ODE solver

李钦 2024312371
li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

Problem 1. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P404 第九章 常微分方程初值问题的数值解法 4.

用梯形方法解初值问题 $y' = -y$, $y(0) = 1$, 试证明:

(1) 取 $y_0 = y(0) = 1$, 有 $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$.

(2) 当 $h \to 0$, $x_n = nh$ 不变时, y_n 收敛于初值问题的准确解 e^{-x_n}.

Proof.

(1) 梯形方法的递推公式为:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

对于 $y' = -y$, 有 $f(x, y) = -y$, 因此递推公式变为:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(-y_n - y_{n+1})$$

整理得到:

$$y_{n+1}\left(1 + \frac{h}{2}\right) = y_n\left(1 - \frac{h}{2}\right)$$

于是:

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}} y_n$$

这是一个等比数列递推关系, 初始条件为 $y_0 = 1$, 因此:

$$y_n = \left(\frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}}\right)^n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

(2) 当 $h \to 0$ 时, $x_n = nh$ 保持不变. 我们需要证明:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = e^{-x_n}$$

令 $h = \frac{x_n}{n}$, 则:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2 - \frac{x_n}{n}}{2 + \frac{x_n}{n}}\right)^n$$

将分子和分母同时除以 2:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - \frac{x_n}{2n}}{1 + \frac{x_n}{2n}}\right)^n$$

利用极限公式 $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, 我们有:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x_n}{2n}\right)^n = e^{-\frac{x_n}{2}}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x_n}{2n}\right)^n = e^{\frac{x_n}{2}}$$

因此:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - \frac{x_n}{2n}}{1 + \frac{x_n}{2n}}\right)^n = \frac{e^{-\frac{x_n}{2}}}{e^{\frac{x_n}{2}}} = e^{-x_n}$$

即:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = e^{-x_n}$$

这表明当 $h \to 0$ 时, 梯形方法的数值解 y_n 收敛于初值问题的准确解 e^{-x_n}.

□

Problem 2. **《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P404 第九章 常微分方程初值问题的数值解法 5.**

试求出单步法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

的局部截断误差主项及绝对稳定性区间.

Solution.

局部截断误差主项 假设精确解为 $y(x)$, 则有:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \cdots$$

根据微分方程 $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$, 所以:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y(x_n)) + \cdots$$

而数值方法给出:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$$

展开 $f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$:

$$f(x_{n+1}, y_n+hf(x_n, y_n)) = f(x_n+h, y_n+hf(x_n, y_n)) = f(x_n, y_n)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)+hf(x_n, y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)+\cdots$$

因此:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f(x_n, y_n) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + hf(x_n, y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) + \cdots\right]$$

比较精确解和数值解的展开式, 得到局部截断误差的主项:

$$t_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \left(y_n + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y)\right) - \left(y_n + hf + h^2(f_x + ff_y)\right) + \cdots = -\frac{h^2}{2}y''(x_n)$$

绝对稳定性区间 考虑线性测试方程 $y' = \lambda y$, 其中 λ 是复数. 令 $f(x, y) = \lambda y$, 则:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) = y_n + h\lambda(y_n + h\lambda y_n) = y_n(1 + h\lambda + h^2\lambda^2)$$

绝对稳定性要求 $|1 + h\lambda + h^2\lambda^2| < 1$. 假设 $\lambda = \mu$ 是实数, 则:

$$1 + h\mu + h^2\mu^2 < 1 \quad 且 \quad 1 + h\mu + h^2\mu^2 > -1$$

首先, $1 + h\mu + h^2\mu^2 < 1$, 即 $h\mu(1 + h\mu) < 0$, 所以 $-1 < h\mu < 0$. 其次, $1 + h\mu + h^2\mu^2 > -1$ 总是成立. 因此, 绝对稳定性区间是 $(-1, 0)$.

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

Problem 3. **《数值分析基础（第二版）(关治, 陆金甫)》P404 第九章 常微分方程初值问题的数值解法 6.**

应用中点公式及 Heun 方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}hf(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))$$

计算初值问题

$$y' = y - x^2 + 1, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0.5.$$

取 $h = 0.2$, 列出数值解及相应的误差 (问题的解析解为 $y(x) = (x + 1)^2 - \frac{1}{2}e^x$.).

