Rotary Position Embedding

1136928835

April 2024

1 旋转位置编码数学证明

我们假设 $x_1, x_2.., x_n$ 代表某一个 token 的 embedding, n 代表它的维度。对于 Q 和 K 而言，它们是通过输入 x 与两个权重矩阵相乘得到的：

$$q = W_q x \tag{1}$$
$$k = W_k x \tag{2}$$

因为在计算内积时只涉及到了 q 和 k 相乘，如果要引入相对位置信息的只能在相乘时进行融合，因此在得到 q 和 k 之后我们希望通过某种方式引进绝对位置信息到其中。直接给出结论：

$$q_m^{'} = W_q x_m e^{im\theta} = q_m e^{im\theta} \tag{3}$$
$$k_n^{'} = W_k x_n e^{in\theta} = k_n e^{in\theta} \tag{4}$$

我们先假设最简单的情况，也就是对 token 编码时编码成二维向量，这样计算内积可以得到：

$$q_m^{'T} k_n^{'} = (q_m^1 q_m^2) \begin{pmatrix} cos((m-n)\theta) & -sin((m-n)\theta) \\ sin((m-n)\theta) & cos((m-n)\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n^1 \\ k_n^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

由此可以得到通过将 q 和 k 按照 (3)、(4) 进行处理，在计算内积时可以将相对位置信息融合进去 -> $(m-n)$，并可以由二维拓展到多维。

证明：二维向量的虚数表示：

$$q_m = \begin{pmatrix} q_m^1 \\ q_m^2 \end{pmatrix} = q_m^1 + i q_m^2 \tag{6}$$

欧拉公式：

$$e^{im\theta} = cos(m\theta) + isin(m\theta) \tag{7}$$

将二维向量的虚数形式以及欧拉公式带入我们可以得到：

$$q_m^{'} = q_m e^{im\theta} = (q_m^1 + iq_m^2)(cons(m\theta) + isin(m\theta)) \tag{8}$$
$$= (q_m^1 cos(m\theta) - q_m^2 sin(m\theta)) + i(q_m^2 cos(m\theta) + q_m^1 sin(m\theta)) \tag{9}$$
$$= \begin{pmatrix} cos(m\theta) & -sin(m\theta) \\ sin(m\theta) & cos(m\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m^1 \\ q_m^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

同理我们可以得到：

$$k_n^{'} = \begin{pmatrix} cos(n\theta) & -sin(n\theta) \\ sin(n\theta) & cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n^1 \\ k_n^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

计算它们之间的内积：

$$q_m^{'T} k_n^{'} = \left(\begin{pmatrix} cos(m\theta) & -sin(m\theta) \\ sin(m\theta) & cos(m\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m^1 \\ q_m^2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} cos(n\theta) & -sin(n\theta) \\ sin(n\theta) & cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n^1 \\ k_n^2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{q}_m^1 \\ \mathrm{q}_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(m\theta)cos(n\theta) + sin(m\theta)sin(n\theta) & -cos(m\theta)sin(n\theta) + sin(m\theta)cos(n\theta) \\ -sin(m\theta)cos(n\theta) + cos(m\theta)sin(n\theta) & sin(m\theta)sin(n\theta) + cos(m\theta)cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n^1 \\ k_n^2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix} q_m^1 q_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos((m-n)\theta) & -sin((m-n)\theta) \\ sin((m-n)\theta) & cos((m-n)\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n^1 \\ k_n^2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

扩展到多维：只需要将两两维度进行旋转矩阵操作就可以。