}}{4^k-1}$$

我们需要的值 T_3^0: 计算过程:

$$\begin{aligned}
T_2^0&=\frac{4\cdot T_1^1-T_1^0}{4-1}=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}e^{-1}\right)-\frac{1}{2}e^{-1}}{3}=\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}e^{-1}\\
T_2^1&=\frac{4\cdot T_1^2-T_1^1}{4-1}\\
&=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{64}e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{16}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{9}{64}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{8}e^{-1}\right)-\left(\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}e^{-1}\right)}{3}\\
&=\frac{1}{48}e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{24}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{12}e^{-1}\\
T_3^0&=\frac{4^2T_2^1-T_2^0}{4^2-1}\\
&=\frac{16\cdot\left(\frac{1}{48}e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{24}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{12}e^{-1}\right)-\left(\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}e^{-1}\right)}{15}\\
&=\frac{1}{45}e^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{30}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{5}e^{-\frac{3}{4}}+\frac{7}{90}e^{-1}\approx 0.160\,610\,528\,7
\end{aligned}$$

因此, 经过外推, 我们获得 T_3^0 的准确近似.

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn