Modelos Matemáticos I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Modelos Matemáticos I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

Parte I.
Teoría

Introducción.

En esta asignatura, estudiaremos una serie de modelos que se dan en la naturaleza y que dan respuesta a las posibles cuestiones que nos podemos hacer en torno al comportamiento de estos problemas. Por ejemplo, podremos estudiar cómo se desarrollará la población de una especie considerando unos recursos dados (finitos o infinitos), así como otros modelos que se ajustan a situaciones de la vida real.

1. Ecuaciones en diferencias de primer orden

1.1. Ecuaciones en diferencias de primer orden

Para motivar este tema, vamos a poner primero unos ejemplos de ecuaciones en diferencias de primer orden.

1. Progresión geométrica, una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n$$

   Para dar una solución, deberíamos establecer el valor de x_n de forma explícita. En este caso, una solución sería:

$$x_n = \mathscr{C}\alpha^n$$

   Donde $\mathscr{C}$ es una constante. Así, $x_0 = \mathscr{C}$.
2. Progresión aritmética, es decir, una de la forma:

$$x_{n+1} = x_n + \beta$$

   donde una solución sería:

$$x_n = \mathscr{C} + n\beta$$

3. La sucesión de Fibonacci es otro ejemplo de una ecuación en diferencias.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Definición 1.1 (Ecuación en diferencias). Una ecuación en diferencias es una ecuación en la que intervienen un número fijo de términos consecutivos de una sucesión.

$$F(x_{n+k}, \dots, x_n, n) = 0$$

donde F es una función de varias variables, $\{x_n\}$ es una sucesión, las incógnitas y $k \geq 1$ es el orden de la ecuación.

Como ejemplo de cálculo de órdenes, podríamos que decir de la progresión aritmética y geométrica son de orden 1 y la sucesión de Fibonacci es de orden 2.

Definición 1.2 (Resolución de una ecuación en diferencias). Resolver una ecuación en diferencias es hallar la forma explícita de todas las sucesiones que satisfacen la igualdad, la solución general. Una solución concreta de la ecuación se llama solución particular y normalmente se obtiene a partir de k condiciones iniciales en la solución general.

Nota. Una propiedad de las progresiones geométricas es que si la progresión converge, converge a 0. Si no converge, puede ser cíclica, divergente o alternada.

Definición 1.3 (Ecuación en diferencias lineal). Una ecuación en diferencias lineal viene dado por una ecuación de la forma:

$$a_k(n)x_{n+k} + \ldots + a_0(n)x_n = b(n)$$

Si $a_k(n) \neq 0,\ n \geq 0$ se dice que es de orden k. Si $b(n) = 0$, se dice que la ecuación es homogénea.

1.2. Ecuación en diferencias de primer orden lineal con coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias de primer orden lineal será de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Estas ecuaciones serán de orden 1 con coeficientes constantes.

Proposición 1.1. La solución de estas ecuaciones será:

(i) Si $\beta = 0$ es una progresión geométrica, así que $x_n = \mathscr{C}\alpha^n$

(ii) Si $\beta \neq 0$ y $\alpha = 1$ entonces es una progresión aritmética, así que $x_n = \mathscr{C} + \beta n$

(iii) Si $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ entonces la ecuación tiene una solución constante:

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

Esta solución satisfacerá la ecuación si no dependiera de n.

Demostración. Probaremos la tercera, que es la que no es trivial.
Buscaremos entonces una solución constante x_*. Si es solución, debe verificar que:

$$x_* = \alpha x_* + \beta \implies x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

□

Ejemplo 1.1. Comprobar si en el caso (iii), una solución podría ser:

$$x_n = \alpha^n x_0 + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i$$

Proposición 1.2. Si $\alpha \neq 1$, la sucesión $\{x_n\}$ es solución de la ecuación $\iff$ la sucesión $\{z_n\}$ definida por $z_n = x_n - x_*$ es solución de la ecuación:

$$z_{n+1} = \alpha z_n \qquad (2)$$

Demostración. Si $\{\bar{x}_n\}_{n\geq 0}$ es solución de (1) $\implies \bar{x}_{n+1} = \alpha \bar{x}_n + \beta$

Además, $\{x_*\}$ es solución de (1) $\implies x_* = \alpha x_* + \beta$

Ahora, restamos ambas y nos queda:

$$\bar{x}_{n+1} - x_* = \alpha(\bar{x}_n - x_*).$$

Por lo que hemos obtenido una solución de la ecuación (2), pues si $\bar{z}_n = \bar{x}_n - x_* \implies \bar{z}_{n+1} = \alpha \bar{z}_n \implies \{\bar{z}_n\}_{n\geq 0} = \{\bar{x}_n - x_*\}_{n\geq 0}$ es solución de (2).

La implicación de izquierda a derecha se realiza deshaciendo la diferencia.

□

Ejemplo 1.2. Resuelva $x_{n+1} = -ix_n + 3$. Esto es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea.

Solución. Primero, calculamos la solución constante: $x_n = x_*$ para $n \geq 0$. Esta es:

$$x_* = -ix_* + 3 \implies x_* = \frac{3}{1+i}$$

Calculamos ahora la ecuación homogénea asociada, esta es $z_{n+1} = -iz_n$ con $n \geq 0$. Así, $z_n = \mathscr{C}(-i)^n$.

Ahora, una solución de la ecuación inicial sería:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{3}{1+i} + \mathscr{C}(-i)^n$$

□

Proposición 1.3. Si $\alpha \neq 1$, la ecuación:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

entonces la ecuación tiene tantas soluciones como valores posibles tenga la condición inicial:

$$x_n = x_* + (x_0 - x_*)\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Demostración. Si $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ y $\alpha \neq 1$, las soluciones de son de la forma:

$$x_n = x_* + z_n$$

con z_n una solución homogénea asociada y x_* una solución constante.

$$z_{n+1} = \alpha z_n \implies z_n = \mathscr{C}\alpha^n \implies z_n = (x_o - x_*)\alpha^n \implies x_n = x_o + (x_0 - x_*)\alpha^n$$

Esto es,

$$x_n = \frac{\beta}{1-\alpha} + \left(x_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$

□

Ejemplo 1.3. $x_{n+1} = ix_n + 1 \quad n \geq 0$ con $x_0 = i$

Solución. Primero hallamos la solución constante:

$$x_* = \frac{1}{1-i} \Leftarrow x_* = ix_* + 1$$

Ahora, hallamos la solución homogénea asociada:

$$z_{n+1} = iz_n \text{ con } z_n = \mathscr{C} i^n$$

Seguidamente, hallamos la solución de la ecuación completa:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{1}{1-i} + \mathscr{C} i^n$$

Por último, aplicamos la condición inicial $x_0 = i$ dada. Así:

$$x_0 = \frac{1}{1-i} + \mathscr{C} i \implies \mathscr{C} = i - \frac{1}{1-i} = \frac{i+1-1}{1-i} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

De esta forma, la solución sería:

$$x_n = \frac{1}{1-i} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n$$

Y esto se podría pasar a forma estándar de número complejo, quedando de la siguiente manera:

$$x_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n$$

□

Ejemplo 1.4. 2. $x_{n+1} = (3-2i)x_n - 1$ para $n \geq 0$.

Solución. Tenemos que:

$$x_n = \frac{-1}{1-(3-2i)} + \mathscr{C}(3-2i)^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i + \mathscr{C}(3-2i)^n$$

□

Proposición 1.4 (Fórmula de Moivre). Si α es un número complejo, entonces:

$$\alpha^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Demostración. Vamos a hacer un razonamiento por inducción:

1. Si $n = 1$. Entonces, $\alpha = r(cos\theta + i\ sen\theta)$, trivial.
2. Supuesto cierto para cierto n, lo demostraremos para $n+1$:

$$\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n = [r(cos(\theta) + i\ sen(\theta))][r^n(cos(n\theta) + i\ sen(n\theta))] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta)cos(n\theta) + isen(\theta)cos(n\theta) + isen(n\theta)cos(\theta) - sen(\theta)sen(n\theta)] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta + n\theta) + isen(\theta + n\theta)] = r^{n+1}[cos((n+1)\theta) + isen((n+1)\theta)]$$

□

Nota. Esto es porque un número complejo es de la forma $\alpha = a + bi = r(cos\theta + isin\theta)$. Donde el módulo es $r = \sqrt{a^2+b^2}$ y θ es el ángulo, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $(cos\theta + isin\theta)$ tiene módulo 1.

1.2.1. Comportamiento asintótico de las soluciones

Tendríamos en este caso que estudiar cómo se comporta la sucesión $\{\alpha^n\}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposición 1.5.

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0$
(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty$
(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$

Ahora, si tuviéramos una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathscr{C}\alpha^n$$

Por tanto tendríamos que estudiar cómo varía α^n.

Teorema 1.1 (Comportamiento asintótico de las soluciones). Las soluciones $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de la ecuación:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

verifican:

- Si $|\alpha| < 1$, se tiene que $x_n \to x_*$
- Si $|\alpha| > 1$, se tiene que x_n diverge.
- Si $|\alpha| = 1$, entonces x_n oscila alrededor de x_*, esto es, x_n está en la circunferencia de centro x_* y radio $|x_0 - x_*|$.

Demostración. Si tenemos que:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathscr{C}\alpha^n$$

. Entonces:

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0 \implies \{x_n\} \to x_*$
(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty \implies \{|x_n|\}$ nos da el mismo comportamiento que $|\alpha|^n$
(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$ si tomamos módulos y despejamos, tenemos que:

$$|x_n - x_*| = |G|$$

Así que todas las soluciones se mantienen en la circunferencia de centro x_* y radio $|x_0 - x_*|$

□

1.2.2. Ajuste del precio de un producto: modelo de la telaraña

En este modelo, trabajaremos con dos funciones:

- Una función oferta, $O(p)$ que depende del precio p
- Una función demanda, $D(p)$, que también depende del precio p

Supondremos ahora que estas dos funciones son rectas y que $O(p)$ es creciente y $D(p)$ decreciente, para simplificar el sistema. Por ello, tendremos:

- $O(p) = a + bp$ con $b > 0$ la marginal de la oferta
- $D(p) = c - dp$ con $d > 0$ la marginal de la demanda

Sin embargo, estas funciones tienen que ajustarse haciendo una estimación con los datos anteriores. Buscamos un punto de equilibrio entre la oferta y la demanda, un punto de corte entre estas dos funciones establecidas. A este punto lo llamaremos p_*. Igualando las ecuaciones, tendríamos que:

$$a + bp_* = c - dp_* \implies (b+d)p_* = c - a \implies p_* = \frac{c-a}{b+d}$$

Ahora, para que este precio sea correcto, tenemos que tener que b y d sean mayores que cero para no dividir por cero, y que el precio sea positivo, así que supondremos que $c > a$.

Ahora, para poder trabajar con antelación, lo que intentamos hacer es que:

$$D(p_n) = O(p_{n-1}) \implies c - dp_n = a + bp_{n-1}$$

Lo cual es una ecuación en diferencias de primer orden, que se puede seguir despejando como:

$$p_{n+1} = -\frac{b}{d}p_n + \frac{c-a}{d}$$

Y ahora, resolvemos:

$$p_n = x_* + z_n = p_* + \mathscr{C}\left(-\frac{b}{d}\right)^n$$

porque

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{(c-a)/d}{1-(-b/d)} = \frac{c-a}{b+d} = p_*$$

El objetivo es conseguir que $p_n \to p_*$ y para ello tenemos que conseguir que, como $p_{n+1} = p_* + \mathscr{C}(\frac{-b}{d})^n$, entonces necesitamos que $\left|\frac{-b}{d}\right| < 1 \implies b < d$. Por ello, lo que tenemos en las rectas es que la pendiente (b) de la recta de la oferta sea menor que la pendiente de la demanda (d).

1.2.3. Modelo de Malthus. Modelo de Verhulst. Ecuación logística

Antes de llegar al modelo de Verhulst, estudiaremos un primer acercamiento que hubo a este modelo.

La ecuación de Malthus Vamos a estudiar ahora una ecuación que modeliza la evolución de la población de una determinada especie en un hábitat sin limitación de alimentos. Esta primera suposición ya no es real, pues siempre hay limitaciones.

Vamos a llamar:

- P_n es el número de individuos en el periodo de tiempo n. $P_n \geq 0$
- α_n es la tasa de fertilidad o natalidad por individuo. $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$
  De esta forma, $\alpha_n P_n$ será el número de nacimientos en el periodo n.
- α_m es la tasa de mortalidad. $0 < \alpha_m < 1$, pues esta es un tanto por ciento y tenemos que:
  Así, $\alpha_m P_n$ será el número de muertes en el periodo n.

Una vez presentadas las incógnitas, podemos afirmar que la población en el siguiente periodo será:

$$P_{n+1} = P_n + \alpha_n P_n - \alpha_m P_n \implies P_{n+1} = (1 + \alpha_m - \alpha_m)P_n$$

Esto es una ecuación en diferencias lineal de primer orden homogénea. En realidad, es una progresión geométrica y por tanto una solución es:

$$P_n = \mathscr{C}(1 + \alpha_n - \alpha_m)^n \quad n \geq 0$$

Pero esta constante es la población inicial, luego eso es equivalente a:

$$P_n = P_0(1 + \alpha_n - \alpha_m)^n \quad n \geq 0$$

Vamos a llamar entonces a $(1 + \alpha_n - \alpha_m) = R$ la razón de crecimiento.

- $(1 + \alpha_n - \alpha_m) > 1 \implies \{P_n\} \to +\infty$. Ahora, esto ocurrirá si y sólamente si $\alpha_n > \alpha_m$
- $(1 + \alpha_n - \alpha_m) < 1 \implies \{P_n\} \to 0$. Del mismo modo, esto sólo ocurre si $\alpha_n < \alpha_m$
- $(1 + \alpha_n - \alpha_m) = 1 \implies \{P_n\} \to P_0$. Que ocurre si y solo si $\alpha_n = \alpha_m$.

Se cumple siempre que $R = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$.

Definición 1.4 (Razón de crecimiento). Llamaremos razón de crecimiento a:

$$\alpha = \alpha_n - \alpha_m$$

Que representa la variación del tamaño de la población por individuo. Además, podemos ver despejando de la ecuación inicial que:

$$\alpha = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$$

El modelo de Verhulst Este modelo quiso dar un arreglo a la ecuación de Malthus. Ahora, suponemos que en el hábitat hay un número máximo de individuos al que llamaremos M.

Según Verhulst, la tasa de crecimiento es proporcional a $M - P_n$, esto es:

$$\alpha = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = K(M - P_N) \quad K > 0$$

De aquí, podemos ver fácilmente que si $P_n < M \implies P_{n+1} > P_n$, por lo que la población crece.

También, si $P_n > M \implies P_{n+1} < P_n$, por lo que la población decrece.

Por tanto, con el modelo de Verhulst desarrollando en la euación de Malthus la ecuación será:

$$P_{n+1} = [(1 + K(M - P_n)]P_n \implies P_{n+1} = (1 + KM)P_n - KP_n^2$$

Donde KP_n^2 lo llamaremos la **competencia entre individuos**.

Esto es una ecuación en diferencias **no lineal** de primer orden y no homogénea. Aún no hemos explicado cómo se resuelven este tipo de ecuaciones, abordaremos este tema más adelante.

Sin embargo, podemos hacer a la ecuación un cambio de variable haciendo que:

- $(1 + KM) = \mu$
- $x_n = \dfrac{K}{1 + Km} P_n$

Y nos queda que:

$$\frac{K}{1 + Km} P_{n+1} = \frac{K}{1 + Km}(1 + KM)P_n(1 - \frac{K}{1 + Km}P_n)$$

Y con los términos anteriores esto nos queda como:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Esta ecuación es conocida como la **Ecuación Logística**.

1.3. Sistemas dinámicos discretos

Definición 1.5. Un sistema dinámico discreto es la descripción formal de un fenómeno evolutivo en términos de una función cuya imagen está contenida en su dominio. Partiendo desde cualquier valor inicial admisible generaremos una sucesión de valores mediante la aplicación reiterada de la función dada. Lo notaremos SDD.

Definición 1.6. Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene al menos dos puntos y $f : I \to I$ es una función continua. Entonces, al par $\{I, f\}$ se le llama un SDD de primer orden, autónomo y en forma normal. A f se le llama función de evolución.

Con estas definiciones, podemos ver que si $x_0 \in I$ es un valor inicial, podemos generar:

$$x_1 = f(x_0);\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0));\ x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)));\cdots$$

Estos valores están bién definidos pues $f(I) \subset I$ y la sucesión así definida es solución de la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n \geq 0$$

Ejemplo 1.5. Tomemos $f(x) = cos(x)$, que es continua. Ahora, tenemos que tomar $I \subset \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subset I$. Podemos tomar el intervalo $I = [-1, 1]$ en radianes, por supuesto. Si tomamos $x_0 \in I$, podemos ver fácilmente que $x_{n+1} = f(x_n) \in I$, por lo que $\{[-1, 1], cos(x)\}$ es un SDD.

Proposición 1.6. La ecuación logística es un SDD, pues $f(x) = \mu x(1-x)$ es continua y $\exists I = [0, 1] : f(I) \subset I$

Ejemplo 1.6. Tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x$, con $I = [0, 1]$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$. Esta función es continua (en particular es contractiva). $\{[0, 1], f\}$ es un SDD.

Ejemplo 1.7. $f(x) = log(x)$, $I = (0, +\infty)$ no es un SDD pues $Im(f) \nsubseteq Dom(f)$

Definición 1.7. UN SDD $\{I, f\}$ se dice lineal si f es lineal, afín si f es afín y no lineal si f no es lineal ni afín.

Notación. En lo sucesivo, para denotar las sucesivas iteradas de f usaremos que $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$

Definición 1.8 (Órbita). Dado un SDD $\{I, f\}$ y un $x_0 \in I$, la sucesión definida por:

$$\{x_0, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^n(x_0), \cdots\}$$

se denomina órbita o trayectoria del SDD $\{I, f\}$ asociada al valor inicial x_0 y se denota por $\gamma(I, f, x_0)$

Definición 1.9. Al conjunto de todas las órbitas asociadas al SDD $\{I, f\}$ a todos los $x_0 \in I$ se le llama retrato de fase.

1.3.1. Puntos de equilibrio

Definición 1.10 (Punto de equilibrio). Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto de equilibrio del SDD $\{I, f\}$ si:

$$\alpha = f(\alpha) \quad \alpha \in I$$

Si tomamos como valor inicial un punto de equilibrio del SDD $x_0 = \alpha$ entonces la órbita resultante es constante y se denomina órbita estacionaria:

$$\gamma(I, f, \alpha) = \{\alpha, \alpha, \cdots\}$$

Ejemplo 1.8. Determine los puntos de equilibrio de la ecuación logística:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Aquí, $f(x) = \mu x(1-x)$, por lo que

$$\alpha = f(x) \implies \alpha = \mu\alpha(1-\alpha) \implies \alpha - \mu\alpha(1-\alpha) = 0 \implies \alpha[1-\mu(1-\alpha)] = 0$$

Por lo que las soluciones pueden ser:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 1 - \mu(1-\alpha) = 0 \xrightarrow{(1)} \alpha_2 = \dfrac{\mu - 1}{\mu} \end{cases}$$

Donde en (1) hemos despejado α. Es claro que $\alpha_1 \in [0,1]$. Ahora, ¿$\alpha_2 = \dfrac{\mu-1}{\mu} \in [0,1]$?

Obtenemos dos puntos de equilibrio:
$\alpha_1 = 0 \in [0,1]$ y $\alpha_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$. Ahora, ¿cuándo $\alpha_2 \in [0,1]$?
Tenemos que: $0 \leq \frac{\mu-1}{\mu} \leq 1$. Multiplicando por μ (podemos porque $\mu > 0$):

$$0 \leq \mu - 1 \leq \mu \Leftrightarrow -\mu \leq -1 \leq 0 \Leftrightarrow \mu \geq 1 \geq 0$$

Luego obtenemos que si $\mu \geq 1 \implies \alpha_2 \in [0,1]$

Definición 1.11. En una ecuación en diferencias, un punto de equilibrio es un punto inicial $x_0 = \alpha$ tal que la solución que genera es constante.

Ejemplo 1.9. Existen SDD que no tienen puntos de equilibrio. Por ejemplo, una $f(x)$ continua tal que la ecuación $x = f(x)$ no tiene solución. Por ejemplo, $f(x) = x + 1$

Definición 1.12. Dado un punto $x_0 \in I$, si $\exists k : f^k(x_0) = \alpha = f(\alpha)$,entonces su órbita se dice eventualmente estacionaria:

$$\gamma(I, f, x_0) = \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0), \alpha, \ldots, \alpha\}$$

Nota. Buscar puntos de equilibrio es equivalente a buscar intersecciones de la recta $y = x$ y la gráfica de f que estén contenidas en el subconjunto $I \times I$ del plano xy.

Proposición 1.7. Si $\{I, f\}$ es un SDD, entonces $\{I, f^n\}$ también es un SDD.

Teorema 1.2. Todo SDD $\{I, f\}$ donde I sea cerrado y acotado entonces posee un punto de equilibrio.

Demostración. Es consecuencia del teorema de Bolzano. Sea $g(x) = f(x) - x : [a, b] \to \mathbb{R}$. Esta g es continua y $g(a) = f(a) - a$. Pero estábamos en un SDD, luego $f : [a, b] \to [a, b]$ que lleva $a \to f(a)$ y $b \to (f(b)$. Si $f(a) = a$ ó $f(b) = b$, ya tenemos el punto fijo. De otra forma, tenemos que $a \leq f(a) \leq b$. Así que $g(a) > 0$. Si razonamos igual con b, tenemos que $g(b) < 0$. Por ello, por el teorema de Bolzano $\exists \alpha \in (a, b) : g(\alpha) = 0 \implies f(\alpha) = \alpha$ y tenemos el punto fijo.

□

Teorema 1.3. Sea un SDD $\{I, f\}$ donde I es cerrado y supongamos que f es contractiva, es decir $0 < K < 1$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

Entonces, existe un único punto de equilibrio en f

Demostración. Probaremos primero la unicidad. Supongamos que hay dos puntos fijos. Sean α_1, α_2 dos puntos fijos. Entonces,

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq K|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

Donde en el $\leq$ hemos usado la contractividad de la función. Por lo que hemos llegado a una contradicción y el punto será único.

Ahora, tomamos $x_0 \in I$. Definimos $x_{n+1} = f(x_n)$ con $n \geq 0$. Así, tenemos $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}\}$. Tenemos que:

$$|x_{n+1} - x_{n+2}| = |f(x_n) - f(x_{n+1})| \leq K|x_n - x_{n+1}| = K|f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leq K^2|x_{n-1} - x_n| \leq$$
$$\leq \cdots \leq K^{n+1}|x_0 - x_1| \implies |x_{n+1} - x_{n+2}| \leq K^{n+1}|x_0 - x_1| \to 0 \implies \{x_n\} \to l$$

Ahora, como $f(I) \subset I$ e I es cerrado $\implies x_n \in I$. Hemos visto que $\exists \lim x_n = l \in I$, por tanto l es un punto fijo de $f(x)$.

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) =^1 f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(l)$$

Donde en 1 hemos usado la continuidad de f. □

Teorema 1.4. Sea el SDD $\{I, f\}$ donde I es cerrado y supongamos que $f \in \mathscr{C}^1(I)$, verificando que $|f'(x)| < 1 \;\; \forall x \in I$. Entonces existe un único punto de equilibrio de f.

1.3.2. Estabilidad

Definición 1.13. Un punto de equilibrio α de un SDD $\{I, f\}$ se dice que es:

- Estable, si $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |x_0 - \alpha| < \delta$ y $x_n = f^n(x_0),\; n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica $|x_n - \alpha| < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Asintóticamente estable, si es estable y además $\exists \delta > 0 :$ si $|x_0 - \alpha| < \delta \implies \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
- Inestable, si no es estable, esto es, $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_0 \in I$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_0 - \alpha| < \delta$ y $|x_{n_0} - \alpha| > \epsilon_0$.

Definición 1.14 (Atractor global). Un punto de equilibrio α del SDD $\{I, f\}$ se dice que es un atractor global si para cualquier $x_0 \in I$ y $x_n = f^n(x_0)$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Definición 1.15 (Atractor local). Un punto de equilibrio α del SDD $\{I, f\}$ se dice que es un atractor local si

$$\exists \eta > 0 : \forall x_0 \in I \,\cap\, (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \implies \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Es decir, α atrae a las soluciones cuando x_0 está en un entorno suyo. En cuyo caso, diremos que α es LAE.

Teorema 1.5 (Estabilidad asintótica local). Si α es un punto de equilibrio del SDD $\{I, f\}$ y $f \in \mathscr{C}^1(I)$, entonces:

(i) Si $|f'(\alpha)| < 1$ entonces α es localmente asintóticamente estable.
(ii) Si $|f'(\alpha)| > 1$ entonces α es inestable.

Demostración. (i) Supongamos $|f'(\alpha)| < 1 \overset{f' \text{ continua}}{\implies} \begin{matrix} \exists \eta > 0 \\ \exists 0 \le \lambda < 1 \end{matrix} \Big/ \begin{matrix} |f'(x)| \le \lambda < 1 \\ \forall x \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I \end{matrix}$

Sean $x, y \in (\alpha-\eta, \alpha+\eta) \cap I$. Como es continua $\overset{\text{TVM}}{\implies} |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|$ con ξ entre x e $y \implies \xi \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I \implies |f(x) - f(y)| \le \lambda |x - y|$.

Sea $x_0 \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I, x_{n+1} = f(x_n),\; n \ge 0 \; |x_n - \alpha| = |f(x_{n+1}) - f(\alpha)| \le \lambda |x_{n+1} - \alpha| = \lambda |f(x_{n-2}) - f(\alpha)| \le \lambda^2 |x_{n-2} - \alpha| \le \cdots \le \lambda^n |x_0 - \alpha| \to 0$, puesto que $0 \le \lambda < 1$ □

1.3.3. Ciclos

Definición 1.16 (Ciclo). Un ciclo de orden s o una órbita periódica de período s o un s—ciclo del SDD= $\{I, f\}$ es un conjunto de puntos $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}\} \subset I$ distintos entre sí tales que:

$$\alpha_1 = f(\alpha_0), \cdots, \alpha_{s-1} = f(\alpha_{s-2}), \alpha_0 = f(\alpha_{s-1})$$

En ese caso, se llama ciclo

Nota. Si elegimos como dato inicial $x_0 = \alpha_0$, entonces la órbita correspondiente $\gamma(I, f, \alpha_0)$ tiene un comportamiento periódico:

$$\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_0, \cdots\}$$

Nota. Una órbita de $\{I, f\}$ se dirá eventualmente periódica si ..
COMPLETAR DE LAS DIAPOSITIVAS; DIAPOSITIVA 55

Nota. Las órbitas periódicas de periodo mínimo s (si existen), están constituidas por valores que resuelven la ecuación $\{x \in I : f^s(x) = x\}$ pero que no son soluciones de las $s-1$ ecuaciones $\{x \in I : f^h(x) = x\}$ con $h = 1, 2, \cdots, s-1$.

Si $\alpha_0 \in I$, $f^s(\alpha_0) = f(f(f \cdots (f(\alpha_0)) \cdots) = f(f(f \cdots (f(\alpha_0)) \cdots) = \cdots = \alpha_0$ Donde en la primera vez se repite la f s veces, la segunda $s-1$ veces y así sucesivamente. De esta forma, $\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}$ son puntos de equilibrio de f^s pero NO son puntos de equilibrio de f^h con $h = 1, \cdots, s-1$.

Puesto que los puntos de una órbita periódica de un periodo s son puntos de equilibrio de la función $f^s(x)$ para estudiar la estabilidad de una órbita periódica basta estudiar la estabilidad ed los puntos de equilibrio de la función $f^s(x)$:

Proposición 1.8. Supongamos que $f : I \to I, f \in \mathscr{C}^1(I)$ y que $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}\}$ es un s—ciclo para el SDD $\{I, f\}$. Entonces:

(i) Si $|f'(\alpha_0) \cdots f'(\alpha_{s-1})| < 1$ el ciclo es asintóticamente estable
(ii) Si $|f'(\alpha_0) \cdots f'(\alpha_{s-1})| > 1$ el ciclo es inestable.

1.3.4. Aplicación: estrategias de pesca

Ejemplo 1.10. La dinámica de una población de peces sin agentes externos y adecuadamente normalizada viene descrita por la ecuación:

$$x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2$$

El término $\frac{3}{2}x_k$ representa el crecimiento y el término $\frac{1}{2}x_k^2$ representa la competencia intraespecífica. Esta ecuación que tenemos es una ecuación en diferencias no lineal. Además, es un SDD por su forma pero no lo trataremos como tal. Se proponen dos estrategias de pesca:

- Pescar una cantidad fija b de peces al año, con lo que la ecuación sería:

$$x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2 - b$$

- Pescar una fracción $r \in (0,1)$ del total de peces en cada año, con lo que la ecuación quedaría:

$$x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2 - rx_k$$

Vamos a ver las soluciones de ambas para ver cuál es más estable:

1. Estudiamos la primera. Tenemos la ecuación $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - b$, una parábola. Buscamos entonces los puntos de equilibrio, soluciones de la ecuación $x = f(x)$. Miramos la ecuación por ello:

$$x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \implies x^2 - x - 2b = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4*2b}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8b}}{2}$$

Entonces, habrá puntos de equilibrio si el discriminante es positivo, es decir $1 - 8b \geq 0 \implies b \leq \frac{1}{8}$. Volvemos ahora a la ecuación en diferencias no lineal. Ahora, los puntos de equilibrio serán $\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{1-8b}}{2}$ y $\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{1-8b}}{2}$.
Estudiamos ahora la estabilidad. Si $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - b$, tenemos que :

$$f'(x) = \frac{3}{2} - x \implies \begin{cases} f'(\alpha_0) = f'(\frac{1+\sqrt{1-8b}}{2}) = 1 - \dfrac{\sqrt{1-8b}}{2} < 1 \\ f'(\alpha_1) = f'(\frac{1-\sqrt{1-8b}}{2}) = 1 + \dfrac{\sqrt{1-8b}}{2} > 1 \end{cases}$$

Por lo que tenemos que en el primer caso, como $f'(\alpha_0)$ es menor que 1, el resultado es Localmente asintóticamente estable y el segundo caso, como $f'(\alpha_1)$ es mayor que 1, es inestable.
Por tanto, tenemos que tomar un x_0. Sabemos que $\alpha_0 < x_0$ pues de lo contrario, la población de peces se extinguiría. Así:

$$\frac{1-\sqrt{1-8b}}{2} < x_0 \implies b < \frac{1}{2}x_0 - (1-x_0)$$

De esta forma, para llegar al punto de equilibrio A.E., hay que tomar $0 < b < min\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}x_0 - (1-x_0)\}$
Ahora, si $b = \frac{1}{8}$, entonces $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $f'(\frac{1}{2}) = 1$ y $f''(x) = -1 < 0 \implies \alpha = \frac{1}{2}$ es inestable
Por tanto, si tomáramos $x_0 > \frac{1}{2} \implies x_k$ converge hacia $\frac{1}{2} = \alpha$. Si tomáramos $x_0 < \frac{1}{2} \implies x_k$ diverge negativamente.

2. Ahora tenemos $x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2 - rx_k \implies x_{k+1} = (\frac{3}{2} - r)x_k - \frac{1}{2}x^2$.
Ahora, volvemos a sacar los puntos de equilibrio:

$$x = (\frac{3}{2} - r)x_k - \frac{1}{2}x^2 \implies \begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 1 - 2r \end{cases}$$

Entonces, tenemos que estudiar ahora la estabilidad. Sabemos que $f'(0) = \frac{3}{2} - r$. También $f'(1-2r) = \frac{1}{2} + r$
Ahora, veremos si para $\alpha_0 = 0$ es Localmente Asintóticamente estable. tenemos que:

$$|f'(0)| < 1 \iff -1 < \frac{3}{2} - r < 1 \iff \frac{1}{2} < r\frac{5}{2}$$

Pero $r \in (0,1)$, luego si $\frac{1}{2} < r < 1$ entonces $\alpha_0 = 0$ es L.A.E. Del mismo modo, si $0 < r < \frac{1}{2}$, entonces $\alpha_0 = 0$ es inestable.
Hacemos lo mismo para $\alpha_1 = 1 - 2r$. Tenemos que el sistema será L.A.E si:

$$|f'(1-2r)| < 1 \iff |\frac{1}{2} + r| < 1 \iff \frac{-3}{2} < r\frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos que si $0 < r < \frac{1}{2}$ entonces α_1 es L.A.E. y si $r > \frac{1}{2}$ entonces α_1 es inestable.
Ahora,¿ y si $r = \frac{1}{2}$?. En ese caso, $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = 0$, por lo que solo hay un punto de equilibrio y

$$|f'(0)| = \frac{3}{2} - r = 1$$

y que:

$$f''(x) = -1 \implies \text{inestable}$$

2. Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

2.1. La ecuación lineal en diferencias de orden superior

Definición 2.1 (Ecuación lineal en diferencias). Es una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b(n), \quad n \geq 0$$

con $a_0 \neq 0$. Si $b(n) = 0$ la ecuación se dice homogénea.

- $k \geq 1$ es el orden de la ecuación.

- Si $k > 1$ se dice que la ecuación es de orden superior.
- $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$ donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo que será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
- Una solución de esta ecuación será una sucesión $\{x_n\}$ tal que se verifica la ecuación $\forall n \geq 0$.

Ejemplo 2.1. Un ejemplo es la sucesión de Fibonacci:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geq 1$$

con $f_0 = f_1 = 1$

El espacio de las soluciones de las ecuaciones lineales en diferencias
Sea S el conjunto de todas las sucesiones con coeficientes en $\mathbb{K}$:

$$S = \{X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad x_n \in \mathbb{K}\}$$

Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones:

- Suma : $X = \{x_n\}$, $Y = \{y_n\}$ con $n \geq 0$, entonces $X + Y = \{x_n + y_n\}$
- Producto escalar: $X = \{x_n\}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda X = \{\lambda x_n\}$

Además, es de dimensión infinita pues podemos dar infinitas sucesiones linealmente independientes, como $X_0 = \{1, 0, 0, \cdots\}$, $X_1 = \{0, 1, 0, 0, \cdots\}$ y así sucesivamente.

Teorema 2.1. Sea $\sum$ el conjunto de las soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \quad n \geq 0$$

Entonces, $\sum$ es un subespacio vectorial de S de dimensión k.

Demostración. Tenemos que probar que Σ es un espacio vectorial, para ello veremos que $\forall X, Y \in \sum$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tenemos que:

$$\lambda X + \mu Y \in \sum \implies \{\lambda x_n + \mu y_n\}$$

Si sustituimos esto en la ecuación lineal en diferencias, y agrupamos los términos que tengan λ y μ, nos quedarán en términos de x_n e y_n, que, como son soluciones, igualarán la ecuación a 0 y quedará probado.

$(\lambda x_{n+k} + \mu y_{n+k}) + a_{k-1}(\lambda x_{n+k-1} + \mu y_{n+k-1}) + \cdots + a_1(\lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}) + a_0(\lambda x_n + \mu y_n) =$
$= \lambda(x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n) + \mu(y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n) = 0$

Veamos ahora que la $dim\Sigma = k$ con k el orden de la ecuación.
Sea $\mathscr{L} : S \to S$ que lleva $X \mapsto X^* = \mathscr{L}(X)$, es decir: $\{x_n\} \mapsto \{x_n^*\}$ y x_n^* es

$$x_n^* = x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n$$

$\Sigma \subset \mathscr{S}$, se cumple que $\Sigma = \{\mathscr{X} : \mathscr{L}(\mathscr{X}) = 0\} = ker\mathscr{L}$ y, por tanto, Σ es un subespacio vectorial de $\mathscr{S}$. Para ver que $dim\Sigma = k$ basta ver que la aplicación:

$\Phi : \Sigma \to \mathbb{K}^k$, $\mathscr{X} \mapsto \Phi(\mathscr{X}) = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ es un isomorfismo (si Σ y $\mathscr{K}$ son isomorfos, entonces tendrán igual dimensión). Como la aplicación Φ verifica las condiciones para ser un isomorfismo (es lineal y $\forall(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{K}^k$, $\exists\{x_n\} \in \Sigma : \Phi(\mathscr{X}) = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$), queda demostrado. □

FALTA CONTENIDO

Teorema 2.2. La sucesión $X_\lambda = \{\lambda^n\}_{n\geq 0}$ es solución de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden $k \iff p(\lambda) = 0$, esto es: λ es una raíz característica.

1.
2. Supongamos que $a_{k-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$ pero existe una raíz λ_* que sea compleja. Sabemos que $\bar{\lambda}_*$ también es raíz de $p(\lambda)$. Así, $X_{\lambda_*} = \{\lambda_*^n\}$ $X_{\bar{\lambda}_*} = \{\bar{\lambda}_*^n\}$

Proposición 2.1 (Lema). Sean las sucesiones:

$$R = \frac{1}{2}[X_{\lambda_*} + X_{\bar{\lambda}_*}] = \{\frac{1}{2}\lambda_*^n - +\bar{\lambda}_*^n\}$$

$$I = \frac{1}{2i}[X_{\lambda_*} - X_{\bar{\lambda}_*}] = \{\frac{1}{2i}\lambda_*^n - +\bar{\lambda}_*^n\}$$

Entonces, R e I son soluciones de la ecuación y además son linealmente independientes.

Demostración. Estas son soluciones puesto que Σ es un espacio vectorial y estamos sumando soluciones y multiplicando por escalares del cuerpo del e.v. Ahora, veamos que son Linealmente independientes:

$$\alpha R + \beta I = 0 \iff \alpha = 0 \quad y \quad \beta = 0$$

$$\alpha\frac{1}{2}[X_{\lambda_*} + X_{\bar{\lambda}_*}] + \beta\frac{1}{2i}[X_{\lambda_*} - X_{\bar{\lambda}_*}]$$

Ahora, agrupamos y tenemos que:

$$(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i})X_{\lambda_*} + (\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i})X_{\bar{\lambda}_*} = 0$$

. Como X_{λ_*} y .... LO AHA BORRAO ME CAGO EN DIO; COMPLETARLA.

Ahora, tenemos potencias de números complejos, luego usamos la fórmula de Moivre. Teniendo el módulo y el argumento de los números complejos. Además, como un número complejo se puede escribir como $r(cos\theta isen\theta)$ con r su módulo y θ su argumento, podemos decir que:

$$X_{\lambda_*} = \{r^n(cosn\theta + isenn\theta)\}$$

$$X_{\bar{\lambda}_*} = \{r^n(cosn\theta + isenn\theta)\}$$

Y escribir así:

$$R = \{r^n cos(n\theta)\}$$
$$I = \{r^n sen(n\theta)\}$$

□

Definición 2.2 (Raíz múltiple). Decimos que $\lambda_* \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p(\lambda)$ de multiplicidad $m \geq 1$ si:

$$p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = \cdots = p^{(m-1)}(\lambda_*) = 0 \quad p^{(m)}(\lambda_*) \neq 0$$

En el caso 3: Raíces múltiples, definimos las nuevas sucesiones:

$$DX_{\lambda_*} = \{n\lambda^{(n-1)}\}$$
$$D^2X_{\lambda_*} = \{n(n-1)\lambda^{(n-2)}\}$$
$$\cdots$$
$$D^hX_{\lambda_*}\{n(n-1)...(n-h+1)\lambda^{(n-h)}\}$$

Y sabemos que $n(n-1)...(n-h+1) = \frac{n!}{(n-h)!}$ es el símbolo de Pochhammer
Dada una ecuación en diferencias $x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$
¿Bajo qué condiciones DX es solución? Será solución si $\mathscr{L}(DX) = 0$.
¿Para qué valor de λ el 2º miembro vale 0?
Necesitamos λ_* tales que $p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = 0 \Rightarrow \lambda_*$ debe ser raíz de multiplicidad 2.

Hemos demostrado el lema para $r = 1$. El lema se demuestra por inducción en r.

Proposición 2.2 (Lema). Sea λ_* una raíz del polinomio característico de multiplicidad m, entonces $X_{\lambda_*}, DX_{\lambda_*}, \ldots D^{m-1}X_{\lambda_*}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias homogénea.

Demostración.
$lambda_*$ raíz de $p(\lambda)$ de multiplicidad $m \geq 1 \Rightarrow p(\lambda_* = 0 = p'(\lambda_*) = p''(\lambda_*) = \ldots = p^{m-1}(\lambda_*)$. Por el Lema 1:

$$\mathscr{L}(DX_\lambda) = \sum_{h=0}^{r} \binom{r}{h} p^h(\lambda) D^{r-h} X_\lambda$$

Sustituimos $\lambda = \lambda_*$.

$$\mathscr{L}(DX_{\lambda_*}) = \sum_{h=0}^{r}$$

$X_{\lambda_*}, DX_{\lambda_*}, \ldots D^{m-1}X_{\lambda_*}$ son linealmente independientes?
Sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_0 X_{\lambda_*} + \alpha_1 DX_{\lambda_*} + \alpha_0 D^2 X_{\lambda_*} + \ldots + \alpha_{m-1} X_{\lambda_*}$$

□

Ejemplo 2.2. Sea la ecuación $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0$ con $n\geq 0, x_0=1, x_1=1$

Es de orden 2, luego $dim\Sigma=2$, por lo que necesitamos una base de soluciones con dos elementos.

EL polinomio característico es $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_*=1$ (doble).

La base será

$$\begin{cases} X_{\lambda_*}=X_1=1,1^2,1^3,\ldots,1^n,\ldots=\lambda_*^n{}_{n\geq 0} \\ DX_{\lambda_*}=DX_1= \end{cases}$$

Teorema 2.3. Sean $\lambda_i, i=1,2,\cdots,s$ las raíces del polinomio característico

Teorema 2.4. Sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ las raíces de $p(\lambda)$. Son equivalentes:

1. Todas las soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea verifican
$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$
2. Las raíces verifican
$$max_{i=1,\ldots,s}|\lambda_i|<1$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$
Supongamos que $\exists\bar{\lambda}$ raíz de $p(\lambda)$ tal que $|\bar{\lambda}|\geq 1$. Entonces la sucesión $X_{\bar{\lambda}}=\{\bar{\lambda}^n\}$ es solución de la ecuación.

Esto implica que hay una solución $x_n=C_1\bar{\lambda}^n$ tal que:

$$|x_n|=|C_1||\bar{\lambda}^n|=|C_1||\bar{\lambda}|^n\geq 1$$

con C_1 arbitraria, lo cual es absurdo
$\boxed{\Leftarrow}$
Sea $\mu=max|\lambda i|<1$ con $1\leq i\leq s$. Sabemos que :

$$x_n\leq|x_n|\leq\sum_{i=1}^{s}|q_i(n)||\lambda_i|^n\leq\mu^n(\sum_{i=1}^{s}|q_i(n)|)$$

por ello, existe un $c_i\in\mathbb{R}$ tal que $|q_i(n)|\leq c_i n^{m_i-1}$ así que, si $k=max(m_i)$ con m_i la multiplicidad de las raíces entonces:

$$\mu^n(\sum_{i=1}^{s}|q_i(n)|)\leq\mu^n\sum_{i=1}^{s}c_i n^{m_i-1}\leq\mu^n n^{k-1}(\sum_{i=1}^{s}c_i)\to 0$$

□

Teorema 2.5 (Comportamiento asintótico de las soluciones con k=2). En el caso $k=2$, las raíces λ_1,λ_2 del polinomio $p(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ verifican $|\lambda_i|<1$

para $i = 1, 2$ si y solo si

$$\begin{cases} p(1) = 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ p(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ p(0) = a_0 < 1 \end{cases}$$

Nota. Si $k = 2$, $a_1, a_0, \in \mathbb{R}$. Si tenemos la ecuación $x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$, entonces $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_1$ que tiene λ_1 y λ_2 como raíces, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} p(1) > 0 \\ p(-1) > 0 \\ p(0) < 1 \end{array}\right\} \iff |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Sabemos que $p(0) = a_0 \leq |a_0| = |\lambda_1\lambda_2| = |\lambda_1||\lambda_2| < 1$.

Vamos a probar la primera doble implicación:

$\boxed{\Rightarrow}$

Vemos que $p(1) > 0$. Supongamos que no, supongamos que $p(1) \leq 0$. Entonces o bien $p(1) = 0 \implies$ es una raíz y $|1| > 1$, lo cual es absurdo. Ahora, si $p(1) < 0$. Como $\lim_{\lambda\to\infty} p(\lambda) = +\infty$. Entonces, por bolzano $\exists k > 1 : p(k) = 0 \implies k > 1$ es raíz, lo cual también es absurdo. Con el (-1) se hace análogamente.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}/R$. Entonces $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ y $a_0 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2$

Supongamos ahora que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entonces $1 > p(0) = a_0 = \lambda_1\lambda_2$. Pero también , como $p(1) = 1 + a_1 + a_0$ y $p(-1) = 1 - a_1 + a_0$ entonces $a_0 > -1$ por lo que $-1 < a_0 < 1 \implies -1\lambda_1\lambda_2 < 1 \implies |\lambda_1||\lambda_2| < 1 \implies$ al menos 1 tiene módulo menor que 1. Suponemos que es λ_1 (en caso contrario, tomamos el otro y seguimos igual).

