УЧИМСЯ НА ЧУЖИХ ОШИБКАХ

Составитель А. Д. Блинков

УЧИМСЯ НА ЧУЖИХ ОШИБКАХ

Учимся на чужих ошибках

Составитель А. Д. Блинков

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 51(07)
ББК 22.1
У90

Учимся на чужих ошибках
Составитель А. Д. Блинков.
М.: МЦНМО, 2019.
168 с.
ISBN 978-5-4439-3391-7

В предлагаемой книжке собраны математические тексты, содержащие разнообразные ошибки: в формулировках утверждений, в условиях задач, ответах и решениях. Многие из них или их идеи «пришли» из реальных занятий со школьниками, из различных олимпиад и турниров, из пособий, адресованных учащимся и учителям, но ряд текстов придуман специально. Большинство этих сюжетов ранее было использовано на различных творческих конкурсах учителей математики (в их методической части).

Книжка адресована прежде всего учителям математики, педагогам дополнительного образования, ведущим занятия со школьниками, но может быть интересна и полезна также учащимся 7—11 классов и всем, кто интересуется математикой.

Подготовлено на основе книги:
Учимся на чужих ошибках / Составитель А. Д. Блинков. —
М.: МЦНМО, 2019. — 168 с. — ISBN 978-5-4439-1391-9

Учебно-методическое издание

12+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3391-7

Посвящается памяти
Елены Борисовны Гладковой
и Алексея Геннадьевича Мякишева

Введение

Многих любителей математики привлекают «математические софизмы». Широко известны и неоднократно публиковались «доказательства» того, что прямой угол равен тупому, что любой треугольник является равнобедренным и т. п. (см., например, [5] в списке литературы). Читателю таких текстов заранее понятно, что его обманывают, и его основная задача — найти то место в рассуждениях, где это происходит. Популярны были и книжки, в которых наряду с софизмами были представлены реальные ошибки школьников и студентов (см., в частности, [6] и [7]), но с момента их изданий уже прошло много времени.

Большинство текстов, опубликованных в этой книжке, более современны. Основу настоящего сборника составляют реальные задачи, в которых ошибки могут быть как в условиях, так и в ответах и решениях. Есть задачи, в которых условие корректно и даже указанный ответ верен, а ошибки (как одна, так и несколько) содержатся в приведённых решениях. В каких-то случаях приведено несколько решений, среди которых есть как верные, так и неверные. Конечно, есть и задачи с корректным условием, в которых неверное решение привело к неверному ответу, а также известные математические факты, доказательства которых содержат ошибки. Другая категория — задачи с некорректным условием, где просят доказать факт, который оказывается неверным, или числовые данные в условии несовместны и т. д.

В таких случаях читателю заранее неизвестно, где именно допущены ошибки, и во многих случаях ему прежде всего требуется разобраться, корректно ли условие задачи, и если оно некорректно, то почему. Если же условие корректно, то требуется не только найти все ошибки и неточности в решениях, но и «вскрыть характер» допущенных ошибок. Кроме того, желательно самому придумать верное решение.

Многие тексты или их идеи «пришли» к нам из реальных занятий со школьниками, из различных олимпиад и турниров, из пособий, адресованных учащимся и учителям, но ряд текстов придуманы специально. Большинство этих сюжетов ранее было использовано на различных творческих конкурсах учителей математики (в их методической части). Для полноты картины в сборник включено и несколько «классических» текстов на поиск ошибок, которые также использовались на конкурсах учителей, но они составляют подавляющее меньшинство.

Первый раздел предлагаемой книжки включает в себя 125 текстов, содержащих ошибки. Он разделён на три части: 1) арифметика, алгебра и математический анализ; 2) комбинаторика, логика, теория вероятностей; 3) геометрия. Внутри каждой части задания также сгруппированы по сходной тематике. Отметим, что подобное разделение весьма условно, но представляется наиболее удобным для прочтения и использования.

Второй раздел — это подсказки, которыми можно воспользоваться в случае затруднений.

Третий раздел включает в себя анализ ошибок, верные решения и комментарии.

В конце сборника приведены источники всех текстов (в той мере, в какой они известны составителю). Если это реальная задача, то указан её автор и олимпиада, на которой она была использована, а также фамилии тех коллег, которые предложили и обработали данный сюжет для какого-то из творческих конкурсов учителей. В некоторых случаях сюжет (или его основа) был найден в какой-то из публикаций и предложен для конкурса учителей, тогда указан этот источник. Во многих случаях первоисточник составителю неизвестен или же сюжет придуман непосредственно для конкурса, тогда указаны только те, кто его предложили.

Отдельно приведён список литературы и веб-ресурсов, в котором наряду с публикациями, использованными при составлении настоящего сборника, указаны книги и статьи по сходной и родственной тематике.

Составитель выражает глубокую благодарность своим коллегам, работавшим в разные годы в методической комиссии творческих конкурсов учителей, без участия которых эта книжка не могла быть написана: Е. Б. Гладковой, Е. С. Горской, В. М. Гуровицу, А. В. Иванищуку, А. Г. Мякишеву, И. В. Раскиной, А. В. Хачатуряну, Д. Э. Шнолю, а также всем, кто пополнял его коллекцию своими сюжетами с ошибками. Среди последних — особая благодарность А. В. Грибалко и А. В. Шаповалову.

I. Тексты с ошибками

Арифметика, алгебра и математический анализ

Делимость и целые числа

1. В Книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377}-1$. Не опечатка ли это?

2. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 119, а разность квадратов — простое число.

Ответ: 60 и 59.

Решение. Пусть a и b — искомые числа, тогда $a+b=119$ и число a^2-b^2 простое. Так как $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, должно выполняться равенство $a-b=1$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=119, \\ a-b=1, \end{cases}$$

получим, что $a=60$, $b=59$.

3. Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно четыре делителя и делящихся на 5?

Ответ: 10.

Решение. У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвёртый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомых чисел ровно 10.

4. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в 7 раз больше самого маленького собственного делителя.

Ответ: все натуральные числа вида $7q^2$, где q — простое число.

Решение. Наименьший собственный делитель любого натурального числа — простое число, иначе оно не наименьшее. Если m — наибольший, а q — наименьший собственный делитель числа N, то $N = mq$. По условию $m = 7q$, значит, $N = 7q^2$.

5. Можно ли число 197 представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

Ответ: нельзя.

Решение 1. Попробуем представить число 197 в виде суммы двух чисел, начиная с суммы $196 + 1$. Видим, что суммы цифр данных чисел не равны. Теперь будем отнимать от первого числа по единице и прибавлять единицу ко второму, чтобы сумма сохранялась. Увидим, что, как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17. Пусть в одном из чисел суммы сумма цифр равна m, тогда сумма цифр второго числа $17 - m$. Они равны, если $m = 17 - m$, откуда получаем, что $m = 8{,}5$. Но m — целое число, следовательно, получили противоречие.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение 2. Пусть $197 = \overline{xyz} + \overline{ab}$ (понятно, что получить 197, складывая два трёхзначных числа, невозможно, а сумма 98 и 99 не обладает требуемым свойством). Тогда

$$197 = 100x + 10(y + a) + (z + b),$$

откуда получаем, что $x = 1$, $y + a = 9$, $z + b = 7$. Значит, одно из чисел y и a нечётно, а другое чётно. Аналогично для чисел z и b. Если суммы цифр слагаемых равны, то $x + y + z = a + b$, то есть $x + y + z - a - b = 0$. Но алгебраическая сумма трёх нечётных и двух чётных чисел не может быть равна нулю.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

6. Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению

$$2a^2 + a = 3b^2 - b.$$

Докажите, что $a + b$ точный квадрат.

Решение. Перенося $2b^2 - b$ в левую часть равенства, получим, что $2(a^2 - b^2) + a + b = b^2$, то есть $(a + b)(2a - 2b + 1) = b^2$. Осталось заметить, что числа $a + b$ и $2a - 2b + 1$ взаимно просты, следовательно, каждое из них — точный квадрат.

7. Сколько квадратов натуральных чисел содержится среди чисел вида 2^n+4^k, где n и k — натуральные числа?

Ответ: ни одного.

Решение. Пусть $2^n+4^k=x^2$, тогда x — чётное число, поэтому x^2 делится на 4. Значит, n также чётное число, то есть $n=2m$.

Пусть $m \geqslant k$, тогда $2^n+4^k=4^m+4^k=4^k(4^{m-k}+1)$. Но 4^k является квадратом натурального числа, а число в скобках квадратом не является. Случай $m<k$ рассматривается аналогично.

8. Натуральное число разрешено увеличивать на любое целое число процентов от 1 до 100, если при этом получается также натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя при помощи таких операций получить из числа 1.

Ответ: 203.

Решение. Сначала научимся получать числа от 2 до 200. Из числа 1 можно получить 2, увеличив его на 100 %. Из числа 2 можно получить 3 и 4, увеличив его на 50 % и 100 % соответственно. Из числа 4 можно получить 5, увеличив его на 25 %. Из числа 5 можно получить любое число от 6 до 10, увеличивая его на число процентов, кратное двадцати. Из числа 10 можно получить любое число от 11 до 20, увеличивая его на число процентов, кратное десяти. Аналогично из числа 20 можно получить любое число от 21 до 25, из числа 25 — числа от 26 до 50, из числа 50 — от 51 до 100, из числа 100 — от 101 до 200.

Далее, число 201 — это число 134, увеличенное на 50 %, а число 202 — увеличенное на 1 % число 200. Докажем, что простое число 203 получить нельзя. В самом деле, если 203 получено из числа m увеличением на n процентов, то $203=m+\frac{mn}{100}$. Тогда $20300=$ $=m(100+n)$. Один из сомножителей правой части делится на 203. Так как $m<203$, на 203 делится $100+n$. Но тогда мы увеличивали m на $n>100$ процентов — противоречие.

9. Существует ли конечная геометрическая прогрессия с натуральными членами, сумма всех членов которой равна 211?

Ответ: не существует.

Решение. Пусть x — первый член, а q — знаменатель прогрессии, тогда $x(1+q+q^2+\ldots+q^n)=211$. Так как 211 — простое число, $x=1$. Значит, $q(1+q+\ldots+q^{n-1})=210=2\cdot3\cdot5\cdot7$. Следовательно, в разложении числа q на простые множители могут присутствовать только числа 2, 3, 5 и 7 (либо в первой, либо в нулевой степени).

Пусть $q=2$, тогда

$$1+2+\ldots+2^{n-1}=105 \iff 2^n-1=105 \iff 2^n=106,$$

что невозможно.

Пусть $q=3$, тогда $1+3+\ldots+3^{n-1}=70$. Так как $3^4=81>70$, достаточно проверить $n=2; 3; 4$. Во всех случаях равенство неверно.

Пусть $q=5$, тогда $1+5+\ldots+5^{n-1}=42$. Так как $5^3=125>42$, достаточно проверить $n=2$ и $n=3$. В обоих случаях равенство неверно.

Пусть $q\geqslant 6$, тогда $1+q+\ldots+q^{n-1}\leqslant 35$, но $q^2\geqslant 36$, поэтому ни при каких натуральных n, бóльших двух, неравенство $1+q+\ldots$ $\ldots+q^{n-1}\leqslant 35$ выполняться не может.

10. Докажите, что $\sqrt{5}$ иррациональное число.

Решение. Будем доказывать методом «от противного». Предположим, что $\sqrt{5}=\frac{n}{k}$, где $\frac{n}{k}$ — несократимая дробь. Тогда, возводя обе части в квадрат, получим, что $5k^2=n^2$, то есть число n^2 делится на k^2. Отсюда $n\cdot n=n^2$ делится на k, причём k взаимно просто с одним из сомножителей (из-за того, что дробь несократима), поэтому другой сомножитель делится на k. Итак, n делится на k, что противоречит предположению о том, что дробь несократима.

11. Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, для которых выполняется равенство

$$x+\text{НОД}(y,z)=y+\text{НОД}(z,x)=z+\text{НОД}(x,y)?$$

Ответ: не существуют.

Решение. Если x, y и z имеют общий делитель, больший 1, то разделим на него обе части равенства. Получим новое равенство, в котором числа x, y и z взаимно простые, значит, какие-то два из них взаимно просты. Не нарушая общности, будем считать что $\text{НОД}(x,y)=1$. Поскольку заданные суммы одинаковы, а числа x, y и z различны, соответствующие НОДы тоже различны. Отсюда следует, что $\text{НОД}(z,x)>1$ и $\text{НОД}(y,z)>1$. Поэтому x не взаимно просто с z. В первой сумме оба слагаемых не взаимно просты с z, поэтому и сумма не взаимно проста с z. А третья сумма равна $z+1$, то есть взаимно проста с z. Противоречие.

12. Длина каждой стороны четырёхугольника — целое число, причём сумма любых трёх из этих чисел делится на четвёртое. Верно ли, что в этом четырёхугольнике обязательно найдутся хотя бы две равные стороны?

Ответ: верно.

Решение. Разделим длины сторон данного четырёхугольника на их наибольший общий делитель. Получим длины сторон четырёхугольника, также удовлетворяющего условию задачи, при этом наибольший общий делитель длин его сторон равен 1, поэтому наименьшее общее кратное длин сторон равно их произведению. Из условия задачи вытекает, что сумма длин всех сторон делится на каждую из них, а следовательно, делится на их наименьшее общее кратное, то есть на их произведение.

Предположим, что все длины сторон в исходном четырёхугольнике различны. Тогда они различны и в новом четырёхугольнике. Пусть d — длина наибольшей стороны нового четырёхугольника. Тогда сумма длин его сторон меньше $4d$, а произведение длин сторон не меньше чем $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot d = 6d$. Следовательно, сумма длин сторон не делится на их произведение.

Полученное противоречие показывает, что в исходном четырёхугольнике найдутся хотя бы две равные стороны.

13. Петя выписал все делители числа $2^8 \cdot 3^{10}$. Каждые два числа, имеющие общий делитель, больший 1, он соединил линией. Сколько линий нарисовал Петя?

Ответ: 4752.

Решение. Общее количество делителей у Петиного числа: $9 \cdot 11 = 99$ (двойка может входить с любым показателем степени от 0 до 8, а тройка — с любым показателем степени от 0 до 10). Если их все попарно соединить линиями, то линий получится $\frac{99 \cdot 98}{2}$.

Подсчитаем, какие из этих линий являются лишними. Лишние линии соединяют пары взаимно простых чисел. Такие пары образуют числа, в разложение которых не входит двойка, с числами, в разложение которых не входит тройка. Говоря иначе, это пары, образованные степенями двойки и степенями тройки. Степени двойки — это $1, 2, \ldots, 2^8$ — всего 9 штук, аналогично степеней тройки — 11 штук. Всего пар взаимно простых чисел будет $9 \cdot 11 = 99$. Поэтому всего линий будет

$$\frac{99 \cdot 98}{2} - 99 = 99 \cdot 48 = 4752.$$

Текстовые задачи

14. На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе — по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

Ответ: 150.

Решение. Пусть на первом складе было x ящиков, а на втором — y ящиков. Тогда на первом складе $3x$ бракованных изделий, а на втором — $6y$. После перевозки пятидесяти ящиков число бракованных изделий на первом складе будет составлять $3x-50\cdot 3$, и это число равно $(x-50)\cdot 2$, так как среднее число бракованных изделий стало 2. Из уравнения $3x-150=2x-100$ находим, что $x=50$.

Аналогично на втором складе стало $6y+150$ бракованных изделий, что равно $(y+50)\cdot 5$. Тогда $y=100$. Общее количество ящиков: $x+y=150$.

15. Один торговец продаёт сливы по 150 рублей за килограмм, а другой — по 100 рублей. Но у первого косточка составляет треть массы каждой сливы, а у второго — половину. Чьи сливы выгоднее покупать?

Ответ: второго.

Решение. У первого торговца мякоть составляет $\frac{2}{3}$ массы, значит, $\frac{2}{3}$ килограмма мякоти у него стоит 100 рублей, а 1 кг мякоти — 150 рублей. У второго торговца мякоть составляет половину массы, поэтому её стоимость — 50 рублей за полкило, а 1 кг мякоти стоит 100 рублей. Таким образом, у второго покупать выгоднее.

16. Игорь и Паша могут покрасить забор за 4 часа, Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 9 часов. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроём?

Ответ: за 4,5 часа.

Решение. Пусть производительности мальчиков равны соответственно i, p и v заборов в час. Тогда по условию задачи $i+p=\frac{1}{4}$, $p+v=\frac{1}{12}$ и $i+v=\frac{1}{9}$. Складывая эти равенства, находим, что

$$2(i+p+v)=\frac{4}{9},$$

откуда $i+p+v=\frac{2}{9}$. Следовательно, мальчики покрасят забор за $\frac{1}{i+p+v}=4{,}5$ часа.

17. В 6 «А» классе учится 24 человека, что с точностью до десятых процента составляет 6,9 % от количества учеников школы. В 8 «А» классе учится 33 человека. Какой процент (с точностью до десятых) всех учеников школы учится в 8 «А» классе?

24 чел.	6,9 %
33 чел.	x %

Ответ: 9,5 %.

Решение. Запишем условие задачи в виде таблицы и составим пропорцию: $\frac{x}{6{,}9}=\frac{33}{24}$, $x=\frac{33\cdot 6{,}9}{24}$, $x=9{,}4875$. После округления до десятых получаем ответ 9,5 %.

Алгебраические выражения

18. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{74-a^4}-\sqrt{10-a^4}$, если $\sqrt{74-a^4}+\sqrt{10-a^4}=4$;

б) $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}$, если $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$.

Ответ: а) 16; б) 8.

Решение. а) Используя формулу $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$, получим

$$\sqrt{74-a^4}-\sqrt{10-a^4}=\frac{74-10}{4}=16.$$

б) Аналогично, так как $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, имеем

$$\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8.$$

19. Докажите, что $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

Решение. Возведём обе части равенства в куб, используя формулу куба разности, которую удобно записать так:

$$(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3.$$

Получим

$$\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)-\sqrt{5}+2=1.$$

Используя формулу разности квадратов и заменяя $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ на 1, приходим к верному равенству: $4-3=1$.

20. Положительные числа x, y и z таковы, что

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}?$$

Ответ: 0.

Решение. Заметим, что

$$\frac{x^2}{y+z}+x=\frac{x^2+xy+xz}{y+z}=\frac{x}{y+z}(x+y+z).$$

Аналогично

$$\frac{y^2}{z+x}+y=\frac{y}{z+x}(x+y+z) \quad \text{и} \quad \frac{z^2}{x+y}+z=\frac{z}{x+y}(x+y+z).$$

Сложим почленно три полученных равенства, введя следующие обозначения:

$$A=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}, \quad B=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

и вынося за скобки в правой части выражение $x+y+z$. Тогда

$$B+(x+y+z)=(x+y+z)A.$$

По условию $A=1$, поэтому $B=0$.

21. Сравните $\log_2 5-\log_3 4$ и 1.

Ответ: первое число меньше.

Решение. Пусть

$$A=\log_2 5-\log_3 4=\log_2 2{,}5+1-2\log_3 2=B+1,$$

где $B=\log_2 2{,}5-2\log_3 2$. Так как

$$\log_2 2{,}5<\log_2 4=2 \quad \text{и} \quad 2\log_3 2=\log_3 4<2,$$

получим $B<0$.

Тогда $A=B+1<1$, то есть $\log_2 5-\log_3 4<1$.

22. Рассмотрим равенства

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2;$$
$$(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2;$$
$$(-8)^{\frac{3}{9}} = \sqrt[9]{(-8)^3} = \sqrt[9]{(-2)^9} = -2;$$
$$(-8)^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{(-8)^4} = \sqrt[12]{8^4} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Но $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\ldots$ Как это понимать?

Уравнения и системы

23. Найдите все такие уравнения вида $x^2+px+q=0$, что числа p и q являются его корнями.

Решение 1. По теореме Виета

$$\begin{cases} p+q=-p, \\ pq=q \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=0, \\ p=0, \end{cases} \\ \begin{cases} p=1, \\ q=-2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, искомые уравнения: $x^2=0$ и $x^2+x-2=0$.

Решение 2. Подставим числа p и q в данное уравнение:

$$\begin{cases} p^2+p^2+q=0, \\ q^2+pq+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2+q=0, \\ q(q+p+1)=0. \end{cases}$$

Случай 1: $\begin{cases} q=0, \\ 2p^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=0, \\ p=0. \end{cases}$

Случай 2: $\begin{cases} q=-p-1, \\ 2p^2-p-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p=1, \\ q=-2, \end{cases} \\ \begin{cases} p=-0{,}5, \\ q=-0{,}5. \end{cases} \end{array} \right.$

Таким образом, искомые уравнения:

$$x^2=0, \quad x^2+x-2=0 \quad \text{и} \quad x^2-0{,}5x-0{,}5=0.$$

24. Известно, что числа p и q являются корнями квадратного уравнения $5x^2+bx+10=0$. Найдите корни уравнения
$$10x^2+bx+5=0.$$

Решение 1. Заметим, что дискриминанты указанных уравнений одинаковы: $D=b^2-200$, поэтому, независимо от значения b, если первое уравнение имеет корни, то и второе уравнение также имеет корни.

Пусть для определённости $p\geqslant q$, тогда $p=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{10}$; $q=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{10}$. Пусть m и n — корни второго уравнения, причём $m\geqslant n$, тогда
$$m=\frac{-b+\sqrt{D}}{20} \quad \text{и} \quad n=\frac{-b-\sqrt{D}}{20}.$$

Следовательно, $m=0{,}5p$; $n=0{,}5q$.

Решение 2. Из условия следует, что выполняется числовое равенство $5p^2+bp+10=0$, где $p\neq 0$. Разделив его почленно на p^2, получим $5+\dfrac{b}{p}+\dfrac{10}{p^2}=0 \Leftrightarrow 10\left(\dfrac{1}{p}\right)^2+b\cdot\dfrac{1}{p}+5=0$, то есть число $\dfrac{1}{p}$ является корнем второго уравнения. Другой корень второго уравнения находим по теореме Виета: $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{p}=\dfrac{p}{2}$.

Таким образом, корнями второго уравнения являются числа $\dfrac{1}{p}$ и $\dfrac{p}{2}$.

25. У Миши было квадратное уравнение с одной переменной x. Он заменил в нём x на $\dfrac{3x+1}{2x+1}$ и получил другое уравнение. Могло ли оказаться так, что первое уравнение имеет хотя бы один корень, а второе уравнение корней не имеет?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Пусть исходное уравнение имело вид $x^2+px+q=0$ (или сводилось к нему делением на первый коэффициент, что не изменяет корней уравнения). Так как оно имеет корни, $D=p^2-4q\geqslant 0$. После замены x на $\dfrac{3x+1}{2x+1}$ получим уравнение
$$\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^2+p\cdot\frac{3x+1}{2x+1}+q=0.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель, получим уравнение
$$(3x+1)^2+p(3x+1)(2x+1)+q(2x+1)^2=0, \tag{$*$}$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых приводится к виду

$$(6p+4q+9)x^2+(5p+4q+6)x+(p+q+1)=0.$$

Его дискриминант равен

$$(5p+4q+6)^2-4(6p+4q+9)(p+q+1)=p^2-4q\geqslant 0,$$

поэтому оно имеет решения.

26. Существует ли квадратное уравнение, имеющее три корня?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим, например, такое уравнение:

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}+\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=1.$$

Несложно убедиться, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ являются его корнями. В знаменателях дробей переменная отсутствует, поэтому перемножив скобки в числителях и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение.

27. Решите уравнение

$$(1+x+\ldots+x^9)(1+x+\ldots+x^{11})=(1+x+\ldots+x^{10})^2.$$

Ответ: 0.

Решение. По формуле для вычисления суммы первых n членов геометрической прогрессии получим

$$\frac{x^{10}-1}{x-1}\cdot\frac{x^{12}-1}{x-1}=\frac{(x^{11}-1)^2}{(x-1)^2}.$$

Избавившись от знаменателя и раскрыв скобки, получим, что

$$x^{22}-x^{12}-x^{10}+1=x^{22}-2x^{11}+1,$$

то есть $x^{10}(x-1)^2=0$. Корни этого уравнения: $x=0$ или $x=1$, но второй корень посторонний, так как при $x=1$ знаменатели дробей обращаются в ноль.

28. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3,\\ (x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3.\end{cases}$$

Решение 1. Заменим второе уравнение произведением уравнений:

$$\begin{cases} (x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3, \\ (x^3+y^3)(x^3-y^3)=1-y^6. \end{cases}$$

Тогда из второго уравнения получим, что $x=\pm1$. Подставив эти значения в первое уравнение, получим ответ: $(1;0)$; $(-1;-1)$.

Решение 2. Заменим первое уравнение произведением уравнений:

$$\begin{cases} (x^3-y^3)(x^3+y^3)=1-y^6, \\ (x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения получим, что $x=\pm1$. Подставив эти значения во второе уравнение, получим ответ: $(1;0)$; $(-1;1)$.

29. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-1}=(x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Ответ: -1.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)(x+1)}=(x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Тогда $x=-1$ — корень уравнения. Кроме того,

$$\sqrt{x-1}=(x+5)\sqrt{\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x-1}\right)^2=x+5, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Полученная система решений не имеет.

30. Решите уравнение $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=a$.

Ответ: $\pm\sqrt{1-\left(\frac{a^3-2}{3a}\right)^3}$.

Решение. Возведём обе части уравнения в куб и используем формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Тогда

$$2+3\sqrt[3]{1-x^2}\left(\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}\right)=a^3.$$

Заменив выражение в скобках на a, получим $\sqrt[3]{1-x^2}=\frac{a^3-2}{3a}$, то есть $x^2=1-\left(\frac{a^3-2}{3a}\right)^3$; $x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{a^3-2}{3a}\right)^3}$.

31. Решите уравнение

$$\log_{x^3+x}(x^2-4)=\log_{4x^2-6}(x^2-4).$$

Ответ: 3.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-4>0, \\ x^3+x>0, \\ x^3+x\neq 1, \\ x^3+x=4x^2-6. \end{cases}$$

Уравнение $x^3-4x^2+x+6=0$ имеет три корня: -1; 2 и 3, из которых каждому неравенству системы удовлетворяет только $x=3$.

32. Решите уравнение $9\cdot 12^{\sqrt{x}}=6^x$.

Ответ: 4.

Решение. Пусть $\sqrt{x}=y\geqslant 0$, тогда уравнение примет вид

$$9\cdot 12^y=6^{y^2}.$$

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Имеем $9\cdot(2\cdot 6)^y=(6^y)^2 \iff 9\cdot 2^y=6^y \iff$ $\iff 3^y=3^2 \iff y=2$. Тогда $x=4$.

Второй способ. Разложим числа 9, 12 и 6 на простые множители: $3^{2+y}\cdot 2^{2y}=2^{y^2}\cdot 3^{y^2}$. Из единственности разложения числа на простые множители следует, что $2+y=y^2$ и $2y=y^2$. Решением этой системы является $y=2$. Следовательно, $x=4$.

33. а) Найдите все целые решения уравнения

$$(x^2+x-1)^{x^2-16}=1.$$

б) Решите уравнение $x^{x+2}=x$.

Ответ: а) 1; -2; ± 4; б) решений нет.

Решение. а) Равенство, заданное в условии, выполняется в двух случаях:

1) $x^2+x-1=1\iff x=1$ или $x=-2$;

2) $x^2-16=0\iff x=\pm 4$.

б) Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10: $(x+2)\lg x=\lg x\iff \lg x=0$ или $x+2=1\iff x=0$ или $x=-1$. Но полученные значения x не входят в область определения показательной функции, значит, уравнение решений не имеет.

34. Решите уравнение

$$(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x.$$

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=x^2+2x-5$, тогда уравнение имеет вид $f(f(x))=x$, или, что то же самое, $f(x)=f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$, поэтому, если они пересекаются, то точка пересечения графиков лежит на этой прямой.

Таким образом, если число x_0 — корень данного уравнения, то оно является и корнем уравнения $f(x)=x$. Решая уравнение

$$x^2+2x-5=x,$$

получим, что $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Неравенства и экстремальные значения

35. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{(x+3)(x+12)}{4x}$ при $x>0$.

Ответ: 6.

Решение. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Тогда $\frac{x+3}{2}\geqslant\sqrt{3x}$ и $\frac{x+12}{2}\geqslant\sqrt{12x}$. Перемножая эти неравенства почленно, получим $\frac{(x+3)(x+12)}{4}\geqslant 6x$, значит, $\frac{(x+3)(x+12)}{4x}\geqslant 6$.

Следовательно, искомое наименьшее значение равно 6.

36. Известно, что $a+b\geqslant 0{,}5$. Найдите наибольшее значение выражения $(1-a)(1-b)$.

Ответ: $\frac{9}{16}$.

Решение. По неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt{(1-a)(1-b)}\leqslant\frac{1-a+1-b}{2}=1-\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{3}{4}.$$

Следовательно, $(1-a)(1-b)\leqslant\frac{9}{16}$.

37. Диагональ квадрата площади S произвольным образом разбита на n частей. На каждой из этих частей как на диагонали построен новый квадрат. Докажите, что сумма площадей получившихся квадратов не меньше чем $\frac{S}{n}$.

Решение. Величина $\frac{S}{n}$ достигается, если разбить диагональ данного квадрата на равные части. Пусть наименьшее значение суммы площадей новых квадратов достигается при каком-то другом разбиении. Тогда в этом разбиении найдутся два соседних неравных отрезка с длинами a и b. Площади соответствующих квадратов будут равны $\frac{a^2}{2}$ и $\frac{b^2}{2}$. Передвинем точку, разделяющую эти отрезки, так, чтобы они стали равными, тогда получим два одинаковых квадрата площади $\frac{(a+b)^2}{8}$ каждый. Так как

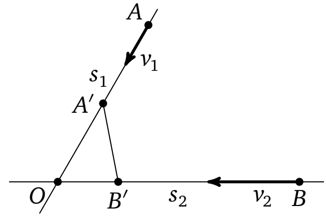
$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}>0,$$

при таком перемещении сумма площадей квадратов уменьшится. Таким образом, получено противоречие. Следовательно, $\frac{S}{n}$ — наименьшее значение искомой суммы.

38. Два корабля идут по морю пересекающимися курсами с постоянными скоростями. В 9:00 расстояние между ними было 6 миль, в 10:00 — 5 миль, в 11:00 — 2 мили. В какой момент времени расстояние между кораблями наибольшее из возможных?

Ответ: в 8 часов 24 минуты.

Решение. Пусть корабли двигались по прямым a и b, пересекающимся в точке O, и в 9:00 они находились в точках A и B (см. рисунок). Пусть также $OA=S_1$ (миль), $OB=S_2$ (миль), а скорости кораблей равны соответственно V_1 миль в час и V_2 миль в час. Тогда через t часов корабли будут находиться в точках A' и B', пройдя V_1t миль и V_2t миль соответственно.



Из треугольника $A'OB'$ по теореме косинусов получим, что

$$A'B'^2=(S_1\pm v_1t)^2+(S_2\pm v_2t)^2-2(S_1\pm v_1t)(S_2\pm v_2t)\cos\angle AOB$$

(знаки в скобках учитывают, что корабли могут оказаться и на лучах, дополнительных к OA и OB). Полученное уравнение показывает, что зависимость квадрата расстояния между кораблями от времени является квадратичной функцией.

Пусть её уравнение $f(t)=at^2+bt+c$. Выберем в качестве начала отсчёта времени 9 часов 00 минут. Тогда из условия задачи следует, что

$$f(0)=c=36; \quad f(1)=a+b+c=25; \quad f(2)=4a+2b+c=4.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} c=36, \\ a+b+c=25, \\ 4a+2b+c=4, \end{cases}$$

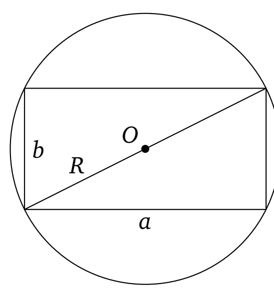
получим, что

$$\begin{cases} a=-5, \\ b=-6, \\ c=36. \end{cases}$$

Таким образом, функция имеет вид $f(t)=-5t^2-6t+36$. Своё наибольшее значение она принимает в точке $t_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{5}$. Так как $f\left(-\frac{3}{5}\right)>0$, в этот же момент времени будет наибольшим и расстояние между кораблями.

39. Найдите размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в окружность радиуса R.

Ответ: квадрат со стороной $R\sqrt{2}$.



Решение. Пусть a и b — размеры прямоугольника, вписанного в данную окружность (см. рисунок), тогда его площадь $S=ab$. Так как диагональ прямоугольника является диаметром окружности, имеем $a^2+b^2=4R^2$, то есть

$$b=\sqrt{4R^2-a^2}.$$

Тогда

$$S=a\sqrt{4R^2-a^2}=\sqrt{4R^2a^2-a^4}.$$

Рассмотрим функцию $f(a)=4R^2a^2-a^4$. Её производная:

$$f'(a)=8R^2a-4a^3=4a(2R^2-a^2);$$

$f'(a)=0$ при $a=R\sqrt{2}$. При этом слева от этой точки $f'(a)>0$, то есть функция возрастает, а справа $f'(a)<0$, то есть функция убывает. Следовательно, $a=R\sqrt{2}$ — точка максимума. В этой точке функция $f(a)$ принимает своё наибольшее значение, значит, и значение S в этой точке будет наибольшим. Следовательно, $b=a=R\sqrt{2}$, то есть искомый прямоугольник является квадратом со стороной $R\sqrt{2}$.

40. В круг радиуса R впишите равнобедренный треугольник наибольшей площади.

Ответ: такого треугольника не существует.

Решение. Пусть угол при вершине равнобедренного треугольника равен α. Тогда боковая сторона треугольника: $b=2R\cos 0{,}5\alpha$. Площадь треугольника:

$$S = 0{,}5b^2 \sin\alpha = 2R^2 \sin\alpha \cos^2 0{,}5\alpha.$$

Используем формулу понижения степени, тогда

$$S = R^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Находя производную, получим

$$S' = R^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = R^2(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1).$$

Сделаем замену: $t=\cos\alpha$. Корни получившегося квадратного трёхчлена $2t^2+t-1$ равны -1 и $0{,}5$. На промежутке $(-1; 0{,}5)$ его значения отрицательны, а на промежутке $(0{,}5; +\infty)$ положительны, то есть «при переходе» через $0{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, эта точка является точкой минимума. Таким образом, наибольшего значения площади не существует.

Тригонометрия

41. На вопрос учителя «Чему равен $\cos 120^\circ$?» ученица ответила: «179,5».

Как вы думаете, каким образом ученица «рассуждала»?

42. Решите уравнение $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$.

Решение 1. Возведём обе части уравнения в квадрат, тогда

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Используя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного аргумента, получим $\sin 2\alpha = 0$. Следовательно,

$$2\alpha = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение 2. Воспользуемся формулами синуса и косинуса удвоенного аргумента и основным тригонометрическим тождеством:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Упрощая, получим однородное уравнение:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Разделим обе части на $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, тогда $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=1$. Следовательно,

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение 3. Воспользуемся формулами, выражающими синус и косинус через тангенс половинного аргумента:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=1.$$

Избавившись от знаменателей, получим

$$2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

то есть $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=0$. Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0$ или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$. Таким образом, $\frac{\alpha}{2}=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\alpha=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение 4. Умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Используя формулу косинуса разности, получим $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно,

$$\alpha-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\alpha=2\pi k$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение 5. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha.$$

Тогда

$$\sin\alpha(1-\sin\alpha)+\cos\alpha(1-\cos\alpha)=0.$$

Используя условие $\sin\alpha+\cos\alpha=1$, получим

$$\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha = 0,$$

то есть $\sin 2\alpha=0$. Таким образом, $2\alpha=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

43. Решите уравнение $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(-2)=\operatorname{arcctg}(-2)$.

Ответ: 0,75.

Решение. Так как $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arcctg}(-2)$, получаем, что

$$x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arcctg}(-2)) = \\ = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-2))}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-2))} = \frac{2-\frac{1}{2}}{1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 0{,}75.$$

44. Докажите, что для любого x из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$$

Решение. Заметим, что

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (x)' = 1; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

для любого x из промежутка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство

$$\cos x \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Также справедливы равенства $\sin 0=\operatorname{tg} 0=0$. Следовательно, из трёх рассматриваемых функций первая растёт «медленнее» всех, а третья — «быстрее» всех.

Задачи с параметром

45. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2-2x, \\ x^2+y^2+a^2 = 2x+2ay \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

Ответ: при $a=0{,}25$.

Решение. Подставив значение x^2-2x из первого уравнения во второе, получим $y^2+a^2-2ay+y=0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно y, тогда $y^2+y(1-2a)+a^2=0$. Для того чтобы решение было единственным, потребуем равенства нулю дискриминанта: $D=1-4a+4a^2-4a^2=1-4a=0$, откуда $a=0{,}25$.

46. При каких значениях параметра a система уравнений

$$x^2 = 1-y^2 = y-|a|$$

имеет единственное решение?

Ответ: таких a нет.

Решение. Рассмотрим уравнение

$$1-y^2 = y-|a| \Leftrightarrow y^2+y-(|a|+1) = 0.$$

Так как система имеет единственное решение, это уравнение также должно иметь единственное решение, то есть $D=1+4(1+|a|)=0$. Но последнее равенство не выполняется ни для каких значений a.

47. При каких значениях параметра a область определения функции

$$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+a}+\sqrt{x+2}$$

состоит из одной точки?

Ответ: при $a=8$.

Решение. Функция $f(x)$ определена, если

$$\begin{cases} -x^2+2x+a \geqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решением второго неравенства является промежуток $[-2; +\infty)$, а решением первого неравенства — отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2-2x-a=0$. Их пересечением должна быть точка, значит, больший корень квадратного уравнения должен быть равен -2. Подставив его в это уравнение, получим, что $a=8$.

48. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y), удовлетворяющая условию

$$ax^2+(3a+2)y^2+4axy-2ax+(4-6a)y+2 = 0?$$

Ответ: при любых $a\neq 0$ и $a\neq 2$.

Решение. Если $a=0$, то уравнение примет вид $2y^2+4y+2=0$. Этому уравнению удовлетворяет любая пара вида $(x; -1)$, поэтому $a=0$ следует исключить.

Если $a \neq 0$, то уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x:

$$ax^2 + 2a(2y-1)x + (3a+2)y^2 + (4-6a)y + 2 = 0.$$

Условие задачи может быть выполнено только в том случае, когда дискриминант этого уравнения равен нулю. Вычислим его:

$$D = 4a^2(2y-1)^2 - 4a((3a+2)y^2 + (4-6a)y + 2).$$

Имеем $D = 0$, если $a(2y-1)^2 = (3a+2)y^2 + (4-6a)y + 2$.

Преобразуя полученное равенство, приведём его к виду

$$(a-2)(y+1)^2 = 0.$$

Если $a = 2$, то $D = 0$ при любом значении y, то есть снова получится бесконечно много пар, значит, $a = 2$ также следует исключить.

Если же $a \neq 2$, то $y = -1$, тогда $x = 3$, то есть исходному равенству удовлетворяет единственная пара $(3; -1)$.

49. При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4}$ ровно одну общую точку?

Решение. Преобразуем функцию:

$$\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x^2-4)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)^2} = (x+2)^2.$$

Далее предлагается четыре различных способа рассуждений.

Решение 1. Достаточно найти значения k, для которых уравнение $(x+2)^2 = kx$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно квадратному уравнению

$$x^2 + (4-k)x + 4 = 0.$$

Его дискриминант$D = (4-k)^2 - 16 = k(k-8)$ равен нулю при $k = 0$ и $k = 8$.

Ответ: 0; 8.

Решение 2. Составим уравнение касательной к графику функции $y = (x+2)^2$ в точке $x_0 = 0$. Имеем

$$y(0) = 4, \quad y' = 2(x+2), \quad y'(0) = 4,$$

следовательно, уравнение имеет вид $y - 4 = 4(x-0) \Leftrightarrow y = 4x + 4$. Эта прямая не может быть задана уравнением вида $y = kx$.

Ответ: таких значений k нет.

Решение 3. Изобразим график функции $y=(x+2)^2$ в декартовой системе координат. Из графика видно, что прямая $y=0$ является касательной к нему.

Ответ: 0.

Решение 4. Составим уравнение касательной к графику функции $y=(x+2)^2$ в некоторой точке x_0. Это уравнение имеет вид

$$y=(2x_0+4)(x-x_0)+x_0^2+4x_0+4.$$

Подставив в него $(0;0)$, получим, что $x_0=\pm 2$. Тогда $y=0$ и $y=8x$.

Ответ: 0; 8.

50. При каких значениях a и b значения выражения $\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$ не зависят от x?

Решение 1. Пусть $\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}=k$, где $k\in\mathbb{R}$, тогда

$$ax^2+bx+1=kx^2+kbx+ka.$$

Полученные трёхчлены совпадают тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a=k, \\ b=kb, \\ 1=ka \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=1, & b\in\mathbb{R}, \\ a=-1, & b=0. \end{array}\right.$$

Ответ: при $a=1$, $b\in\mathbb{R}$ или $a=-1$, $b=0$.

Решение 2. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}.$$

Так как её значение не должно зависеть от x, имеем $f(0)=f(1)$, то есть $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a+b+1}{1+b+a}$. Следовательно, $a=1$.

Подстановкой убеждаемся, что при $a=1$ и при любом значении b выполняется равенство $f(x)=1$, что и требовалось.

Ответ: при $a=1$, $b\in\mathbb{R}$.

Решение 3. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}.$$

Значения функции $f(x)$ не зависят от x тогда и только тогда, когда $f(x)=C$. Так как функция дробно-рациональная, она определена, если $x^2+bx+a\neq 0$, и дифференцируема на области определения:

$$f'(x)=\frac{(a-1)bx^2+2(a^2-1)x+(a-1)b}{(x^2+bx+a)^2}.$$

Для выполнения равенства $f(x)=C$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$f'(x)=0 \iff \begin{cases} (a-1)b=0, \\ a^2-1=0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ll} a=1, & b\in\mathbb{R}, \\ a=-1, & b=0. \end{array}\right.$$

В первом случае функция определена для всех x, если

$$b^2-4>0 \iff |b|>2.$$

Во втором случае функция не определена при $x=\pm1$.

Ответ: при $a=1$, $|b|>2$.

51. При каких значениях a сумма квадратов трёх действительных корней многочлена

$$P(x)=x^3+ax^2-x+2$$

равна 6?

Ответ: при $a=\pm2$.

Решение. Если многочлен $P(x)=x^3+ax^2-x+2$ имеет три действительных корня x_1, x_2 и x_3, то его можно представить в следующем виде:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Раскрывая скобки, получим, что

$$a=-(x_1+x_2+x_3) \quad \text{и} \quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-1.$$

Учитывая условие $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$, получим

$$a^2=(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=6-2=4.$$

Таким образом, $a=\pm2$.

Функции, производная, первообразная

52. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\sin 2x$, для которой существует параллельная ей касательная к графику функции $y=x^3+2x$.

Ответ: $y=2x$.

Решение. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Тогда уравнение касательной к графику функции $y=\sin 2x$ имеет вид $y=\sin 2x_0+2\cos 2x_0(x-x_0)$. А уравнение касательной к графику функции $y=x^3+2x$ имеет вид

$$y = x_0^3+2x_0+(3x_0^2+2)(x-x_0).$$

Для того чтобы касательные были параллельны, их угловые коэффициенты должны быть равными, то есть должно выполняться условие $2\cos 2x_0=3x_0^2+2$.

Решим полученное уравнение. Учитывая, что $2\cos 2x_0\leqslant 2$ и $3x_0^2+$ $+2\geqslant 2$, получим, что равенство может выполняться только в случае, когда $2\cos 2x_0=3x_0^2+2=2$. Поэтому единственным решением уравнения является $x_0=0$. Подставим найденное значение $x_0=0$ в уравнение касательной

$$y = \sin 2x_0+2\cos 2x_0(x-x_0).$$

Получим искомое уравнение $y=2x$.

53. Найдите наклонные асимптоты графика функции

$$y = \sqrt{x^2+3x+9}.$$

Решение 1. Имеем

$$\sqrt{x^2+3x+9} = \sqrt{(x+1{,}5)^2+6{,}75} = |x+1{,}5|\sqrt{1+\frac{6{,}75}{(x+1{,}5)^2}}.$$

Так как $\dfrac{6{,}75}{(x+1{,}5)^2}\to 0$ при $x\to\infty$, при $x\to+\infty$ асимптотой будет прямая $y=x+1{,}5$, а при $x\to-\infty$ — прямая $y=-x-1{,}5$.

Решение 2. Имеем

$$\sqrt{x^2+3x+9} = \sqrt{(x+1)^2+x+8} = |x+1|\sqrt{1+\frac{x+8}{(x+1)^2}}.$$

Так как $\dfrac{x+8}{(x+1)^2}\to 0$ при $x\to\infty$, получаем, что $x\to+\infty$ асимптотой будет прямая $y=x+1$, а при $x\to-\infty$ — прямая $y=-x-1$.

54. Функция $f(x)$ определена для всех действительных x и $f(f(x))=5x+4$. Найдите $f(-1)$.

Ответ: -1.

Решение 1. Функция $f(f(x))$ возрастающая, следовательно, она обратима. Тогда $f^{-1}(f(f(x))) = f^{-1}(5x+4)$, то есть $f(x)=\dfrac{x-4}{5}$. Значит, $f(-1)=-1$.

Решение 2. Докажем, что функция $f(x)$ обратима. Действительно, функция $f(f(x))$ обратима, так как она возрастающая. Пусть $f(x)$ не обратима, тогда существуют такие различные действительные числа x_1 и x_2, что $f(x_1)=f(x_2)$. Значит, $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ — противоречие.

Из доказанного утверждения и условия задачи следует, что $f(x) = f^{-1}(5x+4)$, тогда $f(-1)=f^{-1}(-1)$, значит, графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ пересекаются на прямой $y=x$, то есть $f(-1)=-1$.

Решение 3. Из условия задачи следует, что функция $f(x)$ линейная, значит, она либо возрастающая, либо убывающая, поэтому функция $f(x)$ обратима.

Тогда $f(x)=f^{-1}(5x+4)$, то есть $f(-1)=f^{-1}(-1)$, значит, графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ пересекаются на прямой $y=x$, поэтому $f(-1)=-1$.

Решение 4. Подставим в исходное равенство $x=-1$, тогда

$$f(f(-1)) = -1.$$

Следовательно, $f(-1)=f^{-1}(-1)$, значит, графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ пересекаются на прямой $y=x$, поэтому $f(-1)=-1$.

Решение 5. Из условия задачи следует, что функция $f(x)$ линейная. Пусть $f(x)=kx+b$, тогда $f(f(x))=k(kx+b)+b=k^2x+b(k+1)$. По условию задачи $f(f(x))=5x+4$, поэтому

$$\begin{cases} k^2 = 5, \\ b(k+1) = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $k=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}-1$ или $k=-\sqrt{5}$, $b = -\sqrt{5}-1$. Таким образом, $f(x)=\sqrt{5}x+\sqrt{5}-1$ или $f(x)=-\sqrt{5}x - \sqrt{5}-1$. В обоих случаях $f(-1)=-1$.

55. Докажите, что если возрастающая функция дифференцируема на некотором интервале, то в каждой точке этого интервала её производная положительна.

Решение. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке x_0 некоторого интервала I. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Так как $f(x)$ возрастает на интервале I, при $x>x_0$ получим, что $f(x)>f(x_0)$, а при $x<x_0$ получим, что $f(x)<f(x_0)$. В обоих случаях рассматриваемая дробь положительна, поэтому $f'(x_0)>0$. Таким образом, в любой точке интервала I производная положительна, что и требовалось доказать.

56. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ и не является постоянной ни на каком из промежутков, то функция $f(f(x))$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Решение. Если у функции $f(x)$ нет экстремумов, то она либо возрастает, либо убывает на $\mathbb{R}$. Так как композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая, в этом случае $f(f(x))$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет экстремумы в точках $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$. Тогда в силу непрерывности эта функция строго монотонна на $(-\infty; x_1]$, на каждом промежутке вида $[x_k; x_{k+1}]$ (где k принимает все натуральные значения от 1 до $n-1$) и на $[x_n; +\infty)$.

Действительно, если бы на каком-то из указанных промежутков это было не так, то «при переходе слева направо» через некоторую внутреннюю точку x_0 этого промежутка вид монотонности должен был бы измениться, например, с убывания на возрастание (из условия следует, что промежутков, на которых функция постоянна, нет). Тогда по определению x_0 — ещё одна точка экстремума (в нашем случае — точка минимума), но эта точка отлична от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом, числовая прямая разбивается на промежутки, которые пересекаются только в граничных точках, и на каждом из которых функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает. Но композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая. Поэтому $f(f(x))$ — возрастающая функция, что и требовалось доказать.

57. Пусть $h(x)=f(g(x))$. Докажите, что, если существуют $g'(x_0)$ и $f'(t_0)$, где $t_0=g(x_0)$, то существует $h'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

Решение. Рассмотрим

$$\Delta h(x_0) = h(x_0+\Delta x)-h(x_0) = f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0)) = \\ = f(g(x_0)+\Delta g(x_0))-f(g(x_0)) = f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

Кроме того, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, поэтому непрерывна в ней, следовательно, $\Delta t \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Имеем

$$h'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x} = f'(t_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

58. Докажите, что среди первообразных любой периодической функции, непрерывной на $\mathbb{R}$, найдётся хотя бы одна периодическая функция.

Решение. Пусть $f(x)$ — периодическая функция, то есть существует такое $T > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. Тогда $\int f(x+T)dx = \int f(x)dx$.

Если $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, то $F(x+T)$ — первообразная для $f(x+T)$ (согласно теореме о первообразной композиции функций). Следовательно, полученное равенство интегралов равносильно тому, что $F(x+T) = F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$. В частности, при $C = 0$ получим $F(x + T) = F(x)$, то есть $F(x)$ — периодическая функция.

59. Найдите точки экстремума непрерывной функции $f(x)$, если $f''(x) = 2$ при всех $x < 0$ и $f'(x) = 1$ при всех $x \geqslant 0$.

Ответ: $x = -0{,}5$.

Решение. Дважды интегрируя $f''(x)$ при $x < 0$, получим, что при таких x функция имеет вид $f(x) = x^2 + ax + b$. Интегрируя $f'(x) = 1$ при $x \geqslant 0$, получим, что при таких x функция имеет вид $f(x) = x + c$. Так как функция непрерывна, имеем $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + ax + b) = f(0) = c$, следовательно, $b = c$. Кроме того, $f'(0) = 1$, значит,

$$\lim_{x\to 0}(x^2 + ax + b)' = \lim_{x\to 0}(2x + a) = 1.$$

Следовательно, $a = 1$. Таким образом, функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + c, & x < 0, \\ x + c, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

У такой функции только одна точка экстремума: $x = -0{,}5$.

Комбинаторика, логика, теория вероятностей

Логические задачи

60. Некий торговец купил товар за 1 рубль, потом продал его за 2 рубля, потом купил его за 3 и продал за 4, и так далее, последний раз купил за 99 рублей, а продал за 100. Какую прибыль он в итоге получил?

Решение 1. Купив товар за рубль, а продав за 2, торговец приобрёл 1 рубль. Но, купив этот же товар за 3 рубля, он потерял 1 рубль. Рассуждая далее аналогично, приходим к тому, что его прибыль образовалась только от последней продажи и составляет 1 рубль.

Ответ: 1 рубль.

Решение 2. Купив товар за рубль, а продав за 2, торговец приобрёл 1 рубль, но, купив за 3 рубля товар, который стоит 1 рубль, он потерял 2 рубля, и так далее. В конце концов, он вернёт свой рубль, продав за 100 рублей то, что куплено за 99. Тем самым прибыли он не получит.

Ответ: никакую.

61. На острове живут рыцари и лжецы. Как-то за круглым столом собралось 12 островитян. Каждый их них сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Сколько лжецов было за столом?

Ответ: 6 лжецов.

Решение. Все сидящие за столом не могли быть лжецами, так как тогда для каждого из них высказывание было бы верным. Значит, за столом был хотя бы один рыцарь. Его правый сосед — лжец, так как рыцарь сказал правду. Правый сосед лжеца — рыцарь, так как лжец солгал. Правый сосед этого рыцаря — лжец, и так далее. Таким образом, рыцари и лжецы сидят через одного, следовательно, лжецов было 6.

62. На острове живут два племени: рыцари и лжецы (каждый знает, кто из какого племени). 100 жителей встали в круг. Каждый из них ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Лжец ли ваш правый сосед?». Ответов «Да» оказалось столько же, сколько лжецов. Какое наибольшее количество лжецов могло быть в круге?

Ответ: 50 лжецов.

Решение. Оценка. По кругу чередуются группы из подряд стоящих лжецов и рыцарей. Ответ «Да» возникает только в парах лжец — рыцарь или рыцарь — лжец на стыке групп. Количество пар равно количеству ответов «Да», что по условию равно количеству лжецов. Значит, каждый лжец входит ровно в одну пару, пары не пересекаются, и поэтому их не более пятидесяти.

Пример. Чередуются рядом стоящие пары лжецов и рыцарей. «Да» ответили все, чей сосед справа из другого племени.

63. В марсианском парламенте заседают депутаты трёх партий: «Гласные», «Согласные» и «Шипящие», причём в каждой фракции по 50 человек. На тайное голосование был поставлен проект закона «О реконструкции марсианских каналов». После голосования по 30 депутатов от каждой партии сказали, что они проголосовали «за», по 10 сказали, что проголосовали «против», а остальные сказали, что воздержались. Известно, что из «согласных» депутатов сказали правду те и только те, кто поддержал законопроект, из «гласных» — те и только те, кто проголосовал против, а из «шипящих» — воздержавшиеся. Законопроект считается принятым, если за него подано не менее 50 % голосов. Был ли принят законопроект?

Ответ: нет.

Решение. Из «гласных» сказать, что они проголосовали «за», могли только те, кто воздержался, а таких не более чем 10. Из «шипящих» сказать, что они проголосовали «за», могли только те, кто проголосовал «против», а их также не более чем 10. Значит, даже если все «согласные» проголосовали «за», то закон поддержали не более чем $50+10+10=70$ депутатов. А надо как минимум 75.

Процессы и операции

64. Дана клетчатая доска размером 4×4 с шахматной раскраской. За один шаг можно выбрать на этой доске произвольный квадрат размером 2×2 и изменить цвет каждой его клетки на противоположный. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы все клетки доски оказались одного цвета?

Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что при перекрашивании любого квадрата 2×2 в любой строке доски остаются две белые и две чёрные клетки. Следовательно, все клетки не могут оказаться одного цвета.

65. Десять школьников по окончании 11 класса решили поступать либо на мехмат, либо на физфак. Некоторые школьники дружат между собой. Каждый понедельник с момента окончания 10 класса они созваниваются с друзьями и обсуждают планы. Если большинство друзей некоторого школьника хотят поступать не туда, куда он, то к следующему понедельнику он принимает мнение этого большинства. Докажите, что до окончания школы их мнения устоятся и больше меняться не будут.

Решение. Всего в этой группе 45 пар школьников, из них n пар друзей, которые собираются поступать в разные места. Пусть Петя собирается на физфак, k его друзей — на мехмат, а l — на физфак, причём $l < k$. После того как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l. Таким образом, после каждой перемены мнений число n уменьшится на $k - l > 0$ пар. Ясно, что это может происходить не более 45 раз. Значит, за год (52 недели) процесс перемены мнений завершится.

66. В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.

Решение. Поместим всех депутатов в зал. Выберем одного депутата и отправим его в палату A. Затем выберем в зале такого депутата, у которого нет врагов в палате A (если такой есть), и также отправим его в A. Будем повторять эту процедуру, пока в зале будут оставаться такие депутаты. Когда они закончатся, выберем в зале такого депутата, который имеет в палате A ровно одного врага, и отправим его в A. Проделаем так несколько раз, пока и такие депутаты не закончатся. Тогда возьмём в зале таких депутатов, у которых три врага в палате A, и всех их отведём в палату B. Они не враждуют между собой, так что всё будет корректно. В зале останутся депутаты, у которых ровно два врага в палате A, но тогда у них не более одного врага среди депутатов из палаты B и тех депутатов, кто пока остался в зале, стало быть, всех их можно отправить в палату B. Таким образом, задача решена.

67. 8 марта каждая из n учительниц пришла в школу с одним цветком. При этом оказалось, что все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все имеющиеся у неё цветы или их часть. Нельзя дарить букет, если букет, состоящий из точно тех же цветов, уже кому-то дарили. Какое наибольшее количество букетов могло быть подарено? (*Один цветок — это тоже букет*.)

Ответ: $2^n - 1$ букет.

Решение. Всего из n цветков можно составить $2^n - 1$ различных букетов. Докажем индукцией по n, что все эти букеты могут быть подарены и при этом в конце у каждой учительницы снова окажется по одному цветку.

База индукции ($n = 2$). Пусть первая учительница принесла розу, а вторая — тюльпан. Тогда первая дарит второй розу, затем вторая первой — оба цветка, а затем первая дарит второй тюльпан.

Шаг индукции (от n к $n + 1$). Пусть первая учительница принесла розу. Сначала она стоит в стороне, а все остальные учительницы дарят друг другу всевозможные букеты без розы согласно алгоритму для n. Единственная поправка: последний букет из одного цветка (скажем, тюльпана) дарится *первой* учительнице. Далее тюльпан с розой склеиваются в один цветок, и снова n учительниц, у которых есть по одному цветку, дарят их друг другу согласно алгоритму для n. В конце учительница с цветком «роза-тюльпан» дарит розу учительнице без цветка, и теперь подарено $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ букетов и у каждой учительницы ровно по одному цветку.

Соответствия и графы

68. Рассматриваются «слова» длины 100, составленные только из букв A, B и C. Каких «слов» больше: тех, в которых каждый из фрагментов AB и AC встречается чётное число раз, или тех, в которых каждый из таких фрагментов встречается нечётное число раз?

Ответ: поровну.

Решение. Рассмотрим «слово», в котором оба фрагмента встречаются нечётное число раз. Заменим в нём первый из фрагментов на другой (AB на AC или наоборот). Получим слово, у которого оба фрагмента встречаются чётное число раз. Это соответствие является взаимнооднозначным, поэтому «слов» обоих видов одинаковое количество.

69. В коробке было 16 конфет четырёх видов — по четыре конфеты каждого вида. Их раздали восьмерым детям — по две конфеты каждому. Докажите, что какие-то двое детей получили либо четыре одинаковые конфеты, либо четыре попарно различные.

Решение. Предположим, что это не так. Обозначим виды конфет цифрами 1, 2, 3, 4. Каждому ребёнку могли достаться либо две одинаковые конфеты, либо две различные.

1. Две одинаковые конфеты. Если для какого-нибудь вида конфет таких детей двое, то им достались четыре одинаковые конфеты. Значит, всего таких детей не более четырёх.

2. Две различные конфеты. Разобьём все возможные пары различных конфет на три пары, дополняющие друг друга до полного набора: {1—2, 3—4}, {1—3, 2—4}, {1—4, 2—3}. Если каким-то двум детям досталось по две конфеты, принадлежащие одной из таких пар, то они получили четыре попарно различные конфеты. Следовательно, таких детей не более трёх.

Таким образом, всего могло быть не более семи детей, однако по условию их восемь. Противоречие.

70. Докажите, что в связном графе без циклов любые две вершины соединяет единственный (простой) путь.

Решение. Поскольку граф связный, путь всегда существует. Докажем, что он единственный. Пусть это не так и существуют два пути.

Если эти пути не содержат внутри совпадающих вершин, то, пройдя в одну сторону по одному из них, а в другую сторону — по другому, мы получим цикл.

Если же внутри есть совпадающие вершины, то пойдём первым путём до тех пор, пока он совпадает со вторым. Обозначим через A последнюю совпадающую вершину (то есть следующая вершина за A на первом пути не принадлежит второму пути). Будем идти дальше первым путём до тех пор, пока не дойдём до вершины, которая вновь лежит на втором пути. Её обозначим через B. Тогда часть первого пути от A до B и часть второго пути от B до A в объединении образуют цикл, что противоречит условию задачи.

71. Собрались n рыцарей. Известно, что у каждого рыцаря не меньше чем $\frac{n}{2}$ друзей, а остальные — враги. Докажите, что можно так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого рыцаря будет сидеть его друг.

Решение. Докажем утверждение задачи методом математической индукции. Для $n=2$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для некоторого n. Докажем, что оно верно, когда количество рыцарей равно $n+1$. Отправим одного (например, Петю) за дверь, а остальных n рыцарей рассадим за круглым столом. Теперь найдём место для Пети. Для каждого друга Пети рассмотрим его правого соседа. Если все эти соседи — враги, то врагов у Пети не меньше, чем друзей, что противоречит условию. Следовательно, найдутся два друга Пети, сидящие подряд. Между ними мы и посадим Петю.

Сколькими способами?

72. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

Ответ: $4C_{51}^{9}$.

Решение. Поскольку требуется туз, сначала выберем его. Это можно сделать четырьмя способами. Затем достаточно выбрать произвольные 9 карт из 51. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{51}^{9}. Так как оба выбора происходят независимо, искомое количество способов равно $4C_{51}^{9}$.

73. Есть ожерелье из пяти бусинок разного размера. Сколькими способами можно покрасить бусинки не более чем в пять цветов так, чтобы никакие две соседние бусинки не были одного цвета?

Ответ: 96011.

Решение. Первую бусинку можно покрасить в любой из пяти цветов, то есть пятью способами, каждую из двух соседних — четырьмя способами, а из двух оставшихся одну — четырьмя способами, другую — тремя. Итого получаем $3\cdot 4^3\cdot 5=960$.

74. Сколькими способами можно нарисовать прямоугольник по линиям сетки на клетчатом листе бумаги размером $m\times n$?

Ответ: $\dfrac{mn(m+1)(n+1)}{2}$.

Решение. Каждый прямоугольник задаётся однозначно своими верхней левой и правой нижней вершинами. Выберем местоположение одной вершины — это можно сделать $(m+1)(n+1)$ способами — таково число узлов решётки на листе размером $m\times n$. Второй узел не должен лежать с первым в одной строке и в одном столбце (а также не должен с ним совпадать). Таким образом, он может лежать в любой из n оставшихся строк и в любом из m оставшихся столбцов, то есть может быть выбран mn способами. Итого по правилу произведения существует $(m+1)(n+1)mn$ способов выбрать две вершины прямоугольника. Но при этом мы посчитали каждый прямоугольник два раза: выбирая сначала верхний левый, а затем нижний правый угол и наоборот, поэтому полученное произведение надо разделить на 2.

75. Прямоугольный параллелепипед размером $m \times n \times k$ (m, n, k — натуральные числа) разбит на единичные кубики. Сколько всего образовалось параллелепипедов (включая исходный)?

Ответ: $\frac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{8}$.

Решение. На трёх рёбрах данного параллелепипеда, исходящих из одной вершины, образовалось $m+1$, $n+1$ и $k+1$ точек разбиения соответственно (включая концы). Следовательно, после разбиения в пространстве образуется $P=(m+1)(n+1)(k+1)$ точек, которые могут стать вершинами параллелепипедов. Заметим, что любые две точки могут стать концами диагонали ровно одного из искомых параллелепипедов. Количество способов выбрать две точки из P равно

$$C_P^2 = \frac{P(P-1)}{2}.$$

В каждом параллелепипеде 4 диагонали, поэтому искомое количество параллелепипедов в 4 раза меньше, то есть оно равно

$$\frac{P(P-1)}{8} = \frac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{8}.$$

76. Сколькими способами можно сделать браслет из трёх одинаковых изумрудов, двух одинаковых рубинов и одного сапфира? (*В браслет должны входить все 6 камней. Они считаются одинаковыми, если один может быть получен из другого поворотом или переворотом.*)

Ответ: 5.

Решение. Предположим, что мы выкладываем камни в ряд и все камни различны. Тогда существует 6! перестановок камней. Поскольку браслеты, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми, нужно это число разделить на 6 (каждой перестановке соответствует шесть браслетов). Кроме того, при таком подсчёте мы не различали браслеты, которые получаются друг из друга переворотом, то есть на самом деле браслетов ещё вдвое меньше: $\frac{5!}{2}$. Этот подсчёт мы производили исходя из того, что все камни различные, следовательно, полученное число надо разделить на количество перестановок одинаковых камней. Таким образом, искомое количество равно $\frac{5!}{2\cdot 2!\cdot 3!}=5$.

77. Каждая сторона треугольника ABC разделена на восемь равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления, у которых ни одна из сторон не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC? (*Точки A, B и C не могут быть вершинами треугольников.*)

Ответ: 120.

Решение. Из условия задачи следует, что мы должны выбрать по одной точке на каждой из сторон треугольника. Выберем сначала точку на стороне AB — это можно сделать шестью способами. Тогда точку на стороне BC можно выбрать пятью способами, поскольку сторона полученного треугольника не должна быть параллельна AC. Аналогично точку на стороне AC можно выбрать четырьмя способами (не должно быть сторон, параллельных сторонам AB и BC). Таким образом, искомое количество способов равно: $6\cdot 5\cdot 4=120$.

Вероятность

78. Встретились двое. Один говорит: «У меня двое детей. Среди них есть мальчик». С какой вероятностью оба ребёнка — мальчики?

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. По условию задачи один из детей — мальчик. Второй может быть как мальчиком, так и девочкой с одинаковой вероятностью. Поэтому оба ребёнка — мальчики с вероятностью $\frac{1}{2}$.

79. Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите вероятность того, что А стоит первым, если известно, что Б стоит в очереди позже А.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Б стоит позже А в стольких же случаях, в скольких и А стоит позже Б, то есть все 24 способа выстроить в ряд 4 человек разбиваются на две равные группы по 12 — в половине из них А стоит раньше Б, в половине — Б стоит раньше А. Условная вероятность того, что А стоит первым при заданном условии, равна доле тех случаев, когда А — первый, среди тех 12 случаев, когда А стоит раньше Б. Но, кроме Б, у нас есть 3 человека — А, В и Г, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью. Таким образом, доли случаев, когда первый — А, когда первый — В и когда первый — Г, равны, поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

80. Два артиллериста стреляют по воробью. Один попадает с вероятностью 0,2, другой — с вероятностью 0,6. В результате залпа из двух пушек в цель попал только один снаряд. Какова вероятность того, что промахнулся первый артиллерист?

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение. Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй — с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем промаха второго. Поскольку в цель попал только один снаряд, сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1. Следовательно, первый промахнулся с вероятностью $\frac{2}{3}$.

Разное

81. Вася и Петя закрашивают по очереди клетки на доске размером 4×4 так, чтобы не образовывался квадрат 2×2 из закрашенных клеток. Тот, кто не сможет сделать очередной ход, проигрывает. Начинает Петя. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Вася.

Решение. Как бы ни играли Вася и Петя, они обязательно сделают в сумме 12 ходов. Тринадцатый ход должен будет сделать Петя, поэтому он проиграет.

82. В Зазеркалье имеют хождение только монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет (не менее двух), а на сдачу получила на две монеты больше. Какова минимально возможная стоимость покупки?

Ответ: 10 гиней.

Решение. Пример. Алиса отдала 2 монеты по 25 гиней, а получила на сдачу 2 монеты по 7 гиней и 2 монеты по 13 гиней.

Оценка. Заметим, что стоимость покупки не может быть меньше самой мелкой монеты. Кроме того, бессмысленно платить какую-либо монету и её же получать в виде сдачи. Перебором остальных возможностей несложно убедиться, что если из суммы номиналов любых двух монет вычитать сумму номиналов любых четырёх монет, то невозможно получить ни 7, ни 8, ни 9.

83. Два приятеля пришли на базар. Весёлый молодец продавал 20 котов по цене от 12 до 15 рублей и 20 мешков по цене от 30 копеек до 1 рубля. Докажите, что каждый из друзей может купить по коту в мешке так, чтобы они заплатили одинаковую сумму денег.

Решение. Заметим, что наименьшая стоимость кота в мешке — 12 рублей 30 копеек, а наибольшая — 16 рублей. Следовательно, количество вариантов возможных стоимостей кота в мешке не превышает количества целых чисел на отрезке $[1230; 1600]$, то есть не больше чем 371. Вместе с тем, количество различных пар вида «кот — мешок» равно $20 \cdot 20 = 400$. Следовательно, по принципу Дирихле найдутся две пары, имеющие одинаковую стоимость.

84. В турнире по круговой системе участвовало 8 шахматистов (каждый участник встретился с каждым один раз). За победу начислялось 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0. В результате все участники набрали различное количество очков. Затем часть шахматистов была дисквалифицирована и результаты поединков с ними были аннулированы, причём оказалось, что каждый из дисквалифицированных занимал место с чётным номером. Среди оставшихся участников порядок занятых мест изменился в точности на противоположный. Сколько человек было дисквалифицировано?

Ответ: 4.

Решение. Докажем, что дисквалифицированных не могло быть меньше чем 4. Пусть дисквалифицировано не более трёх шахматистов. Разница в сумме набранных очков между участниками, занявшими соседние места, не меньше чем 0,5. Поэтому до дисквалификации разница между первым и последним участником была не меньше чем 3,5 очка. Для того чтобы после дисквалификации последний участник опередил первого, первый должен был потерять хотя бы 4 очка. Но он мог потерять очки только за счёт дисквалифицированных шахматистов, то есть не более трёх очков.

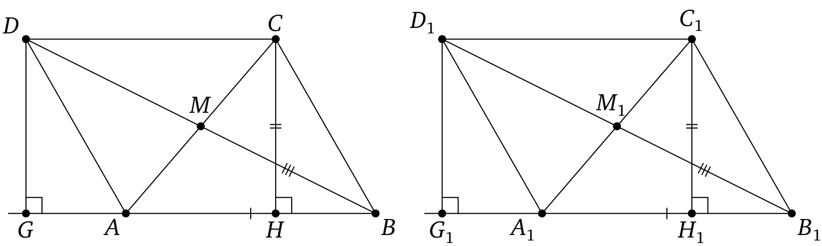
Таким образом, дисквалифицировано не меньше четырёх участников. Но места дисквалифицированных спортсменов чётные, поэтому их и не больше чем 4. Значит, их ровно 4.

Геометрия

Планиметрия

Треугольники

85. Докажите, что если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, равны высоты CH и C_1H_1 и равны медианы BM и B_1M_1, то такие треугольники равны.



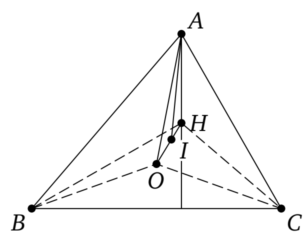
Решение. Продолжим медианы BM и B_1M_1 за точки M и M_1 соответственно и отложим отрезки $MD = BM$ и $M_1D_1 = B_1M_1$ (см. рисунок). Получим параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Из вершин D и D_1 опустим перпендикуляры DG и D_1G_1 на прямые AB и A_1B_1 соответственно. Тогда $DG = CH = C_1H_1 = D_1G_1$, значит, равны прямоугольные треугольники BDG и $B_1D_1G_1$ (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle DBG = \angle D_1B_1G_1$.

Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$). Тогда $AM = A_1M_1$ и $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$. Из равенства отрезков AM и A_1M_1 следует, что $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

86. Пусть H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC и BCH имеют общий центр описанной окружности.

Решение. В треугольнике ABC рассмотрим ортотреугольник (треугольник, образованный основаниями его высот). Известно, что перпендикуляры к сторонам ортотреугольника, проведённые из соответствующих вершин треугольника ABC, пересекаются в центре окружности, описанной около ABC. У треугольников ABC и BCH один и тот же ортотреугольник. Значит, эти треугольники имеют общий центр описанной окружности (эти центры можно получить как пересечение перпендикуляров к сторонам ортотреугольника, проведённых из общих вершин B и C), что и требовалось доказать.

87. Центр I вписанной окружности остроугольного треугольника ABC лежит на отрезке OH (O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот). Докажите, что треугольник ABC равносторонний.



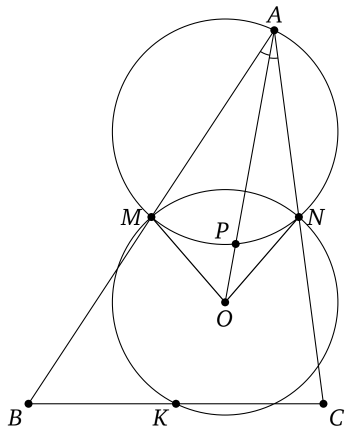
Решение. Из условия задачи следует, что AI — биссектриса угла BAC (см. рисунок). Воспользуемся известным фактом: $\angle OAB = \angle HAC$, тогда AI — биссектриса треугольника OAH. По свойству биссектрисы $\frac{OI}{IH} = \frac{OA}{AH}$. Проведя аналогичные рассуждения для треугольников OBH и OCH, получим

$$\frac{OI}{IH} = \frac{OB}{BH} \quad \text{и} \quad \frac{OI}{IH} = \frac{OB}{BH}.$$

Тогда, учитывая, что $OA = OB = OC$ (радиусы окружности, описанной около треугольника), получим $AH = BH = CH$. Следовательно, $\angle HAB = \angle HBA$ и $\angle HBC = \angle HCB$. Из первого равенства следует равенство углов A и B данного треугольника, а из второго — равенство углов B и C. Таким образом, в треугольнике ABC три угла равны, то есть этот треугольник равносторонний.

88. Центр окружности, проходящей через середины всех сторон треугольника, лежит на биссектрисе одного из его углов. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

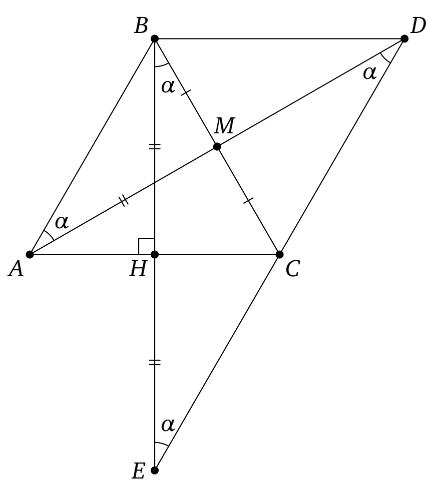
Решение. Пусть K, M и N — середины сторон BC, AB и AC треугольника ABC и центр O окружности, проходящей через эти точки, лежит на биссектрисе угла A (см. рисунок). Рассмотрим окружность, проходящую через точки A, M и N. Пусть биссектриса угла A пересекает её в точке P, тогда $PM = PN$ (хорды, стягивающие равные дуги). Кроме того, $OM = ON$. Следовательно, точки P и O лежат



на серединном перпендикуляре к отрезку MN. Но вершина A лежит на прямой OP, значит, $AM = AN$, поэтому $AB = AC$, что и требовалось.

89. В треугольнике ABC медиана AM равна высоте BH. Кроме того, равны углы MAB и HBC. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

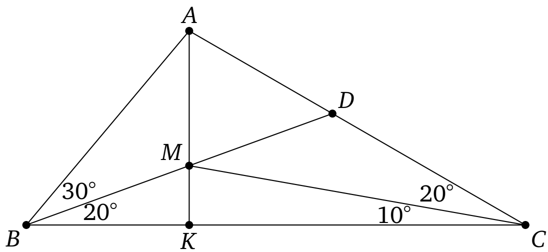
Решение. Пусть $\angle MAB = \angle HBC = \alpha$ (см. рисунок). На луче AM отметим точку D так, что $DM = AM$, тогда $ABDC$ — параллелограмм и $\angle ADC = \angle DAB = \alpha$. На луче BH отметим точку E так, что $EH = BH$, тогда $EC = BC$ и $\angle CEB = \angle CBE = \alpha$.



Так как $HC \parallel BD$, по теореме Фалеса $EC = CD$. Тогда $\Delta ADC = \Delta BEC$ ($AD = BE$, $DC = EC$, $\angle ADC = \angle BEC$). Следовательно, $AC = BC$ и треугольник ACD равнобедренный: $AC = CD = AB$. Таким образом, треугольник ABC равносторонний, что и требовалось.

90. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 50°$, $\angle C = 30°$. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MBC = 20°$, $\angle MCB = 10°$. Докажите, что $AM \perp BC$.

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle MCD = 20°$, $\angle MBA = 30°$ (см. рисунок). Пусть прямая BM пересекает AC в точке D. Тогда $\angle DMC = \angle MBC + \angle MCB = 30°$.



Опустим перпендикуляр MK на сторону BC. В прямоугольных треугольниках CKM и BKM имеем $\angle KMC = 80°$, $\angle KMB = 70°$, откуда следует, что

$$\angle AMB = 180° - \angle KMB = 110°.$$

В треугольнике имеем BCD

$$\angle BDC = 180° - 30° - 20° = 130°,$$

поэтому

$$\angle CMD = 180° - 130° - 20° = 30°.$$

Кроме того,

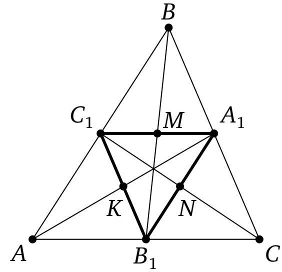
$$\angle AMD = 180° - \angle AMB = 180° - 110° = 70°.$$

Но тогда

$$\angle AMK = \angle AMC + \angle CMK = 70° + 30° + 80° = 180°.$$

Значит, точки A, M и K лежат на одной прямой, то есть прямая AM совпадает с прямой MK, перпендикулярной BC по построению, что и требовалось.

91. В треугольнике проведены все: а) медианы; б) высоты; в) биссектрисы. Могут ли их середины лежать на одной прямой?



Ответ: а), б), в) не могут.

Решение. Рассмотрим, например, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC и отметим их середины K, M и N (см. рисунок).

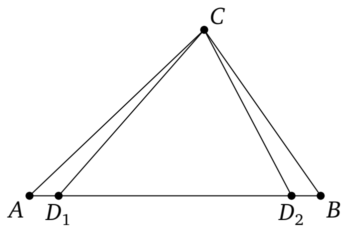
Проведем средние линии треугольника ABC, тогда точки K, M и N лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$ (по одной внутри каждой стороны). Следовательно, эти точки не могут лежать на одной прямой.

Для высот и биссектрис рассуждения аналогичны.

92. Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы были равны радиусы окружностей: а) вписанных в получившиеся треугольники; б) описанных около этих треугольников.

Решение. а) Пусть дан треугольник ABC, у которого радиус вписанной окружности равен r. На стороне AB рассмотрим такие точки D_1 и D_2, что расстояния AD_1 и BD_2 мало отличаются от нуля (см. рисунок). Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник ACD_1, также близок к нулю, а радиус окружности, вписанной в треугольник BCD_1, немного меньше, чем r. Аналогично радиус окружности, вписанной в треугольник BCD_2 близок к нулю, а радиус окружности, вписанной в треугольник ACD_2, немного меньше, чем r.

Пусть точка D «движется» из положения D_1 в положение D_2. Рассмотрим величину Δr, равную разности радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD. При малых изменениях положения точки D эта величина изменяется мало, поэтому зависимость между положением точки D и значением Δr является непрерывной функцией.



Если точка D находится в положении D_1, то $\Delta r < 0$, а если она находится в положении D_2, то $\Delta r > 0$. Тогда в силу непрерывности существует положение точки D, при котором $\Delta r = 0$. В этом положении радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны.

б) Рассуждения полностью аналогичны пункту а).

93. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой к стороне BC.

Ответ: $\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $AD = L$ — искомая биссектриса. По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC = 27; \quad BC = 3\sqrt{3}.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Обозначив длину BD через x, получим уравнение

$$\frac{x}{3\sqrt{3} - x} = \frac{3}{6},$$

откуда $x = \sqrt{3}$. По теореме косинусов из треугольника ABD имеем

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD.$$

Подставив известные значения, получим квадратное уравнение

$$L^2 - 3\sqrt{3}L + 6 = 0.$$

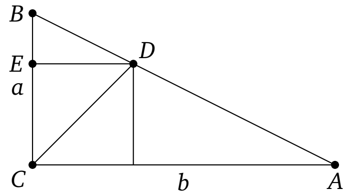
Его корни: $L_1 = \sqrt{3}$; $L_2 = 2\sqrt{3}$. Таким образом, длина биссектрисы равна $\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$.

94. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника. Найдите сторону квадрата.

Ответ: $\frac{ab}{a+b}$ или $\frac{a^2}{a+b}$.

Решение. Введём обозначения так, как показано на рисунке. Так как диагональ CD квадрата является биссектрисой угла C, по свойству биссектрисы и свойству пропорции получим:

$$\frac{a}{BD} = \frac{b}{AD} = \frac{a+b}{BD+AD} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Отсюда следует, что $BD=\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$. Из треугольника BDE имеем

$$x^2+(a-x)^2=BD^2=\frac{a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}.$$

Решая это уравнение, получим $x=\dfrac{ab}{a+b}$ или $x=\dfrac{a^2}{a+b}$.

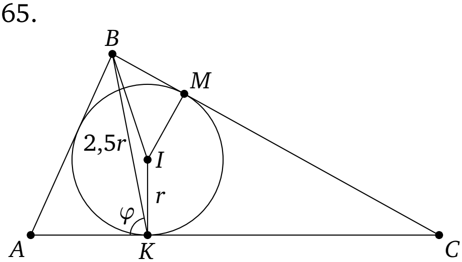
95. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Вписанная в него окружность касается стороны AC в точке K. Найдите синус угла между прямыми AC и BK, если длина BK в 2,5 раза больше, чем радиус вписанной окружности.

Ответ: 0,65.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности, r — её радиус, M — точка её касания со стороной BC (см. рисунок). Так как $\angle MBI=30°$, получаем, что $BI=2r$. Пусть $\angle AKB=\varphi$, тогда $\angle IKB=$ $=90°-\varphi$. Учитывая, что $BK=2{,}5r$, из треугольника IKB по теореме косинусов получим

$$4r^2=r^2+6{,}25r^2-5r^2\cos(90°-\varphi).$$

Тогда $\sin\varphi=0{,}65$.



96. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$. На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC — точка L так, что $AK+CL=\frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

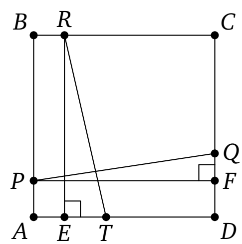
Решение. Отметим на AB точку M, а на BC — точку N так, что $AM=CN=\frac{1}{4}AB$. Докажем, что отрезок MN — искомое ГМТ.

Ясно, что L и K лежат по разные стороны от прямой MN и $KM = LN$. Без ограничения общности считаем, что K лежит на отрезке BM. Проведём через K прямую параллельно BN до пересечения с MN в некоторой точке D. Стороны треугольников MKD и ABC параллельны, поэтому треугольник MKD равнобедренный, $MK = KD$. Отрезки KD и NL равны и параллельны, значит, $KNLD$ — параллелограмм и середина KL лежит на DN.

Обратно, пусть E — точка на MN и, скажем, $EN < EM$. Отложим на EM отрезок $ED = EN$ и проведём через D прямую параллельно BN до пересечения с BM в точке K. Тогда, отложив на луче NC отрезок $NL = DK$, получим нужный нам отрезок KL с серединой E.

Четырёхугольники

97. В ромбе $ABCD$ на сторонах AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $\angle DEF = \angle DFE$. Докажите, что $BE = BF$.

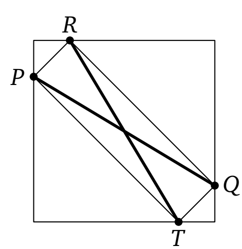


Решение. Из данного равенства углов следует равенство отрезков DE и DF. Следовательно, равны треугольники DEA и DFC. Тогда $AE = CF$, получаем, что $BE = BF$.

98. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки P, R, Q и T соответственно. Докажите, что отрезки PQ и RT равны тогда и только тогда, когда они перпендикулярны.

Решение. Проведём перпендикуляры PF и RE к соответствующим сторонам квадрата (см. рисунок), тогда:

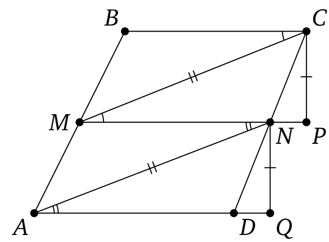
1) если $PQ = RT$, то прямоугольные треугольники QPF и TRE равны (по катету и гипотенузе), следовательно, $\angle QPF = \angle TRE$, а значит, $PF \perp RE$, получаем, что $PQ \perp RT$;



2) если $PQ \perp RT$, то $\angle QPF = \angle TRE$ (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами), следовательно, прямоугольные треугольники QPF и TRE равны (по катету и острому углу), а значит, $PQ = RT$.

99. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Известно, что $BC \parallel AD$ и $AN = CM$. Обязательно ли $ABCD$ — параллелограмм?

Ответ: обязательно.



Решение. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ — не параллелограмм, а трапеция (см. рисунок). Тогда MN — её средняя линия, откуда следует, что $\angle BCM = \angle CMN$ и $\angle DAN = \angle MNA$. Опустим перпендикуляры CP и NQ на прямые MN и AD соответственно, тогда прямоугольные треугольники CMP и NAQ равны (по катету и гипотенузе). Следовательно, $\angle CMN = \angle DAN = \angle MNA$, значит, $MC \parallel AN$. Таким образом, $AMCN$ — параллелограмм, $AM \parallel CN$, а значит, и $ABCD$ — параллелограмм.

100. У двух трапеций соответственно равны углы и диагонали. Верно ли, что такие трапеции равны?

Ответ: верно.

Решение. Трапеции с соответственно равными углами являются подобными. Если в подобных фигурах есть пара соответственно равных линейных элементов, то эти фигуры равны. Следовательно, равенство трапеций будет следовать из соответствующего равенства их диагоналей.

101. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметры треугольников AOB, BOC, COD и DOA равны между собой. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC и COD, равны соответственно 3, 4 и 6. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник DOA.

Ответ: 4,5.

Решение. Обозначим площади четырёх треугольников, указанных в условии, S_1, S_2, S_3 и S_4, а радиусы вписанных в них кругов — r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно. Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления площади треугольника: $S = 0{,}5ab\sin\gamma$ и тождеством

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

получим, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. С другой стороны, площадь треугольника может быть найдена как произведение его полупериметра и радиуса вписанной окружности. Так как по условию периметры всех четырёх треугольников равны, получаем, что

$$r_4 = \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2} = \frac{3 \cdot 6}{4} = 4{,}5.$$

Многоугольники

102. В шестиугольнике $ABCDEF$ противолежащие стороны равны и параллельны, а треугольник ACE равносторонний. Докажите, что существует такая точка O, что треугольники AOB, COD и EOF также равносторонние.

Решение. Докажем сначала, что данный шестиугольник центрально-симметричен. Действительно, так как AB и DE параллельны и равны, $ABDE$ — параллелограмм. Следовательно, его диагонали AD и BE пересекаются в некоторой точке O и делятся ею пополам. Аналогично AD и CF пересекают друг друга в серединах. Значит, точка O является серединой всех трёх диагоналей и центром симметрии шестиугольника.

Следовательно, треугольник DFB симметричен равностороннему треугольнику ACE относительно точки O, поэтому он также равносторонний. Значит, центры этих треугольников совпадают с O. Пусть AD пересекает BF в точке H. Угол AHO прямой, так как DH — высота треугольника DBF; $\angle HBO = 30^\circ$, так как BO — биссектриса угла B в этом же треугольнике. Поэтому $\angle BOH = 60^\circ$. Но $AO = BO$ (равные части медиан в равных треугольниках ACE и BDF). Таким образом, треугольник AOB равнобедренный с углом 60° при вершине, то есть равносторонний.

Аналогично доказывается, что треугольники COD и EOF также равносторонние.

103. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противолежащие стороны попарно параллельны и $AC = BD = CE = DF = EA = FB$. Докажите, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

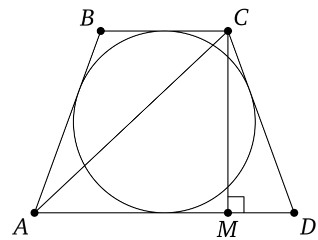
Решение. Заметим, что четырёхугольник $ABDE$ — равнобокая трапеция, так как по условию параллельны стороны AB и DE и равны стороны BD и AE. Равнобокая трапеция — вписанный четырёхугольник, поэтому точки четвёрки (A, B, D, E) лежат на одной окружности. Аналогичный вывод можно сделать для четвёрок (B, C, E, F) и (C, D, F, A). Диагональ BE — общая хорда окружностей для четвёрок (A, B, D, E) и (B, C, E, F). Аналогично диагональ CF — общая хорда окружностей второй и третьей четвёрок, диагональ AD — общая хорда окружностей третьей и первой четвёрок. По лемме о трёх хордах (частный случай теоремы о радикальном центре трёх окружностей) AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Площади

104. В равнобокую трапецию, длина диагонали которой равна 2,5, вписан круг площади π. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 3.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (см. рисунок). Так как радиус круга равен 1, высота CM трапеции равна 2. Из треугольника CAM получим, что $AM = 1{,}5$. Так как трапеция равнобокая, отрезок AM равен средней линии трапеции. Следовательно, её площадь $S = AM \cdot CM = 3$.



105. В равнобокой трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) известно, что $AB = DC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle CAD = 30°$. Найдите площадь трапеции.

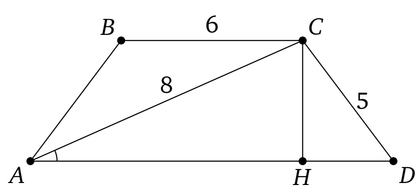
Ответ: 36 см^2.

Решение. Проведём высоту CH (см. рисунок). Так как $\angle CAD = 30°$, получаем, что $CH = \frac{1}{2}AC = 4$ (см). Треугольник CDH египетский, значит, $DH = 3$ см. Так как трапеция равнобокая,

$$AD = BC + 2DH = 12 \text{ (см)}.$$

Следовательно, можем найти площадь трапеции:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = 36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

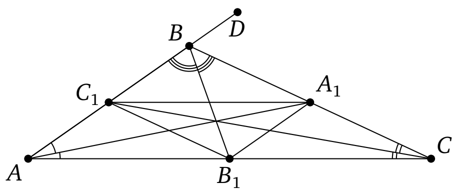


106. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если длины двух его сторон равны 4 и 5.

Ответ: 10 или 6.

Решение. На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку D, тогда $\angle DBC = 60°$, то есть луч BC — биссектриса угла DBB_1

(см. рисунок). Так как AA_1 — биссектриса угла BAC, точка A_1 — центр окружности, касающейся BB_1, BD и B_1C. Такая окружность является вневписанной для треугольника ABB_1, поэтому B_1A_1 — биссектриса угла BB_1C. Аналогично C_1 — центр вневписанной окружности для треугольника CBB_1, поэтому B_1C_1 биссектриса угла BB_1A. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ — прямоугольный, значит, его площадь $S = \frac{1}{2}B_1A_1 \cdot B_1C_1$. Далее возможны два случая.



1. Заданные длины сторон — это длины катетов этого треугольника, тогда его площадь $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$.

2. Гипотенуза этого треугольника равна 5, а один из катетов равен 4. Тогда другой катет равен 3, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

107. Докажите, что если внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ существует такая точка K, что треугольники ABK, BCK, CDK и ADK равновелики, то такой четырёхугольник является параллелограммом.

Решение. Прежде чем доказывать утверждение задачи, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть на разных сторонах угла A отмечены точки B и C, а точка M — середина отрезка BC. Тогда луч AM является геометрическим местом точек K, обладающих следующим свойством: треугольники ABK и ACK равновелики.

Доказательство. Докажем сначала, что если точка K принадлежит лучу AM, то соответствующие треугольники равновелики. Возможны три случая.

1. Точка M лежит между A и K (см. рис. 1). Тогда отрезки AM и KM являются медианами треугольников ABC и BCK соответственно, значит, они де-

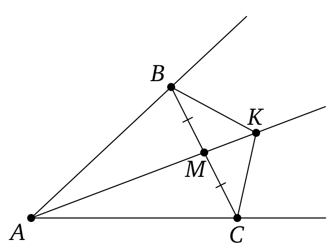


Рис. 1

лят их площади пополам. Площадь треугольника ABK является суммой площадей треугольников ABM и BMK. Аналогично площадь треугольника AKC является суммой площадей треугольников ACM и CMK. Следовательно, треугольники ABK и ACK равновелики.

2. Точка K лежит между A и M, тогда в рассуждении, приведённом выше, достаточно сумму площадей заменить на разность.

3. Если точки M и K совпадают, то справедливость утверждения очевидна.

Докажем теперь обратное утверждение.

Пусть точка K такова, что треугольники ABK и ACK равновелики. Докажем, что она лежит на луче AM.

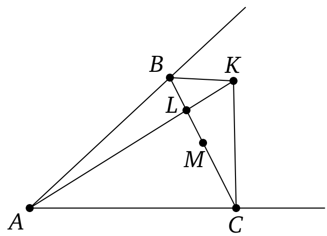


Рис. 2

Предположим противное. Тогда луч AK пересекает отрезок BC в точке L, не совпадающей с точкой M — серединой отрезка BC (см. рис. 2).

Пусть, например, $BL < LC$. Тогда, очевидно, площадь треугольника ABL меньше площади треугольника ACL, а площадь треугольника BKL меньше площади треугольника CKL. Следовательно, площадь треугольника ABK меньше площади треугольника ACK, значит, наше предположение неверно.

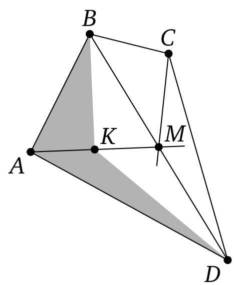


Рис. 3

Случаи, когда точка K лежит между точками A и L или же когда K совпадает с L, доказываются (как и в первой части) аналогичными рассуждениями. Лемма доказана.

Перейдём к доказательству исходного утверждения. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и проведём его диагональ BD (см. рисунок).

По условию треугольники ABK и ADK равновелики, значит, согласно доказанной лемме точка K должна лежать на луче AM, где M — середина диагонали BD. Аналогичным образом, точка K должна лежать и на луче CM, то есть точка K должна совпадать с их точкой пересечения — с точкой M.

Аналогично доказывается, что точка K должна совпадать с серединой диагонали AC. Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ середины диагоналей совпадают. Значит, он является параллелограммом, что и требовалось доказать.

Стереометрия

108. Докажите, что плоскости граней выпуклого многогранника разбивают пространство на $2P+3$ части, где P — количество его рёбер.

Решение. Одна из искомых частей пространства расположена внутри многогранника. Каждая из остальных частей имеет с многогранником либо общую грань, либо общее ребро, либо общую вершину. Наглядно это легко представить, рассмотрев куб или тетраэдр.

Таким образом, искомое количество частей равно $\text{В}+\text{Г}+\text{Р}+1$ (В и Г — количество вершин и граней соответственно). По формуле Эйлера $\text{В}+\text{Г}-\text{Р}=2$, поэтому $\text{В}+\text{Г}+\text{Р}+1=2P+3$.

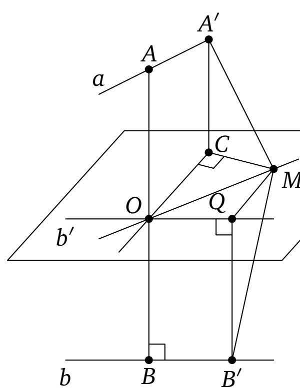
109. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{6}$ и образует углы 30°, 45° и 60° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите его объём.

Ответ: 4,5.

Решение. Угол между диагональю параллелепипеда и его гранью — это острый угол прямоугольного треугольника, противолежащим катетом которого является ребро параллелепипеда. Поэтому можем найти измерения параллелепипеда:

$$a=\sqrt{6}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2};\quad b=\sqrt{6}\sin 45^\circ=\sqrt{3};\quad c=\sqrt{6}\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Теперь находим искомый объём: $V=abc=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=4{,}5$.



110. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведённая через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Полученное сечение имеет площадь Q. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Ответ: $2Q\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед, а ABC_1D_1 — указанное сечение. Оно перпендикулярно грани AA_1D_1D. Так как $\angle D_1AD = 45^\circ$, получаем, что $DD_1 = AD = DC$, то есть боковые грани параллелепипеда равны. Следовательно, по теореме о площади проекции

$$S_{\text{бок.}} = 4 \cdot \frac{Q}{\cos 45^\circ} = 2Q\sqrt{2}.$$

111. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух скрещивающихся прямых.

Ответ: две взаимно перпендикулярные прямые.

Решение. Пусть прямые a и b скрещиваются. Построим отрезок AB — их общий перпендикуляр и плоскость γ, перпендикулярную AB и проходящую через точку O — его середину (см. рисунок).

Пусть прямые a' и b' — ортогональные проекции прямых a и b на плоскость γ. Тогда любая точка M, лежащая на биссектрисе углов, образованных прямыми a' и b', равноудалена от прямых a и b.

Действительно, пусть MC и MD — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые a' и b' соответственно, A' и B' — ортогональные проекции точек C и D на прямые a и b. Тогда $A'M \perp a'$ и $B'M \perp b'$ (по теореме о трёх перпендикулярах), значит, $A'M \perp a$ и $B'M \perp b$. Кроме того, прямоугольные треугольники $A'MC$ и $B'MD$ равны (по двум катетам), поэтому $A'M = B'M$.

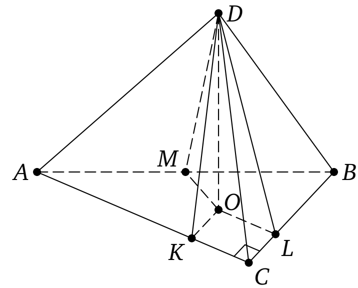
Если точка M не принадлежит ни одной из биссектрис указанных углов, то она не равноудалена от сторон угла, следовательно, не равноудалена от прямых a и b (если $CM \neq DM$, $A'C = B'D$, то $A'M \neq B'M$).

Таким образом, искомое ГМТ — две взаимно перпендикулярные прямые, лежащие в плоскости γ.

112. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Плоскость каждой боковой грани образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $DABC$ — данная пирамида, где $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, DO — её высота (см. рисунок). Из точки O проведём



перпендикуляры к сторонам треугольника ABC: OK, OL и OM, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $DK \perp AC$, $DL \perp BC$ и $DM \perp AB$. Следовательно, углы DKO, DLO и DMO — линейные углы двугранных углов при рёбрах основания пирамиды. Из условия задачи следует, что эти углы равны по 60°. Тогда равны прямоугольные треугольники DKO, DLO и DMO (по катету и острому углу), следовательно, $OK = OL = OM$, то есть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а эти отрезки — её радиусы. Найдём радиус r вписанной окружности:

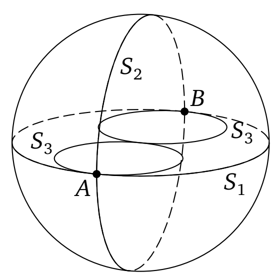
$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = 1.$$

Тогда из прямоугольного треугольника DOK находим $DO = r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

113. Даны три окружности α, β и γ. Никакие две из этих окружностей не лежат в одной плоскости, но каждые две из них имеют ровно две общие точки. Докажите, что все три окружности принадлежат одной сфере.

Решение. Пусть окружности α и β пересекаются в точках P и Q. Докажем, что существует сфера, на которой лежат обе окружности. Действительно, каждая окружность однозначно задаётся тремя точками, то есть окружность α задаётся точками A, P и Q, а окружность β — точками B, P и Q. Значит, пара окружностей задаётся четырьмя точками A, B, P и Q, а через любые 4 точки пространства можно провести сферу. Третья окружность γ имеет с этой сферой четыре общие точки (две — с α, и две — с β), поэтому γ принадлежит сфере.

114. Три окружности попарно касаются, причём точки касания различны. Обязательно ли эти окружности принадлежат либо одной плоскости, либо одной сфере?



Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим, например, сферу и две её большие окружности S_1 и S_2, лежащие в перпендикулярных плоскостях. Пусть A и B — точки их пересечения. В плоскости окружности S_1 рассмотрим ещё две окружности S_3 и S_4, касающиеся её внутренним образом в точках A и B соответственно, а друг друга — внешним образом. Тогда окружности S_2, S_3 и S_4 попарно касаются, но не лежат в одной плоскости и не могут принадлежать одной и той же сфере (см. рисунок).

Задачи на экстремальные значения

115. Рассматриваются все треугольники ABC, у которых фиксированы длина стороны AB и сумма длин двух других сторон. У какого из этих треугольников высота, проведённая к стороне AB, имеет наибольшую длину?

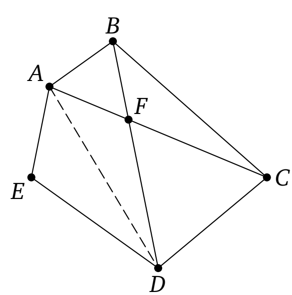
Ответ: такого треугольника не существует.

Решение. Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h$ и длина AB фиксирована, высота h имеет наибольшую длину, если S_{ABC} принимает наибольшее значение. Поскольку $S_{ABC} = pr$ и полупериметр p данного треугольника зафиксирован, S_{ABC} наибольшая, если наибольшее значение принимает радиус r окружности, вписанной в данный треугольник. Но $r = (p - AB)\operatorname{tg}\frac{\angle ACB}{2}$, значит, r принимает наибольшее значение при наибольшем значении тангенса указанного угла.

Но $\alpha = \frac{1}{2}\angle ACB < 90^\circ$, а функция $\operatorname{tg}\alpha$ на промежутке $(0; 90^\circ)$ возрастает от 0 до $+\infty$, то есть наибольшего значения тангенса не существует, значит и треугольника с наибольшей длиной высоты также не существует.

116. Найдите точку, лежащую в плоскости данного выпуклого пятиугольника, для которой сумма расстояний до всех его вершин наименьшая.

Ответ: предельная точка последовательности пятиугольников, в которой каждый последующий пятиугольник образован диагоналями предыдущего.



Решение. Рассмотрим выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (см. рисунок). Заметим, что четырёхугольник $ABCD$ также выпуклый, и точка, для которой сумма расстояний до его вершин минимальна, это точка F пересечения его диагоналей. Теперь рассмотрим задачу о минимуме для пятиугольника, то есть «подключим» вершину E. Получим, что точка минимума для пятиугольника лежит на отрезке FE, то есть внутри угла AFD, образованного диагоналями AC и BD.

Выбирая поочерёдно по четыре вершины пятиугольника и повторяя рассуждение, получим, что точка минимума должна лежать внутри пятиугольника, образованного пятью его диагоналями. Применяя всё вышесказанное к каждому следующему пятиугольнику, получим, что искомая точка лежит внутри любого из последовательности пятиугольников, стягивающихся в точку, то есть в этой предельной точке. Утверждение доказано.

117. На столе стоит правильная треугольная пирамида $PABC$ (сделанная из стекла), каждое ребро которой равно 1 (см. рис. 1). Муравей ползёт из точки M, лежащей на луче AB на расстоянии 2 от точки B, в точку N — середину ребра PC. Найдите длину его кратчайшего пути.

Ответ: $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Решение. Рассмотрим правильный треугольник $P_aP_bP_c$ — развёртку поверхности пирамиды на плоскость стола (см. рис. 2). Основание ABC пирамиды является срединным треугольником развёртки. Для того чтобы быстрее всего попасть из точки M в точку N, муравей на этой развёртке должен ползти по отрезку MN.

Пусть D — середина BM, тогда из условия следует, что четырёхугольник BCP_aD — ромб. Так как диагонали ромба перпендикуляр-

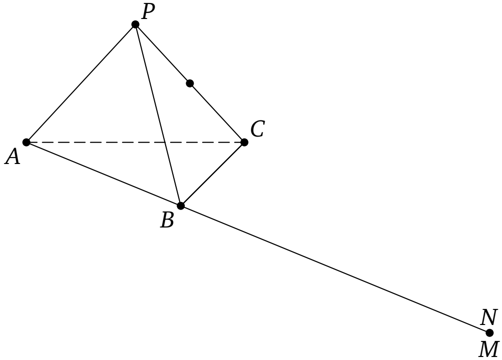


Рис. 1

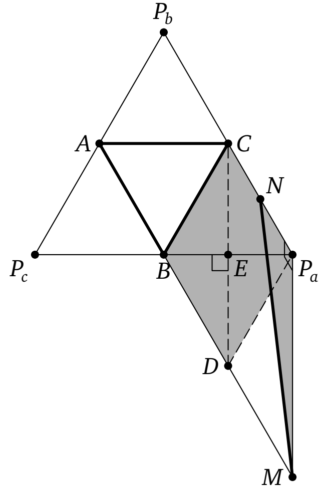


Рис. 2

ны и делятся точкой пересечения пополам, средняя линия DE треугольника BMP_a перпендикулярна стороне BP_a. Отсюда вытекает, что $\angle MP_aB = 90^\circ$. Значит,

$$\angle MP_aN = \angle MP_aB + \angle BP_aC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Кроме того, $MP_a = BM \sin \angle P_aBM = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

Из треугольника MP_aN по теореме косинусов получаем

$$MN^2 = MP_a^2 + NP_a^2 - 2MP_a \cdot NP_a \cos \angle MP_aN =$$
$$= 3 + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{19}{4}.$$

Следовательно, $MN = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

118. Найдите наибольшее значение площади поверхности тетраэдра $PABC$, если $PA = PC = AB = BC = 1$, $AC = PB$.

Ответ: 2.

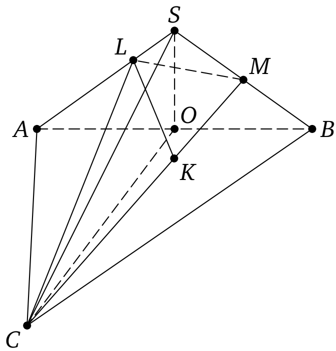
Решение. Поверхность данного тетраэдра состоит из четырёх равных равнобедренных треугольников с боковой стороной 1. Площадь каждого из них равна $0{,}5 \sin \alpha$, где α — угол при вершине треугольника. Таким образом, искомая площадь: $S = 2\sin \alpha$. Её наибольшее значение достигается при $\alpha = 90^\circ$, и оно равно 2.

119. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AC = CB = 5$, $AB = 8$. Вершина S проектируется на плоскость основания в середину стороны AB, $SA = 4\sqrt{2}$. Через точку C, точку M — середину ребра SB и точку L, принадлежащую ребру SA, проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения, если она имеет наименьшее возможное значение.

Ответ: $\sqrt{34}$.

Решение. Пусть O — середина AB, тогда $OB = 4$, $OC = 3$, $OS = 4$. Независимо от расположения точки L на ребре AS, сечением пирамиды является треугольник CLM с фиксированным основанием CM (см. рисунок). Поэтому площадь сечения будет наименьшей, если наименьшей будет его высота LK. Следовательно, отрезок LK должен являться общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AS и CM.

Рассмотрим декартову систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а положительные направления осей OX, OY и OZ совпадают с лучами OC, OB и OS соответственно. В этой системе ко-



ординат имеем $A(0;\,-4;\,0)$, $B(0;\,4;\,0)$, $C(3;\,0;\,0)$, $S(0;\,0;\,4)$, $M(0;\,2;\,2)$. Тогда $\overrightarrow{CM}(-3;\,2;\,2)$, $\overrightarrow{SA}(0;\,-4;\,-4)$, $\overrightarrow{AC}(3;\,4;\,0)$.

Так как

$$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}=t\cdot\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}+p\cdot\overrightarrow{CM},$$

где t и p — некоторые действительные числа, причём $t\in[0;\,1]$, находим $\overrightarrow{LK}(3-3p;\,-4t+4+2p;\,-4t+2p)$. Учитывая, что $\overrightarrow{LK}\perp\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{LK}\perp\overrightarrow{CM}$, получим $\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{SA}=0$ и $\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{CM}=0$. Тогда

$$\begin{cases}2t-p-1=0,\\ 16t-17p+1=0\end{cases}\iff t=p=1.$$

Таким образом, $\overrightarrow{LK}(0;\,2;\,-2)$. Значит, наименьшая площадь сечения равна

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{CM}|\cdot|\overrightarrow{LK}|=0{,}5\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}=\sqrt{34}.$$

Нестандартные подходы к определениям и к доказательству известных фактов

120. Определение. Правильным многоугольником называется простая замкнутая ломаная, у которой равны длины всех звеньев и равны все углы между соседними звеньями.

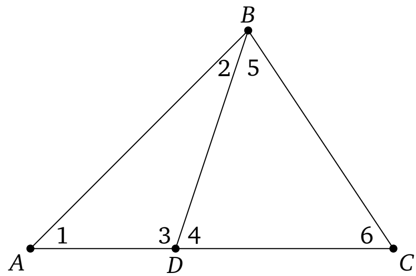
Корректно ли это определение для правильного: а) четырёхугольника; б) шестиугольника; в) пятиугольника?

121. Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство. Пусть S — сумма углов треугольника ABC. Соединим отрезком вершину B и произвольную внутреннюю точку D

стороны AC. Пронумеруем образовавшиеся углы так, как показано на рисунке. Тогда

$$\angle 1+\angle 2+\angle 5+\angle 6=S. \qquad (*)$$



Кроме того,

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=S, \qquad (**)$$

$$\angle 4+\angle 5+\angle 6=S. \qquad (***)$$

Сложим почленно равенства $(**)$ и $(***)$:

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=2S.$$

Заменим левую часть в этом равенстве, использую равенство $(*)$ и учитывая, что сумма смежных углов 3 и 4 равна 180°. Получим $S+180^\circ=2S$, то есть $S=180^\circ$, что и требовалось.

122. Теорема (*формула Герона*). Площадь треугольника можно вычислить по формуле

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b и c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр.

Доказательство. Выразим площадь треугольника через длины его сторон. Заметим, что если $a+b=c$, то треугольник «вырождается» в отрезок и его площадь равна нулю. Поэтому искомое выражение для S должно содержать множитель $a+b-c$. В силу равноправности сторон в искомое выражение должны также входить множители $a+c-b$ и $b+c-a$. Таким образом, получим выражение $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

Его размерность — третья степень линейной величины, а размерность площади должна быть второй степени. Поэтому надо умножить полученное выражение на симметричное выражение первой степени и извлечь квадратный корень. Единственное выражение первой степени, симметричное относительно a, b и c, — это $a+b+c$. Таким образом,

$$S = k\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

где k — числовой коэффициент.

Его значение можно найти, рассмотрев треугольник с конкретными сторонами, например $a=b=c=1$, площадь которого равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Подставив эти значения, получим, что $k=\frac{1}{4}$. Таким образом, площадь треугольника со сторонами a, b и c:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Учитывая, что $p=\frac{a+b+c}{2}$, получим требуемую формулу.

123. Теорема. В треугольнике, отличном от равнобедренного, биссектриса лежит между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC имеем $AC>AB$, тогда представим, что точка C движется по прямой BC. Когда вершина C находится «в бесконечности», медиана, проведённая из вершины A, параллельна BC, а биссектриса», проведённая из вершины A, пересекает BC, поэтому она лежит между медианой и высотой. При перемещении точки C вдоль прямой BC по направлению к точке B медиана не может совпасть с высотой, так как в этом случае AC должно равняться AB. Следовательно, биссектриса по-прежнему будет лежать между медианой и высотой.

124. Теорема (*неравенство Птолемея*). Для любого четырехугольника $ABCD$ (в том числе и не плоского) справедливо неравенство $AB\cdot CD+BC\cdot AD \geqslant AC\cdot BD$.

Доказательство. 1. Лемма. Для любых точек A, B, C и D пространства верно равенство

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

Действительно, имеем $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Подставив эти выражения в нужное равенство, получим

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0.$$

При раскрытии скобок все слагаемые в левой части сокращаются и получается верное равенство $0=0$.

2. Используем доказанное равенство и неравенство

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

Тогда

$$AC\cdot BD = |\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|+|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}| \leqslant \leqslant |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|+|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}| = AB\cdot CD+BC\cdot AD,$$

что и требовалось.

125. Теорема. Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше чем 360°.

Доказательство. Проведём плоскость α, пересекающую все рёбра данного трёхгранного угла с вершиной P, но не перпендикулярную ни одному из них и не перпендикулярную ни одной из граней этого угла. Пусть α пересекает рёбра трёхгранного угла в точках A, B и C.

Рассмотрим P' — ортогональную проекцию точки P на плоскость α. Тогда проекциями плоских углов APB, BPC и CPA трёхгранного угла служат углы $AP'B$, $BP'C$ и $CP'A$ соответственно. Так как ортогональная проекция угла, стороны которого пересекают плоскость проекции, больше самого угла, получаем, что

$$\angle APB+\angle BPC+\angle CPA < \angle AP'B+\angle BP'C+\angle CP'A.$$

Исходя из способа построения плоскости α, возможны два случая: 1) P' лежит внутри треугольника ABC; 2) P' лежит вне треугольника ABC. В первом случае сумма углов $AP'B$, $BP'C$ и $CP'A$ равна 360°, а во втором случае она меньше чем 360°. Следовательно, искомая сумма плоских углов меньше чем 360°, что и требовалось доказать.

II. Подсказки

1. Найдите последнюю цифру этого числа.

2. Попробуйте проверить ответ.

3. Число 10 учтено в этом решении? А может быть ещё что-то упущено?

4. Проверьте ответ для какого-нибудь двузначного простого значения q.

5. А как быть с равенством $197=49+148$?

6. Найдите НОД$(2a-2b+1; a+b)$.

7. Проверьте, не является ли, например, 144 числом указанного вида.

8. Попробуйте найти в тексте неверное утверждение. Оно единственное.

9. Попробуйте сначала опровергнуть ответ.

10. Проведите аналогичное рассуждение, например, для $\sqrt{9}$.

11. Разберитесь со всеми утверждениями о взаимной простоте чисел.

12. И в этой задаче разберитесь со взаимной простотой.

13. Стоит проверить подсчёт «лишних» линий.

14. Попробуйте подставить полученные значения переменных в условие задачи.

15. Подумайте, почему у второго торговца цена мякоти слив не отличается от указанной в условии цены слив с косточками.

16. Соотнесите полученный ответ с первой фразой из условия задачи.

17. Подумайте, что такое точность до десятой доли процента.

18. Соотнесите полученные ответы с условиями задач.

19. Можно ли, преобразовав неверное равенство, получить верное?

20. Реален ли полученный ответ?

21. Найдите типичную ошибку при работе с неравенствами.

22. Вспомните определение степени с дробным показателем.

23. Почему ответ в решении 1 является подмножеством ответа в решении 2?

24. Почему в ответе, полученном во втором решении, отсутствует q?

25. Попытайтесь найти две типичные ошибки, возникающие при решении рационального уравнения, которое сводится к квадратному.

26. Неужели во всех школьных учебниках неверно указано возможное количество корней квадратного уравнения?

27. Вспомните точное определение геометрической прогрессии. Всегда ли справедлива использованная формула суммы?

28. Попробуйте сделать проверку.

29. А число -2 не будет корнем данного уравнения?

30. При всех ли значениях a верен полученный ответ?

31. Действительно ли данное уравнение равносильно указанной системе?

32. Один и тот же ответ получен разными способами. Убедительно?

33. а) Вспомните определение степени.

б) Действительно ли в левой части стоит показательная функция?

34. Проанализируйте все утверждения, на которых основывается решение.

35. Попробуйте найти x, для которого значение выражения равно 6.

36. Подставьте, например, в данное выражение $a=b=2$.

37. Попробуйте найти стандартную логическую ошибку, возникающую при подобных рассуждениях.

38. Всё ли учтено при составлении уравнения?

39. Проверьте шаг за шагом логику и обоснованность рассуждений.

40. Попробуйте проверить ответ, например, решив задачу другим способом.

41. Как обычно вычисляют $\cos 120°$?

42. Для начала выясните, в каких решениях получен верный ответ.

43. Попробуйте проверить полученный ответ, хотя бы приближённо.

44. Вспомните, как доказываются факты, использованные в этом рассуждении.

45. Попробуйте проверить полученный ответ.

46. Найдите, сколько решений имеет система, например, при $a=1$.

47. Попробуйте проверить полученный ответ.

48. Найдите, сколько решений имеет уравнение, например, при $a=1$.

49. Основные ошибки здесь «на поверхности», но, чтобы выявить все ошибки и неточности, имеет смысл сначала самостоятельно решить задачу.

50. Подумайте, на какой вопрос ищется ответ в каждом из решений.

51. Попробуйте проверить полученный ответ.

52. Попробуйте нарисовать графики обеих функций и найденную касательную в одной системе координат.

53. Прежде всего установите, какой ответ будет верным.

54. Проанализируйте все утверждения, на которых основано каждое из решений.

55. Попробуйте рассмотреть несколько примеров.

56. А как быть, например, с функцией $f(x)=x^2$?

57. Это же теорема о производной композиции! Подумайте, почему такое доказательство не помещают в учебники по математическому анализу.

58. Попробуйте рассмотреть несколько примеров.

59. Подумайте, как обстоит дело с дифференцируемостью данной функции в точке $x_0=0$.

60. Найдите ещё какой-нибудь способ подсчитать прибыль.

61. Постройте отрицание к фразе «Оба моих соседа — лжецы».

62. Действительно ли пары, указанные в решении, не пересекаются?

63. Все ли учтены из тех, кто голосовал «за»?

64. Попробуйте поэкспериментировать, сделав несколько шагов.

65. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений.

66. Процесс распределения депутатов построен, но все ли шаги корректны?

67. Действительно ли среди подаренных букетов нет одинаковых?

68. Подумайте, можно ли было начать рассуждение со «слов», в которых оба фрагмента встретятся чётное число раз.

69. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений.

70. Разберитесь с разными путями при одном и том же наборе вершин.

71. Проверьте индукционный переход для какого-нибудь конкретного значения n.

72. А если поменять порядок рассуждений: сначала выбирать девять карт, а потом добавлять туза, то получится тот же ответ?

73. Подумайте, все ли возможные случаи учтены.

74. Проверьте полученный ответ для листа малого размера, чтобы искомое количество прямоугольников можно было найти непосредственным подсчётом.

75. Проверьте, например, выкладки в конце решения.

76. Попробуйте проверить ответ непосредственным перебором.

77. Точку на стороне AB действительно можно выбрать шестью способами?

78. А если указать, что мальчик — старший из двух, то ответ изменится?

79. Попробуйте проверить ответ, расписав все возможные варианты расстановок.

80. Разберитесь, о каких вероятностях идёт речь в каждой фразе решения.

81. Почему они обязательно сделают 12 ходов?

82. Может ли оценка опираться на приведённый пример?

83. С принципом Дирихле спорить трудно. А если всё-таки попробовать?

84. А если дисквалифицирован последний участник?

85. Неужели найден ещё один признак равенства треугольников?

86. Попробуйте сделать чертёж.

87. В равностороннем треугольнике точки O и H совпадают.

88. Подумайте, все ли случаи рассмотрены.

89. К какому углу применена теорема Фалеса?

90. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений.

91. Попробуйте провести аналогичные рассуждения для биссектрис и высот.

92. Попробуйте воспроизвести аналогичное рассуждение в п. б).

93. Однозначно ли определяется треугольник по данным задачи?

94. Может ли в этой задаче быть два ответа?

95. Попробуйте проверить ответ.

96. Проверьте, принадлежит ли, например, точка M найденному ГМТ.

97. Попробуйте сделать несколько чертежей, выбирая разные углы ромба.

98. Попробуйте сделать несколько чертежей, по-разному выбирая расположение отрезков.

99. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений, не опираясь на конкретный чертёж.

100. Почему в рассуждении используется равенство только одной пары диагоналей?

101. Попробуйте сделать чертёж, максимально соответствующий условию.

102. Подумайте, вытекает ли из условия задачи, что данный шестиугольник правильный.

103. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений.

104. Не кажется ли странным полученный ответ?

105. Попробуйте вычислить ещё какие-нибудь элементы трапеции, причём различными способами.

106. Обратите внимание на числовые данные в условии задачи.

107. Проверьте шаг за шагом все факты и рассуждения.

108. Проверьте утверждение ещё для каких-нибудь многогранников.

109. Обратите внимание на числовые данные в условии задачи.

110. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений.

111. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений.

112. Может ли высота пирамиды лежать вне её?

113. Попробуйте найти несколько различных случаев взаимного расположения окружностей.

114. Какие окружности можно считать касающимися?

115. Не удивляет ли ответ?

116. Попробуйте для начала рассмотреть несколько примеров.

117. Будет ли результат таким же, если рассмотреть другую развёртку пирамиды?

118. Попробуйте построить найденный тетраэдр наибольшей площади.

119. Проанализируйте результат, полученный для вектора $\overrightarrow{LK}$.

120. Существуют ли неплоские ломаные, удовлетворяющие сформулированному условию?

121. Можно ли доказать теорему о сумме углов треугольника, не используя аксиому параллельности?

122. Проверьте шаг за шагом логику рассуждений.

123. В решении в неявном виде используется непрерывность. Насколько корректно?

124. Внимательно проанализируйте, что именно применяется при доказательстве теоремы.

125. Проанализируйте основное утверждение, которое используется при доказательстве.

III. Анализ ошибок, верные решения и комментарии

Арифметика, алгебра и математический анализ

Делимость и целые числа

1. Конечно, **опечатка**. Любая степень числа, оканчивающегося цифрой 1, тоже оканчивается цифрой 1. Поэтому разность $23021^{377}-1$ оканчивается на 0 и, следовательно, не является простым числом.

На самом деле наибольшим известным сегодня простым числом является число $2^{3021377}-1$*. Простые числа вида* 2^n-1 *называют числами Мерсенна (по имени математика XVII века М. Мерсенна, который их исследовал). Ясно, что при составном* n *число* 2^n-1 *составное. Поэтому числа Мерсенна бывают только при простых* n*. Например,* $2^2-1=3$, $2^5-1=31$, $2^7-1=127$, … *— простые числа. Однако нельзя утверждать, что каждому простому числу* p *соответствует простое число* 2^p-1*. Например, число* $2^{11}-1$ *составное. Поиском чисел Мерсенна занимались многие выдающиеся математики, например, Эйлер доказал, что число* $2^{31}-1$ *простое. Конечно или бесконечно множество чисел Мерсенна — вопрос, на который пока нет ответа.*

2. Чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует. Действительно, если $a-b=1$, то $a^2-b^2=a+b=119=7\cdot 17$, то есть 119 — составное число. В приведённом решении получено необходимое условие ($a=60$, $b=59$), но проверка показывает, что оно не является достаточным. Это можно в равной степени трактовать либо как некорректность условия (сумма чисел должна быть простым числом), либо как ошибку в решении и ответе (после разложения на множители разности квадратов можно сразу сделать вывод, что искомых чисел не существует).

3. Число 10, конечно, не учтено, так как в перечне простых чисел, меньших 40, пропущено число 2. Кроме того, есть и ещё одна ошибка. Число, которое имеет ровно четыре делителя, представимо либо в виде $p \cdot q$, либо в виде p^3 (где p и q — различные простые числа). Последний случай в решении упущен, и тем самым потеряно число $5^3 = 125$. Таким образом, **верный ответ**: 12.

4. Указанный ответ верным не является. Несложно привести контрпример: у числа $7 \cdot 11^2$ наибольший собственный делитель — 121, а наименьший — 7. При этом $121 : 7 \neq 7$. Отсюда понятна ошибка в решении: приведённое рассуждение верно только для случаев, когда наименьший собственный делитель не превосходит 7.

Таким образом, $q = 2; 3; 5; 7$. **Верный ответ**: 28; 63; 175; 343.

5. Полученный ответ неверен. Например, в равенствах $197 = 49 + 148$ и $197 = 58 + 139$ **слагаемые имеют одинаковые суммы цифр**. Разберёмся в допущенных ошибках.

Решение 1 содержит неверное утверждение: «Увидим, что, как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17». Например, для разложения $197 = 79 + 118$ это утверждение неверно.

В решении 2 допущена ошибка при составлении системы, так как $z + b$ может равняться не только 7, но и 17. Во втором случае $y + a = 8$ и противоречия с чётностью не возникает.

Таким образом, оба решения неверны.

Отметим, что если в условии заменить, например, число 197 *на число* 199*, то указанное представление действительно окажется невозможным.*

6. Отметим, что числа, указанные в условии, существуют, например, $a = b = 2$ или $a = 220$, $b = 180$. Утверждение задачи также выполняется, но приведённое решение содержит ошибку. Числа $a + b$ и $2a - 2b + 1$ не обязательно являются взаимно простыми. Например, при $a = 2$, $b = 1$ каждое из этих выражений принимает значение 3, то есть их наибольший общий делитель — это 3.

Приведём одно из возможных верных решений. Пусть $a + b = c$, тогда $b = c - a$. Подставим это значение b в заданное соотношение и преобразуем:

$$2a^2 + a = 3(c-a)^2 - c + a \iff a^2 - 6ca + (3c^2 - c) = 0.$$

Рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно a, получим $\frac{D}{4} = 9c^2 - 3c^2 + c = c(6c+1)$. Это число должно быть точным квадратом. Так как числа c и $6c+1$ взаимно простые, каждое из них является точным квадратом, то есть $c = a + b$ — точный квадрат.

7. В решении есть ошибка: утверждение «n — чётное число» никак не следует из предыдущих рассуждений и не является верным. Например, если $n = 5$, $k = 1$, то $2^n + 4^k = 36 = 6^2$. Значит, приведённый ответ верным не является.

На самом деле среди чисел указанного вида **бесконечно много квадратов**. Действительно, $2^n + 4^k = 2^n + 2^{2k} = 2^{2k}(2^{n-2k} + 1)$. Первый множитель является точным квадратом при любом натуральном значении k, а второй множитель будет точным квадратом при $n = 2k + 3$.

Эту же идею можно было оформить иначе: пусть $n = 2k + 3$*, где* $k \in \mathbb{N}$*, тогда*

$$2^n + 4^k = 2^{2k+3} + 4^k = 4^k(8+1) = (2^k \cdot 3)^2.$$

Таких чисел бесконечно много.

8. Полученный ответ неверен, а в решении есть ошибка. Действительно, $203 = 7 \cdot 29$, то есть это не простое число. Значит, его можно получить указанными операциями, увеличив, например, число 116 (в решении описано его получение) на 75 %. При этом рассуждение, приведённое в решении, останется верным для наименьшего простого числа, большего чем 200. Такое число — это **211**. Это и есть верный ответ, так как все предыдущие числа получить можно.

Например, числа 204, 206, 208 и 210 можно получить из ранее полученного числа 200 увеличением на 2, 3, 4 и 5 процентов соответственно, число 205 получается из числа 164 увеличением на 25 %, число 207 — увеличением числа 138 на 50 %, а число 209 — увеличением числа 110 на 90 %.

9. И ответ, и решение неверны. Один из примеров прогрессии, удовлетворяющей условию задачи: $(16; 24; 36; 54; 81)$. Несложно проверить, что $16 + 24 + 36 + 54 + 81 = 211$.

Основная ошибка в приведённом решении: ниоткуда не следует, что знаменатель прогрессии должен быть натуральным числом (в приведённом примере $q = 1{,}5$).

Кроме того, в решении есть ещё две ошибки.

1. Не рассмотрен случай, когда $q=1$. Тогда искомая прогрессия — постоянная последовательность, у которой каждый из 211 членов равен 1.

2. В последнем случае, рассмотренном в решении ($q \geqslant 6$), не возникнет противоречия, если $n=2$, так как тогда в указанной сумме нет слагаемого q^2, значит, нет и противоречия. Пример прогрессии, удовлетворяющей условию: (1; 14; 196).

10. Приведённое доказательство очень похоже на «классическое», которое есть во многих учебниках, но кое-что в нём упущено. Это рассуждение заведомо не может быть верным, так как число 5 в нём вообще никак не используется.

Ошибка содержится в последнем утверждении, так как противоречия на самом деле нет: если n делится на k, то дробь $\frac{n}{k}$ вполне может быть несократимой, а именно, если $k=1$.

По сути доказано более слабое утверждение: число $\sqrt{5}$ (и вообще, число $\sqrt{a}$ при натуральном значении a) либо целое, либо иррациональное. Тогда приведённые рассуждения можно завершить, доказав, что $\sqrt{5}$ не целое число. Для этого достаточно проверить, что $\sqrt{5} \neq 1$ и $\sqrt{5} \neq 2$, и указать, что при всех натуральных $k \geqslant 3$ выполняется неравенство $k^2 \geqslant 9 > 5$.

11. Условие задачи корректно, приведённый ответ верный, но в решении содержатся ошибки.

1. Неверно, что если x, y и z взаимно просты, то какие-то два из них — взаимно просты. Например, числа 6, 10 и 15 взаимно просты, но у любых двух из них НОД больше 1.

2. Неверно, что если оба слагаемых не взаимно просты с z, то и сумма не взаимно проста с z. Например, числа 2 и 3 не взаимно просты с числом 6, однако их сумма $2+3=5$ взаимно проста с числом 6.

Приведём одно из возможных верных рассуждений.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\text{НОД}(x, y) \geqslant \text{НОД}(y, z) \quad \text{и} \quad \text{НОД}(x, y) \geqslant \text{НОД}(z, x).$$

Тогда, учитывая, что это натуральные числа, получим $\text{НОД}(x, y) > |\text{НОД}(y, z) - \text{НОД}(z, x)|$. С другой стороны, из алгоритма Евклида следует, что $\text{НОД}(x, y)$ не превосходит числа $|x-y|$, которое согласно условию равно $|\text{НОД}(y, z) - \text{НОД}(z, x)|$. Противоречие.

12. Приведённый ответ верный, а в решении есть ошибка. Использовано неверное утверждение: «если НОД нескольких чисел равен 1, то НОК этих чисел равно их произведению». Действительно, рассмотрим, например, числа 2, 3 и 4. Имеем

$$\text{НОД}(2;3;4)=1,\quad \text{НОК}(2;3;4)=12\neq 2\cdot 3\cdot 4.$$

Отметим, что аналогичное утверждение будет верным только в случае, если рассматривать **попарно** взаимно простые числа.

Приведём один возможных верных способов решения.

Предположим, что стороны a, b, c и d данного четырёхугольника различны. Без ограничения общности можно считать, что $a<b<c<d$. Обозначим $a+b+c+d=P$. Тогда $d<a+b+c<3d$. Так как $a+b+c$ делится на d, имеем $a+b+c=2d$, то есть $P=3d$. Заметим, что если сумма длин трёх сторон делится на длину четвёртой стороны, то и периметр P четырёхугольника делится на эту длину. Тогда $3=\frac{P}{d}<\frac{P}{c}<\frac{P}{b}<\frac{P}{a}$, то есть $\frac{P}{c}\geqslant 4$; $\frac{P}{b}\geqslant 5$; $\frac{P}{a}\geqslant 6$. Таким образом, $a\leqslant\frac{P}{6}$; $b\leqslant\frac{P}{5}$; $c\leqslant\frac{P}{4}$; $d=\frac{P}{3}$, поэтому

$$a+b+c+d\leqslant\frac{P}{6}+\frac{P}{5}+\frac{P}{4}+\frac{P}{3}=\frac{19P}{20}$$

— противоречие, так как $a+b+c+d=P$.

Следовательно, наше предположение неверно и у исходного четырёхугольника найдутся равные стороны.

13. В приведённом решении есть две ошибки: во-первых, при подсчёте линий, соединяющих степени двойки со степенями тройки дважды учтена линия, соединяющая $2^\circ=1$ и $3^\circ=1$, а каждый делитель исходного числа выписывался ровно один раз. Во-вторых (и это основная ошибка!), при подсчёте «лишних» линий «забыты» те, которые соединяют единицу с числами, делящимися и на 2, и на 3 (по условию задачи такие линии не были проведены, поэтому их также нужно учесть).

Подсчитаем действительное количество «лишних» линий в таком решении. Чисел, делящихся и на 2, и на 3 будет $8\cdot 10=80$ (двойка может входить в любой степени от 1 до 8, а тройка в любой степени от 1 до 10). Следовательно, «лишних» линий на самом деле $98+80=178$. Таким образом, Петя нарисовал $\frac{99\cdot 98}{2}-178=4673$ линии.

Возможен и другой ход рассуждений. Нарисуем круги Эйлера. В первый круг поместим все те из выписанных чисел, которые делятся на 2, а во второй — все числа, делящиеся на 3. Тогда всего в первом круге будет $8\cdot 11=88$ чисел, во втором круге — $9\cdot 10=90$ чисел, а в пересечении этих кругов — $8\cdot 10=80$ чисел. Любые два числа в первом круге соединены линией — итого в нём $\frac{88\cdot 87}{2}$ линий. И любые два числа во втором круге соединены линией — итого в нём $\frac{90\cdot 89}{2}$ линий. Линии, которые находятся в пересечении этих кругов, мы учли дважды. Таковых будет $\frac{80\cdot 79}{2}$. Поэтому всего Петя провёл $44\cdot 87+45\cdot 89-40\cdot 79=4673$ линии.

Текстовые задачи

14. Если подставить полученные значения x и y в условие задачи, то станет ясно, что в решении есть ошибка. Действительно, до перевозки на первом складе было 50 ящиков, а на втором — 100. После перевозки на первом стало 0, а на втором 150 ящиков. Но какой смысл говорить о среднем числе бракованных деталей в НУЛЕ ящиков?

Условие «в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия» относится ко всем вместе взятым ящикам с первого склада. При умножении 50 на 3 оно применяется к пятидесяти перевезённым ящикам. Но если бы в пятидесяти перевезённых ящиках среднее число бракованных изделий было таким же, как и на всём складе, то и в оставшихся ящиках оно бы тоже не изменилось. А по условию задачи оно уменьшилось. Поэтому в перевезённых пятидесяти ящиках было в среднем более чем по 3 бракованных изделия.

Приведём верное решение. Пусть вначале на первом складе было x ящиков, а на втором — y ящиков. Тогда на первом складе $3x$ бракованных изделий, а на втором — $6y$. После перевозки на первом складе бракованных изделий стало $2(x-50)$, а на втором $5(y+50)$. Так как суммарное количество бракованных изделий на двух складах не изменилось, получаем уравнение

$$3x+6y=2(x-50)+5(y+50).$$

Из этого уравнения следует, что $x+y=150$.

Таким образом, по данным задачи нельзя найти количество ящиков на каждом складе, а можно только найти общее количество ящиков на двух складах, которое **действительно равно 150**, то есть получен верный ответ при неверном решении.

15. Приведённое решение в корне неверно (**ответ** при этом указан **верный**). Из верного утверждения «У первого торговца мякоть составляет $\frac{2}{3}$ массы» вовсе не следует, что $\frac{2}{3}$ килограмма мякоти у него стоит 100 рублей. На самом деле первый торговец берёт 100 рублей не за $\frac{2}{3}$ килограмма мякоти слив, а за $\frac{2}{3}$ килограмма слив вместе с косточками. А 150 рублей он, как и сказано в условии, берёт за 1 кг слив, а не за 1 кг мякоти. Аналогично второй торговец берёт 50 рублей за полкило слив (а не только мякоти), а 100 рублей — за 1 кг слив.

Вот верное решение. Сравним цену мякоти слив. Первый торговец продаёт $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ килограмма мякоти за 150 рублей, то есть цена 1 кг мякоти у него составляет $150:\frac{2}{3}=225$ (рублей). А у второго торговца мякоть стоит 100 рублей за полкило, то есть 200 рублей за кг. Таким образом, килограмм мякоти у второго торговца дешевле, поэтому покупать сливы выгоднее у него.

Можно рассуждать и по-другому: *на* 300 *рублей у первого торговца будет куплено* 2 *кг слив, из которых мякть составит* $\frac{4}{3}$ *кг, а у второго будет куплено* 3 *кг слив, причём мякоть составит* 1,5 *кг. Таким образом, покупать сливы у второго выгоднее.*

16. В приведённом решении ошибок нет, но полученный ответ показывает, что, работая втроём, мальчики потратят на покраску забора больше времени, чем Игорь и Паша, работая вдвоём, значит, производительность Володи выражается отрицательным числом. Следовательно, **числа в условии задачи подобраны неправильно**.

К такому же выводу можно прийти, если полностью решить составленную систему уравнений: $i=\frac{5}{36}$; $p=\frac{1}{9}$; $v=-\frac{1}{36}$.

17. Постановку задачи можно признать корректной, только если допускать возможность неоднозначного ответа. Дать однозначный ответ на неё нельзя.

В приведённом решении это обстоятельство не учитывается. Поэтому работа с приближённым значением выполнена неаккуратно и в итоге получен неполный ответ. Кроме того, в решении не учтено, что количество детей в школе должно быть целым.

Верное решение требует вычислений с двусторонними оценками. Условие «Количество учащихся 6 «А» класса составляет $p=6{,}9\,\%$

(с точностью до десятых процента) от количества учеников школы» означает, что $6{,}85\,\% \leqslant p < 6{,}95\,\%$. Общее количество учеников в школе: $k = 24 : p \cdot 100\,\%$. Оценим его: $2400 : 6{,}95 < k \leqslant 2400 : 6{,}85$. Так как $2400 : 6,95 \approx 345{,}3$, а $2400 : 6{,}85 \approx 350{,}4$, в школе может быть от 346 до 350 учеников. Ученики 8 «А» класса составляют от $\frac{33}{350} \cdot 100\,\% \approx 9{,}4\,\%$ до $\frac{33}{346} \cdot 100\% \approx 9{,}5\%$.

Таким образом, **верный ответ**: 9,4 % или 9,5 %.

Приведённое условие не позволяет получить однозначный ответ даже с точностью до целых, поскольку тогда $\frac{33}{350} \cdot 100\,\% \approx 9\%$, *а* $\frac{33}{346} \cdot 100\,\% \approx 10\,\%$. *Вообще, в задаче на умножение с хотя бы одним приближённым множителем нельзя гарантированно указать ни одной верной цифры в произведении. Этот факт лишь на первый взгляд противоречит правилу приближённых вычислений: «В произведении следует оставлять столько же цифр, сколько в наименее точном множителе». Точность вычислений характеризуется не количеством верных цифр, а погрешностью. Например, если вместо результата* 1,99…97 *получен результат* 2,00…03, *верной цифры ни одной, а погрешность (как абсолютная, так и относительная) при достаточно большом количестве девяток и нулей сколь угодно мала.*

С этой точки зрения постановка задачи вполне разумна. Просто приходится смириться с тем, что последняя цифра отличается от верной на 1 *как при округлении до десятых долей процента, так и при округлении до целых процентов. Гораздо хуже было бы пытаться дать ответ с точностью до сотых процента, так как указание произведения с бо́льшим количеством значащих цифр, чем в наименее точном сомножителе, абсолютно бессмысленно. Но этой грубой ошибки нет ни в условии, ни в решении задачи.*

Алгебраические выражения

18. Сразу видно, что в пункте а) странный ответ: разность корней больше их суммы. Да и в пункте б) ответ сомнителен: $24 - t^2 \leqslant 24$ и $8 - t^2 \leqslant 8$, следовательно,

$$\sqrt{24 - t^2} + \sqrt{8 - t^2} \leqslant \sqrt{24} + \sqrt{8} < 5 + 3 = 8.$$

В чём же дело?

В обоих пунктах в решениях ошибок нет, но некорректны условия задач. Поясним это. а) Для того чтобы выражение $\sqrt{10-a^4}$ имело смысл, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $a^4 \leqslant 10$. Тогда $\sqrt{74-a^4} \geqslant \sqrt{64} = 8$. Следовательно, сумма данных корней не может быть равна 4.

б) Докажем, что значений t, для которых указанная разность корней равна 2, не существует. Действительно, пусть $t^2 = x \geqslant 0$, тогда рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{24-x} - \sqrt{8-x}, \quad \text{где } x \in [0; 8].$$

Найдём её производную:

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{24-x}} + \frac{1}{2\sqrt{8-x}} > 0$$

во всех внутренних точках указанного промежутка. Следовательно, её наименьшее значение достигается при $x = 0$. Но

$$f(0) = 2\big(\sqrt{6} - \sqrt{2}\big) > 2,$$

так как $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 1 \iff 6 > (1+\sqrt{2})^2 \iff 3 > 2\sqrt{2} \iff 9 > 8$.

19. Условие задачи корректно, а предложенное решение содержит логическую ошибку. Из того, что получено верное равенство, вообще говоря, не следует, что верно исходное равенство. «Классический» пример: из неверного равенства $-1 = 1$ возведением обеих частей в квадрат получим верное равенство.

Для того чтобы подобный вывод был верным, требуется, чтобы все преобразования сохраняли равносильность. В приведённом решении это не так: замена разности кубических корней на 1 неправомерна, так как именно равенство этих выражений и доказывается.

Приведём верное решение. Пусть

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = x,$$

тогда, возведя в куб, получим

$$\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\big(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\big) - \sqrt{5}+2 = x^3.$$

Упрощая и заменяя $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ на x, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} x^3+3x-4=0 \iff (x^3-1)+(3x-3)=0 \iff \\ \iff (x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)=0 \iff \\ \iff (x-1)(x^2+x+4)=0 \iff x=1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

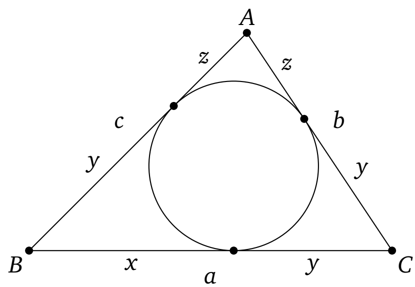
20. Понятно, что полученный ответ не может быть верным, так как при положительных значениях x, y и z выполняется неравенство $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}>0$! При этом рассуждения в приведённом решении ошибок не содержат. По-видимому, некорректно условие задачи. Это можно обосновать по-разному.

Первый способ. Преобразуем равенство из условия: при $x>0$, $y>0$ и $z>0$ имеем

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1 \iff$$
$$\iff x(z+x)(x+y)+y(y+z)(x+y)+z(y+z)(z+x)=$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равенство $x^3+y^3+z^3+3xyz=0$, которое не может быть верным при положительных значениях всех переменных.

Второй способ. Докажем, что при $x>0$, $y>0$ и $z>0$ выполняется неравенство $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\geqslant 1{,}5$.



Пусть $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$, тогда $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$. Выразим x, y и z: $x=\dfrac{a+c-b}{2}$, $y=\dfrac{a+b-c}{2}$, $z=\dfrac{b+c-a}{2}$. Таким образом,

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2a}+\frac{b+c-a}{2a}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)\geqslant\frac{3}{2},$$

так как сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум.

Доказанное неравенство — это задача №6.79 *из задачника М. Л. Галицкого, А. М. Гольдмана, Л. И. Звавича «Сборник задач по ал-*

гебре. 8—9 классы» (*М.*: *Просвещение*, 2018). *Кроме того, использованная замена переменных имеет ещё и геометрическую интерпретацию. Рассмотрим треугольник* ABC (*со сторонами* a, b *и* c) *и вписанную в него окружность, тогда* $x=p-b$, $y=p-c$, $z=p-a$ ($2p$ — *периметр* ABC) — *это расстояния от вершин треугольника до точек касания окружности с его сторонами* (*см. рисунок*).

21. Решение содержит грубую ошибку: из того, что $\log_2 2{,}5<2$ и $2\log_3 2<2$ не следует, что их разность меньше нуля. Приведём верное решение.

Докажем, что $\log_2 5-\log_3 4>1$. Это равносильно тому, что

$$\log_2 5-2>\log_3 4-1 \iff \log_2\frac{5}{4}>\log_3\frac{4}{3} \iff 3^{\log_2\frac{5}{4}}>\frac{4}{3}.$$

Воспользуемся тождеством $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (*для его доказательства достаточно прологарифмировать обе части по основанию* b) и очевидным неравенством $\log_2 3>\dfrac{3}{2}$. Тогда

$$3^{\log_2\frac{5}{4}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_2 3}>\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}>\frac{4}{3},$$

так как

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}>\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

22. Формальное объяснение: в школьной программе степень с положительным дробным показателем определена, если основание степени неотрицательно, а с отрицательным дробным показателем — если основание положительно. Разберёмся, почему принято именно так.

Согласно основному свойству дроби равенство

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\ldots$$

показывает различные формы записи одного и того же числа, поэтому результаты возведения в степень числа -8 не должны быть различными. Они получаются такими из-за того, что в записи $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ используется только арифметический корень. На первый взгляд кажется, что это противоречие можно преодолеть, если для чётных показателей корня вместо значений арифметического корня брать другой корень (противоположный арифметическому). Но если «уравнять в правах» арифметический корень и число, ему противоположное, то возникнет много других проблем. В частности, возникнет проблема с показательной функцией действительного аргумента, которую придётся определять для отрицательных оснований, что не всегда возможно.

Кроме того, в других случаях встретятся противоречия другого рода. Например,

$$(-1)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-1)^3} = \sqrt[4]{-1},$$

что явно не имеет смысла. С другой стороны,

$$(-1)^{\frac{3}{4}} = (-1)^{\frac{6}{8}} = \sqrt[8]{(-1)^6} = \sqrt[8]{1} = 1$$

(или -1 при другом подходе, но в любом случае такой корень имеет смысл).

Отметим, что все противоречия исчезают, если основание степени рассматривать как комплексное число, у которого, как известно, существует n корней n-й степени.

Уравнения и системы

23. Несмотря на различные ответы, полученные в решении 1 и решении 2, **оба решения можно считать верными**: ошибок они не содержат. Дело в том, что «авторы» этих решений по-разному трактовали условие задачи.

Автор первого решения трактовал его так: $\{p; q\}$ или $\{p\}$, если $p = q$, является множеством корней данного уравнения. При таком понимании корни уравнения должны удовлетворять теореме Виета, то есть система составлена и решена верно.

Автор второго решения трактует условие так: «p — корень данного уравнения и q также его корень». Поэтому на основании определения понятия «корень уравнения» верно составлена и решена система.

Отсюда понятно, почему ответы, полученные при втором решении, включают в себя ответы, полученные при первом решении, а уравнение $x^2 - 0{,}5x - 0{,}5 = 0$ имеет два корня, один из которых $p \equiv q$, а второй — совсем другое число.

Оба толкования условия имеют право на существование, то есть проблема состоит в том, что формулировка условия не совсем корректна: она допускает разные прочтения при переводе с естественного языка на формально-математический.

Отдельно отметим, что в обоих решениях не требуется проверять, что найденные уравнения удовлетворяют условию.

24. Оба решения ошибок не содержат, но ответы различные. Это получилось потому, что в первом способе решения ответ выражен через числа p и q, а во втором способе — только через p. Вместе с тем данные числа p и q связаны между собой. Действительно, если они являются корнями данного уравнения, то по теореме Виета $pq=2$. Поэтому если подставить, например, $q=\frac{2}{p}$ в выражение $n=0{,}5q$, полученное в первом способе решения, то несложно убедиться, что ответы совпадут.

25. Одна типичная ошибка «бросается в глаза» сразу: умножая обе части уравнения на общий знаменатель, мы получили уравнение-следствие, поэтому требуется ещё проверить, что решением уравнения $(*)$ является не $x=-0{,}5$, который окажется посторонним корнем. Для этого надо было подставить $x=-0{,}5$ в уравнение $(*)$ и убедиться, что равенство не будет верным. Но эта ошибка на ответ не повлияла.

Тем не менее приведённый ответ неверен, а в решении есть ещё одна существенная ошибка, которая также встречается часто. Не рассмотрен случай, когда уравнение $(*)$ не является квадратным, то есть когда $6p+4q+9=0$! Для этого случая мы и можем построить пример, показывающий, что **ситуация, описанная в условии, возможна**.

Действительно, пусть исходное уравнение имеет вид $4x^2-12x+9=0$, тогда у него есть единственный корень: $x=\frac{3}{2}$. Корнями уравнения, полученного при указанной замене, должны являться корни уравнения $\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{3}{2}$, но это уравнение корней не имеет.

26. Конечно, **если уравнение действительно является квадратным, то оно не может иметь более двух корней**. Это можно обосновать различными способами, например, сослаться на то, что парабола не может пересечь ось абсцисс более чем в двух точках. Значит, приведённый ответ заведомо неверный. Но указанные три числа действительно являются корнями рассмотренного уравнения, в чём можно убедиться непосредственной подстановкой. Значит, что-то не так в примере.

На самом деле если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые в левой части равенства, то выражения с переменной взаимно уничтожатся и значение левой части будет равно 1. Таким образом, указанное уравнение является тождеством. Если же его рассматривать как уравнение, то его корнями являются все действительные числа.

Отметим, что ситуация не изменится, если в примере, приведённом в условии задачи, вместо чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ *и* $\sqrt{5}$ *подставить любые три попарно различных действительных числа.*

27. Полученный **ответ верен**, а решение содержит ошибки.

1. Последовательность $(1; x; x^2; \ldots; x^n)$ является геометрической прогрессией только в случае, когда $x \neq 0$.

2. Использованная формула суммы n первых членов геометрической прогрессии справедлива только при $x \neq 1$.

Поэтому необходимо было отдельно выяснить, являются ли числа 0 и 1 корнями исходного уравнения, и отдельно рассмотреть случай, когда $x \neq 0$ и $x \neq 1$. Отбрасывание «постороннего корня», описанное в решении, подчёркивает допущенную ошибку.

Таким образом, исправленное решение может быть таким.

1. Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим, что 0 — его корень.

2. Подставив в исходное уравнение $x = 1$, получим, что 1 его корнем не является.

3. Для $x \neq 0$ и $x \neq 1$ используем суммирование геометрической прогрессии и получим, что в этом случае корней нет.

Приведём также другой способ решения предложенного уравнения. Пусть $1 + x + \ldots + x^{10} = S$, тогда исходное уравнение примет вид $(S - x^{10})(S + x^{11}) = S^2 \Leftrightarrow x^{10}(Sx - S - x^{11}) = 0$. Учитывая, что $S(x-1) = x^{11} - 1$, получим $-x^{10} = 0$, то есть $x = 0$.

28. Оба решения неверные. Замена одного из уравнений системы на произведение уравнений нарушает равносильность, так как может произойти умножение обеих частей уравнения на 0. Таким образом, в каждом решении полученная система уравнений является следствием данной. Замена уравнения или системы уравнений на следствие может привести к появлению посторонних решений, поэтому в таких случаях необходимо сделать проверку.

В нашем случае проверка показывает, что пара $(-1; -1)$ не является решением второго уравнения системы, а пара $(-1; 1)$ не является решением первого уравнения. Таким образом, **верный ответ**: $(1; 0)$.

29. Конечно, в приведённом решении потерян ещё один корень уравнения: $x = -2$. Это произошло при замене выражений

$\sqrt{(x-1)(x+1)}$ и $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ на выражения $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ и $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ соответственно. Тем самым были использованы равенства $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, которые одновременно выполняются только при $a \geqslant 0$ и $b > 0$.

На самом деле $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$ и $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, поэтому приведённый способ решения, в котором фактически разобран только случай, когда $x > 1$, требуется дополнить разбором случая $x \leqslant -1$ (или $x < -1$ с учётом ранее найденного корня). В этом случае получим

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} = \dfrac{x+5}{\sqrt{1-x}}, \\ x < -1 \end{cases} \iff x = -2.$$

Ответ: -2; -1.

30. Одна из ошибок очевидна: для того чтобы уравнение вида $x^2 = b$ имело решения, должно выполняться условие $b \geqslant 0$. Поэтому полученный ответ верен не для всех значений a. Следовательно,

$$1 - \left(\frac{a^3-2}{3a}\right)^3 \geqslant 0 \iff \frac{a^3-2}{3a} \leqslant 1 \iff \frac{a^3-3a-2}{a} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{(a+1)^2(a-2)}{a} \leqslant 0 \iff 0 < a \leqslant 2 \quad \text{или} \quad a = -1.$$

Но есть ещё одна ошибка: замена $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$ на a после возведения в куб приводит не к равносильному уравнению, а к уравнению — следствию. Поэтому даже при найденных значениях a могут появиться посторонние корни. Выясним, не не случалось ли этого, вернувшись к уравнению, полученному после этой замены. Введя обозначения $\sqrt[3]{1-x} = u$, $\sqrt[3]{1+x} = v$, получим $u^3 + v^3 + 3uva = a^3$. Это уравнение можно записать в другом виде:

$$(u+v)^3 - a^3 - 3uv(u+v-a) = 0 \iff$$
$$\iff (u+v-a)(u^2+v^2+a^2+ua+va-uv) = 0 \iff$$
$$\iff u+v-a = 0 \quad \text{или} \quad u^2+v^2+a^2+ua+va-uv = 0.$$

Первое равенство — это исходное уравнение. Значит, посторонние решения могут возникнуть в связи со вторым равенством. Выясним, когда оно выполняется. Умножив обе его части на 2 и перегруппировав, получим $(u+a)^2 + (v+a)^2 + (u-v)^2 = 0 \iff u = v = -a$.

Следовательно, $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=-a$, то есть $x=0$, $a=-1$. Но при подстановке этих значений в исходное уравнение получится неверное равенство.

Таким образом, **верный ответ**: если $0<a\leqslant 2$, то

$$x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{a^3-2}{3a}\right)^3};$$

при остальных значениях a корней нет.

31. Приведённое решение не является полным, а полученный ответ неверный. Данное уравнение не равносильно записанной системе: пропущен случай, когда обе части равны нулю, то есть когда $x^2-4=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$. В этом случае достаточно, чтобы выражения в основаниях обоих логарифмов были положительны и отличны от 1. Этим условиям удовлетворяет $x=\sqrt{5}$.

Таким образом, **ответ**: 3; $\sqrt{5}$.

32. Получен верный ответ, но оба решения неверны. В первом способе допущена грубая ошибка: в общем случае $6^{y^2}\neq(6^y)^2$. Рассуждения, приведённые во втором способе, предполагают, что обе части уравнения принимают только натуральные значения, а это ниоткуда не следует.

Приведём верное решение. Сделав такую же замену переменной, прологарифмируем обе части уравнения, например, по основанию 3. Получим

$$2+y\cdot\log_3 12=y^2\cdot\log_3 6 \iff (1+\log_3 2)y^2-(1+2\log_3 2)y-2=0.$$

Найдём дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D=(1+2\log_3 2)^2+8(1+\log_3 2)=$$
$$=4\log_3^2 2+12\log_3 2+9=(2\log_3 2+3)^2.$$

Тогда $y=\dfrac{1+2\log_3 2\pm(2\log_3 2+3)}{2(1+2\log_3 2)}$, то есть $y_1=-\dfrac{1}{1+2\log_3 2}<0$; $y_2=2$.

Таким образом, $x=4$.

Почему же при неверных решениях получен верный ответ? *На самом деле* $(6^y)^2=6^{2y}$, *но* $2^2=2\cdot 2$, *поэтому в данном случае замена* 6^{y^2} *на* $(6^y)^2$ *не повлияла на ответ в первом способе решения. Ответ, полученный во втором способе решения, оказался верным, так как при* $y=2$ *выражения в обеих частях уравнения действительно принимают натуральные значения.*

33. а) В решении допущены две ошибки из-за неверного применения определения степени: 1) во втором случае надо оговорить, что основание отлично от нуля, то есть условие должно выглядеть так:

$$\begin{cases} x^2-16=0, \\ x^2+x-1\neq 0, \end{cases}$$

но эта ошибка не повлияла на ответ; 2) упущен ещё один случай:

$$\begin{cases} x^2+x-1=-1, \\ x^2-16=2n, \quad n\in\mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow\ x=0.$$

Таким образом, **верный ответ**: 0; 1; -2; ±4.

б) Это решение является нагромождением ошибок. Во-первых, логарифмировать можно только выражения, принимающие положительные значения, а в данном случае это не так. Во-вторых, функция, стоящая в левой части, не является показательной. Она имеет вид $y=f(x)^{g(x)}$ и, как следует из определения степени, определена не только в случае, когда $f(x)>0$, а ещё и в случаях, когда $f(x)=0$, а $g(x)\neq 0$ и когда $f(x)<0$, а $g(x)$ — целое число. В результате потеряны все корни уравнения.

Отметим, что и ошибки пункта а) *связаны как раз с тем, что не учтены два последних случая.*

На самом деле, легко проверить, что $x=0$ и $x=-1$ являются корнями данного уравнения. Кроме того, очевидно, что корнем уравнения будет и $x=1$. Рассматривая отрицательные значения показателя степени в левой части, убеждаемся, что других корней нет.

Ответ: 0; ±1.

34. Предложенное решение основывается на трёх утверждениях:

1. Уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=f^{-1}(x)$.

2. Если графики двух взаимно обратных функций пересекаются, то точки их пересечения лежат на прямой $y=x$.

3. Из уравнения $f(f(x))=x$ следует уравнение $f(x)=x$.

Каждое из этих утверждений ложно, причём утверждение 3 автоматически следует из неверных утверждений 1 и 2. Обоснуем это.

1. Утверждение выполняется только для обратимых функций. В данном случае функция $f(x)=x^2+2x-5$ обратимой не является (существуют различные значения аргумента, которым соответствуют одинаковые значения функции).

2. Точки пересечения графиков взаимно обратных функций могут не лежать на прямой $y=x$, а быть симметричными относительно этой прямой. Например, рассмотрим взаимно обратные функции $f(x)=-x^3$ и $g(x)=-\sqrt[3]{x}$, графики которых имеют три точки пересечения: $(0;0)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$.

Другой контрпример: функции вида $y=-x+b$, которые совпадают с обратными к ним. Существует также «хрестоматийный» пример взаимно обратных функций $f(x)=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $g(x)=\log_{\frac{1}{16}} x$, графики которых пересекаются в трёх точках, одна из которых лежит на прямой $y=x$, а две другие: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Отметим также, что несложно доказать следующее утверждение: если графики взаимно обратных **возрастающих** функций пересекаются, то их точки пересечения лежат на прямой $y=x$.

3. Как будет показано ниже, данное уравнение имеет корни, отличные от корней уравнения $x^2+2x-5=x$.

Отметим, что обратное утверждение является верным:

$$f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=f(x) \Rightarrow f(f(x))=x.$$

Поэтому корни уравнения, полученные в решении, действительно являются корнями исходного уравнения, но не составляют всё множество корней, то есть приведённый ответ неверен.

Приведём два основных способа решения данного уравнения.

Первый способ. Если x_0 является корнем уравнения $f(x)=x$, то x_0 является и корнем уравнения $f(f(x))=x$, поэтому $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ — корни данного уравнения. Для того чтобы найти остальные корни, приведём исходное уравнение к виду $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$ (раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые). Многочлен, полученный в левой части уравнения, разделим на трёхчлен x^2+x-5 в «столбик». Получим трёхчлен x^2+3x-2, корнями которого являются числа $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Второй способ. Пусть $x^2+2x-5=y$, тогда $y^2+2y-5=x$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+2x-5=y, \\ y^2+2y-5=x. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и преобразуем:

$$x^2 - y^2 + 3x - 3y = 0 \iff (x-y)(x+y+3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = y, \\ y = -x-3. \end{array}\right.$$

Подставив полученные выражения в любое из уравнений системы, получим совокупность двух квадратных уравнений. Решив квадратные уравнения, получим ответ, записанный выше.

Неравенства и экстремальные значения

35. Полученный ответ неверен, так как значение 6 не достигается (не случайно в решении отсутствует эта часть). Действительно, первое из записанных неравенств обращается в равенство при $x=3$, а второе — при $x=12$, что одновременно невозможно.

На самом деле

$$\frac{(x+3)(x+12)}{4x} = \frac{x^2+15x+36}{4x} = \frac{1}{4}\left(x+15+\frac{36}{x}\right) = \\ = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{6}+\frac{6}{x}\right)+\frac{15}{4} \geqslant 6{,}75,$$

так как $\frac{x}{6}+\frac{6}{x} \geqslant 2$. Равенство достигается при $x=6$, значит, искомое **наименьшее значение равно 6,75**.

36. Полученный ответ не может быть верным. Например, если $a=b=2$, то $a+b=4 \geqslant 0{,}5$, а $(1-a)(1-b)=1>\frac{9}{16}$.

Грубой ошибкой является применение неравенства между средними, которое выполняется только для неотрицательных чисел. В данном случае выражение $\sqrt{(1-a)(1-b)}$ может не иметь смысла, например, при $a=0$, $b=10$, а условие $a+b \geqslant 0{,}5$ для этих значений a и b выполняется.

Кроме того, даже если бы приведённая оценка была верной, в «решении» не указано, достигается ли она.

Отметим, что условие задачи некорректно: **наибольшего значения** указанного выражения **не существует**, так как с ростом положительных значений обеих переменных значение указанного выражения неограниченно увеличивается. Действительно,

$$(1-a)(1-b) = 1-(a+b)+ab,$$

а при достаточно больших значениях a и b по мере их увеличения сумма растёт гораздо медленнее произведения.

Объяснить некорректность условия можно и по-другому, использовав неравенство $xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, которое справедливо для любых значений x и y. Тогда $(1-a)(1-b) \leqslant \left(1-\frac{a+b}{2}\right)^2$, откуда следует, что при увеличении значения $a+b$ значение $(1-a)(1-b)$ может неограниченно возрастать.

37. Утверждение, сформулированное в условии задачи, **верно**, однако её решение содержит существенный пробел: не доказано, что наименьшее значение суммы площадей указанных квадратов на самом деле существует.

Отметим, что на подобной ошибке — отсутствии доказательства существования искомого объекта — основано большое число различных софизмов.

Приведём самый короткий и «прозрачный» из них.

«*Число* 1 *является наибольшим натуральным числом*».

«*Доказательство*». *Пусть* n — *наибольшее натуральное число. Тогда* $n^2 \leqslant n$, *откуда* $n \leqslant 1$. *Но любое натуральное число не меньше* 1, *поэтому* $n = 1$. *Таким образом,* 1 — *наибольшее натуральное число.*

В приведённом «доказательстве» ошибочна, очевидно, самая первая фраза, поскольку наибольшего натурального числа не существует.

Приведём два возможных способа исправить решение исходной задачи.

Первый способ. Пусть a — сторона данного квадрата, a_1, a_2, …, a_n — стороны новых квадратов. Тогда задача сводится к доказательству неравенства $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{S}{n}$.

Учитывая, что $a_1+a_2+\ldots+a_n = a$, и используя неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном, получим

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{a}{n} \Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{a^2}{n} = \frac{S}{n},$$

что и требуется доказать.

Второй способ. Из условия следует, что диагональ данного квадрата равна $\sqrt{2S}$. Пусть не все построенные квадраты равны между собой. Тогда обязательно найдётся квадрат с диагональю $d < \frac{\sqrt{2S}}{n}$ и квадрат с диагональю $d > \frac{\sqrt{2S}}{n}$. Заменим эти два квадрата на два новых квадрата с диагоналями $c+x = \frac{\sqrt{2S}}{n}$ и $d-x$, то есть так, чтобы сумма длин диагоналей не изменилась. При такой операции количество квадратов с диагональю $\frac{\sqrt{2S}}{n}$ увеличится, а сумма площадей построенных квадратов уменьшится.

Действительно, в этом случае разность суммарных площадей квадратов равна

$$\left(\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}\right)-\left(\frac{(c+x)^2}{2}+\frac{(d-x)^2}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(-2cx-2x^2+2dx)=x(d-c-x)>0,$$

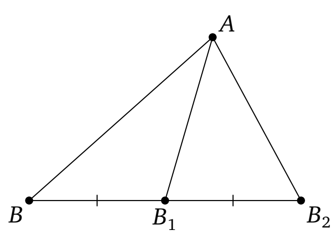
так как $c+x<d$.

Повторив указанную операцию несколько раз, мы получим конфигурацию из n равных квадратов, суммарная площадь которых равна $\frac{S}{n}$, что меньше, чем суммарная площадь исходных квадратов. Следовательно, сумма площадей исходных квадратов не меньше чем $\frac{S}{n}$, что и требовалось доказать.

Этот способ решения использует метод доказательства неравенств, который называется «методом Штурма».

38. Условие задачи некорректно: данные, указанные в условии задачи, несовместны. Иначе приведённые рассуждения были бы почти верными. Не учтено только, что при различных случаях расположения кораблей углом между лучами, на которых они находятся, может быть как $\angle AOB$, так и дополняющий его до 180°.

Показать некорректность условия можно, если подробно разобрать все возможные случаи, но это удобнее сделать, используя геометрическую интерпретацию.



Первый способ. Пусть точки A, A_1 и A_2 соответствуют последовательным положениям первого корабля, а B, B_1 и B_2 — второго корабля. Так как корабли движутся равномерно, имеем $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{B_1B_2}$. Тогда

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{B_2B_1}.$$

Складывая эти равенства, получим $2\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_2B_2}$. Следовательно,

$$2|\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_2B_2}| \leqslant |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{A_2B_2}|.$$

Подставив данные из условия задачи, получим противоречие: $2\cdot 5 \leqslant \leqslant 6+2$.

Второй способ. Перейдём в систему отсчёта, связанную с первым кораблём. Тогда второй корабль движется относительно него равномерно и прямолинейно (см. рисунок).

Из условия задачи следует, что $AB=6$, $AB_1=5$, $AB_2=2$. Это невозможно, так как должно выполняться неравенство

$$AB+AB_2 \geqslant 2AB_1.$$

39. Указан **верный ответ**, но в решении допущены следующие ошибки, неточности и пробелы.

1. Не указан промежуток, на котором рассматривается функция $f(a)$. Если его не ограничить, по крайней мере слева, то появляется ещё одна точка, в которой $f'(a)=0$, а именно $a=-R\sqrt{2}$.

2. Не указано, что функция $f(a)$ всюду дифференцируема. Если это не так, то могут появиться ещё критические точки.

3. Из того, что найдена точка максимума функции $f(a)$, не следует, что именно в этой точке $f(a)$ принимает наибольшее значение. Для этого необходимо, чтобы функция была определена на интервале, непрерывна на нём (что также не указано) и чтобы эта точка максимума была единственной критической точкой на этом интервале.

4. Не обосновано, почему функция $S(a)$ принимает наибольшее значение в той же точке, что и функция $f(a)$.

Устранить ошибки, указанные в пунктах 1—3, можно двумя способами, которые используют разные алгоритмы поиска экстремальных значений функции.

Первый способ. Можно исходя из смысла задачи рассматривать $a\in(0; 2R)$. Тогда $f'(a)$ всюду определена и $a=R\sqrt{2}$ действительно является единственной критической точкой на этом промежутке, причём точкой максимума. Далее следует указать, что функция $f(a)$ непрерывна на $(0; 2R)$, так как $f(a)$ — многочлен, поэтому в этой точке $f(a)$ принимает своё наибольшее значение.

Второй способ. Можно рассматривать функцию $f(a)$ на $[0; 2R]$ (то есть включая случаи, когда прямоугольник «вырождается» в отрезок) и, не находя промежутки монотонности, сравнить значения

$f(0)$, $f(R\sqrt{2})$ и $f(2R)$. Далее следует сослаться на то, что функция, непрерывная на отрезке, принимает экстремальные значение в критических точках или на концах отрезка.

Для устранения пробела, указанного в пункте 4, можно, например, указать, что функция $S(a)=\sqrt{4R^2a^2-a^4}$ является композицией функций $t=f(a)$ и $S=\sqrt{t}$, причём функция $S=\sqrt{t}$ непрерывная и возрастающая. Следовательно, наибольшее значение функции $S(a)$ достигается в той же точке $a=R\sqrt{2}$.

Отметим также, что оба указанных алгоритма поиска экстремального значения можно было использовать, рассматривая сразу производную функции $S(a)$, что технически несколько сложнее, но избавляет от рассуждений о композиции функций.

Приведём ещё четыре возможных способа решения этой задачи (два «алгебраических» и два «геометрических»).

1. Значение a, при котором функция $f(a)$, рассмотренная выше, принимает наибольшее значение, можно найти иначе. Действительно,

$$4R^2a^2-a^4 = -(a^4-2a^2\cdot 2R^2+4R^4)+4R^4 = -(a^2-2R^2)^2+4R^4 \leqslant 4R^4,$$

причём равенство достигается при $a=R\sqrt{2}$.

2. Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\sqrt{a^2b^2}=ab$ (так как $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$). Из условия задачи следует, что левая часть неравенства фиксирована (равна $2R^2$). Следовательно, наибольшее значение правой части достигается, если $a=b=R\sqrt{2}$.

3. Пусть угол между диагоналями прямоугольника равен φ, тогда его площадь $S=2R^2\sin\varphi$. Полученное выражение принимает наибольшее значение, если $\sin\varphi=1$, то есть $\varphi=90°$. Таким образом, искомый прямоугольник является квадратом со стороной $R\sqrt{2}$.

4. Пусть диагональ прямоугольника образует со стороной а угол α. Тогда $a=2R\cos\alpha$, $b=2R\sin\alpha$, значит,

$$S = 4R^2\sin\alpha\cos\alpha = 2R^2\sin 2\alpha.$$

Полученное выражение принимает наибольшее значение, если $\sin 2\alpha=1$, то есть $\alpha=45°$. Таким образом, искомый прямоугольник является квадратом со стороной $R\sqrt{2}$.

40. Полученный ответ, очевидно, неверный. Главная ошибка — в заключительной фазе решения: сделан неверный вывод об изменении знака производной, так как функция $t=\cos\alpha$ на промежутке

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ убывает. Получив, что производная обращается в ноль при $t=0{,}5$, можно было найти соответствующее значение $\alpha=\frac{\pi}{3}$ и убедиться в том, что на самом деле «при переходе» через это значение аргумента производная меняет знак с плюса на минус, то есть $\alpha=\frac{\pi}{3}$ является точкой максимума функции.

При этом приведённые рассуждения всё равно не позволяют сделать вывод о том, что именно при таком значении α функция принимает наибольшее значение. Это связано с другими погрешностями решения, а именно:

1) не указан промежуток, на котором рассматривается функция (формально говоря, не указано даже, что α является её аргументом), поэтому, в частности, неясно, из-за чего не рассмотрено значение $t=-1$;

2) не обоснована и даже не упомянута непрерывность функции, без чего ни один из двух стандартных алгоритмов поиска её экстремальных значений (в том числе и тот, который подразумевался в решении) не работает.

Устранив эти недочёты, можно обоснованно получить, что **искомый треугольник — равносторонний**.

Тригонометрия

41. Ученица, по-видимому, имела в виду тождество

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ),$$

но применила его «своеобразно»: $180-\cos 60^\circ = 180-0{,}5 = 179{,}5$.

42. Верный ответ получен только **в решениях 3 и 4**, причём и эти решения не свободны от недостатков.

В решении 4 неграмотно записан ответ: знак «и» здесь неуместен, так как обозначает пересечение множеств, а должно быть объединение.

Отметим, что подобным недочётом страдают некоторые учебники и задачники, которые не различают употребление союза «И» русского языка и знака «И» в математических высказываниях. С нашей точки зрения, это надо различать и обращать внимание на правильное использование знаков «И» и «ИЛИ» в математике.

В решении 3, прежде чем использовать формулы, выражающие синус и косинус через тангенс половинного аргумента, необходимо проверить, что значения α, при которых $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ не определён, не являются решениями исходного уравнения. Для $\alpha=\pi+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, это действительно выполняется, поэтому указанная ошибка не повлияла на ответ.

В решении 1 получены посторонние корни, так как при возведении в квадрат вместо равносильного уравнения получается уравнение — следствие.

В решении 5 тоже получены посторонние корни, так как выполненная замена также приводит к уравнению-следствию.

В решении 2 потеряна часть корней при решении однородного уравнения: значения переменной, для которых $\sin\frac{\alpha}{2}$ равен нулю, также являются корнями исходного уравнения.

43. Ошибка допущена при переходе от равенства $\operatorname{arctg}x=a$ к равенству $x=\operatorname{tg}a$. Такой переход будет корректным только в случае, когда число a принадлежит множеству значений функции $\operatorname{arctg}x$, то есть $a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. В нашем случае это не так:

$$\operatorname{arctg}2+\operatorname{arcctg}(-2)=\operatorname{arctg}2+\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(-2)\right)=\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}2>\frac{\pi}{2}.$$

Значит, исходное уравнение **не имеет решений**.

44. Само по себе приведённое рассуждение не содержит ошибок. Действительно, если значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a совпадают и на интервале $(a;b)$ выполняется неравенство $f'(x)<g'(x)$, то $f(x)\leqslant g(x)$ на промежутке $[a;b)$. Для обоснования этого факта достаточно рассмотреть вспомогательную функцию $h(x)=g(x)-f(x)$ и применить к ней достаточное условие возрастания функции на интервале $(a;b)$.

Тем не менее приведённое рассуждение не может считаться доказательством неравенства

$$\sin x\leqslant x\leqslant\operatorname{tg}x, \qquad (*)$$

так как в этом случае возникает логический «порочный круг». При доказательстве неравенства $(*)$ используется тот факт, что $(\sin x)'=$ $=\cos x$, однако при традиционном способе вывода формулы производной синуса используется первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

при доказательстве которого, в свою очередь, применяется неравенство $(*)$.

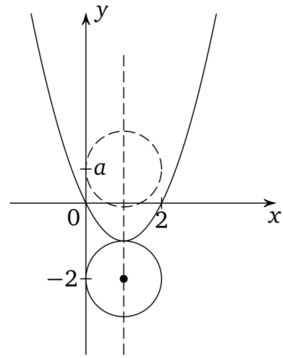
Задачи с параметром

45. Из того, что одно из уравнений системы имеет единственное решение, не следует, что система также имеет единственное решение.

Действительно, в нашем случае при $a=0{,}25$ решением рассмотренного уравнения является $y=-0{,}25$. Тогда первое уравнение системы примет вид

$$x^2-2x+0{,}25=0.$$

Так как для него $\frac{D}{4}=1-0{,}25>0$, оно имеет два различных корня. Значит, при $a=0{,}25$ система имеет два решения.



Приведём одно из возможных верных решений.

Запишем равносильную систему, преобразовав второе уравнение:

$$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ (x-1)^2+(y-a)^2=1. \end{cases}$$

Тогда графиком первого уравнения в декартовой системе координат xOy является парабола, а графиком второго уравнения — окружность (для каждого значения a). Заметим, что прямая $x=1$ является осью симметрии параболы и окружности (см. рисунок), поэтому точки их пересечения (если они есть) симметричны относительно этой прямой. Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики пересекаются только на оси симметрии. Этот случай соответствует их касанию в вершине параболы, причём окружность расположена ниже параболы. Отсюда следует **ответ**: при $a=-2$.

46. В приведённом решении не учтено, что рассматриваемое квадратное уравнение может иметь и два корня y_1 и y_2, но условие может выполняться, если одно из двух уравнений $x^2=y_1-|a|$ и $x^2=y_2-|a|$ не имеет корней, а другое имеет один корень.

Учитывая это, можно довести предложенное решение до верного. Действительно, пусть $D>0$, тогда $y_1=\frac{-1-\sqrt{D}}{2}$; $y_2=\frac{-1+\sqrt{D}}{2}$. Заметим, что $y_1-|a|<0$, значит, уравнение $x^2=y_1-|a|$ корней не имеет. Уравнение $x^2=y_2-|a|$ имеет единственный корень, если

$x=0$. В этом случае

$$\frac{-1+\sqrt{D}}{2}=|a| \iff \sqrt{4|a|+5}=2|a|+1 \iff |a|=1.$$

Ответ: при $a=\pm 1$.

Возможен и другой способ решения. Заметим, что если $(x_0;\ y_0)$ является решением системы, то решением является и $(-x_0;\ y_0)$. Значит, необходимое условие единственности решения системы: $x_0=0$. Тогда из уравнения $x^2=1-y^2$ следует, что $y=\pm 1$, а из уравнения $1-y^2=y-|a|$ — что $y=1$, $|a|=1$.

Проверим достаточность полученного условия, так как при $|a|=1$ у системы могут оказаться и другие решения, кроме $(0;\ 1)$. Подставив $|a|=1$ в уравнение $1-y^2=y-|a|$, получим квадратное уравнение $y^2+y-2=0$. Его корни: $y_1=1$; $y_2=-2$. Тогда $x^2=0$ или $x^2=-3$, то есть $x=0$. Значит, других решений нет.

47. Условие задачи корректно, а ответ и решение неверные. Из текста решения никак не вытекает, что число -2 является именно бóльшим корнем полученного квадратного уравнения. Более того, при $a=8$ это уравнение имеет корни -2 и 4, то есть $x=-2$ является его меньшим корнем! Значит, полученный ответ неверен.

На самом деле либо неравенство $-x^2+2x+a\geqslant 0$ не имеет решений, либо его решением является отрезок, симметричный относительно числа 1 (в частности, он может быть «вырожденным», то есть являться точкой). Действительно,

$$-x^2+2x+a\geqslant 0 \iff x^2-2x-a\leqslant 0 \iff (x-1)^2\leqslant a+1.$$

Следовательно, при $a<-1$ решений нет, а если $a\geqslant -1$, то $x\in$ $\in\left[1-\sqrt{a+1};\ 1+\sqrt{a+1}\right]$. Так как $1+\sqrt{a+1}\geqslant 1$, пересечением этого отрезка с лучом $[-2;\ +\infty)$ является ровно одна точка только в том случае, когда этот отрезок «вырожденный», то есть **при $\boldsymbol{a=-1}$** (*тогда данная функция определена только при $x=1$*).

48. Условие задачи корректно, а ответ и решение неверные. При этом общая идея решения (рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно x) вполне разумна, поэтому это решение можно «доработать».

В решении верно рассмотрен (и отвергнут) случай $a=0$. При $a\neq 0$ уравнение действительно становится квадратным относительно переменной x. Но анализ количества решений в зависимости от значения его дискриминанта проведён неверно. Утверждение

«Условие задачи может быть выполнено только в том случае, когда дискриминант этого уравнения равен нулю» является некорректным. Кроме того, если $a \neq 2$ и $y \neq -1$, то $D \neq 0$, поэтому могут найтись и другие пары решений помимо $(3; -1)$.

Для того чтобы решение стало верным, не будем сразу приравнивать дискриминант к нулю, а просто вычислим его:

$$D = 4a(a-2)(y+1)^2.$$

Ясно, что решения будут только при $D \geqslant 0$. Это достигается, если $y = -1$, или $a = 2$, или $\begin{cases} a < 0 \quad \text{или} \quad a > 2, \\ y \neq -1. \end{cases}$

Так как пара $(3; -1)$ будет являться решением уравнения при любом значении a, необходимо выяснить, при каких a не будет других пар, являющихся решением. В решении верно отмечено, что $y = -1$ порождает только пару $(3; -1)$, верно рассмотрен и отвергнут случай $a = 2$, но и в случае, когда $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, появятся другие решения. Например, при $y = 0$ можно получить решение $\left(1 + \sqrt{\frac{a-2}{a}}; 0\right)$.

Таким образом, **верный ответ**: уравнение имеет одно решение, если $0 < a < 2$.

Можно предложить и другой способ решения. Угадав пару $(3; -1)$, положим $x = u + 3$, $y = v - 1$. Так как каждой паре $(x; y)$ соответствует ровно одна пара $(u; v)$, требуется найти такие a, при которых уравнение, полученное после замены переменных, имеет ровно одно решение. После подстановки $x = u + 3$, $y = v - 1$ все члены уравнения со степенями, меньшими двух, «волшебным образом» взаимно уничтожаются, после чего уравнение принимает вид

$$au^2 + 4auv + (3a+2)v^2 = 0.$$

Решению $(3; -1)$ исходного уравнения соответствует $u = v = 0$, поэтому выясним, когда у этого уравнения найдутся ненулевые решения.

Если $v = 0$, то $au^2 = 0$, то есть при $a = 0$ любая пара $(u; 0)$ является решением. При $v \neq 0$ полученное уравнение можно разделить на v^2. Получим уравнение $at^2 + 4at + 3a + 2 = 0$, где $t = \frac{u}{v}$, $a \neq 0$. Это уравнение имеет корни, если $D = 4a(a-2) \geqslant 0$, и среди этих корней обязательно будут ненулевые. Это соображение приводит к ответу, приведённому выше.

49. Общий недостаток всех решений — некорректно выполненное преобразование, при котором расширена область определения заданной функции: полученная функция $y=(x+2)^2$ определена для любых значений x, а исходная функция — при $x \neq 2$.

Наиболее далеко от истины решение 2. Оно основано на том, что касательная к графику, как правило, имеет с ним одну общую точку, но без всяких на то оснований использовано, что это касательная с абсциссой точки касания $x_0=0$.

Ход решений 1 и 4 и полученные в них ответы были бы верными, если бы речь шла о функции $y=(x+2)^2$. Но в данной ситуации нужно проверить, действительно ли найденные прямые имеют ровно одну общую точку с графиком исходной функции. Точка с абсциссой $x=2$ на этом графике выколота, а одна из найденных «касательных» (соответствующая $k=8$) проходит как раз через эту точку! Таким образом, прямая $y=8x$ решением не является. Кроме того, в этих решениях не рассмотрен случай, когда прямая пересекает параболу в двух точках, но одна из них выколота. То, что из-за этого не потеряно какого-то решения, — счастливая случайность.

Таким образом, кроме проверки, указанной выше, в решении 1 достаточно было подставить $x=2$ в рассмотренное уравнение и убедиться, что других значений k, кроме $k=8$, не найдётся. В решении 4 можно, например, в явном виде рассмотреть прямую, проходящую через начало координат и точку $(2; 4)$, и получить, что эта прямая имеет уравнение $y=8x$.

Заметим, что в решении 4 абсциссы точек касания явно вычисляются в ходе решения, а в решении 1 их ещё требуется найти, завершив решение квадратного уравнения.

Если подходить формально, то к недочётам записей можно также отнести логически неверное использование союза «И» в записях $k=0$ *и* $k=8$ (*решение* 1); $y=0$ *и* $y=8x$ (*решение* 4). *Союз «И» в таких записях означает, что оба условия выполняются одновременно, а это не соответствует действительности. Уместнее было бы использовать союз «ИЛИ» либо найти другую форму записи* (*например, через точку с запятой*).

Решение 3 выглядит совершенно неубедительным, однако именно в нём получен **верный ответ**! Предположение, что касательная к графику $y=(x+2)^2$, проходящая через начало координат, — это только прямая $y=0$, ни на чём не основано, и вообще говоря, не соответствует действительности. Но утверждение, что из всех прямых вида $y = kx$ только эта прямая имеет единственную общую точку с графиком исходной функции, по счастливой случайности оказывается верным. Кроме того, вряд ли допустимо в качестве обоснования писать «из графика видно...». Подобное обоснование может быть приемлемым только в тех случаях, когда речь идёт не о вычислении конкретных значений, а о качественном анализе расположения графиков, например о количестве точек их пересечения, да и то далеко не всегда.

50. Условие задачи сформулировано не совсем корректно, его можно понимать двояко:

1) данное выражение принимает одно и то же значение на своей области определения;

2) данное выражение принимает одно и то же значение на множестве действительных чисел.

Решение 1 подразумевает понимание 1, и с этой точки зрения оно верное.

Решение 3 подразумевает понимание 2, и с этой точки зрения ход решения верен, но допущена ошибка в знаке неравенства в последнем абзаце: на самом деле функция определена для всех x, если $b^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{b}| < \mathbf{2}$. Поэтому получен неверный ответ.

В решении 2 допущена ошибка при любом понимании условия. Если подразумевалось понимание 1, то такой способ решения не учитывает, что в точках $x = 0$ или $x = 1$ выражение может не иметь смысла (в данном решении пропущен случай, когда не существует $f(1)$). Если подразумевалось понимание 2, то требовалось ещё найти ограничения для значений параметра b. Поэтому неверен и полученный ответ.

51. Полученный ответ неверен, а решение не доведено до конца. Действительно, все приведённые в решении выкладки сделаны исходя из предположения, что многочлен $P(x)$ имеет три корня. (*Попутно отметим, что в этом случае можно не раскладывать многочлен на множители, а использовать теорему Виета.*) Получив два возможных значения a, далее необходимо проверить, сколько действительных корней имеет многочлен при каждом из этих значений.

Случай 1. $a = -2$. Тогда многочлен имеет вид
$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$
и легко раскладывается на множители:
$$P(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

Таким образом, в этом случае многочлен действительно имеет три корня, сумма квадратов которых равна 6.

Случай 2. $a=2$. Тогда многочлен имеет вид

$$P(x) = x^3+2x^2-x+2.$$

Определим количество его корней. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Можно провести исследование получившейся функции $P(x)$ на монотонность и экстремумы. Так как

$$P'(x) = 3x^2+4x-1,$$

критическими точками функции являются $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$ и $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

Так как $P(x)$ — многочлен третьей степени с положительным первым коэффициентом, на каждом из промежутков $(-\infty; x_1]$ и $[x_2; +\infty)$ функция возрастает, а на $[x_1; x_2]$ — убывает. На каждом из этих промежутков не может быть более одного корня. Поскольку

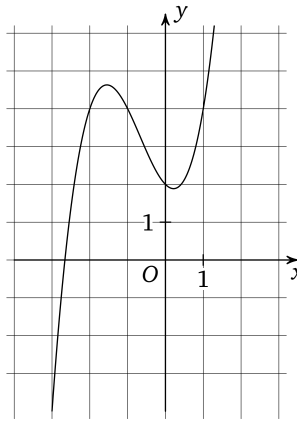


Рис. 1

$$P(x_1) > P(x_2) > 0,$$

единственный корень многочлена $P(x)$ располагается на промежутке $(-\infty; x_1]$ (см. рис. 1).

Таким образом, **верный ответ**: $a=-2$.

Второй способ. Запишем получившийся многочлен так:

$$P(x) = x(x^2-1)+2(x^2+1).$$

Предположим, что он имеет три действительных корня: x_1, x_2 и x_3, и докажем, что среди них нет положительных. Действительно, по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -2$ и $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = -1$. При этом если $x \in [0; 1]$, то $x(x^2-1) < 2(x^2+1)$, значит, $P(x)>0$; если $x \in (1; +\infty)$, то $x(x^2-1)>0$ и $2(x^2+1)>0$, то есть также $P(x)>0$. Но если все три корня многочлена отрицательны, то

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 > 0,$$

— противоречие!

Таким образом, $a=2$ решением задачи не является.

Отметим, что количество корней многочлена $P(x)$ можно определить графически (хотя это и не является строгим обоснованием). Уравнение

$$x^3+2x^2-x+2=0$$

равносильно уравнению

$$x^3=-2x^2+x-2.$$

Построив графики функций

$$y=x^3, \quad y=-2x^2+x-2$$

одной координатной плоскости (см. рис. 2), можно убедиться, что они имеют одну точку пересечения.

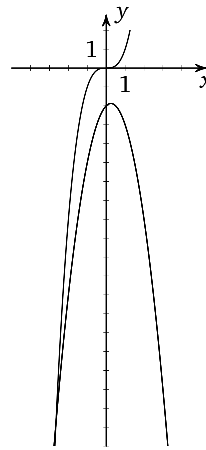


Рис. 2

Функции, производная, первообразная

52. Если построить графики функций и касательную в одной системе координат (см. рисунок), то станет ясно, что полученный ответ неверен: вместо требуемой касательной найдена общая касательная двух графиков. Это произошло из-за двух ошибок, допущенных в решении.

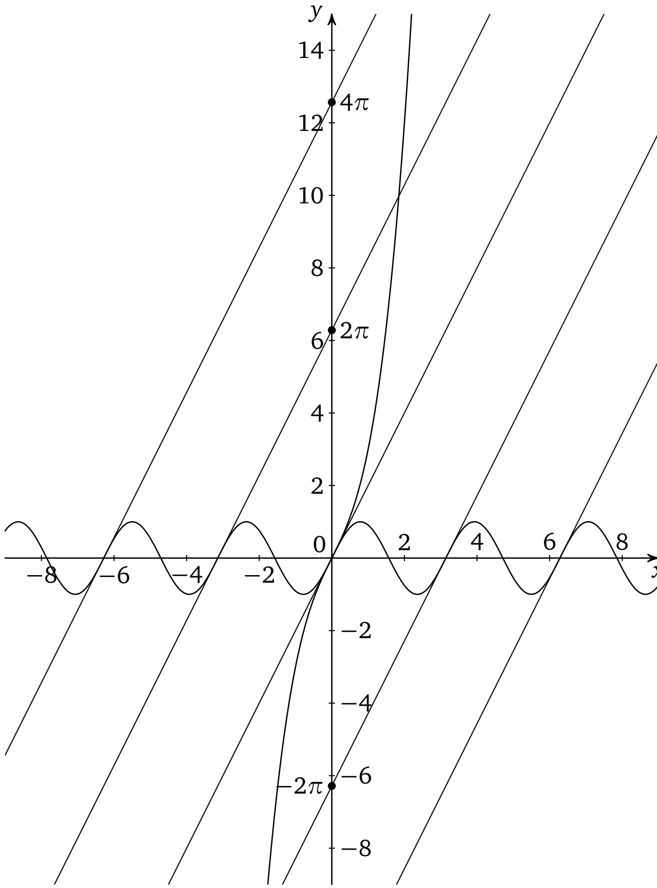
1. В записанных уравнениях касательных выбрана одна и та же точка x_0, а это ниоткуда не следует.

2. Не проверено, что при найденном значении x_0 совпадают не только угловые коэффициенты касательных, но и свободные члены в их уравнениях (если бы свободные члены оказались различными, то полученный ответ мог бы оказаться одним из возможных).

Если в уравнениях касательных выбрать различные точки касания x_0 и x_1, то условие равенства угловых коэффициентов будет выглядеть так: $2\cos 2x_0=3x_1^2+2$. По тем же соображениям, что указаны в решении, получим необходимое условие параллельности касательных:

$$\begin{cases} \cos 2x_0=1, \\ x_1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0=\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}, \\ x_1=0. \end{cases}$$

Подставив полученное значение x_0 в уравнение касательной, указанное в решении, получим $y=2x-2\pi n$.



Достаточность обеспечивается условием $x_0 \neq x_1$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют все прямые вида $y = 2x - 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

53. Оба решения неверные, но **в первом получен верный ответ**. В обоих решениях осуществлён неверный переход при вычислении предела произведения двух функций, а именно, ищется предел второго сомножителя, без учёта того, что первый сомножитель стремится к бесконечности.

Поясним, почему в решении 1 получен верный ответ. Имеем

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ — бесконечно малая при $t \to 0$, поэтому при $x \to \infty$

$$|x+1{,}5|\sqrt{1+\frac{6{,}75}{(x+1{,}5)^2}} = |x+1{,}5|\left(1+\frac{6{,}75}{2(x+1{,}5)^2}+\alpha\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\ = |x+1{,}5|+\alpha(x).$$

Более строгим рассуждением является «классический» подход к поиску асимтот графика функции: прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

1. Рассмотрим случай, когда $x \to +\infty$. Имеем

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+9}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+3x+9}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+9}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+9}{\sqrt{x^2+3x+9}+x} = \\ = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}}+1} = \frac{3}{2}.$$

2. Учитывая, что если $x<0$, то $\dfrac{\sqrt{x^2+3x+9}}{x} = -\sqrt{\dfrac{x^2+3x+9}{x^2}}$, аналогичным образом получим, что если $x \to -\infty k=-1$, то $b=-\dfrac{3}{2}$.

54. Указан **верный ответ**, но ни одно из приведённых решений верным не является.

В решении 1 не доказано, что функция f — обратимая, кроме того, происходит подмена понятий: $f^{-1}(5x+4)$ — это не функция, обратная к функции $y=5x+4$, а от $5x+4$ берётся некая (пока неизвестная!) функция f^{-1}. В том, что найдено не то, что требуется, можно также убедиться, найдя $f(f(x))$ для указанной в решении функции (полученная функция не будет совпадать с функцией, заданной в условии).

Заметим, что если бы обратимость функции f была доказана, то равенство $f(x)=f^{-1}(5x+4)$ само по себе оказалось бы верным, только нужно помнить о том, что f^{-1} в правой части — это не функция, обратная к $y=5x+4$!

В решении 2 верно доказана обратимость f. Далее из верного утверждения $f(-1)=f^{-1}(-1)$ (см. предыдущий абзац) следует неверный вывод о том, что графики взаимнообратных функций пересекаются только на прямой $y=x$! Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$, но для того, чтобы они пересекались только на этой прямой, необходимо ещё условие возрастания функции. Для убывающих функций это не так, например, рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$, где $x>0$. Функция, ей обратная, с ней совпадает.

Решение 3. Из условия задачи не следует линейность функции $f(x)$. Контрпример:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Для этой функции $f(f(x))=x$. Существует и масса других контрпримеров. Заметим, что если бы функция была линейной, то следующее утверждение про пересечение только на прямой $y=x$ было бы верным (хотя и не обоснованным).

Решение 4. Не доказана обратимость $f(x)$, кроме того, опять имеется неверный вывод о том, что графики взаимнообратных функций пересекаются только на прямой $y=x$.

Решение 5. Из условия задачи не следует, что $f(x)$ — линейная функция.

Приведём верное решение. Из условия задачи следует, что

$$f(f(f(x)))=5f(x)+4 \quad \text{и} \quad f(f(f(x)))=f(5x+4).$$

Следовательно, $5f(x)+4=f(5x+4)$, значит,

$$5f(-1)+4=f(-1) \iff f(-1)=-1.$$

55. Сформулированное утверждение верным не является. Рассмотрим, например, возрастающую функцию $f(x)=x^3$ на интервале $(-1;1)$, тогда $f'(0)=0$. Существуют и другие примеры, которые показывают, что на промежутке возрастания функции могут быть отдельные точки, в которых производная обращается в ноль. В приведённом решении проигнорирована возможность равенства нулю рассматриваемого предела. Так как из дифференцируемости функции следует её непрерывность, эти точки являются точками перегиба графика, а касательная к графику в этих точках параллельна оси абсцисс.

Утверждение станет верным, если его сформулировать так: *если возрастающая функция дифференцируема на некотором интервале, то в каждой точке этого интервала её производная неотри-*

цательна. При этом внутри этого интервала нет промежутков, в которых производная равна нулю, а могут быть только отдельные точки.

56. Уже из рассмотрения функции $f(x)=x^2$ понятно, что сформулированное утверждение не может быть верным. Для неё функция $f(f(x))=x^4$ не является возрастающей функцией (убывает при $x\in(-\infty;0]$ и возрастает при $x\in[0;+\infty)$. Дело в том, что в приведённом решении неявно предполагается, что если $[a;b]$ является промежутком монотонности, то и $[f(a);f(b)]$ также промежуток монотонности, а это не так. Утверждение «композиция как двух возрастающих функций, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая» справедливо лишь для таких функций, монотонных на промежутке M, у которых множество значений содержится в том же промежутке M.

В приведённом примере функция $f(x)=x^2$ отображает промежуток $(-\infty;0]$ не в себя, а на промежуток $[0;+\infty)$. Другим возможным простым контрпримером является функция $f(x)=|x|$.

Кроме того, допущена ошибка и в доказательстве, поскольку отсутствие промежутков, на которых функция постоянна, не означает, что количество точек экстремума конечно, ведь их может быть счётное число. Тем самым утверждение о том, что числовая прямая разбивается на неперекрывающиеся промежутки монотонности функции $f(x)$, приведённое в решении, также неверно.

На этот счёт существует «классический» пример. Предложенный известным алгебраистом ван дер Варденом. Продолжим функцию $f_1(x)=|x|$ при $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$ периодически на всю числовую прямую с периодом $T=1$. Положим, далее,

$$f_n(x)=4^{1-n}\cdot f_1(4^{n-1}\cdot x),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится к некоторой непрерывной функции $f(x)$ (грубо говоря, состоящей почти сплошь из изломов), обладающей парой необычных свойств. Во-первых, на любом интервале числовой прямой эта функция не является монотонной, и, во-вторых, она не имеет производной ни в одной точке.

Доказательство этих фактов можно прочитать, например, в книжке Б. Гелбаума, Дж. Олмстеда «Контрпримеры в анализе» (*М.: URSS-ЛКИ*, 2007).

Ещё одним возможным контрпримером является функция

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \textit{если } x\neq 0,\\ 0, & \textit{если } x=0.\end{cases}$$

57. Сформулированная теорема о производной композиции функций, конечно, верна, а в приведённом доказательстве есть ошибка. А именно, при умножении числителя и знаменателя дроби на Δt не учтено, что это выражение может равняться нулю.

Приведём «классическое» доказательство этой теоремы. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\Delta h(x_0)=h(x_0+\Delta x)-h(x_0)&=f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))=\\ &=f(g(x_0)+\Delta g(x_0))-f(g(x_0))=f(t_0+\Delta t)-f(t_0);\end{aligned}$$

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta x}.$$

Так как

$$\exists g'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x},$$

получаем, что $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=g'(x_0)+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$.

Следовательно, $\Delta t=g'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$ (так как $g'(x_0)\in\mathbb{R}$) и $\Delta x=\dfrac{\Delta t}{g'(x_0)+\alpha(\Delta x)}$. Получим

$$\begin{aligned}h'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}\cdot\big(g'(x_0)+\alpha(\Delta x)\big)\right)=\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(g'(x_0)+\alpha(\Delta x))=\\ &=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}\cdot g'(x_0)=f'(t_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0),\end{aligned}$$

что и требовалось.

На первый взгляд, можно было исправить приведённое доказательство, сказав, что если $\Delta Dt=0$, *то найдётся окрестность точки* x_0, *в которой* $t=\mathrm{const}$. *Но это неверно, например, для функции*

$$t=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \textit{если } x\neq 0,\\ 0, & \textit{если } x=0,\end{cases}$$

в точке $x_0=0$.

Если действительно попытаться исправить доказательство, рассматривая случай $\Delta t = 0$ отдельно, то этот случай необходимо, в свою очередь, разбить на два: а) существует такая последовательность $x_n \to x_0$, что $g(x_n) = g(x_0)$; б) такой последовательности не существует. В случае а) надо показать, что производная в данной точке равна нулю, а в случае б) — что найдётся окрестность точки x_0, где $g(x) \neq g(x_0)$.

58. Сформулированное утверждение неверно. Рассмотрим, например, периодическую функцию $f(x) = \cos x + 1$. Множество её первообразных: $F(x) = \sin x + x + C$. Очевидно, что среди этих функций нет периодических.

Ошибка допущена при переходе от равенства интегралов к равенству первообразных. На самом деле из равенства интегралов следует, что $F(x+T) + C_1 = F(x) + C_2$, где C_1 и C_2 — любые действительные числа. Но $C = C_2 - C_1$ уже не любое число, так как C_1 и C_2 друг с другом связаны. В частности, если $F(T) \neq F(0)$, то $C_1 \neq C_2$.

59. Условие задачи сформулировано некорректно.

Фразу «$f'(x) = 1$ при всех $x \geqslant 0$» можно понимать двояко.

1. В точке $x_0 = 0$ существует производная функции $f(x)$.

2. В точке $x_0 = 0$ существует только одностороння производная функции $f(x)$, а именно правая.

Отметим, что обе версии встречаются в математической литературе, хотя версия 2 существенно реже.

В решении не указано, но использовано, что $f'(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, но это, вообще говоря, может и не выполняться. Например, функция

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

всюду непрерывна и дифференцируема, но её производная разрывна в нуле. Поэтому использование равенства

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + ax + b)' = \lim_{x \to 0} (2x + a)$$

в любом случае некорректно. В решении верно получено, что

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + c, & x < 0, \\ x + c, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Дальнейшее зависит от трактовки условия, указанной выше.

1. Надо показать, что

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=1.$$

Тогда дальнейшие рассуждения и полученный ответ верны.

2. В этом случае параметр a не обязан быть равным единице, а может принимать любые значения, то есть условию задачи соответствует семейство функций вида

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+c, & x<0,\\ x+c, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

У параболы x^2+ax+c абсцисса вершины $x_0=-0{,}5a$. Следовательно, при $a>0$ она и будет единственной точкой минимума для каждого значения параметра a. При $a\leqslant 0$ единственной точкой минимума будет $x_0=0$.

Комбинаторика, логика, теория вероятностей

Логические задачи

60. Оба решения и оба ответа ошибочны, причём допущенные ошибки очевидны. Одно из возможных верных решений: запишем по отдельности, сколько денег торговец потратил на покупки и сколько денег он выручил от продаж. Потрачено: $S_1 = 1 + 3 + \ldots + 99$, получено: $S_2 = 2 + 4 + \ldots + 100$. В каждой из этих сумм ровно 50 слагаемых, значит, $S_2 - S_1 = 50$. Таким образом, **прибыль** торговца составила **50 рублей**.

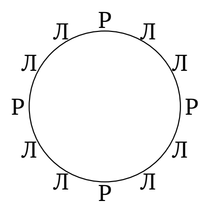


Рис. 1

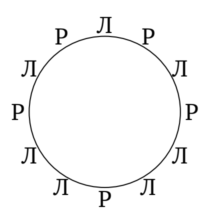


Рис. 2

61. Первые два предложения в приведённом решении ошибок не содержат. Но соседями любого лжеца могут являться не только два рыцаря (как указано в решении), а также рыцарь и лжец. Заметим, что никакие два рыцаря не могут быть соседями, значит, рыцарей не больше шести, то есть лжецов не меньше шести. Кроме того, в каждой тройке сидящих подряд есть хотя бы один рыцарь, поэтому рыцарей не меньше четырёх, то есть лжецов не больше восьми.

Примеры возможной рассадки для восьми и семи лжецов показаны на рис. 1 и 2 соответственно. Таким образом, **ответ**: лжецов могло быть 6, 7 или 8.

62. Условие задачи корректно, а ответ и решение неверные. Оценка содержит ошибочное утверждение о том, что указанные в решении пары не пересекаются. Действительно, даже однозначное соответствие между выбранными парами и входящими в них лжецами не мешает парам пересекаться по рыцарю. Приведём верное решение.

Ответ: 66 лжецов.

Оценка. Предположим, что лжецов не меньше чем 67, тогда рыцарей не больше чем 33. Каждый лжец, сказавший «Да», должен стоять слева от рыцаря, поэтому таких лжецов не больше чем 33. Ответ «Да» могли дать только они и рыцари, то есть получено не больше чем 66 ответов «Да». Противоречие.

Пример. Пусть лжецов — 66, а рыцарей — 34. Разобьём их на 32 тройки вида ЛРЛ и четвёрку ЛРРЛ и поставим подряд по кругу. В каждой тройке ответ «Да» дали первый и второй, а в четвёрке — первый и третий.

63. Приведён верный ответ, но решение неверное. Неправда, что «за» могли проголосовать только те «Шипящие», кто, по их словам, голосовал «против». «Шипящий», проголосовавший «за», мог сказать, что он воздержался. Тогда оценка поддержавших закон, проведённая по той же схеме, даст $10+10+10+50=80>75$.

Приведём верное решение. Те депутаты из «Гласных» или «Шипящих», кто голосовал «за», врали, то есть ответили, что голосовали «против» или воздержались. В обеих партиях так ответили всего по 20 человек. Даже если все ответившие так проголосовали «за», то это не более 40 человек. Те из «Согласных», кто голосовал «за», говорили правду, то есть ответили, что голосовали «за». В партии «Согласные» так ответили 30 человек. Значит, суммарно по трём партиям «за» проголосовало не более чем 70 человек. А 50% голосов — это 75 человек, поэтому законопроект не был принят.

Процессы и операции

64. Условие задачи корректно, а ответ и решение неверные. Утверждение, сформулированное в решении, верно только для первого шага, а для дальнейших шагов это не так. Например, за два шага можно изменить количество чёрных и белых клеток во второй горизонтали (см. рис. 1).

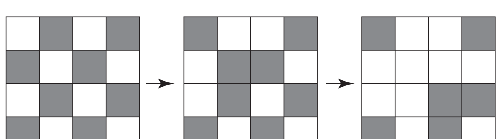


Рис. 1

Приведём одну из возможных последовательностей шагов, обеспечивающих требуемую раскраску (см. рис. 1):

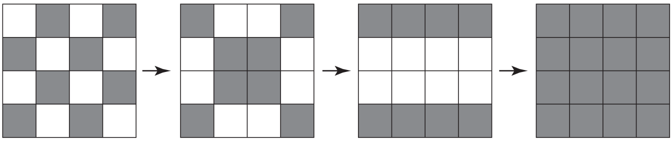


Рис. 1

1) перекрасим левый верхний и правый нижний квадраты (в любом порядке);

2) перекрасим два квадрата на центральных вертикалях;

3) перекрасим два квадрата на центральных горизонталях.

65. Утверждение, которое предлагается доказать в условии задачи, неверно. Приведём контрпример. Пусть в этой группе учатся девочки и мальчики. Каждая из девочек дружит с каждым мальчиком, а пар друзей одного пола нет. По окончании 10 класса все девочки решили поступать на мехмат, а все мальчики — на физфак. В таком случае мнения всех школьников будут меняться еженедельно и не устоятся никогда.

Условие задачи станет корректным, если к понедельнику будет менять мнение только один школьник: любой из тех, чьи планы отличались от планов большинства друзей. Соответственно станет верным и приведённое решение.

Неверное утверждение «доказано» в результате следующей ошибки. В высказывании «После того как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l» не учитывается, что вместе с Петей мнение могут переменить и некоторые его друзья. Даже если учитывать только пары с участием Пети, после очередной перемены мнений число n не обязательно уменьшится на $k-l$. А если говорить обо всех парах друзей, то вообще странно ожидать, что изменение числа n зависит только от планов Пети и его друзей.

В исправленном виде задача неоднократно использовалась в различных формулировках. Первоисточником, видимо, является задача А. М. Штейнберга, опубликованная под номером М277 *в задачнике «Кванта»* (№ 8/1974) *в такой формулировке: «Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединён-*

ных с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем её в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки».

66. Утверждение задачи справедливо, но предложенное доказательство неверно. В самом деле, рассмотрим момент, когда мы впервые отправляем в палату A такого депутата (допустим, депутата D_1), который имеет в A ровно одного врага (скажем, депутата D_2). Когда мы в следующий раз отправим в палату A депутата D_3, имеющего в палате ровно одного врага, этим врагом может снова оказаться депутат D_2, и теперь у D_2 в палате A будет два врага — D_1 и D_3, что противоречит требованию задачи.

Приведём возможное верное решение. Разделим депутатов на две палаты произвольно. Если в одной из палат есть депутат, имеющий в ней двух или трёх врагов, переведём его в другую палату. Так будем делать до тех пор, пока такие депутаты имеются. Как только их не станет, задача будет решена. Осталось показать, что это рано или поздно произойдёт. В самом деле, после каждого перехода количество пар депутатов, находящихся в разных палатах и враждующих между собой, увеличивается. Это происходит потому, что добавляются по крайней мере две такие пары, а исчезает не более одной. Но количество таких пар неограниченно возрастать не может (общее количество вообще всех враждующих пар не превосходит $\frac{3N}{2}$, где N — количество депутатов), поэтому обязательно наступит момент, когда из палаты в палату некого будет переводить.

67. Условие задачи корректно, ответ верный (если $n \geqslant 2$), а решение содержит ошибку. В нём никак не обосновано, что среди подаренных букетов нет одинаковых, и это не случайно. При указанном алгоритме каждый букет без розы и тюльпана будет подарен один раз до «склеивания» цветов и один раз после «склеивания». Приведём верное решение, указав два способа, один из которых по индукции, а другой — без неё.

Первый способ. Докажем по индукции, что можно передать все возможные букеты, причём делать это «по цепочке», то есть если учительница только что получила букет, то теперь именно она должна делать следующий подарок. Удобно считать, например, что есть фишка, которую передают каждый раз вместе с букетом, и дарит следующий букет та учительница, у которой сейчас фишка.

База индукции ($n=2$) такая же, как в «решении».

Индукционный переход. Пусть одна учительница (например, с розой) отойдёт в сторонку. Одной из оставшихся n учительниц дадим фишку. По индукционному предположению среди этих n учительниц можно организовать по одному разу дарение всех возможных букетов по цепочке, то есть передавая каждый раз вместе с букетом фишку. Сделаем это с одним уточнением: самый последний букет в цепочке надо подарить учительнице с розой. Она заменит фишку на розу, вернёт букет с добавленной розой той учительнице, которая ей дарила только что, и снова отойдёт в сторонку. Далее запустим процесс в обратную сторону, но роль фишки будет играть роза. Это возможно, так как он был организован по цепочке. Из-за добавленной розы ни один из новых букетов не совпадёт ни с одним из старых. А два новых букета не совпадут, так как отличаются от старых (которые по индукционному предположению различны) только наличием розы.

Второй способ. Букет из всех n цветков назовём *полным*, а все остальные букеты разобьём на пары, дополняющие друг друга до полного. Пронумеруем учительниц и цветы числами от 1 до n. Пусть сначала первая учительница подарит свой цветок второй, вторая подарит оба цветка третьей, третья — все цветы четвёртой и так далее, пока у n-й учительницы не соберётся полный букет. Пока что подарены букеты $\{1\}$, $\{1, 2\}$, …, $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ — по одному из $n-1$ пары букетов. Назовём эти пары *разбитыми*. Теперь n-я учительница дарит кому-нибудь полный букет, после чего получившая его учительница делит его на два меньших букета из какой-нибудь неразбитой пары и последовательно дарит сначала первый, а потом второй какой-то другой учительнице. Далее учительницы действуют так же, пока не будут подарены все букеты из неразбитых пар. Осталось подарить вторые букеты из разбитых пар: из полного букета дарится $\{2, 3, \ldots, n\}$, получившая его учительница дарит $\{3, \ldots, n\}$ и так далее, последняя дарит букет $\{n\}$.

Соответствия и графы

68. Ни ответ, ни решение верными не являются. Ошибка состоит в том, что соответствие между «словами», в которых указанные фрагменты встречаются чётное число раз, и «словами», в которых они встречаются нечётное число раз, не является взаимнооднозначным. Действительно, в решении указано, что каждому «нечётному слову» соответствует ровно одно «чётное», причём различным соответствуют различные. Но имеются «чётные слова», которые не соответствуют никаким «нечётным», например «слова», в которых отсутствует буква *А*. Следовательно, **«слов», в которых указанные фрагменты встречаются чётное число раз, больше**.

69. Утверждение задачи верно, в отличие от решения. Неверным является утверждение «Если каким-то двум детям досталось по две конфеты, принадлежащие одной из таких пар, то они получили четыре попарно различные конфеты». Действительно, могут найтись два ребёнка, каждый из которых получил, например, конфеты 1 и 2.

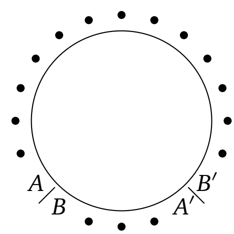
Приведём одно из возможных верных рассуждений. Предположим, что это утверждение задачи не выполняется. Рассмотрим пары из различных видов конфет, доставшиеся детям. Если какого-то вида в этих парах нет, то конфеты этого вида были разбиты на две пары и достались двум детям. Если же в парах из различных видов есть каждый вид конфет, то он присутствует в них два или четыре раза. Обозначим виды конфет 1, 2, 3, 4. Пусть есть пара 1—2, тогда не должно быть пары 3—4. Значит, конфеты вида 3 могут быть в паре только с конфетами вида 1 и 2. Пусть есть пара 1—3, тогда не должно быть пары 2—4. Значит, конфеты вида 4 могут быть в паре только с конфетами вида 1, тогда не должно быть пары 2—3. Таким образом, могут быть только пары 1—2, 1—3 и 1—4. Но каждый вид конфет 2, 3, 4 есть не менее чем в двух парах, поэтому конфеты вида 1 присутствуют не меньше чем в шести парах. Противоречие.

70. Сформулировано верное утверждение, но его доказательство содержит ошибку. Дело в том, что не всегда имеет смысл предложение «Обозначим через *A* последнюю совпадающую вершину (то есть следующая вершина за *A* на первом пути не принадлежит второму пути)». Действительно, рассмотрим, например, граф с пятью вершинами *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* и два пути: *P*—*Q*—*R*—*S*—*T* и *P*—*Q*—*S*—*R*—*T*. Эти пути не совпадают, и в графе есть цикл, но любая вершина второго пути лежит на первом пути, поэтому предложенный в решении алгоритм поиска цикла работать не будет.

Покажем, как можно было более аккуратно записать этот фрагмент доказательства.

Пусть начала двух путей совпадают вплоть до некоторой вершины C, в которой пути впервые расходятся. Рассмотрим следующую за C вершину первого пути (назовём её D), которая принадлежит также и второму пути (этой вершиной может оказаться и вершина B). Тогда объединение отрезка первого пути от вершины C до вершины D с отрезком второго пути от вершины D до вершины C даст нам искомый цикл.

71. Утверждение задачи верно, но в приведённом решении содержится ошибка, а именно, неверно используется индукционный переход. Действительно, пусть, например, для $n=4$ выполнялось условие задачи: каждый рыцарь имел двух друзей, сидящих рядом, и врага, сидящего напротив. Удалив одного из них за дверь, мы получим, что для двух рыцарей условие не выполняется, так как у них осталось по одному другу, то есть оставшихся трёх рыцарей рассадить требуемым образом нельзя.



Приведём один из возможных способов решения задачи.

Рассадим всех рыцарей за столом в произвольном порядке. Если слева и справа от каждого рыцаря сидят его друзья, то задача решена. В противном случае рассмотрим какую-либо пару врагов, сидящих рядом. Обозначим их A и B и для определённости предположим, что A сидит слева от B (см. рисунок). Поскольку у рыцаря A не менее $\frac{n}{2}$ друзей, а у рыцаря B — не более $\frac{n}{2}-2$ врагов (не считая рыцаря A), найдётся такая пара сидящих рядом рыцарей A' и B' (A' сидит слева от B'), что A' дружит с A, а B' дружит с B. Пересадим в обратном порядке всех рыцарей, сидящих между A и B'. Тогда A будет сидеть рядом со своим другом A', B — рядом со своим другом B', а для остальных пересаженных рыцарей поменяются местами левый и правый соседи. Общее количество враждующих пар при этом уменьшится. Применяя последовательно указанное рассуждение к каждой паре врагов, сидящих рядом, добьёмся искомого.

Отметим, что сформулированное в условии задачи утверждение известно в теории графов как теорема Дирака. Будем рассматривать рыцарей как точки на плоскости и соединять отрезками тех рыцарей, которые являются друзьями. Тогда в получившемся графе каждая вершина имеет степень не менее чем $\frac{n}{2}$*, и теорема Дирака утверждает, что в таком графе найдётся гамильтонов цикл (то* *есть замкнутый путь, проходящий по всем вершинам и содержащий каждую вершину ровно один раз). Доказательство теоремы Дирака на языке теории графов можно найти, например, в книге Р. Уилсона «Введение в теорию графов».*

Сколькими способами?

72. Приведённое рассуждение неверно, из-за чего получен и неверный ответ. Ошибка состоит в том, что некоторые случаи подсчитаны несколько раз (причём не одинаковое количество раз, поэтому верный ответ невозможно получить, разделив полученный результат на фиксированное число). В частности, в приведённом подсчёте дважды учтены такие случаи:

1) отдельно выбран туз пик, а среди девяти других карт есть ровно один туз — туз треф;

2) отдельно выбран туз треф, а среди девяти других карт есть ровно один туз — туз пик.

Есть и случаи, подсчитанные трижды. Например, пусть среди выбранных десяти карт оказались три туза разных мастей и ещё 7 каких-то карт. Этот набор исходя из приведённого рассуждения можно было получить тремя способами: сначала выбирать один из тузов, а затем дополнять его ещё девятью картами. Получается, что один конкретный набор подсчитан три раза.

Возможны два способа рассуждения, приводящие к верному ответу, который будет записан по-разному.

Первый способ. Отдельно подсчитаем количество способов выбрать ровно один туз, ровно 2 туза, ровно 3 туза и ровно 4 туза. Один туз можно выбрать C_4^1 способами, а ещё 9 карт, среди которых нет тузов, — C_{48}^9 способами. Аналогично два туза можно выбрать C_4^2 способами, а добавить к ним 8 карт без тузов — C_{48}^8 способами. Три туза выбираются C_4^3 способами, а дополняются семью картами C_{48}^7 способами, а четыре туза — C_4^4 способами и дополняются C_{48}^6 способами. Используя правила умножения и сложения, получим **ответ**: $C_4^1 C_{48}^9 + C_4^2 C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6$.

Второй способ. Количество способов выбрать любые 10 карт из 52 равно C_{52}^{10}, а количество способов выбрать 10 карт, среди которых нет тузов, — C_{48}^{10} (для этого подсчёта достаточно «вынуть» тузы из колоды). Следовательно, **искомое количество способов равно $\boldsymbol{C_{52}^{10} - C_{48}^{10}}$.**

73. В решении есть ошибка: возможна ситуация, когда цвет второй из двух оставшихся бусинок можно выбрать четырьмя способами, а не тремя. Это будет в случае, когда она окажется между двумя бусинками одного цвета. В рамках приведённого рассуждении это невозможно учесть. Понятно, что и полученный ответ не является верным. Приведём верное решение.

Зафиксируем одну бусинку. Пусть для определённости она покрашена в цвет 1. Тогда рассмотрим два случая.

1. Бусинки с обеих сторон от неё одного цвета x, который можно выбрать четырьмя способами (см. рис. 1). Тогда цвета y и z четвёртой и пятой бусинок можно выбрать четырьмя и тремя способами соответственно (цвет y — любой, кроме x, цвет z — любой, кроме x и y).

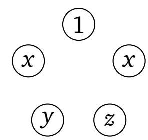


Рис. 1

Итого $4^2 \cdot 3 = 48$ способов.

2. Слева и справа от фиксированной бусинки находятся бусинки разных цветов x и y. Их можно выбрать $4 \cdot 3$ способами, так как случай совпадения цветов уже рассмотрен. Для каждой уже рассмотренной раскраски возможны два случая:

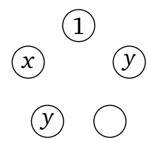


Рис. 2

а) бусинка рядом с x покрашена в цвет y (см. рис. 2); тогда оставшуюся бусинку можно покрасить четырьмя способами;

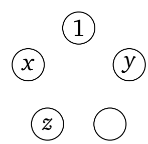


Рис. 3

б) бусинка рядом с x покрашена в какой-то цвет z, отличный от y (см. рис. 3); тогда цвет z можно выбрать тремя способами и цвет последней бусинки также тремя способами.

Итого $4 \cdot 3(4 + 3 \cdot 3) = 156$ способов.

Таким образом, количество способов докрасить ожерелье, если бусинка цвета 1 фиксирована, равно $48 + 156 = 204$. Но первую бусинку можно выбрать пятью способами. Значит, **ответ**: 1020.

74. Полученная формула, конечно, неверна. Например, на листе бумаги размером 2×2 можно нарисовать четыре квадрата 1×1, четыре прямоугольника 1×2 и один квадрат 2×2. Итого 9 прямоугольников. А по формуле получается, что 18. Ещё проще: на листе размером 1×1 — всего один прямоугольник, а по формуле их должно быть два!

В решении верно подсчитано количество способов выбрать две противоположные вершины прямоугольника. Но верхняя вершина может оказаться не левее, а правее нижней. В этом случае не существует прямоугольника, для которого одна из выбранных вершин — верхняя левая, а другая — правая нижняя.

Это решение можно исправить так, чтобы оно стало верным. Для этого первое предложение надо заменить на другое: «Каждый прямоугольник однозначно задаётся двумя противоположными вершинами: либо верхней левой и нижней правой, либо верхней правой и нижней левой». Далее, как и в приведённом решении, получим, что существует $(m+1)(n+1)mn$ способов выбрать две противоположные вершины прямоугольника. Но при этом каждый прямоугольник учтён четыре раза, так как любая из четырёх вершин могла быть выбрана в качестве первой. Поэтому полученное произведение надо разделить на 4. Таким образом, **верный ответ**:

$$\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}.$$

Можно рассуждать и по-другому. Каждый прямоугольник однозначно задаётся своими проекциями на перпендикулярные стороны листа. А каждая проекция (отрезок), в свою очередь, однозначно задаётся указанием двух концов. На стороне длины n имеется $n+1$ узел сетки. Выбрать из них два узла можно $C_n^2=\dfrac{n(n+1)}{2}$ способами. Аналогично на стороне длины m выбрать два узла можно $C_m^2=\dfrac{m(m+1)}{2}$ способами. По правилу произведения выбрать обе проекции можно $\dfrac{mn(m+1)(n+1)}{4}$ способами, значит, столько же будет и прямоугольников.

75. Полученный ответ оказался верным, но это скорее случайность, так как в решении допущены две существенные ошибки:

1) если выбирать из полученного множества две точки произвольно, то они могут оказаться в плоскости, параллельной одной из граней данного параллелепипеда, и тогда они не будут являться концами диагонали ни одного из параллелепипедов разбиения;

2) равенство в последней строчке решения неверное, так как единица должна вычитаться из произведения, а не из каждого сомножителя.

Приведённое решение можно исправить начиная с третьей фразы, например, так.

Заметим, что любые две точки, не лежащие в плоскости, параллельной одной из граней данного параллелепипеда, могут стать концами диагонали ровно одного из искомых параллелепипедов. Для каждой точки разбиения существует mnk точек, которые могут стать вторым концом такой диагонали, поэтому количество диагоналей равно $\frac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{2}$. Но в каждом параллелепипеде — 4 диагонали, поэтому **искомое количество параллелепипедов** в 4 раза меньше, то есть оно **равно** $\boldsymbol{\frac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{8}}$.

Можно также провести аналогичные рассуждения, введя декартову систему координат в пространстве.

Предложим ещё один способ рассуждений, приводящий к верному ответу. Каждый параллелепипед разбиения однозначно определяется тремя рёбрами, исходящими из одной вершины. Количество возможных различных рёбер по каждому из трёх измерений, выходящих из этой вершины, равно n, m и k соответственно. Следовательно, всего параллелепипедов, у которых выбранная точка является вершиной, равно nmk. Первую вершину параллелепипеда можно выбрать $P=(m+1)(n+1)(k+1)$ способами. Умножив P на nmk, и разделив на 8 (*так как при таком подсчёте мы каждый параллелепипед учитывали* 8 *раз, выбирая в качестве «первой» любую из его восьми вершин*), *получим ответ*:

$$\frac{mnk(m+1)(n+1)(k+1)}{8}.$$

76. Перебором можно установить, что на самом деле **браслетов 6** (см. рис. 1).

с	с	с	с	с
и и	и и	и р	и р	р р
и р	р р	и р	р и	и и
р	и	и	и	и

Рис. 1

Приведём верное и не переборное решение, по ходу которого станет понятна допущенная ошибка. Предположим, что все камни различны и браслет прибит к столу гвоздями. Тогда существует $6!$ перестановок, то есть $6!$ различных браслетов. Этот подсчёт произведён исходя из того, что все камни различны, следовательно, это число надо разделить на количество перестановок одинаковых камней: $\frac{6!}{2!\cdot 3!}=60$.

Поскольку браслеты, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми, полученное число надо разделить на 6 (каждой перестановке соответствует 6 браслетов), тогда получим 10 браслетов.

Осталось учесть перевороты. К ответу приводило такое рассуждение: «браслеты, которые мы уже учли, делятся на пары совпадающих при перевороте, поэтому нужно 10 разделить на 2». Но это неверно, поскольку среди браслетов есть те, которые при перевороте переходят сами в себя!

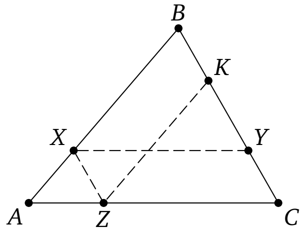
На рис. 2 изображены 10 браслетов, из которых нам надо выкинуть лишние — все они, кроме симметричных, разбиваются на пары, совпадающие при перевороте. Поэтому верным будет такое рассуждение: если среди десяти браслетов есть x симметричных и $(10-x)$ несимметричных, то количество несимметричных браслетов надо разделить на 2 и сложить с количеством симметричных. Таким образом, после учёта переворотов получится $x+\frac{10-x}{2}=5+\frac{x}{2}$ браслетов. Так как в данном случае $x=2$, получим как раз 6 браслетов.

	с			с			с			с			с	
и		и	и		и	и		р	и		р	р		р
и		р	р		р	и		р	р		и	и		и
	р			и			и			и			и	

Рис. 2

77. Как ответ, так и решение неверны. Во-первых, в решении есть ошибка, которая «бросается в глаза» сразу, — точку на первой стороне можно выбрать не шестью, а семью способами. Кроме того, отрезки, лежащие на одной прямой, считаются параллельными, что допустимо, но не совсем корректно с точки зрения определений школьных учебников. Во-вторых (и это главное!), от того, каким образом выбрана вторая точка, зависит, сколькими способами можно выбрать третью. Более того, количество треугольников зависит и от того, как выбрана первая точка: для середины стороны и для остальных точек на стороне оно различно. Приведём два способа верных рассуждений, из которых сказанное станет более понятным.

Первый способ. Точку X на стороне AB можно выбрать семью способами. Пусть Y — такая точка на стороне BC, что $XY \parallel AC$, Z — такая точка на стороне AC, что $XZ \parallel BC$, K — такая точка на стороне BC, что $KZ \parallel AB$ (см. рисунок). Заметим, что точки K и Y совпадают тогда и только тогда, когда X — середина стороны AB.



Предположим, что первой выбрана точка X, отличная от середины стороны AB. Для выбора точки на стороне BC есть два варианта: либо эта точка совпадает с точкой K, либо она отлична от K и Y. В первом случае точку на стороне AC можно выбрать шестью способами, во втором — пятью способами. Итого получаем $6(6+5\cdot5)$! треугольников.

Если первой выбрана середина стороны AB, то вторую точку можно выбрать шестью способами, а третью — пятью способами, итого ещё 30 треугольников.

Таким образом, можем найти общее количество треугольников, у которых ни одна из сторон не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC: $6(6+5\cdot5)+30=216$.

Второй способ. Пусть N_a — количество треугольников, у которых одна из сторон параллельна стороне BC исходного треугольника. Аналогично определим числа N_b, N_c, $N_{a,b}$, $N_{b,c}$, $N_{a,c}$ и $N_{a,b,c}$. Через N обозначим общее количество треугольников. Тогда

$$N=7^3,\quad N_a=N_b=N_c=7^2,\quad N_{a,b}=N_{b,c}=N_{a,c}=7,\quad N_{a,b,c}=1.$$

Искомое число находится по формуле включений и исключений:

$$7^3-3\cdot7^2+3\cdot7-1=6^3.$$

Ответ: $6^3=216$ способов.

Вероятность

78. Пусть в семье двое детей, про пол которых ничего не сказано. Этой ситуации соответствует пространство из четырёх элементарных событий: ММ, МД, ДМ, ДД. Если же указано, что старший — мальчик, то достаточно рассматривать только два равновероятных события: ММ и МД, или, как указано в решении, М и Д. Поэтому решение и ответ будут верными именно для такой формулировки.

А для исходной формулировки неверны ни решение, ни ответ. В этом случае роли детей не разделены, поэтому из указанных четырёх элементарных событий любое из трёх событий ММ, МД или ДМ может реализоваться с равной вероятностью. Поэтому **вероятность того, что оба ребёнка — мальчики, равна $\frac{1}{3}$**.

79. Если даже не выписывать все варианты, то легко понять, что общее количество вариантов расстановки равно $4! = 24$. Из них А стоит первым в $3! = 6$ случаях. Вариантов, когда Б стоит позже А, 12, и все случаи, где А стоит первым, среди них. Поэтому **искомая вероятность равна $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$**.

Теперь понятно, что указанные ответ и решение неверны. В приведённом решении первые два предложения верны, а третье неверно, то есть ошибка начинается с фразы: «Но, кроме Б, у нас есть 3 человека — А, В и Г, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью». Действительно, речь идёт только о случаях, когда А стоит раньше Б, что повышает вероятность того, что А стоит первым.

Приведём также ещё одно возможное верное решение. Рассмотрим все расстановки пары А и Б, при которых Б стоит позже А. Среди них есть три расстановки, в которых А стоит первым (Б может быть вторым, третьим или четвёртым). Расстановок, где А не первый, тоже три (если А второй, то Б третий или четвёртый, а если А третий, то Б только четвёртый). Количество расстановок В и Г на оставшихся местах не зависит от того, о каких именно местах идёт речь, поэтому искомая вероятность равна $3 : (3 + 3) = \frac{1}{2}$.

80. Неверны и ответ, и решение. Ошибка приведённого рассуждения заключается в том, что произошла подмена понятий — в одном месте идёт речь о безусловной вероятности, а в другом — об условной. По отдельности все строки решения имеют смысл, но в разных ситуациях.

1. Утверждение «Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй — с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем промаха второго» верно, если речь идёт о безусловной вероятности (причём при однократном выстреле по цели). При двойном выстреле это утверждение неверно (*более подробно — см. ниже*).

2. Утверждение «Поскольку в цель попал только один снаряд, сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1» также верное, но для других вероятностей! Оно имеет смысл, если речь идёт об условных вероятностях промахов стрелков при условии, что из двух выстрелов в цель попал лишь один снаряд. Но ниоткуда не следует, что отношение условных вероятностей равно отношению безусловных вероятностей!

Приведём верное решение. Так как результаты выстрелов первого и второго — независимые события, вероятность того, что первый попал, а второй промахнулся, равна $0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$; вероятность того, что второй попал, а первый промахнулся, равна $0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48$. Нас интересует условная вероятность промаха первого при условии, что из двух выстрелов в цель попал лишь один из них (иными словами: требуется найти, какую долю составляют те случаи, в которых промахнулся первый, среди всех случаев, когда в цель попал только один из артиллеристов), то есть

$$\frac{0{,}48}{0{,}08+0{,}48}=\frac{0{,}48}{0{,}56}=\frac{6}{7}.$$

Это же рассуждение можно выразить и более формально: пусть событие A — {при двойном выстреле первый промахнулся}, событие B — {при двойном выстреле попал лишь один снаряд}. Тогда требуется вычислить $\mathrm{P}(A|B)$. Используя формулу условной вероятности, получим

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0{,}48}{0{,}08+0{,}48}=\frac{6}{7}$$

(событие AB — {первый промахнулся, а второй попал}).

Отметим, что возможны также решения, использующие формулу Байеса.

Разберём теперь подробнее, почему в условиях нашей задачи (выстрелили две пушки) утверждение, разобранное в пункте 1, неверно. Действительно, при двойном выстреле возможны следующие четыре несовместных исхода:

A_1 — {оба попали в цель};

A_2 — {первый попал, второй промахнулся};

A_3 — {первый промахнулся, второй попал};

A_4 — { оба промахнулись}.

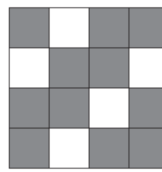
Вероятность того, что первый промахнулся, равна $\mathrm{P}(A_3)+\mathrm{P}(A_4)$ и по условию составляет 0,8. Вероятность того, что второй промахнулся, равна $\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_4)$ и по условию составляет 0,6. В приведённом «решении» из того, что $\dfrac{\mathrm{P}(A_3)+\mathrm{P}(A_4)}{\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_4)}=2$, делается неверный вывод о том, что $\dfrac{\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(A_2)}=2$.

Следовательно, можно также решить задачу, вычислив

$$\mathrm{P}(A_4)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32.$$

Тогда $\mathrm{P}(A_3)=0{,}8-0{,}32=0{,}48$, а $\mathrm{P}(A_2)=0{,}4-0{,}32=0{,}08$. Таким образом, $\dfrac{\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(A_2)}=6$, значит, доля тех случаев, в которых промахнулся первый, среди всех случаев, когда в цель попал лишь один, **равна $\frac{6}{7}$**.

Разное



81. Приведённый ответ верный, а решение неверное. Действительно, игра может закончиться раньше, например, после одиннадцатого хода (см. рисунок).

Верная стратегия Васи: разобьём доску пополам, например, горизонтальной прямой. На любой ход Пети Вася закрашивает ту клетку на другой половине доске, которая получается из данной параллельным переносом на 2 клетки вниз или вверх). Предлагаем читателю убедиться, что при такой стратегии тринадцатым ходом Петя неизбежно проиграет.

82. Условие задачи корректно, а ответ и решение неверны. Во-первых, если можно давать сдачу, то стоимость покупки может быть даже 1 гинея. Например, Алиса могла заплатить две монеты по 7 гиней и получить на сдачу монетой 13 гиней. Во-вторых, делая оценку, нельзя опираться на приведённый пример, то есть недостаточно рассмотреть случай, когда Алиса дала 2 монеты, а получила 4. Придётся рассмотреть все случаи, соответствующие условию, что перебором сделать невозможно.

На самом деле **минимально возможная стоимость покупки — 4 гинеи**.

Пример. $4=3\cdot 13-5\cdot 7$, то есть Алиса дала 3 монеты по 13 гиней, а получила сдачи 5 монет по 7 гиней.

Приведём два возможных способа оценки.

Первый способ. Заметим, что номинал каждой монеты даёт остаток 1 при делении на 6. Так как вычитается на два числа такого вида больше, чем прибавляется, стоимость покупки должна при делении на 6 давать остаток 4.

Второй способ. Пусть стоимость покупки равна S. Тогда решение задачи сводится к поиску наименьшего натурального значения S, удовлетворяющего системе уравнений

$$\begin{cases} 7x+13y+25z=S, \\ x+y+z=-2 \end{cases}$$

(где x, y и z — целые числа). Исключая, например, переменную z и преобразуя полученное уравнение, получим $-6(2x+3y)=S+50$.

Левая часть этого уравнения кратна шести, значит, и $S+50$ должно быть кратно шести. Поэтому значения S, равные 1, 2 или 3, не могут являться решениями.

Отметим, что последнее равенство также даёт возможность подобрать пример для $S=4$ и позволяет сделать вывод о том, что таких примеров бесконечно много.

83. Условие задачи некорректно, то есть **утверждение**, которое требуется доказать, **неверное**. Действительно, пусть все коты стоили одинаково, а стоимости мешков различны, тогда стоимости любого кота в мешке также будут различными.

Для того чтобы утверждение задачи выполнялось (и приведённое решение стало верным), необходимо добавить условие, что цены всех котов и цены всех мешков попарно различны.

84. В приведённом решении допущена ошибка: мог оказаться дисквалифицированным последний участник. В этом случае опередить первого должен седьмой участник. Так как изначальная разница в очках между ними составляла 3 очка, указанное в решении противоречие сохраняется, то есть эта ошибка не повлияла на полученный ответ.

Но **ситуация, описываемая в условии задачи, невозможна**, то есть условие задачи некорректно. Докажем это. Предположим, что было дисквалифицировано 4 человека, и приведём это предположение к противоречию.

Участник, оказавшийся последним после проведённой дисквалификации, не мог набрать во встречах между четырьмя оставшимися после дисквалификации участниками больше чем 0,5 очка. Действительно, если бы он набрал хотя бы одно очко, то трое остальных должны были бы набрать как минимум 1,5, 2 и 2,5 очка соответственно. Но тогда общая сумма набранных очков — не менее семи, а в турнире из четырёх участников разыгрывается всего 6 очков.

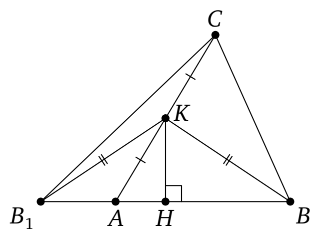
Если же этот участник набрал не более, чем 0,5 очка, то до дисквалификации у него было не более, чем 4,5 очка. В этом случае он никак не мог быть первым, иначе остальные 7 шахматистов могли бы набрать не более чем 4, 3,5, 3, 2,5, 2, 1,5 и 1 очко соответственно, то есть общая сумма набранных очков не превышала бы 22 очка, в то время как в турнире из восьми человек разыгрывается 28 очков.

Геометрия

Планиметрия

Треугольники

85. Доказываемое **утверждение неверно**. Приведём пример двух неравных треугольников, для которых выполняются все равенства из условия задачи.



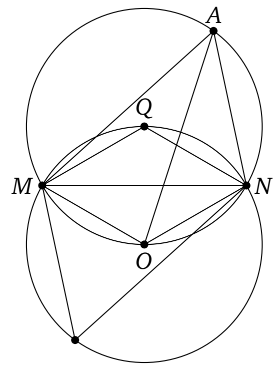
Построим равнобедренный треугольник BKB_1 и проведём высоту KH к его основанию (см. рисунок). На отрезке B_1H выберем произвольную точку A, проведём луч AK и отложим на нём точку B так, что $CK = AK$. Таким образом, в неравных треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB и высота, проведённая из вершины C, общие, а медианы BK и B_1K равны.

Ошибка в решении состоит в том, что из равенства углов DBG и $D_1B_1G_1$ (безусловно, верного) сделан неверный вывод, что равны углы ABM и $A_1B_1M_1$. На самом деле это не обязательно, но этот вывод спровоцировал рисунок в решении, на котором оба треугольника остроугольные.

86. Изобразив любой треугольник ABC, кроме прямоугольного, и проведя его высоты AA', BB' и CC', несложно убедиться, что доказываемое **утверждение неверно**. В решении допущена следующая ошибка: для треугольника ABC ортотреугольником является треугольник $A'B'C'$, а для треугольника HBC — треугольник $A'C'B'$, то есть меняется соответствие между вершинами треугольника и сторонами ортотреугольника.

87. Доказываемое **утверждение неверно**. Ошибка в решении — аналогичное рассуждение можно провести только для одного из треугольников: либо для OBH, либо для OCH. Действительно, проведя его, например, для треугольника OBH, мы получим, что $OA = OB$, откуда будет следовать, что треугольник ABC равнобедренный ($AC = BC$). Тогда точки C, H, I и O окажутся на одной прямой, то есть треугольника OCH существовать не будет.

Таким образом, из условия задачи следует только, что **треугольник ABC равнобедренный**.



88. Приведённое рассуждение не содержит ошибок, но не учтён случай, когда точки P и O совпадают. Тогда вершина A уже не обязана лежать на серединном перпендикуляре к отрезку MN, поэтому треугольник ABC не обязан быть равнобедренным.

В этом случае окружности, описанные около равных треугольников KMN и ANM, по-прежнему равны и симметричны относительно их общей хорды MN. Их центры O и Q также симметричны относительно MN. Тогда, так как O лежит на одной окружности, Q лежит на другой (см. рисунок). Пусть $\angle MAN = \alpha$, тогда $\angle MKN = \angle MQN = 2\alpha$. Четырёхугольник $MANO$ вписанный, поэтому $\alpha + 2\alpha = 180°$, то есть $\alpha = 60°$. Таким образом, верное утверждение можно сформулировать так: **если центр окружности девяти точек лежит на одной из биссектрис треугольника, то либо этот треугольник равнобедренный, либо угол, из вершины которого проведена эта биссектриса, равен 60°**.

89. Доказываемое **утверждение верным не является**. Действительно, построим параллелограмм $ABDC$, в котором диагональ AD образует со сторонами AB и AC углы 30° и 15° соответственно. Пусть его диагонали пересекаются в точке M (см. рис. 1). Тогда тре-

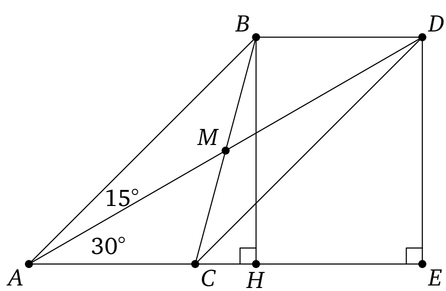


Рис. 1

угольник ABC, очевидно, не является равносторонним, но удовлетворяет условию задачи. Покажем это.

Опустим перпендикуляры BH и DE на прямую AC. Тогда

$$BH = DE = 0{,}5AD = AM,$$

то есть медиана AM треугольника ABC равна высоте BH. Так как $\angle BAH = 45°$, имеем $AH = BH$, поэтому точка M лежит внутри треугольника ABH, то есть угол ACB тупой. Пусть $BH = DE = AH = h$, тогда $AE = h\sqrt{3}$, $AC = BD = HE = h\sqrt{3} - h$, $CH = h(2 - \sqrt{3})$. Тогда

$$\operatorname{tg}\angle HBC = \frac{CH}{BH} = 2 - \sqrt{3}.$$

Значит, $\angle HBC = 15° = \angle MAB$.

Этот контрпример единственный. Может показаться, что есть более простой: треугольник ABC с прямым углом A и углом B, который равен 60°. В таком треугольнике точка H совпадает с вершиной A и все условия задачи как бы выполняются. Но в геометрической традиции принято считать различными точки, обозначенные разными буквами (иначе даже запись «прямая AB» станет бессмысленной). С возможным совпадением точек можно было бы согласиться, если бы медиана и высота в условии задачи не были поименованы.

Кроме того, есть ошибка и в приведённом решении: неявно предполагается, что точки E, C и D лежат на одной прямой (иначе невозможно применить теорему Фалеса), но этот факт ниоткуда не следует.

Если же в условии задачи оговорить, что треугольник остроугольный, то вывод о том, что он является равносторонним, станет верным. Приведём одно из возможных решений.

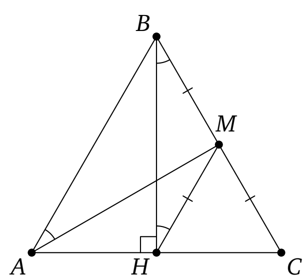


Рис. 2

Из условия задачи будет следовать, что HM — медиана прямоугольного треугольника BCH, проведённая к гипотенузе, значит, $HM = \frac{1}{2}BC = BM$ (см. рис. 2). Тогда треугольник BMH равнобедренный, значит, $\angle MHB = \angle HBC$. Используя также, что $\angle HBC = \angle MAB$ (по условию), получим, что $\angle MHB = \angle MAB$.

Таким образом, отрезок BM виден из точек A и H под одинаковыми углами, поэтому точки A, B, M и H лежат на одной окружности.

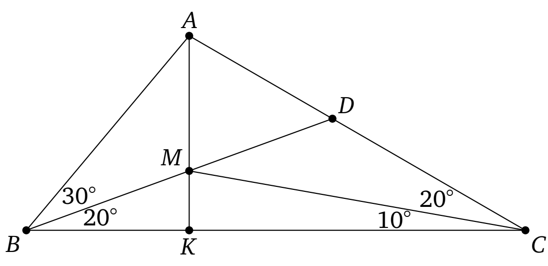
Так как прямой угол AHB вписанный, AB — диаметр этой окружности, и тогда вписанный угол AMB также прямой.

Следовательно, медиана AM треугольника ABC является также и его высотой, поэтому треугольник ABC равнобедренный: $AB = AC$. Кроме того, равны прямоугольные треугольники AMC и BHC ($AM = BH$, угол C общий). Следовательно, $AC = BC$. Таким образом, треугольник ABC равносторонний, что и требовалось.

90. Условие задачи корректно, а приведённое **решение ошибочно**. В нём используется, что $\angle AMB = 180^\circ - \angle KMB$, но это верно только в том случае, когда точки A, M и K лежат на одной прямой, что, собственно, и нужно доказать.

Приведём верное решение, использующее метод «обратного хода».

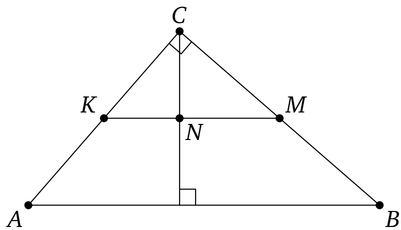
Пусть AK — высота треугольника ABC. Рассмотрим точку B', симметричную вершине B относительно AK, такую точку E на стороне AC, что $AB'E = 20^\circ$; и такую точку N на высоте AK, что $AN = AE$ (см. рисунок). Поскольку $\angle KAC = 60^\circ$, треугольник AEN равносторонний. Тогда $\angle EAB' = 20^\circ$, поэтому треугольник AEB' равнобедренный. Отсюда следует, что $B'E = EA = EN$, то есть и треугольник $EB'N$ равнобедренный. Теперь в четырёхугольнике $AEB'N$ считаются все углы: $\angle AEB' = 140^\circ$, $\angle ANB' = 110^\circ$, $\angle EB'N = 50^\circ$.



Значит, $\angle CEB' = 40^\circ = \angle B'AN$, $\angle CB'E = 110^\circ = \angle B'NA$. Используя равенства этих пар углов и учитывая, что $EB' = AN$, получим $\Delta CEB' = \Delta B'AN$. Следовательно, $CB' = B'N$, то есть треугольник $CB'N$ также равнобедренный. Кроме того, $\angle CB'N = \angle CB'E + \angle EB'N = 160^\circ$. Отсюда $\angle NCB' = 10^\circ$, $\angle NB'K = \angle NB'K = 20^\circ$, то есть точка M, указанная в условии, совпадает с N. Следовательно, $AM \perp BC$, что и требовалось.

91. В приведённом решении ошибок нет. Рассуждения для середин биссектрис действительно аналогичны приведённым: можно также рассмотреть «срединный» треугольник, вершины которого уже не совпадают с основаниями биссектрис, но середины биссектрис являются внутренними точками его сторон.

Но **середины высот могут лежать на одной прямой**. Действительно, в прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами, а середины катетов лежат на одной прямой с серединой высоты, проведённой к гипотенузе, что следует, например, из теоремы Фалеса (см. рисунок). Таким образом, в пунктах а) и б) получен верный ответ, а в пункте в) — неверный.

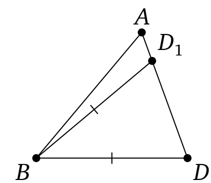


92. Рассуждения, приведённые в пункте а), ошибок не содержат. На первый взгляд кажется, что рассуждение пункта а) можно безболезненно повторить в пункте б), но это не так. Дело в том, что если треугольник ABC задан, то для любой внутренней точки D на стороне AB отношение радиусов R_1 и R_2 описанных окружностей треугольников ACD и BCD одно и то же!

Действительно, из теоремы синусов следует, что $R_1 = \frac{AC}{\sin\angle ADC}$, а $R_2 = \frac{BC}{\sin\angle BDC}$. Учитывая, что углы ADC и BDC смежные, получим $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AC}{BC}$. Поэтому хотя непрерывность по прежнему имеет место, но «перемены ролей» не произойдёт: независимо от положения точки D разность рассматриваемых радиусов имеет один и тот же знак. Таким образом, **для пункта б) сформулированное утверждение неверно**.

Отметим, что из приведённых выше рассуждений следует, что если треугольник ABC равнобедренный, то любая прямая, пересекающая его основание и проходящая через противолежащую вершину, разбивает его на два треугольника с равными радиусами описанных окружностей.

93. Треугольник однозначно определяется двумя сторонами и углом между ними, поэтому двух значений длины биссектрисы не может быть. **Верным ответом является только $L = 2\sqrt{3}$.** Это можно проверить, вычислив, например, эту биссектрису по формуле $L_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$. Либо можно объяснить, какой из двух ответов, полученных в решении, следует отбросить, например, так: заметим, что если $AD = \sqrt{3}$, то для треугольника ACD не выполняется неравенство треугольника. В этом случае $AD + CD < AC$, что невозможно. Сложнее понять, откуда взялся второй ответ.



Дело в том, что была применена теорема косинусов для треугольника ABD, который задан сторонами AB и BD и углом BAD. При данных в задаче условиях существует два различных треугольника с такими длинами сторон и величиной угла: ABD и ABD_1 (см. рисунок). Корень уравнения, посторонний для исходной задачи, соответствует длине стороны AD_1 треугольника ABD_1.

94. Понятно, что в этой задаче не может быть двух ответов. Объяснить это можно по-разному, например, представим себе, что мы построили такой вписанный квадрат. Если увеличить или уменьшить его сторону, то он перестанет быть вписанным. Более того, несложно определить, какой из двух ответов заведомо неверный. Действительно, поменяв местами два катета, мы не изменим сторону вписанного квадрата. Значит, ответ должен быть симметричен относительно длин катетов. Однако второй ответ этим свойством не обладает и не может быть верным. Вместе с тем само рассуждение ошибок не содержит и первый ответ верен.

Поясним, откуда возник «посторонний» ответ. При использовании теоремы Пифагора для треугольника BDE никак не фиксируются катеты этого треугольника. Иными словами, неизвестная величина может (а при таком решении и должна) оказаться как стороной квадрата, так и длиной отрезка BE. Поэтому и получен второй ответ.

Приведённое решение не является рациональным. Приведём два способа решения, в которых сразу получается единственный ответ.

Первый способ. Из подобия треугольников BDE и BAC следует, что $\frac{a-x}{a} = \frac{x}{b}$, и тогда $x = \frac{ab}{a+b}$.

Второй способ. По формуле $l = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$, выражающей длину биссектрисы треугольника через длины сторон, между которыми она проведена, и угол между ними, получим

$$CD = \frac{2ab}{a+b}\cos 45^\circ = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}; \quad x = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b}.$$

95. Условие задачи некорректно. В заданном треугольнике длина BK не может быть в 2,5 раза больше, чем радиус вписанной окружности. Покажем это.

Без ограничения общности можно считать, что угол A треугольника не меньше, чем угол C (что соответствует рисунку в условии). Так как угол B равен 60°, угол A меньше чем 120°. В четырёхугольнике $ABIK$: $\angle ABI = 30^\circ$, $\angle AKI = 90^\circ$, $\angle BAK < 120^\circ$, следовательно, $\angle BIK > 120^\circ$. Из треугольника IKB по теореме косинусов получим $BK^2 = r^2 + 4r^2 - 4r^2\cos\angle PBIK$. Так как $\cos\angle PBIK < -0{,}5$, получаем, что $BK > r\sqrt{7} > 2{,}5r$.

При этом ход решения в целом верен, но содержит один недочёт. Стоило пояснить, почему в данном случае точки B, I и K не лежат на одной прямой (такая ситуация может возникнуть, если ABC — равнобедренный треугольник). Это следует из того, что $BI = 2r$, $IK = r$, $BK = 2{,}5r$, то есть $BK < BI + IK$.

Противоречивость условия задачи можно выявить и по-другому, отталкиваясь от полученного ответа. Исходя из того, что $\sin\varphi = 0{,}65$, *вычислим высоту BH данного треугольника*:

$$BH = BK \cdot \sin\varphi = 2{,}5r \cdot 0{,}65 = \frac{13}{8}r < 2r,$$

что невозможно, так как в любом треугольнике высота больше чем $2r$.

96. Ошибочным является утверждение, что отрезок MN — искомое ГМТ. В приведённом решении верно обосновано, что середина отрезка KL лежит на MN, но не все точки отрезка MN могут являться серединами отрезка KL, то есть неаккуратно проведено рассуждение «в обратную сторону».

Действительно, пусть, например, точка E расположена достаточно близко к точке N (см. рис. 1), тогда точка L окажется не на стороне BC, а на её продолжении.

Для того чтобы верно определить искомое ГМТ, можно провести, например, такое рассуждение. Пусть PQ — средняя линия треугольника ABC, параллельная AC, тогда $APQC$ — равнобокая трапеция (см. рис. 2). Проведём её диагонали и среднюю линию MN. Пусть

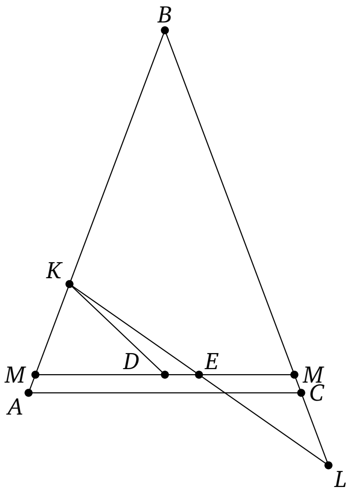


Рис. 1

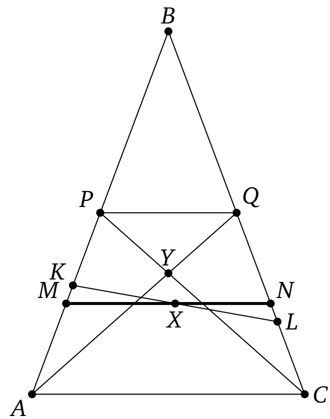
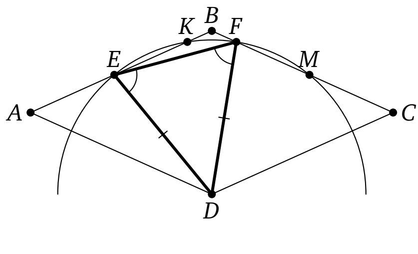


Рис. 2

X и Y — точки пересечения AQ и CP с MN соответственно. Тогда **искомым ГМТ является отрезок XY**. Для этого отрезка можно практически дословно повторить рассуждения, приведённые в решении, и ошибки уже не будет.

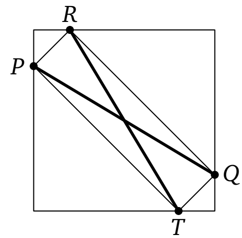
Четырёхугольники

97. Доказываемое **утверждение неверно**. Действительно, рассмотрим ромб $ABCD$, в котором углы B и D тупые. Так как основания высот ромба, проведённых, например, из вершины D, лежат на сторонах ромба, найдётся окружность с центром D, которая пересечёт каждую из сторон AB и BC в двух точках (E, K и F, M соответственно, см. рисунок). Тогда $\angle DEF = \angle DFE$ (углы при основании равнобедренного треугольника DEF), но $BE \neq BF$.



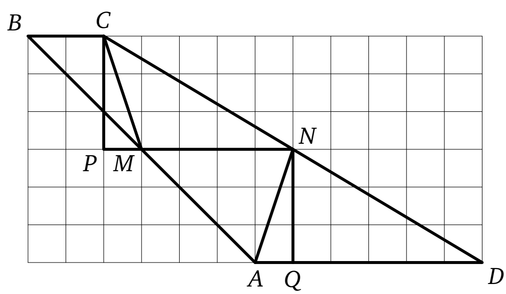
Отсюда понятен пробел в решении: утверждение, что треугольники DEA и DFC равны, ошибочно. Действительно, в этих треугольниках $DA = DC$, $DE = DF$ и $\angle A = \angle C$. Согласно так называемому «четвёртому признаку равенства треугольников» отсюда следует, что либо эти треугольники равны, либо $\angle DEA + \angle DFC = 180^\circ$ (что и выполняется в данном случае).

98. Из перпендикулярности указанных отрезков действительно следует их равенство, а **обратное утверждение неверно**. Контрпример изображён на рисунке.



Тогда понятна ошибка в этой части решения — проведённые рассуждения опирались на конкретный чертёж.

99. Ответ неверный. Четырёхугольник $ABCD$, удовлетворяющий условию, может являться трапецией. При этом найти ошибку весьма непросто. Оказывается, углы CMP и MNA не обязательно накрест лежащие. Контрпример удобно построить на клетчатой бумаге (см. рисунок).



100. Ответ неверный. Ошибка — в первой же фразе решения: для вывода о подобии трапеций недостаточно равенства соответствующих углов (тем более что равенство соответствующих углов при одной паре оснований влечёт за собой и равенство углов при другой паре). Необходимо ещё, чтобы отношения оснований у этих трапеций были равными. Приведём два способа построения контрпримера.

Первый способ. На стороне AB равностороннего треугольника ABC отметим точки K и L, а на стороне CB — точки D и E так, что

$AK = BL = CD = BE$ (см. рис. 1). Тогда $AD = AE$. Значит, равнобокие трапеции $AKDC$ и $ALEC$ искомые.

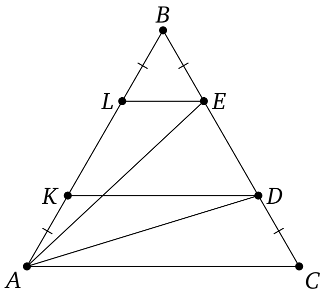


Рис. 1

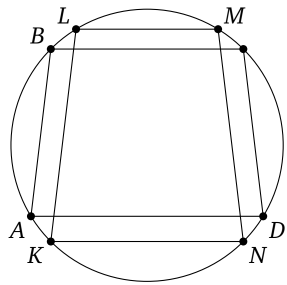


Рис. 2

Второй способ. Рассмотрим две равнобокие трапеции $ABCD$ и $KLMN$ с соответственно параллельными сторонами, вписанные в одну и ту же окружность (см. рис. 2). Их углы соответственно равны, что следует из параллельности сторон, тогда равны и их диагонали (по следствию из теоремы синусов).

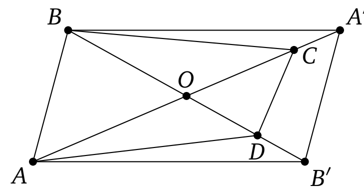
101. Условие задачи некорректно, так как из равенства периметров четырёх треугольников, указанных в условии, следует, что исходный четырёхугольник — ромб. Тогда радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, должны быть равны. Докажем это.

Первый способ. Предположим сначала, что $ABCD$ — не параллелограмм. Тогда без ограничения общности можно считать, что $OA \geqslant OC$ и $OB \geqslant OD$. Пусть точки A' и B' — образы точек A и B при симметрии с центром O (см. рисунок). Допустим, хотя бы одна из точек C или D не совпадает с вершинами A' или B' параллелограмма $ABA'B'$. Из условия задачи следует, что равны периметры треугольников $A'OB'$ и COD, то есть

$$OA' + OB' + A'B' = OC + OD + CD.$$

Следовательно, $A'C + B'D + A'B' = CD$, что противоречит существованию четырёхугольника $A'CDB'$ (даже когда он «вырождается» в треугольник).

Таким образом, $ABCD$ — параллелограмм. Тогда из равенства периметров треугольников AOB и BOC следует, что $AB = BC$, то есть $ABCD$ — ромб.



Второй способ. Докажем сначала, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Предположим, что это не так. Без ограничения общности можно считать, что угол AOB острый, тогда угол BOC тупой (см. рисунок). По следствию из теоремы косинусов из треугольника AOB получим, что $AB^2 < OA^2 + OB^2$, а из треугольника BOC получим, что $BC^2 > OC^2 + OB^2$. Отсюда следует, что $OC < OA$.

Действительно, если $OC \geqslant OA$, то

$$BC^2 > OC^2 + OB^2 \geqslant OA^2 + OB^2 > AB^2,$$

то есть $BC > AB$, и тогда периметры треугольников AOB и BOC равными быть не могут.

Проведя аналогичное рассуждение для треугольников AOD и COD, получим, что $OC > OA$. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение неверно, то есть диагонали AC и BD перпендикулярны. Из теоремы Пифагора следует, что если два прямоугольных треугольника с общим катетом имеют равные периметры, то такие треугольники равны. Таким образом, $ABCD$ — ромб.

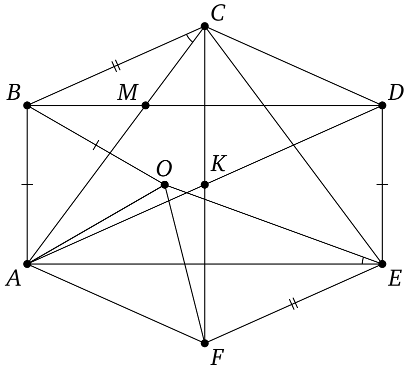
Многоугольники

102. Условие задачи корректно, а **в решении есть принципиальная ошибка**: из того, что треугольники DFB и ACE симметричны, не следует, что точка O — их общий центр. На самом деле их центры симметричны относительно точки O, но не совпадают с ней (если данный шестиугольник не является правильным). Следствием этой ошибки, в частности, является полученное равенство $AO = BO$, равносильное равенству диагоналей AD и BE, которое в общем случае выполняться не обязано. Понятно также, что искомая точка другая.

Приведём два способа верного решения задачи.

Первый способ. Построим внутри шестиугольника равносторонний треугольник AOB и докажем, что его вершина O искомая. Для этого потребуется доказать, что треугольники EOF и COD равносторонние (см. рисунок).

Из условия задачи следует, что $ABDE$ — параллелограмм, значит, $BD \parallel AE$ и $\angle CBD = \angle AEF$ (углы с противоположно направленными сторонами).



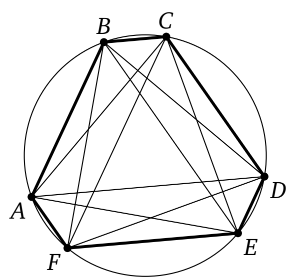
Рассмотрим поворот с центром A на угол 60° по часовой стрелке. Образами точек C и B будут являться точки E и O соответственно, поэтому образом треугольника ABC будет треугольник AOE. Значит, эти треугольники равны. Поэтому $OE=BC=EF$ и $\angle OEA=\angle BCA$.

Пусть AC пересекает BD в точке M. Тогда $\angle CMD=\angle CAE=60^\circ$. Следовательно,

$$\angle OEF=\angle OEA+\angle AEF=\angle BCA+\angle CBD=\angle CMD=60^\circ.$$

Таким образом, в равнобедренном треугольнике OEF есть угол 60°, поэтому этот треугольник равносторонний.

Аналогично доказывается, что и треугольник COD равносторонний.



Второй способ. Как было показано в начале решения, данный шестиугольник центрально-симметричен. Пусть K — центр симметрии. Рассмотрим композицию двух поворотов: на 120° против часовой стрелки вокруг центра треугольника ACE и на 180° вокруг точки K. Она является поворотом на 60° вокруг некоторой точки O, причём образами вершин A, C и E являются вершины B, D и F соответственно (см. рисунок). Отсюда и следует утверждение задачи.

103. Утверждение задачи неверно. Приведём контрпример. Рассмотрим равносторонние треугольники ACE и BDF, вписанные в одну окружность и расположенные так, как показано на рисунке. Тогда шестиугольник $ABCDEF$ удовлетворяет условию задачи, но его диагонали AD, BE и CF пересекаются попарно.

Перейдём к решению. В нём, разумеется, есть ошибки. В первой фразе решения утверждается, что четырёхугольник $ABDE$ — равнобокая трапеция, так как по условию параллельны стороны AB и DE и равны стороны BD и AE. Это неверно: такой четырёхугольник также может быть параллелограммом. Поскольку параллелограмм, вообще говоря, нельзя вписать в окружность, дальнейшие рассуждения теряют смысл.

Кроме того, три окружности, упомянутые в решении, не обязательно различны: они могут совпадать, и тогда теорему о радикальном центре применить нельзя. Именно это наблюдается в контрпримере, указанном выше. Строгости ради отметим, что и у различных окружностей может не быть радикального центра, если их центры лежат на одной прямой или окружности концентрические.

Разберёмся, какими могут быть шестиугольники из условия задачи. Пусть одна из «трапеций», упомянутых в решении, например $ABDE$, *на самом деле является параллелограммом. Пусть* O *— его центр. Симметрия относительно* O *переведёт лучи* AF *и* EF *в параллельные им лучи* DC *и* BC, *то есть переведёт* F *в* C. *Это значит, что* AD, BE *и* CF *пересекаются в одной точке — их общей середине* O. *Также это означает, что все четвёрки точек из решения являются вершинами параллелограммов.*

Нетрудно построить пример такого шестиугольника. Рассмотрим правильный треугольник и точку, достаточно близкую к его центру. Вершины этого треугольника и треугольника, симметричного ему относительно выбранной точки, образуют вершины шестиугольника, удовлетворяющего условиям.

Пусть теперь $ABDE$ *— действительно равнобедренная трапеция (и все остальные четвёрки тоже, так как выше показано, что если среди них есть хотя бы один параллелограмм, то параллелограммами будут все). При симметрии относительно её оси равносторонний треугольник* AEC *переходит в равный ему треугольник* BDF, *то есть* C *переходит в* F. *Отсюда следует, что* $AF = BC$, $FE = CD$ *и* $AB \parallel FC \parallel DE$. *Аналогичное рассуждение для остальных сторон показывает, что все главные диагонали параллельны не смежным с ними сторонам, а стороны шестиугольника равны через одну. Но тогда, например,* $ADEF$ *— равнобедренная трапеция (ясно, что* AF *не параллельна* DE, *потому что* $CF \parallel DE$), *то есть* F *лежит на окруж-*

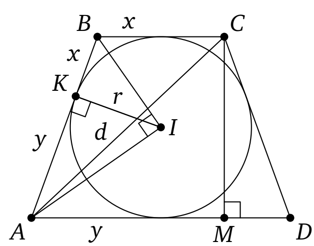
ности, описанной около $ABDE$, и то же можно сказать о точке C. Это значит, что наш шестиугольник вписан в окружность и имеет в точности такой вид, как в приводившемся ранее контрпримере. Его главные диагонали будут пересекаться в одной точке только если он будет правильным.

Таким образом, конструкция с тремя хордами не только не может служить основой доказательства, но и в принципе невозможна в условиях задачи.

Площади

104. Приведённые рассуждения сами по себе ошибок не содержат, но полученный ответ нереален: площадь трапеции не может быть меньше площади вписанного в неё круга. Отсюда понятно, что **противоречивы числовые данные в условии** задачи. Это можно заметить и до получения ответа. Уже на предыдущем шаге видим, что полученное значение длины AM больше CM, то есть диаметр вписанного круга больше средней линии трапеции, что невозможно (*либо, учитывая, что $CD = AM$, заметим, что в треугольнике CMD катет больше гипотенузы, что также невозможно*)!

Проведём исследование данных задачи и покажем, как их можно изменить, чтобы условие задачи стало корректным. Для этого достаточно найти соотношение между диагональю равнобокой трапеции и радиусом вписанного в неё круга (площадь круга однозначно определяет его радиус). Пусть диагональ равна d, радиус — r, а длины оснований BC и AD равны $2x$ и $2y$ соответственно (см. рисунок).



В приведённом «решении» верно указано, что отрезок AM равен средней линии трапеция, значит,

$$x + y = \sqrt{d^2 - 4r^2}. \qquad (*)$$

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Для того чтобы условие задачи было корректным, необходимо и достаточно, чтобы средняя линия трапеции была больше, чем диаметр вписанного круга, то есть $x + y > 2r$. Учитывая равенство $(*)$, получим $\sqrt{d^2 - 4r^2} > 2r$, следовательно, $d > 2r\sqrt{2}$.

Второй способ. Заметим, что $\angle AIB = 90°$ (I — центр вписанной окружности), а точка K касания вписанной окружности со стороной AB делит эту сторону на отрезки $BK = x$ и $AK = y$ (равенство отрезков касательных, проведённых из одной точки). Тогда из прямоугольного треугольника AIB получаем $r^2 = xy$. Таким образом, x и y — корни квадратного уравнения $t^2 - \sqrt{d^2 - 4r^2} \cdot t + r^2 = 0$. Для корректности условия задачи необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело два различных корня, значит, дискриминант должен быть положительным. Следовательно, $d^2 - 8r^2 > 0$, то есть $d > 2r\sqrt{2}$.

В нашем случае полученное условие не выполняется, так как $2{,}5 < 2\sqrt{2}$. Отметим, что исследование можно также провести, рассматривая треугольник CMD и используя в нём либо теорему Пифагора, либо тригонометрические функции.

105. Приведённые рассуждения сами по себе ошибок не содержат, но **условие задачи некорректно**: такой трапеции не существует. Это можно показать различными способами.

Первый способ. В тексте с учётом данных задачи было получено, что $DH = 3$ см, значит, $AH = BC + DH = 9$ см, то есть в прямоугольном треугольнике ACH гипотенуза AC меньше катета AH, что невозможно.

Второй способ. Исключим из условия длину основания BC и найдём её исходя из других данных задачи. Первые несколько шагов совпадут с приведённым решением. Проведём высоту CH. Так как $\angle CAD = 30°$, получаем, что $CH = \frac{1}{2}AC = 4$ см. Треугольник CDH — египетский, значит, $DH = 3$ см. Далее: $AH = AC \cdot \cos 30° = 4\sqrt{3}$ см. Так как трапеция равнобокая,

$$BC = AH - DH = 4\sqrt{3} - 3 \text{ см}.$$

Это противоречит условию задачи, где сказано, что $BC = 6$ см.

Третий способ. Рассмотрим треугольник ABC, в нём $\angle ACB = \angle CAD = 30°$. По теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle ACB = 100 - 48\sqrt{3}.$$

Это противоречит условию задачи, из которого следует, что $AB^2 = 25$.

Таким образом, к ошибке привела избыточность условия задачи.

106. Доказательство того, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный, ошибок не содержит. Эта часть задачи является «классической», а рассмотренную конфигурацию иногда называют «треугольником Шебаршина» (*по имени автора первой публикации о ней, которая была более* 60 *лет назад*). Однако **треугольника $A_1B_1C_1$ с длинами сторон, указанными в условии задачи, не существует**. Покажем это, найдя границы, в которых может находиться отношение катетов этого треугольника.

Обозначим углы A и C треугольника ABC через α и γ соответственно. Угол BC_1B_1 — угол между биссектрисами внешних углов треугольника BCB_1, значит, $\angle BC_1B_1 = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Аналогично

$$\angle BA_1B_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольников BCB_1 и BA_1B_1 по теореме синусов получаем

$$\frac{B_1C_1}{BB_1} = \frac{\sin 60°}{\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)} \quad \text{и} \quad \frac{B_1A_1}{BB_1} = \frac{\sin 60°}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Тогда

$$\frac{B_1C_1}{B_1A_1} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Пусть $\frac{\gamma}{2} = x$, тогда, учитывая, что $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 30°$, получим

$$\frac{B_1C_1}{B_1A_1} = \frac{\cos(30° - x)}{\cos x} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{2}.$$

Так как $0 < x < 30°$, получаем, что $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{B_1C_1}{B_1A_1} < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

В нашем случае отношение катетов (большего к меньшему) равно $\frac{5}{4}$ или $\frac{4}{3}$. Оба числа не принадлежат указанному промежутку.

107. 1. Сформулированное **утверждение неверно**.

Контрпримером является, дельтоид $ABCD$ (см. рис. 1), где K — середина диагонали AC. В таком четырёхугольнике $\Delta ABC = \Delta ADC$, а отрезки BK и DK — медианы этих треугольников.

2. Утверждение леммы также неверно.

Указанное ГМТ представляет собой объединение двух прямых: прямой, содержащей отрезок AM, и прямой, проходящей через точку А параллельно BC (см. рис. 2). Доказательство этого факта несложно восстановить, используя рис. 3 и 4.

Утверждение леммы станет верным, если его сформулировать следующим образом: «Пусть на разных сторонах угла A взяты точки B и C, а точка M — середина отрезка BC. Тогда луч AM является геомет-

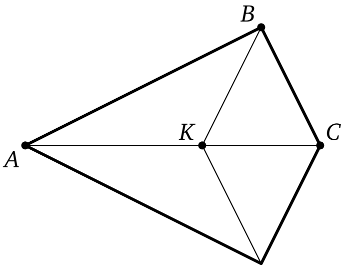


Рис. 1

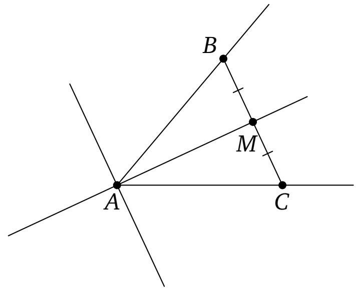


Рис. 2

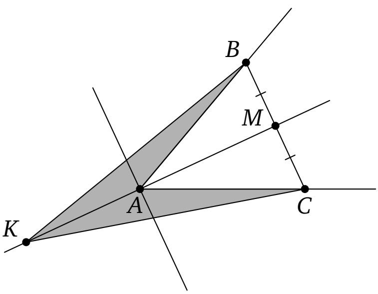


Рис. 3

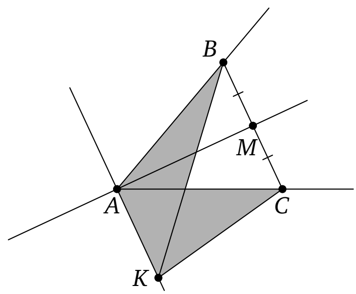


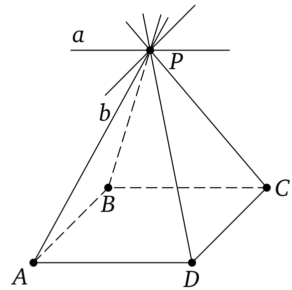
Рис. 4

рическим местом точек K, **лежащих внутри угла A** и обладающих следующим свойством: треугольники ABK и ACK равновелики».

3. Доказательство леммы содержит две ошибки. Первая заключается в том, что рассмотрен только случай, когда точка K расположена внутри угла. Эту ошибку можно устранить, сформулировав лемму так, как показано выше. Вторая ошибка аналогичным образом не устраняется. Во второй части доказательства в самом конце утверждается: «Случаи, когда точка K лежит между точками A и L или же K совпадает с точкой L доказываются (как и в первой части) аналогичными рассуждениями».

На самом деле аналогичное рассуждение в этом случае (в отличие от доказательства в первой части) не проходит. А именно, из того, что площадь треугольника ABL меньше площади треугольника ACL, а площадь треугольника BKL меньше площади треугольника CKL, не следует, что площадь треугольника ABK меньше площади треугольника ACK (см. рис. 2 на 54), поэтому никакого противоречия мы не получится (из того, что $a < b$ и $c < d$, не следует, что $a - c < b - d$).

4. Доказательство исходного утверждения содержит следующую ошибку. Из того, что точка должна лежать на лучах AM и CM, не следует, что она должна совпадать с точкой M. Возможен случай, когда лучи AM и CM лежат на одной прямой. В этом случае точка K должна лежать на общей части лучей AM и CM, что и реализуется в дельтоиде.



108. Сформулированное **утверждение неверно**. Действительно, рассмотрим, например, четырёхугольную пирамиду $PABCD$ (см. рисунок). Продлим её боковые рёбра за вершину P. Продолжения рёбер образуют четырёхгранный угол, который является частью пространства, имеющую с пирамидой общую вершину P. Кроме того, рассмотрим прямые a и b пересечения плоскостей противолежащих боковых граней. Лучи этих прямых с началом в точке P вместе с каждой парой соседних продолжений рёбер образуют трёхгранные углы, которые также являются частями пространства, имеющей с пирамидой общую вершину P. Значит, при подсчёте общего количества частей эту вершину потребуется учесть ещё 4 раза. Таким образом, искомое количество частей пространства равно 23 (а согласно условию их должно быть 19).

Понятно, что ссылка в решении на куб или тетраэдр (для которых утверждение верно) неправомерна.

Существуют и другие примеры. Вспомогательной иллюстрацией допущенной ошибки может служить рассмотрение аналогичной ситуации на плоскости. Найдём количество частей, на которые разбивают плоскость прямые, содержащие стороны, для двух четырёхугольников. Для квадрата их 9 (*внутренняя область,* 4 *примыкают к сторонам и* 4 *примыкают к вершинам, что аналогично формулировке задачи*). *Но для трапеции их уже* 10 (*дополнительная часть плоскости образована пересекающимися прямыми, содержащими боковые стороны*). *Это позволяет, в частности, построить аналогичный контрпример в пространстве*: *если рассмотреть четырёхугольную усечённую пирамиду, то возникнет часть пространства, которая вообще не имеет с пирамидой общих точек.*

109. Условие задачи противоречиво. Это можно обнаружить непосредственной проверкой равенства $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где a, b

и c — измерения прямоугольного параллелепипеда, d — его диагональ. Действительно,

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=9, \quad \text{а } d^2=6.$$

Дело в том, что если заданы два угла между диагональю прямоугольного параллелепипеда и его гранями, то третий угол определяется однозначно. Действительно, пусть эти углы равны α_1, β_1 и γ_1, тогда измерения параллелепипеда соответственно равны $d\sin\alpha_1$, $d\sin\beta_1$ и $d\sin\gamma_1$. Подставляя эти значения в равенство $d^2=a^2+b^2+c^2$, получим, что $\sin^2\alpha_1+\sin^2\beta_1+\sin^2\gamma_1=1$.

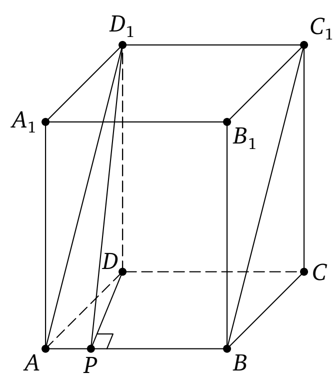
Отметим также, что углы α, β *и* γ, *которые диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его рёбрами, дополняют рассмотренные углы до* $90°$. *Поэтому для таких углов выполняется равенство* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

И вообще, если вектор $\vec{a}$ *в пространстве образует с осями ортогональной системы координат углы* α, β *и* γ, *то*

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

поэтому любой ненулевой вектор $\vec{a}$ *в декартовой системе координат можно записать в виде* $\vec{a}=|\vec{a}|(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$. *В этом случае* $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *и* $\cos\gamma$ *называются направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$.

110. Условие задачи корректно, и получен **верный ответ**, но решение содержит ошибки. Прежде всего, ошибочно утверждение о перпендикулярности сечения и грани AA_1D_1D, а равенство боковых граней параллелепипеда действительно имеет место, но оно следует из того, что эти грани являются прямоугольниками с соответственно равными сторонами. Неверно также указано, что $\angle D_1AD=45°$, так как этот угол не является линейным углом двугранного угла при ребре AB, образованного сечением и основанием. Значит, боковая грань не является ортогональной проекцией сечения ABC_1D_1.



Приведём верное решение (см. рисунок). Пусть DP — высота ромба $ABCD$, тогда $D_1P\perp AB$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Следовательно, угол D_1PD — линейный угол двугранного угла, образованного сечением и основанием параллелепипеда. Так как $\angle D_1PD = 45^\circ$, получаем, что $D_1D = DP$. По условию $AB \cdot D_1P = Q$. Тогда

$$S_{CDD_1C_1} = CD \cdot D_1D = AB \cdot D_1P \cdot \sin\angle D_1PD = \frac{Q}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 4 \cdot \frac{Q}{\sqrt{2}} = 2Q\sqrt{2}$.

111. Указанный **ответ неверен**. В предложенном решении верно обосновано, что точки указанных прямых принадлежат искомому ГМТ, а также доказано, что в плоскости γ нет других точек, ему принадлежащих. В действительности существуют точки пространства, не лежащие в плоскости γ, и удовлетворяющие условию задачи.

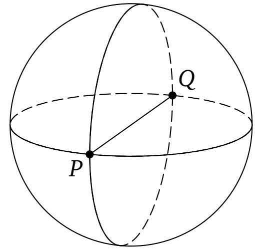
Введя декартову систему координат в пространстве и используя затем методы аналитической геометрии, можно доказать, что **искомым ГМТ является поверхность второго порядка, называемая гиперболическим параболоидом** (см., например, Я. П. Понарин, «Элементарная геометрия» (Т. 2. М.: МЦНМО, 2006. С. 69, § 2.2) или Я. П. Понарин, «Аффинная и проективная геометрия» (М.: МЦНМО, 2009. С. 143, § 40)).

112. Условие задачи корректно, а решение и ответ неверные. При этом сами по себе рассуждения ошибок не содержат, но рассмотрен только один возможный случай. Если плоскости боковых граней образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды может проектироваться не только в центр вписанной в основание окружности, но и в центры его вневписанных окружностей (*окружностей, которые касаются стороны треугольника и продолжений двух других сторон*). Рассуждения, доказывающие этот факт, аналогичны тем, которые приведены в «решении», при условии, что высота пирамиды лежит вне её.

Таким образом, возможны ещё три случая. Для вычисления радиусов вневписанных окружностей удобно использовать формулу $r_a = \frac{S}{p-a}$, где p и S — полупериметр и площадь треугольника соответственно, а a — длина той стороны, которой касается эта вневписанная окружность. Так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6, \quad p = \frac{AC + BC + AB}{2} = 6,$$

радиусы вневписанных окружностей равны 2, 3 и 6. Соответствующие значения высоты пирамиды: $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. **Верный ответ**: $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$.



113. Утверждение задачи неверно. Действительно, рассмотрим, например, какую-нибудь сферу и две её большие окружности, пересекающиеся в точках P и Q (см. рисунок). Эти окружности однозначно задают сферу с диаметром PQ. Но через точки P и Q проходит бесконечно много окружностей, не лежащих в плоскостях уже рассмотренных окружностей, для которых PQ не будет диаметром, поэтому ни одна из таких окружностей не принадлежит рассмотренной сфере, а условие задачи при этом выполняется.

Ошибка в решении произошла из-за того, что в условии задачи не указано, что точки попарного пересечения окружностей должны быть различными. Если добавить это условие, то утверждение задачи станет верным. Приведённое решение также станет практически верным, если убрать неверное утверждение: «...через любые четыре точки пространства можно провести сферу» (указанные точки A, B, P и Q действительно определяют сферу).

