# 最后一次作业

李钦 2024312371
li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

**Problem 1.** 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P133 第四章 16.

设 $a > 0$, 证明迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}$$

产生的序列 $\{x_k\}$ 三阶收敛到 $\sqrt{a}$.

*Solution.* 首先, 我们验证迭代公式的不动点:

$$\varphi(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}^2 + 3a)}{3\sqrt{a}^2 + a} = \sqrt{a}$$

接下来, 求导并验证导数在不动点处的值:

$$\varphi'(x) = \frac{(3x^2 + 3a)(3x^2 + a) - (x^3 + 3ax)(6x)}{(3x^2 + a)^2} = \frac{3(a - x^2)^2}{(a + 3x^2)^2}$$

代入 $x = \sqrt{a}$:

$$\varphi'(\sqrt{a}) = \frac{3(a - a)^2}{(a + 3a)^2} = 0$$

再求二阶导数并验证:

$$\varphi''(x) = \frac{48ax(x^2 - a)}{(a + 3x^2)^3}$$

代入 $x = \sqrt{a}$:

$$\varphi''(\sqrt{a}) = \frac{48a\sqrt{a}(a - a)}{(a + 3a)^3} = 0$$

最后, 求三阶导数并验证:

$$\varphi'''(x) = \frac{48a(3x^2 - a)(3x^2 + a)^3 - 48a(x^3 - ax) \cdot 18x(3x^2 + a)^2}{(3x^2 + a)^6} = -\frac{48a(a^2 - 18ax + 9x^4)}{(a + 3x^2)^4}$$

代入 $x = \sqrt{a}$:

$$\varphi'''(\sqrt{a}) = -\frac{48a(a^2 - 18a\sqrt{a} + 9a^2)}{(a + 3a)^4} \neq 0$$

根据迭代收敛的阶数理论, 如果 $\varphi(l) = l$, $\varphi'(l) = 0$, $\varphi''(l) = 0$, $\varphi'''(l) \neq 0$, 那么迭代是三阶收敛的. 因此, 序列 $\{x_k\}$ 三阶收敛到 $\sqrt{a}$.

**Problem 2.** 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P133 第四章 18.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det\{\boldsymbol{A}\} \neq 0$. $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中矩阵序列 $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 满足:

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k), \quad k = 0, 1, \cdots.$$

试证明:

(1) 令 $\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k$, 则 $\boldsymbol{E}_{k+1} = \boldsymbol{E}_k^2$.
(2) 若 $\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0\| < 1$, 则 $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{A}^{-1}$.
(3) 将向量序列收敛阶的概念推广到矩阵序列, 说明上述求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迭代法至少二阶收敛.

*Solution.*

(1) 定义 $\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k$, 则有:

$$\boldsymbol{E}_{k+1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k)) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k)$$

化简得:

$$\boldsymbol{E}_{k+1} = \boldsymbol{E}_k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{E}_k - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_k)\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{E}_k^2$$

因此, $\boldsymbol{E}_{k+1} = \boldsymbol{E}_k^2$.

(2) 若 $\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0\| < 1$, 即 $\|\boldsymbol{E}_0\| < 1$, 则根据 (1) 的结果, 有:

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{E}_0^{2^k}$$

因此:

$$\|\boldsymbol{E}_k\| \leqslant \|\boldsymbol{E}_0\|^{2^k}$$

考虑 $\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_k$$

所以:

$$\left\|\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{A}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\|\boldsymbol{E}_k\| \leqslant \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\|\boldsymbol{E}_0\|^{2^k}$$

当 $k \to \infty$ 时, $\|\boldsymbol{E}_0\|^{2^k} \to 0$, 因为 $\|\boldsymbol{E}_0\| < 1$. 因此, $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 将向量序列收敛阶的概念推广到矩阵序列, 若存在常数 $C$ 使得:

$$\left\|\boldsymbol{X}_{k+1} - \boldsymbol{A}^{-1}\right\| \leqslant C\left\|\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{A}^{-1}\right\|^2$$

则称该迭代法至少二阶收敛. 根据 (2), 有:

$$\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{A}^{-1} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{k-1}^2$$

因此:

$$\left\|\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{A}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\|\boldsymbol{E}_{k-1}\|^2 \leqslant \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|(\|\boldsymbol{E}_0\|^{2^{k-1}})^2 = \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|\|\boldsymbol{E}_0\|^{2^k}$$

这表明每一步的误差大约是前一步误差的平方, 故该迭代法至少二阶收敛.

**Problem 3. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P133 第四章 13.**

(1) 为求 $f(x) = 0$ 的根, 用迭代函数 $\varphi(x) = x + f(x)$ 的迭代法不一定收敛. 对此用 Steffensen 加速方法, 试写出迭代公式.

(2) 设 $f$ 有连续的二阶导数, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, 研究迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[f(x_k)]^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

的收敛性和收敛阶.

*Solution.*

(1) 给定迭代函数 $\varphi(x) = x + f(x)$, Steffensen 加速公式为:

$$f(x)x_{k+1} = x_k - \frac{[f(x_k)]^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$


li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

(2) 由 Steffensen 迭代公式, 有

$$\varphi(x) = x - \frac{[f(x)]^2}{f(x+f(x)) - f(x)}$$

对 $f(x+f(x))$ 进行泰勒展开, 得

$$f(x+f(x)) = f(x) + f'(x)f(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)[f(x)]^2$$

其中, $\xi$ 是 $x$ 和 $x+f(x)$ 之间的一个值. 于是, 有

$$g(x) = \frac{f(x+f(x)) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)f(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)[f(x)]^2}{f(x)} = f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x)$$

进而,

$$\varphi(x) = x - \frac{[f(x)]^2}{f(x+f(x)) - f(x)} = x - \frac{f(x)}{f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x)}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} &= \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x)} - x^*}{x - x^*} \\ &= \frac{x - x^* - \frac{f(x)}{f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x)}}{x - x^*} \\ &= 1 - \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}\frac{1}{f'(x) - \frac{1}{2}f''(\xi)f(x)}\end{aligned}$$

所以,

$$\varphi'(x^*) = \lim_{x\to x^*}\frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} = 1 - f'(x^*)\frac{1}{f'(x^*)} = 0$$

因为 $f'(x^*) \neq 0$, 所以, Steffensen 方法至少是二阶收敛的.

**Problem 4. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P99 第三章 13.**

对于 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$, 写出解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 J 迭代法和 SOR 迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_J$ 和 $\mathscr{L}_\omega$, 并求 $\rho(\mathscr{L}_\omega)$ 和最优松弛因子 $\omega_b$.

*Solution.*

**Jacobi 迭代法** Jacobi 迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_J$ 为:

$$\boldsymbol{B}_J = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})$$

其中, $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对角线部分, $\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的下三角部分, $\boldsymbol{U}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的上三角部分.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此,

$$\boldsymbol{B}_J = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

**SOR 迭代法** SOR 迭代法的迭代矩阵 $\mathscr{L}_\omega$ 为:

$$\mathscr{L}_\omega = (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U})$$

首先计算 $\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}$ 和 $(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \omega a & 1\end{bmatrix},\quad (1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}1-\omega & -\omega a\\ 0 & 1-\omega\end{bmatrix}$$

然后求逆矩阵:

$$(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\omega a & 1\end{bmatrix}$$

最后, 迭代矩阵 $\mathscr{L}_\omega$ 为:

$$\mathscr{L}_\omega=\begin{bmatrix}1-\omega & -\omega a\\ -\omega a(1-\omega) & \omega^2a^2+(1-\omega)\end{bmatrix}$$

**谱半径和最优松弛因子** Jacobi 迭代法的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}_J)$ 为:

$$\rho(\boldsymbol{B}_J)=|a|$$

SOR 迭代法的谱半径 $\rho(\mathscr{L}_\omega)$ 为:

$$\rho(\mathscr{L}_\omega)=\frac{1}{2}\left[2(1-\omega)+\omega^2a^2+\omega|a|\sqrt{4(1-\omega)+\omega^2a^2}\right]$$

最优松弛因子 $\omega_b$ 为:

$$\omega_b=\frac{2}{1+\sqrt{1-a^2}}$$

**Problem 5. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P98 第三章 6.**

对于方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 试证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优, 则 J 法收敛 (这是定理 2.1 的一部分).

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ “列严格对角占优”, 即

$$|a_{jj}|>\sum_{i\neq j}|a_{ij}|,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

则 J 法收敛.

*Solution.*

(1) Jacobi 迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}_J=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对角线部分, $\boldsymbol{L}$ 是下三角部分, $\boldsymbol{U}$ 是上三角部分. 假设 $\boldsymbol{B}_J$ 有一个特征值 $\lambda$ 且 $|\lambda|\geqslant 1$, 则有 $\det(\boldsymbol{D}-\lambda^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}))=0$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优, $\boldsymbol{D}-\lambda^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 也是严格对角占优的, 因此其行列式不为零, 矛盾. 因此, 所有特征值满足 $|\lambda|<1$, 即 $\rho(\boldsymbol{B}_J)<1$, Jacobi 迭代法收敛.

(2) 同样假设 $\boldsymbol{B}_J$ 有一个特征值 $\lambda$ 且 $|\lambda|\geqslant 1$, 则 $\det(\boldsymbol{D}-\lambda^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}))=0$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 列严格对角占优, $\boldsymbol{D}-\lambda^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 也是列严格对角占优的, 其转置是行严格对角占优的, 因此行列式不为零, 矛盾. 因此, 所有特征值满足 $|\lambda|<1$, 即 $\rho(\boldsymbol{B}_J)<1$, Jacobi 迭代法收敛.


li-q24@mails.tsinghua.edu.cn

**Problem 6.** 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P98 第三章 8.

分析方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

J 迭代法和 GS 迭代法的收敛性.

*Solution.* $\boldsymbol{A}$ 对称, 对角元素都大于零. 顺序主子式 $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1 - a^2$, $\Delta_3 = 1 - 2a^2$. $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. 这等价于 $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 根据定理 2.3 和定理 2.4, GS 法收敛的充分必要条件是 $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & -a \\ 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

其顺序主子式 $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1 - a^2$, $\Delta_3 = 1 - 2a^2$. 可得 $2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 根据定理 2.2, J 法收敛的充分必要条件是

$$a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cap \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

即 $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**Problem 7.** 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P67 第二章 4.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $a_{11} \neq 0$. 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 经一步 Gauss 消去变换为 $\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}^{(2)}$, 其中

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

试证明

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 对称正定, 则 $\boldsymbol{A}_2$ 也对称正定.
(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优, 则 $\boldsymbol{A}_2$ 也严格对角占优.

*Solution.*

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 对称正定, 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于零, 且 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{A}_1 \end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $(n-1)\times(n-1)$ 子矩阵. 根据 Schur 补的性质, $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T}{a_{11}}$ 也是对称正定的. 对于任意非零向量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$, 有

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{y})^2}{a_{11}}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定的, 对于任意非零向量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$, 有

$$x_1^2 a_{11} + 2x_1\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} > 0.$$

选择 $x_1 = -\frac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\alpha}_1}{a_{11}}$, 则

$$\left(-\frac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\alpha}_1}{a_{11}}\right)^2 a_{11} + 2\left(-\frac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\alpha}_1}{a_{11}}\right)\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y} > 0$$

化简得

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y} > 0$$

因此 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称正定的.

(2) 根据高斯消元的定义, $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$, 其中 $i, j$ 从 2 到 $n$. 我们通过以下不等式推导来证明:

$$\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| \leqslant \sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}|a_{1j}|$$

利用 $\boldsymbol{A}$ 的严格对角占优性, 有:

$$\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}| < |a_{11}|$$

因此:

$$\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}|a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|$$

代入上式:

$$\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| < |a_{ii}| - |a_{i1}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}(|a_{11}| - |a_{1i}|)$$

进一步化简:

$$\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| < |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}|a_{1i}|$$

而:

$$\left|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}\right| \geqslant |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}|a_{1i}|$$

因此:

$$\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| < \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}\right| = \left|a_{ii}^{(2)}\right|$$

这证明了 $\boldsymbol{A}_2$ 也是严格对角占优的.

**Problem 8. 《数值分析基础 (第二版) (关治, 陆金甫)》P132 第四章 5.**

设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 满足 $f(x^*) = 0$, $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$. 试证明迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$$

产生的序列 $\{x_k\}$ 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$ 及 $\lambda \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ 均收敛到 $x^*$.

*Solution.* 首先, 我们考虑迭代公式 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$, 将其写成不动点迭代形式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 其中 $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. 接下来, 计算 $\varphi(x)$ 的导数:

$$\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$$

由于 $f'(x)$ 在区间 $[m, M]$ 上, 因此 $\varphi'(x)$ 的取值范围为 $[1-\lambda M, 1-\lambda m]$. 为了确保迭代法的收敛性, 我们需要 $|\varphi'(x)| < 1$. 我们考虑 $\varphi'(x)$ 的绝对值的最大值:

$$L = \max\{|1-\lambda m|, |1-\lambda M|\}$$

我们需要 $L < 1$, 即:

$$|1-\lambda m| < 1 \quad \text{和} \quad |1-\lambda M| < 1$$

对于 $|1-\lambda m| < 1$, 有:

$$-1 < 1-\lambda m < 1 \implies \lambda m < 2 \implies \lambda < \frac{2}{m}$$

对于 $|1-\lambda M| < 1$, 有:

$$-1 < 1-\lambda M < 1 \implies \lambda M < 2 \implies \lambda < \frac{2}{M}$$

由于 $m \leqslant M$, 因此 $\frac{2}{m} \geqslant \frac{2}{M}$, 所以更严格的条件是 $\lambda < \frac{2}{M}$. 因此, 当 $\lambda \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ 时, $|\varphi'(x)| < 1$, 即迭代法是压缩映射. 根据 Banach 不动点定理, 序列 $\{x_k\}$ 将收敛到唯一的不动点 $x^*$, 即对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$, 序列 $\{x_k\}$ 均收敛到 $x^*$. 综上所述, 迭代法 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 在给定条件下收敛到 $x^*$.


li-q24@mails.tsinghua.edu.cn