第一次

李钦 2024312371

Problem 1. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》Page 33 习题 8

已知 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m \in [a,b]$, 下面的 (f,g) 是否能构成 $C[a,b]$ 上的内积? 证明你的结论.

1. $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \forall f,g \in C[a,b]$
2. $(f,g) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)g(x_i), \quad \forall f,g \in C[a,b]$

Proof.

1. (f,g) 构成 $C[a,b]$ 上的内积. 按内积定义验证:

$$(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0. \quad (f,f) = 0 \leftrightarrow f = 0$$
$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \overline{g(x)f(x)}\,\mathrm{d}x = \overline{(g,f)}$$
$$(cf+dg,h) = \int_a^b (cf(x)+dg(x))h(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x + d\int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x = c(f,h)+d(g,h)$$

2. (f,g) 不构成 $C[a,b]$ 上的内积. 反例: 取 $a=-1$, $b=1$, $x_0 = 0 \in [a,b]$, $f(x) = \sin x$, 则

$$(f,f) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)^2 = 0 \quad 但 \quad f \neq 0$$

□

Problem 2. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》Page 33. 习题 10

已知 $f(x) = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$. 试求 $C[0,2\pi]$ 上函数的范数 $\|f\|_\infty$ 和 $\|f\|_2$.

Solution.

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = 1$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\pi}$$

Problem 3. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》Page 33. 习题 12

证明

1. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
2. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
3. $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Proof.

li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

1.
$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \leqslant n \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = n\|x\|_\infty$$

2.
$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = \sqrt{\max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

3.
$$\begin{aligned}
\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 &= \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_i \left|\sum_j A_{ij}x_j\right|^2} \\
&\leqslant \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_i \left(\sum_j A_{ij}^2 \sum_j x_j^2\right)} = \max_{\|x\|_2=1} \|A\|_F \|x\|_2 = \|A\|_F \\
&\leqslant \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{n \sum_i \left|\sum_j A_{ij}x_j\right|^2} = n\|A\|_2
\end{aligned}$$

□

Problem 4. 《数值分析基础（第二版）（关治, 陆金甫）》Page 34. 习题 15

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 设 A 对称正定, 记
$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
证明 $\|x\|_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数.

Proof.

- $$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)} = \sqrt{x^TAx}$$
  由 A 对称正定可知, $\|x\|_A \geqslant 0$. $\|x\|_A = 0 \leftrightarrow x = 0$
- $$\|\alpha x\|_A = \sqrt{(\alpha Ax, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(Ax, x)} = |\alpha|\sqrt{(Ax, x)} = |\alpha|\|x\|_A$$
- 由 A 对称正定, 不妨设 $A = B^TB$, 则
$$\begin{aligned}
\|x+y\|_A &= \sqrt{(A(x+y), x+y)} = \sqrt{(B(x+y), B(x+y))} \\
&\leqslant \sqrt{(Bx, Bx)} + \sqrt{(By, By)} = \sqrt{(Ax, x)} + \sqrt{(Ay, y)} = \|x\|_A + \|y\|_A
\end{aligned}$$

综上可知 $\|x\|_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数. □

Problem 5. 《数值分析基础（第二版）（关治, 陆金甫）》Page 34. 习题 19

证明:

1. 两个下三角矩阵的乘积是下三角矩阵;
2. 单位下三角矩阵的逆矩阵是单位下三角矩阵.

Proof.

1. 设 A, B 为两个下三角矩阵, 则 $AB = C$, 其中

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = \sum_{j \leqslant k \leqslant i} A_{ik} B_{kj}$$

当 $i < j$ 时, $C_{ij} = 0$, 故 AB 为下三角矩阵.

2. 不妨设单位下三角矩阵 $L = L_1(l_1) L_2(l_2) \cdots L_{n-1} l(_{n-1})$, 则

$$\begin{aligned} L^{-1} &= [L_1(l_1) L_2(l_2) \cdots L_{n-1} l(_{n-1})]^{-1} \\ &= L_{n-1}(l_{n-1})^{-1} \cdots L_2(l_2)^{-1} L_1(l_1)^{-1} \\ &= L_{n-1}(-l_{n-1}) \cdots L_2(-l_2) L_1(-l_1) \end{aligned}$$

为单位下三角矩阵.

$\square$

Problem 6. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》Page 34. 习题 22

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 设 A 严格对角占优, 试证:

$$\left\| A^{-1} \right\|_\infty \leqslant \left[\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(|a|_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) \right]^{-1}$$

Proof. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 设 $y = A^{-1}x$. 不妨设 $\|y\|_\infty = |y_k|$, 则

$$\|Ay\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} y_j \right| \geqslant \left| \sum_j a_{kj} y_j \right| \geqslant \left(|a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right) \|y\|_\infty \geqslant \|y\|_\infty \min_i \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)$$

即

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\geqslant \left\| A^{-1} x \right\|_\infty \min_i \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) \\ \left\| A^{-1} \right\|_\infty &\leqslant \left[\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(|a|_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$\square$