114. Как ответ, так и решение верными не являются. Ошибка — перенос возможного определения касающихся окружностей из планиметрии в стереометрию. В планиметрии касание двух окружностей равносильно тому, что эти окружности имеют ровно одну общую точку, а в стереометрии это не так.

Две окружности в пространстве называются касающимися, если существует прямая, проходящая через их общую точку, которая является касательной к каждой окружности *(см. В. В. Прасолов, «Задачи по стереометрии»* (*М.: МЦНМО*, 2010, *глава* IV)). Отметим, что такое определение чаще всего используется и на плоскости. К сожалению, ни в одном из школьных учебников стереометрическое определение не приводится, да и планиметрическое есть далеко не во всех. Понятно, что такое определение наиболее логично не только из-за его «универсальности», но и с точки зрения того, что касательная к линии — это предельное положение секущей.

На самом деле сформулированное **утверждение верно**. Докажем это.

Пусть это не так и сфера (или плоскость) α содержит первую и вторую окружность, а сфера (или плоскость) β — вторую и третью.

Тогда линией пересечения α и β является вторая окружность. Но общая точка первой и третьей окружностей должна принадлежать этой линии пересечения, то есть три окружности имеют общую точку — противоречие.

Задачи на экстремальные значения

115. Как ответ, так и решение неверны. Ошибка допущена в заключительной части приведённого решения и состоит в следующем: если сумма длин сторон AC и BC фиксирована, то областью определения функции $\operatorname{tg}\alpha$ будет являться только часть промежутка $(0; 90^\circ)$, а именно $(0, \alpha_{\max}]$, где $\alpha_{\max} = \arcsin\dfrac{AB}{AC+BC}$. На самом деле **наибольшее значение длины высоты** существует и **достигается в случае равнобедренного треугольника *ABC*** $(AC = BC)$. Доказать это можно многими способами.

Первый способ. Исправим заключительную часть решения. Пусть $AC + BC = d$, $\angle ACB = \gamma = 2\alpha$. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\gamma =$$
$$= (AC+BC)^2 - 2AC\cdot BC(1+\cos\gamma) = d^2 - 4AC\cdot BC\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - AB^2}}{2\sqrt{AC\cdot BC}}$$

($\alpha < 90^\circ$, поэтому $\cos\alpha > 0$). Поскольку на промежутке $(0; 90^\circ)$ функция $\cos\alpha$ убывает, α достигает наибольшего значения, когда $\cos\alpha$ достигает наименьшего значения. Так как значение выражения $d^2 - AB^2$ фиксировано, значение $AC\cdot BC$ должно быть наибольшим.

Наибольшее значение произведения двух положительных чисел с фиксированной суммой достигается в случае их равенства (это следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим: $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, равенство в котором достигается, если $a = b$).

Таким образом, наибольшее значение α (равное $\alpha_{\max}$), а значит, и наибольшее значение длины высоты достигается в равнобедренном треугольнике ABC.

Второй способ. Выразим двумя способами площадь треугольника:

$$S = \frac{AB\cdot h}{2} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)},$$

где p — полупериметр треугольника ABC. Тогда

$$h=\frac{2\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}}{AB}=\frac{2\sqrt{p(p-AB)}}{AB}\cdot\sqrt{(p-BC)(p-AC)}.$$

Так как первый сомножитель в полученном выражении принимает фиксированное значение, достаточно найти, когда выражения $\sqrt{(p-BC)(p-AC)}$ принимает наибольшее значение при условии, что сумма $BC+AC$ фиксирована.

Для этого можно вновь воспользоваться неравенством между двумя средними, но можно рассуждать и иначе. Например, пусть $AC+BC=d$, $AC=\frac{d}{2}-x$, $BC=\frac{d}{2}+x$. Тогда

$$(p-BC)(p-AC)=\frac{1}{4}(AB+2x)(AB-2x)=\frac{AB^2-4x^2}{4}.$$

Значит, наибольшее значение выражения $\sqrt{(p-BC)(p-AC)}$ достигается в случае, когда $x=0$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

Третий способ. Геометрическим местом точек C, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек A и B постоянна, является эллипс, фокусы которого — точки A и B. Его уравнение в декартовой системе координат: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$ и $b>0$ — длины полуосей эллипса). Длина высоты треугольника ABC, опущенной на сторону AB, равна расстоянию от точки C до оси абсцисс, то есть равна $|y|$. Так как $|y|=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, его наибольшее значение достигается при $x=0$, то есть если точка B принадлежит малой полуоси эллипса. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

116. 1. Неверно, что искомая точка лежит на отрезке FE. Если бы это было так, то подобное рассуждение можно было бы провести, заменив вершину E на любую другую вершину данного пятиугольника. Тогда в одной точке должны пересечься пять отрезков, каждый из которых соединяет вершину пятиугольника с точкой пересечения двух диагоналей, которые попарно соединяют остальные четыре вершины.

Несложно построить пятиугольник, для которого это не так, например, см. рис. 1.

2. Неверно также, что искомая точка лежит внутри угла AFD, образованного диагоналями AC и BD, поэтому вывод о том, что точка минимума должна лежать внутри пятиугольника, образованного пятью диагоналями исходного пятиугольника, также неверен.

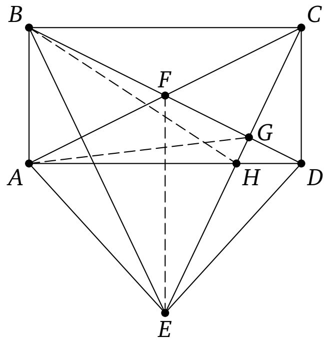


Рис. 1

Для того чтобы построить контрпример, необходимо предварительно доказать, что искомая точка O либо совпадает с одной из вершин выпуклого пятиугольника, либо удовлетворяет равенству

$$\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OB}_1+\overrightarrow{OC}_1+\overrightarrow{OD}_1+\overrightarrow{OE}_1=\vec{0},$$

где каждое слагаемое — единичный вектор, направленный от O к соответствующей вершине пятиугольника $ABCDE$. Это можно получить, либо пользуясь «механической» интерпретацией, либо с помощью аппарата математического анализа. Из аналогичных соображений доказывается, что если такая точка O существует, то она единственная.

Построим контрпример. Для этого выберем произвольную точку O на плоскости и построим единичный вектор $\overrightarrow{OE}_1$. Затем построим единичные векторы $\overrightarrow{OA}_1$ и $\overrightarrow{OD}_1$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\angle E_1OA_1=\angle E_1OD_1=\pi-\arccos\frac{1}{6},$$

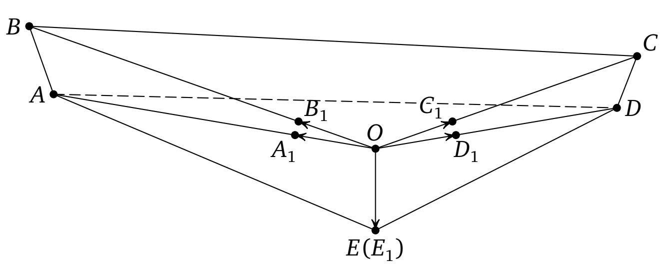


Рис. 2

и единичные векторы $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ так, чтобы

$$\angle E_1OB_1 = \angle E_1OC_1 = \pi - \arccos\frac{1}{3}$$

(точки A_1 и B_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой OE_1, а точки C_1 и D_1 — в другой, см. рис. 2).

Сумма построенных векторов равна $\overrightarrow{0}$. Действительно, сумма их ортогональных проекций на направление OE_1 равна

$$1 + \cos\angle E_1OA_1 + \cos\angle E_1OB_1 + \cos\angle E_1OC_1 + \cos\angle E_1OD_1 = 0,$$

и сумма их ортогональных проекций на направление, перпендикулярное OE_1, также равна нулю (из симметрии).

Зададим расположение вершин пятиугольника $ABCDE$. Пусть точка E совпадает с E_1. Точки B и C выберем произвольно на лучах OB_1 и OC_1 соответственно. Точки A и D выберем на лучах OA_1 и OD_1 так, чтобы точки A и O лежали в разных полуплоскостях относительно прямой BE, а точки D и O — в разных полуплоскостях относительно прямой CE, и так, чтобы $ABCDE$ был выпуклым пятиугольником. В построенном пятиугольнике искомая точка минимума либо совпадает с одной из его вершин, либо совпадает с точкой O. В любом случае точка минимума лежит вне «диагонального» пятиугольника. (Точка O не может лежать внутри «диагонального» пятиугольника, так как точки O и E лежат в одной полуплоскости относительно диагонали AD.)

3. Даже если в некотором пятиугольнике P точка минимума действительно принадлежит пятиугольнику P_1, образованному его диагоналями, то эта точка не обязана являться точкой минимума для нового пятиугольника P_1.

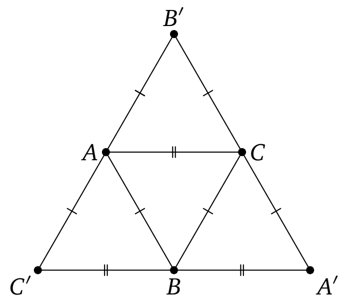
Можно также привести численный пример.

4. Единственным утверждением, которое *может быть верным* в приведённом решении, является высказывание о том, что последовательность пятиугольников, образованных диагоналями, имеет предельную точку. Но для доказательства этого необходимо, чтобы последовательность диаметров этих пятиугольников стремилась к нулю, что совсем неочевидно.

Из всего сказанного выше очевидным образом вытекает, что **приведённый ответ** также **неверен**. Более того, известно, что задача не имеет точного решения, то есть в общем случае искомую точку минимума (так называемую точку Торричелли) в пятиугольнике с помощью циркуля и линейки построить нельзя. Однако можно построить итерационный процесс (*например, основанный на методе Франка—Вульфа*).

Отметим также, что невозможность построения точки минимума при помощи циркуля и линейки связана с тем, что уравнение пятой степени в общем виде нельзя решить в радикалах.

117. Условие задачи корректно, а ответ и решение неверные. Для того чтобы кратчайшим путём проползти из M в N, муравей обязан пересечь ребро BC, так как точки M и N находятся в разных полупространствах относительно плоскости, проходящей через BC и перпендикулярной ABC. В приведённом решении это не так!



Приведём верное решение. Рассмотрим произвольный путь муравья из точки M в точку N по столу и по грани PBC пирамиды (см. рисунок). Этот маршрут (как указано выше) должен пройти через некоторую точку Q ребра BC.

Пусть K — середина отрезка AC, тогда $QN = QK$ (соответствующие отрезки в равных треугольниках PBC и ABC). Поэтому расстояние, пройденное муравьём, равно

$$MQ + QN = MQ + QK \geqslant MK$$

(неравенство треугольника). Равенство достигается тогда и только тогда, когда точка Q совпадает с точкой R пересечения MK и BC.

Таким образом, **длина кратчайшего пути муравья равна длине отрезка MK**, которую можно вычислить, например, по теореме косинусов из треугольника AMK:

$$MK^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cdot \cos 60^\circ = 9 + \frac{1}{4} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{4};$$

$MK = \dfrac{\sqrt{31}}{2}$.

В этом решении по сути была использована развёртка боковой поверхности пирамиды.

118. Прежде всего заметим, что полученный «ответ» неверный, так как грани заданного тетраэдра не могут быть прямоугольными равнобедренными треугольниками. Действительно, если предположить, что углы при вершинах граней прямые, то окажется, что к скрещивающимся прямым PA и BC проведено два общих перпендикуляра AB и PC, что невозможно. Тем самым при указанном допущении тетраэдр «вырождается» в квадрат. Таким образом, приведённое решение также неверное.

При этом существует тетраэдр, указанный в условии, грани которого — равнобедренные треугольники с острым углом при вершине, сколь угодно близким к 90°. Действительно, рассмотрим равнобедренный остроугольный треугольник $A'B'C'$, боковая сторона которого равна 2, с проведёнными в нём средними линиями (см. рис. 1). Он является развёрткой данного тетраэдра независимо от величины острого угла при вершине B'.

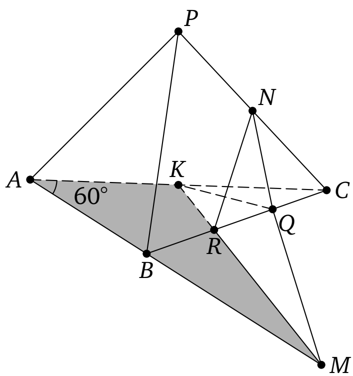


Рис. 1

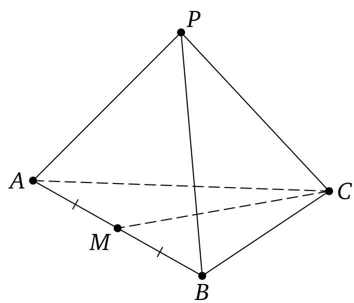


Рис. 2

Следовательно, **наибольшего значения площади данного тетраэдра не существует**, то есть условие задачи некорректно.

Отметим, что грани любого тетраэдра, у которого попарно равны противолежащие рёбра, являются остроугольными треугольниками (такой тетраэдр называется полуправильным или равногранным).

Пусть это не так, тогда выберем ребро AB, лежащее напротив прямого или тупого угла в равных треугольниках APB и ACB. Проведём медианы PM и CM (см. рис. 2). Так как $PM = CM \leqslant \frac{1}{2}AB$, для треугольника PMC не выполняется неравенство треугольника.

119. Полученный ответ неверен. При этом за исключением последней фразы приведённое решение не содержит ошибок (хотя и не является оптимальным). В нём не учтено, что общий перпендикуляр к прямым AS и CM совпадает с отрезком SM, хотя это фактически получено (из того, что $t=p=1$ в равенстве $\overrightarrow{LK}=t\cdot\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}+p\cdot\overrightarrow{CM}$, следует, что $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{SM}$). Дальнейшие рассуждения зависят от того, считать ли сечением пирамиды её грань (*в разных школьных учебниках приняты различные определения*).

Если грань является сечением, то **искомым сечением будет грань SBC**. Её площадь равна

$$\frac{1}{2}SB\cdot CM=0{,}5\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}=2\sqrt{34}.$$

Если же грань не является сечением, то **сечения наименьшей площади**, удовлетворяющего условию, **не существует**.

Отметим, что при «движении» точек L и K по направлению к точкам S и M соответственно площадь сечения действительно уменьшается, но её наименьшее значение не достигается — происходит «скачок».

Доказать, что общий перпендикуляр к прямым AS и CM совпадает с отрезком SM, можно и без использования координат. Действительно, из условия задачи следует, что CO — высота равнобедренного треугольника ACB, значит, $CO=\sqrt{CB^2-BO^2}=3$. Так как вершина S проектируется в середину ребра

$$AB,\quad SB=SA,\quad SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=4.$$

Следовательно, $SC=\sqrt{SM^2+CM^2}=BC$, поэтому $CM\perp BC$. Кроме того, так как $AB^2=SA^2+SB^2$, то угол ASB — прямой.

Нестандартные подходы к определениям и к доказательству известных фактов

120. Сразу укажем, что **для правильных четырёхугольника и шестиугольника данное определение не является корректным**: в нём не хватает указания, что ломаная плоская. Действительно, существуют неплоские простые замкнутые ломаные как из четырёх, так и из шести звеньев, удовлетворяющие сформулированным условиям, например, ломаная $ABCDA$ в правильном тетраэдре (см. рис. 1) и ломаная $ADCBB'A'A$ в кубе (см. рис. 2).

Существование таких ломаных также можно доказать не конструктивно, используя понятие непрерывности.

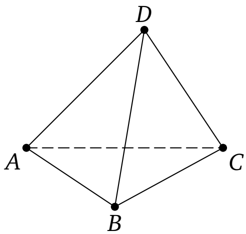


Рис. 1

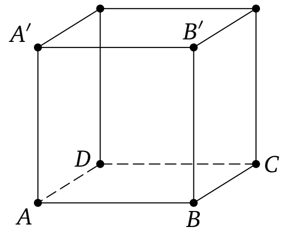


Рис. 2

Для правильного пятиугольника приведённое определение будет корректным, так как неплоской пятизвенной ломаной, удовлетворяющей сформулированным условиям, не существует. Докажем это.

Предположим, что $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ — неплоская пятизвенная замкнутая ломаная с равными звеньями и равными углами между соседними звеньями.

Докажем сначала, что четыре вершины такой ломаной лежат в одной плоскости. Заметим, что найдётся такая плоскость α, содержащая три вершины ломаной, что две остальные её вершины лежат по одну сторону от α.

Пусть α проходит через три последовательные вершины, например, $\alpha \equiv \equiv (A_1A_2A_3)$. Из условия задачи следует, что у пятиугольника, образованного данного ломаной, равны между собой все диагонали. Следовательно, равны тетраэдры $A_1A_3A_4A_2$ и $A_3A_1A_5A_2$, тогда вершины A_4 и A_5 симметричны относительно плоскости β — серединного перпендикуляра к отрезку A_1A_3, проходящей также через вершину A_2 (см. рис. 3). Значит, $A_1A_3 \perp \beta$ и $A_4A_5 \perp \beta$, то есть $A_1A_3 \parallel A_4A_5$, поэтому A_1, A_3, A_4 и A_5 лежат в одной плоскости. Если же α проходит не через соседние вершины, например, $\alpha \equiv (A_1A_2A_4)$, то аналогично доказывается, что в одной плоскости лежат точки A_1, A_2, A_3 и A_5.

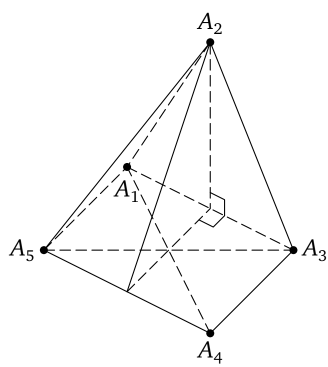


Рис. 3

Повернём теперь треугольник $A_1A_2A_3$ (см. рис. 3) вокруг прямой A_1A_3 так, чтобы вершина A_2 оказалась в плоскости четырёхугольника $A_1A_3A_4A_5$, заняв положение A_2'. Получим плоский равносторонний пятиугольник $A_1A_2'A_3A_4A_5$, в котором

$$\angle A_2' = \angle A_4 = \angle A_5 = \varphi \geqslant 90^\circ,$$

так как ломаная $A_1A_3A_4A_5$ не имеет самопересечений (см. рис. 4). Докажем, что этот пятиугольник правильный.

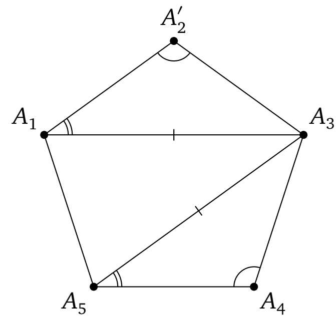


Рис. 4

Действительно, из равенства равнобедренных треугольников $A_1A_2'A_3$ и $A_3A_4A_5$ следует, что равны их углы при основаниях и $A_1A_3 = A_3A_5$. Тогда из равнобедренного треугольника $A_1A_3A_5$ получим, что

$$\angle A_3A_1A_5 = \angle A_3A_5A_1.$$

Следовательно, равны углы A_1 и A_5 рассматриваемого пятиугольника. Аналогично доказывается равенство его углов A_3 и A_4.

Таким образом, если совершить перегибание вокруг A_1A_3 в обратную сторону, то из правильного пятиугольника мы получим неплоский пятиугольник с теми же равными углами, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что исходная ломаная плоская, что и требовалось.

121. Сами по себе все использованные равенства верны, но приведённое рассуждение опирается на тот факт, что все треугольники имеют одну и ту же сумму углов. Это требует отдельного доказательства, которое невозможно без использования аксиомы параллельности, поэтому **теорема**, конечно, **не доказана**.

122. Все рассуждения основаны на том, что S^2 является многочленом от переменных a, b и c, но это не доказано. Недостаточно обосновано и то, что искомое выражение для S должно содержать множитель $a+b-c$. Кроме того, указанный в доказательстве способ получения выражения второй степени из выражения третьей степени является далеко не единственным. Тем самым **теорема не доказана**.

Отдельно отметим, что предъявленное рассуждение может быть полезно в работе со школьниками, так как содержит важные идеи:

1) *оценку размерности искомой величины*;

2) *рассмотрение «вырожденного случая»*;

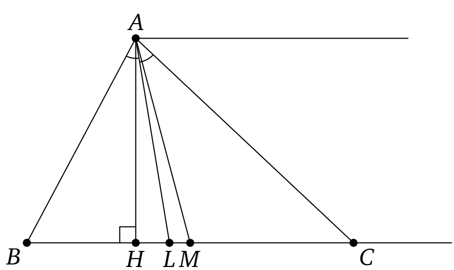
3) *представление многочлена в виде произведения, использующее его нули*;

4) *поиск коэффициента пропорциональности путём рассмотрения удобного частного случая.*

123. 1. Приведённое рассуждение нельзя признать абсолютно неверным, но оно, конечно, изложено весьма нестрого и **содержит существенные пробелы**.

Во-первых, никак не объяснено, почему биссектриса находится между медианой и высотой в тот момент, когда вершина C «в бесконечности» (и высота, и биссектриса пересекают BC). Во-вторых, неясно, почему при указанном «движении» точки C в какой-то момент медиана и биссектриса не могут «поменяться местами». В-третьих, не объяснено, почему при этом «движении» биссектриса не может оказаться между стороной AB и высотой.

Покажем, каким образом можно «залатать» указанные пробелы. Введём обозначения: AH — высота, AL — биссектриса, AM — медиана (см. рисунок). Первый из указанных пробелов восполнить легко. Достаточно сказать, что угол BAH острый, а если вершина C находится «в бесконечности», то угол CAH прямой. Следовательно, луч AL находится внутри угла CAH.



Для того чтобы восполнить другие два указанных пробела, следует прежде всего сослаться на непрерывность, причём сделать это аккуратно, например, так. Зафиксируем вершины A и B треугольника и прямую BC, тогда будет зафиксировано и положение точки H. Рассмотрим две функции: зависимость расстояний LH и MH от длины отрезка CH. Каждая из этих функций непрерывна, так как при малых изменениях длины CH длины LH и MH изменяются мало.

Если расстояние CH очень велико (C находится «в бесконечности»), то $MH > LH$ (*это пояснено в исходном тексте*). Предположим, что найдётся положение точки C, при котором $MH < LH$. Тогда по следствию из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции найдётся и такое положение точки C, при котором $MH = LH$, то есть эти точки совпадут. Следовательно, совпадут биссектриса и медиана, но это противоречит тому, что $AC > AB$. Тем самым доказано, что медиана и биссектриса не могут «поменяться местами».

Наконец, считая точку H началом отсчёта, а луч HC задающим положительное направление и предположив, что точка L лежит между A и H, получим, что LH (в зависимости от длины CH) принимает как положительные, так и отрицательные значения. Тогда в силу непрерывности найдётся и такое положение точки C, при котором $LH = 0$, то есть точки L и H совпадут, что опять же противоречит тому, что $AC > AB$.

Отметим, что для восполнения этого пробела можно использовать и геометрические соображения, например, следующие:

$$\cos\angle BAH = \frac{AH}{AB} > \frac{AH}{AC} = \cos\angle CAH,$$

значит, $\angle BAH < \angle CAH$, поэтому точка L лежит на луче HC. Но в этом случае гораздо проще сравнить затем отрезки BL и BM в произвольном треугольнике, используя свойство биссектрисы, и тогда непрерывность вообще не нужна!

124. 1. Приведённая в начале рассуждения **лемма верна**, но её доказательство изложено неудачно. Верное равенство $0 = 0$ получено как следствие доказываемого равенства, однако верное следствие какого-либо утверждения, вообще говоря, не гарантирует справедливости самого утверждения (*например, из неверного равенства* $1 = -1$ *следует верное равенство* $1^2 = (-1)^2$). Надо либо сослаться на равносильность доказываемого и всех записанных равенств, либо преобразовать левую часть доказываемого равенства и привести её к правой, записав это, например, так: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, следовательно,

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \\
= \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \\
= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0,
\end{gathered}$$

что и требовалось.

Кроме того, допущена ошибка в терминологии: слагаемые не сокращаются, а взаимно уничтожаются.

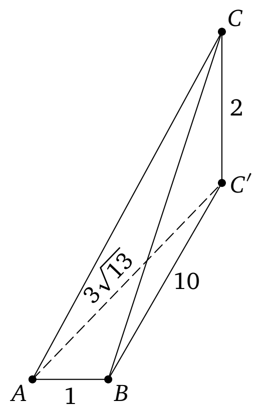
2. Само **«доказательство» неравенства содержит грубую ошибку**. «Равенство» $|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}|$, присутствующее в нём, означает, что $|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|$, что в общем случае неверно. (Нас бы устроило даже неравенство $|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}| \leqslant |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|$, но тут как раз имеет место обратное неравенство $|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}| \geqslant |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|$, так что это рассуждение «спасти» не удаётся.)

3. Можно «придраться» также и к неравенству

$$|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}|.$$

По логике «автора» доказательства, оно получено применением неравенства $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Однако реально это неравенство применяется не к векторам, а к числам — скалярным произведениям векторов. Разумеется, для чисел аналогичное неравенство также верно, поэтому это скорее недочёт, а не ошибка.

125. Приведено **неверное доказательство**. В нём использовано утверждение: «ортогональная проекция угла, стороны которого пересекают плоскость проекции, больше самого угла».



Покажем, что это не обязательно так. Рассмотрим тетраэдр $CABC'$, в котором ребро CC' перпендикулярно плоскости $AC'B$, $AB = 1$; $BC' = 10$; $AC' = 3\sqrt{13}$; $CC' = 2$ (см. рисунок). Тогда по теореме Пифагора $AC = 11$, $BC = 2\sqrt{26}$. По теореме косинусов из треугольников ABC и ABC' получим, что $\cos\angle ACB = \frac{56}{11\sqrt{26}}$; $\cos\angle AC'B = \frac{18}{5\sqrt{13}}$.

Следовательно,

$$\frac{\cos\angle ACB}{\cos\angle AC'B} = \frac{70\sqrt{2}}{99} < \frac{70\cdot 1{,}42}{99} < 1,$$

то есть $\cos\angle ACB < \cos\angle AC'B$. Так как эти углы острые, получаем, что $\angle ACB > \angle AC'B$, при этом угол $AC'B$ является ортогональной проекцией угла ACB.

Критерии сравнения величины угла и величины его ортогональной проекции можно получить из теоремы о площади ортогональной проекции треугольника или из теоремы косинусов для трёхгранного угла (*см., например, Я. П. Понарин. Элементарная геометрия*: *В* 2 *т. Т.* 2: *Стереометрия, преобразования пространства. М.*: *МЦНМО,* 2005, *С.* 54—58).

Источники задач

1. Использована задача С. Маркелова из материалов XII математического праздника.

2. Предложил А. Блинков.

3. Предложил Д. Шноль.

4. Предложил А. Грибалко.

5. Предложил А. Иванищук.

6. По материалам олимпиады «Ломоносов». Предложил А. Иванищук.

7. Предложил А. Блинков.

8. Использована задача А. Шаповалова из материалов XX турнира математических боёв имени А. П. Савина. Предложил А. Шаповалов.

9. По материалам диагностической работы ЕГЭ-2011. Предложил А. Блинков.

10. Фольклор. Предложил А. Сгибнев.

11. Использована задача С. Токарева из книги Л. Э. Медникова, А. В. Шаповалова «Как готовиться к математическим боям» (М.: МЦНМО, 2014).

12. Предложили А. Иванищук и Б. Френкин.

13. Предложил В. Гуровиц.

14. Использована задача из материалов Объединённой межвузовской математической олимпиады 2012 г. Предложили А. Иванищук и И. Раскина.

15. Использована задача Т. Караваевой из материалов XXXIV турнира им. М. В. Ломоносова. Предложили Г. Мерзон и И. Ященко.

16. Использована задача из «Сборника задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за основной курс школы. 9 класс» (под ред. С. Шестакова, М.: АСТ, 2006). Предложил А. Хачатурян.

17. Предложил Д. Шноль.

18. Использованы задачи из книг: а) «ЕГЭ-2008. Математика. Тематические тренировочные задания» (под ред. В. В. Кочагина, М. Н. Кочагиной, М.: ЭКСМО, 2008); б) «Сборник задач для поступающих во втузы» (под ред. М. И. Сканави, М.: Высшая школа, 1988). Предложил А. Хачатурян.

19. Фольклор, предложил Ю. Блинков.

20. Использована идея задачи из Московской математической регаты 9 класса 2013/14 уч. г. Предложил А. Блинков.

21. Предложили А. Иванищук и А. Мякишев.

22. Фольклор, предложил А. Блинков.

23. Фольклор, С. Дориченко «Где ошибка?» (Квант, 2011, № 4).

24. Фольклор, предложил А. Гурвиц.

25. Использована задача М. Антипова из книги Л. Э. Медникова, А. В. Шаповалова «Как готовиться к математическим боям» (М.: МЦНМО, 2014).

26. Фольклор, С. Дориченко «Где ошибка?» (Квант, 2011, № 4).

27. Использована задача из Московской математической регаты 8 класса 2005/06 уч./г. Предложил А. Блинков.

28. П. Горнуша «Где ошиблись Петя и Вова» (Квант, 1984, № 12).

29. Предложил А. Блинков.

30. Использована задача Ю. Ионина (Задачник «Кванта», задача М72, № 3/1971).

31. Из материалов вступительных экзаменов в вузы. Предложил А. Берштейн.

32. Использован фрагмент из книги В. Литцмана «Где ошибка?» (М.: Физматгиз, 1962).

33. Использованы задачи из Сингапурской олимпиада школьников и из материалов вступительных экзаменов в вузы. Предложила М. Крайко.

34. Из материалов вступительных экзаменов в вузы. Предложил А. Блинков.

35. Предложил К. Столбов.

36. Предложила И. Раскина.

37. Использована задача А. Блинкова (IX турнир математических боёв имени А. П. Савина). Предложил А. Блинков.

38. Использована идея задачи из Московской математической регаты 10 класса 2006/07 уч./г. Предложил А. Сгибнев.

39. Использована задача № 324 из учебника «Алгебра и начала анализа: учебник для 10—11 классов средней школы» (под. ред. А. Н. Колмогорова, М.: Просвещение, 1990). Предложила И. Раскина.

40. Использована задача № 439 из учебника Н. Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ для 10 класса» (М.: Просвещение, 1999). Предложила Е. Гладкова.

41. Предложил А. Хачатурян.

42. Предложили А. Блинков и Н. Нетрусова.

43. Предложил Д. Шноль.

44. Фольклор. Предложил А. Блинков.

45. Предложил А. Хачатурян.

46. Использована задача из книги В. И. Рыжика «30 000 уроков математики. Книга для учителя» (М.: Просвещение, 2003).

47. Предложил К. Столбов.

48. Предложил А. Хачатурян.

49. Предложила Е. Гладкова.

50. Использована задача № 4.41 из учебного пособия П. И. Горнштейна, В. Б. Полонского, М. С. Якира «Задачи с параметрами» (Киев: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992). Предложил А. Блинков.

51. Предложил Д. Шноль.

52. Предложила И. Раскина.

53. Предложили А. Иванищук и А. Мякишев.

54. Предложили А. Блинков и Д. Шноль.

55. Фольклор.

56. Предложили А. Иванищук и А. Мякишев.

57. Предложил Ю. Блинков.

58. Предложили А. Иванищук и А. Мякишев.

59. Предложил Д. Шноль.

60. По книге Р. Смаллиана «Принцесса или тигр?» (М.: Мир, 1985).

61. Предложил Д. Шноль.

62. Использована задача А. Шаповалова (XIX турнир математических боёв имени А. П. Савина). Предложили А. Грибалко, Л. Медников, А. Шаповалов.

63. Использована задача А. Шаповалова из книги Л. Медникова, А. Шаповалова «Как готовиться к математическим боям» (М.: МЦНМО, 2014).

64. Использована задача из материалов Московской математической регаты 8 класса 2010/11 уч. г. Предложили А. Блинков и В. Гуровиц.

65. Использована задача второго этапа ВОШ 2014/15 уч. г. (Татарстан). Предложил Р. Алишев.

66. Использована задача из книжки А. Я. Канель-Белова, А. К. Ковальджи «Как решают нестандартные задачи» (М.: МЦНМО, 2001). Предложил А. Хачатурян.

67. Использована задача А. Чеботарёва из материалов IX турнира математических боёв имени А. П. Савина. Предложили А. Грибалко, Л. Медников, А. Шаповалов.

68. Использованы материалы Южного фестиваля юных математиков. Предложил В. Гуровиц.

69. Использована задача А. Грибалко из XXIII турнира математических боёв имени А. П. Савина. Предложил А. Грибалко.

70. Предложил В. Гуровиц.

71. Предложил А. Ковальджи.

72. Использована задача из книги А. С. Генкина, И. В. Итенберга, Д. В. Фомина «Ленинградские математические кружки» (Киров: АСА, 1994). Предложила Е. Горская.

73. Предложила Е. Горская.

74. Предложил В. Гуровиц.

75. Использована задача В. Голубева. Предложил Н. Наконечный.

76. Предложила Е. Горская.

77. Предложила Е. Горская.

78. Предложила И. Раскина.

79. Предложила Е. Горская.

80. Предложила И. Раскина.

81. По мотивам задачи из материалов Турнира Архимеда. Предложил В. Трушков.

82. Использована задача А. В. Шаповалова из книги Л. Э. Медникова, А. В. Шаповалова «Как готовиться к математическим боям» (М.: МЦНМО, 2014).

83. Предложил В. Гуровиц.

84. По мотивам задачи Б. Френкина. Предложил А. Блинков.

85. Предложил В. Смирнов.

86. Предложил А. Мякишев.

87. Предложили Ю. Блинков и Г. Филипповский.

88. Предложил А. Мякишев.

89. Использована задача из Московской математической регаты 8 класса 2009/10 уч./г. Предложили А. Блинков и А. Хачатурян.

90. Предложил А. Блинков.

91. Использована идея задачи из XVI турнира имени М. В. Ломоносова. Предложил А. Блинков.

92. Использована задача из книжки А. Блинкова, В. Гуровица «Непрерывность» (серия «Школьные математические кружки», М.: МЦНМО, 2014).

93. Предложил В. Жук.

94. Использован фрагмент из книги В. Литцмана, Ф. Трира «Где ошибка? Математические парадоксы» (Петроград: Научное издательство, 1919).

95. Предложил М. Волчкевич.

96. Использована задача Д. Калинина из материалов XVIII турнира математических боёв имени А. П. Савина. Предложил А. Блинков.

97. Фольклор. Предложил А. Блинков.

98. Использовано упражнение из статьи Е. Бакаева, А. Блинкова «Вспомогательные квадраты» (Квант, 2016, № 4); похожий сюжет — см. в книге Я. С. Дубнова «Ошибки в геометрических доказательствах» (М.: Наука, 1969).

99. Использована задача А. Блинкова и Ю. Блинкова из материалов XV устной городской олимпиады по геометрии.

100. Использована задача из материалов XIII устной городской олимпиады по геометрии.

101. Использована задача из материалов Московской математической регаты 11 класса 1999/2000 уч. г. Предложил А. Мякишев.

102. Использована задача Д. Калинина из книги Л. Э. Медникова, А. В. Шаповалова «Как готовиться к математическим боям» (М.: МЦНМО, 2014).

103. Предложили Д. Калинин и А. Хачатурян.

104. Использована задача из варианта диагностической работы ЕГЭ, 2007/08 уч. г., задание B11.

105. Предложил Д. Шноль.

106. Предложили А. Блинков и И. Ященко.

107. Предложил Д. Шноль.

108. Использована задача, предложенная участникам на открытии финала ВОШ — 2013 по математике. Предложили А. Блинков и В. Гуровиц.

109. Использована задача из брошюры В. А. Смирнова «ЕГЭ 2010. Математика. Задача B9» (под ред. А. Л. Семёнова и И. В. Ященко, М.: МЦНМО, 2010). Предложил Д. Мухин.

110. Предложил А. Мякишев.

111. Предложил А. Блинков.

112. Фольклор, предложил А. Блинков.

113. Из книги Р. Р. Пименова «Эстетическая геометрия, или Теория симметрий» (СПб.: «Школьная лига», 2014). См. также задачу № 4.12 из учебника В. В. Прасолова «Задачи по стереометрии» (М.: МЦНМО, 2010).

114. Использована задача № 4.13 из книги В. В. Прасолова «Задачи по стереометрии» (М.: МЦНМО, 2016). Предложил А. Блинков.

115. Предложил А. Сгибнев.

116. Из книги H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy «Unsolved problems in geometry» (Springer-Verlag, 1991). Предложили А. Сгибнев и Д. Шноль.

117. Использована задача из Московской математической регаты 10 класса 2008/09 уч. г. Предложили А. Блинков и А. Мякишев.

118. Использована задача из книги В. И. Рыжика «30 000 уроков математики. Книга для учителя» (М.: Просвещение, 2003).

119. Предложил А. Мякишев.

120. Использована задача из книги И. М. Яглома «Поговорим об определениях» (Квант, 1978, № 6); похожие рассуждения — см. в книге В. В. Прасолова «Задачи по стереометрии» (М.: МЦНМО, 2010, решение задачи № 5.13).

121. Использована задача из книги Я. С. Дубнова «Ошибки в геометрических доказательствах» (М.: Наука, 1969).

122. Предложил Д. Шноль.

123. Использован фрагмент из книги М. И. Башмакова «Математика в кармане „Кенгуру“. Международные олимпиады школьников» (М.: Дрофа, 2010). Предложил А. Блинков.

124. Предложил А. Блинков.

125. Предложил Р. Гордин.

Литература

1. *Блинков А.* Где ошибка? // Квант. 2017. № 10; 2018. № 2, 4, 6.
2. *Горнуша П. П.* Где ошибка? // Квант. 1986. № 10.
3. *Горнуша П. П.* Где ошиблись Петя и Вова? // Квант. 1984. № 12.
4. *Дориченко С.* Где ошибка? // Квант. 2011. № 4.
5. *Дубнов Я. С.* Ошибки в геометрических доказательствах. М.: Наука, 1969.
6. *Литцман В.*, *Трир Ф.* Где ошибка? Математические парадоксы. Петроград: Научное издательство, 1919.
7. *Литцман В.* Где ошибка? М.: Физматгиз, 1962.
8. *Медников Л.*, *Шаповалов А.* Как готовиться к математическим боям (раздел «Липовая роща»). М.: МЦНМО, 2014.
9. *Рыжик С.* Кто же прав? // Квант. 1984. № 9.
10. *Табачников С. Л.* Ошибки в геометрических доказательствах // Квант. 1984. № 3.
11. `https://www.mccme.ru/oluch/`

Оглавление

Введение 3

I. Тексты с ошибками 5

Арифметика, алгебра и математический анализ 5
Делимость и целые числа 5
Текстовые задачи 9
Алгебраические выражения 11
Уравнения и системы 13
Неравенства и экстремальные значения 18
Тригонометрия 21
Задачи с параметром 23
Функции, производная, первообразная 27

Комбинаторика, логика, теория вероятностей 32
Логические задачи 32
Процессы и операции 33
Соответствия и графы 35
Сколькими способами? 37
Вероятность 39
Разное 40

Геометрия 42
Планиметрия 42
Стереометрия 55
Задачи на экстремальные значения 58
Нестандартные подходы к определениям и к доказательству известных фактов 61

II. Подсказки 65

III. Анализ ошибок, верные решения и комментарии 71

Арифметика, алгебра и математический анализ 71
Делимость и целые числа 71
Текстовые задачи 76
Алгебраические выражения 78
Уравнения и системы 82
Неравенства и экстремальные значения 89
Тригонометрия 94
Задачи с параметром 96

Комбинаторика, логика, теория вероятностей 110
Логические задачи 110
Процессы и операции 111
Соответствия и графы 114
Сколькими способами? 117
Вероятность 122
Разное 125

Геометрия 128
Планиметрия 128
Задачи на экстремальные значения 149
Нестандартные подходы к определениям и к доказательству известных фактов 155

Источники задач 161

Литература 166