Solution.

x_n	$y(x_n)$	中点公式	误差	Heun 方法	误差
0	0.500 000 0	0.500 000 0	0	0.500 000 0	0
0.2	0.829 298 6	0.828 000 0	0.001 298 6	0.827 333 3	0.001 965 3
0.4	1.214 087 7	1.211 360 0	0.002 727 7	1.209 880 0	0.004 207 7
0.6	1.648 940 6	1.644 659 2	0.004 281 4	1.642 186 9	0.006 753 7
0.8	2.127 229 5	2.121 284 2	0.005 945 3	2.117 601 4	0.009 628 1
1.0	2.640 859 1	2.633 166 8	0.007 692 3	2.628 007 0	0.012 852 1

Problem 4. **《数值分析基础（第二版）(关治, 陆金甫)》P404 第九章 常微分方程初值问题的数值解法 8.**

试求出中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right)$$

的局部截断误差主项.

Solution. 首先, 我们考虑中点公式:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right)$$

我们需要求出其局部截断误差的主项. 为此, 我们将精确解 $y(x_{n+1})$ 展开成泰勒级数, 并与中点公式的表达式进行比较. 精确解的泰勒展开为:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \cdots$$

其中,

$$y'(x_n) = f(x_n, y_n)$$
$$y''(x_n) = f_x + f_y f$$
$$y'''(x_n) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_x f_y + f_{yy}f^2 + f_y^2 f$$

中点公式的右边展开为:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f_x + \frac{h}{2}ff_y + \frac{h^2}{8}f_{xx} + \frac{h^2}{4}f_{xy}f + \frac{h^2}{8}f^2 f_{yy} + \cdots\right]$$

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

比较精确解和中点公式的展开式, 得到局部截断误差的主项:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_n+h) - y_{n+1} \\ &= h^3\left(\frac{1}{6}(f_{xx}+2f_{xy}f+f_xf_y+f_{yy}f^2+f_y^2f) - \left(\frac{1}{8}f_{xx}+\frac{1}{4}f_{xy}f+\frac{1}{8}f^2f_{yy}\right)\right)+\cdots \end{aligned}$$

化简后得到:

$$T_{n+1} = h^3\left[\frac{1}{6}y''\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2f\frac{\partial f}{\partial xy}+f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]_{(x_n,y(x_n))}$$

Problem 5. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P404 第九章 常微分方程初值问题的数值解法 10.

试求出隐式中点方法

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n+\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n+y_{n-1})\right)$$

的绝对稳定性区间 (推广 §3.5 节方法).

Solution. 首先, 我们考虑隐式中点方法:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n+\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n+y_{n+1})\right)$$

对于测试方程 $y'=\lambda y$, 我们有 $f(x,y)=\lambda y$, 因此方法变为:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$$

整理得到:

$$y_{n+1}\left(1-\frac{h\lambda}{2}\right) = y_n\left(1+\frac{h\lambda}{2}\right)$$

解出 y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n\cdot\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}$$

记 $R=\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}$, 为了保证绝对稳定性, 要求 $|R|\leqslant 1$. 设 $z=h\lambda$, 则 $R=\frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$, 要求:

$$\left|\frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}\right| \leqslant 1$$

展开模的平方:

$$\left|1+\frac{z}{2}\right|^2 \leqslant \left|1-\frac{z}{2}\right|^2$$

设 $z=\mu+i\nu$, 展开并简化得到:

$$1+\mu+\frac{\mu^2}{4}+\frac{\nu^2}{4} \leqslant 1-\mu+\frac{\mu^2}{4}+\frac{\nu^2}{4}$$

消去相同项后得到:

$$\mu \leqslant -\mu$$

即:

$$\mu \leqslant 0$$

因此, 只要 $\mathrm{Re}(z)\leqslant 0$, 即 $\mathrm{Re}(h\lambda)\leqslant 0$, 方法是绝对稳定的. 综上所述, 隐式中点方法的绝对稳定性区间为:

$$(-\infty, 0)$$