Se puede probar que el cambio de crecimiento está en $(-1, 1)$, pues $(-\infty, -1)$ es decreciente y $(1, +\infty)$ es creciente, lo que implica que $-1 < \lambda_2 < 1$

Dada la ecuación en diferencias lineal completa

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b(n), \quad con\ a_0 \neq 0. \tag{1}$$

Lema Sean $\{x_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ y $\{x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ soluciones de la ecuación (1), entonces $\{x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ es solución de la ecuación lineal en diferencias homogénea.

Demostración. La prueba se realiza restando las dos ecuaciones e introduciendo las sucesiones en la ecuación y nos queda que $\{x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\}$ es solución de la ecuación homogénea aosciada. □

Nota. Como consecuencia, toda solución $\{x_n\}$ de (1) se escribe como la suma de una solución particular de (1) y la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$x_n = \overline{x_n} + x_n^h, \quad n \geq 0$$

Teorema 2.6 (Principio de superposición). Sean $\{x_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ y $\{x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ soluciones de las ecuaciones lineales en diferencias completas

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+k}^{(1)} + a_{n+k-1}^{(1)} + \ldots + a_1 x_{n+1}^{(1)} + a_0 x_n^{(1)} = b_1(n) \\ x_{n+k}^{(2)} + a_{n+k-1}^{(2)} + \ldots + a_1 x_{n+1}^{(2)} + a_0 x_n^{(2)} = b_2(n) \end{array}\right\}$$

respectivamente. Entonces $\{x_n^{(1)} + x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ es solución de la ecuación en diferencias completa

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b_1(n) + b_2(n)$$

Demostración. Sean $\{x_n^{(1)}\}$ solución de la primera y $\{x_n^{(2)}\}$ solución de la segunda.

Ahora, si sustituimos la primera ecuación en su solución y la segunda ecuación en su solución y sumamos ambas, nos queda que $\{x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\}$ es solución de la nueva ecuación en diferencias con término independiente $b_1(n) + b_2(n)$ □

Ejemplo 2.3. Vamos a resolver la siguiente ecuación en diferencias lineal completa de orden 2: $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 1 + n$.

1. Buscamos una solución de la ecuación en diferencias homogénea asociada: $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$. Esta es la ecuación de Fibonacci, cuya solución es

$$x_n^h = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2. Buscamos una solución particular de la ecuación dada. Usamos el principio de superposición, para dividir el término $b(n) = 1 + n$. En cada caso, buscaremos una solución particular del mismo carácter que el término independiente, atendiendo a la tabla de la **diapositiva 27** del tema 2.

   - $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 1$. Como el término independiente es constante, buscamos una solución particular constante. Sea x_* la posible solución constante. Entonces, se tendría $x_* - x_* - x_* = 1 \implies x_* = -1$. Por tanto,
   $\{x_n^{(1)}\} = \{-1\}_{n\geq 0}$ es solución (constante).
   - Resolvemos ahora $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = n$. Como el término independiente es un polinomio de grado 1, buscamos una solución de la forma $c_0 + c_1 n$. Como debe ser solución, sustituimos:

   $$(c_0 + c_1(n+2)) - (c_0 + c_1(n+1)) - (c_0 + c_1 n) = n \implies -c_0 + c_1 + n(-c_1) = n$$

   que es un polinomio en n. Igualando coeficientes, tenemos que $c_1 = -1$ y $-c_0 + c_1 = 0 \implies c_0 = -1$. Por tanto, la solución buscada es $\{x_n^{(2)}\} = \{-1 - n\}_{n\geq 0}$

3. Solución. Por el lema anterior, la solución final es la suma de la solución de la homogénea más la solución particular de la completa. A su vez, por el

principio de superposición, la solución particular de la completa es la suma de las dos soluciones particulares halladas. Por tanto:

$$x_n = x_n^h + x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 - 1 - n =$$

$$= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 - n, \quad n \geq 0$$

Como siempre, las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales, en cada caso.

2.2. El modelo de Samuelson

En un país con economía de mercado, la renta nacional Y_n en un período determinado n puede describirse como

$$Y_n = C_n + I_n + G_n$$

donde

- $C_n =$ gasto de los consumidores para la compra de bienes de consumo
- $I_n =$ inversión privada por la compra de bienes
- $G_n =$ gasto público

Donde n se suele medir en años.

Para simplificar el modelo vamos a hacer algunas suposiciones que son ampliamente aceptadas por los economistas.

Diremos que el consumo C_n es proporcional a la renta nacional Y_{n-1} en el año anterior, es decir, $C_n = bY_{n-1}$, donde $b > 0$ (*multiplicador*) se conoce habitualmente como la *tendencia marginal al consumo*.

La inversión privada inducida I_n es proporcional al incremento del consumo $C_n - C_{n-1}$, esto es,

$$I_n = k[C_n - C_{n-1}],$$

donde $k > 0$ se denomina *coeficiente acelerador*.

Finalmente, el gasto público G_n se supone constante a lo largo de los años

$$G_n = G$$

Con las ecuaciones que tenemos, podemos ver que:

$$\begin{cases} Y_n = bY_{n-1} + k(bY_{n-1} - bY_{n-2}) + G \\ Y_{n+2} - b(1+k)Y_{n+1} + kbY_n = G \\ p(\lambda) = \lambda^2 - b(1-k) + kb \end{cases}$$

Con $G > 0$ constante. Ahora, resolvemos la segunda.

1. Calculamos la asociada homogénea:
$$Y_{n+2} - b(1-k)Y_{n+1} + kbY_n = 0$$
Soluciones al polinomio característico. Tenemos que buscar un equilibrio $Y_n = Y_n^h + Y_n^{(1)} = Y_n^h + Y_*$ con Y_* una solución particular constante.
2. Buscamos condiciones para que la renta nacional converja hacia Y_*. Ahora, ¿Cuándo las soluciones de la ecuación homogénea van a 0?. Si $k = max(|\lambda_i) < 1 \iff$
$$\iff \begin{cases} p(1) = 1 - b(1+k) + kb01 - b > 0 \\ p(-1) = 1 + b(1+k) + kb > 0 \text{ (siempre)} \\ p(0) = kb < 1 \end{cases}$$
Por tanto, debe ocurrir, teniendo que $b > 0$ y $k > 0$:
$$\begin{cases} 1 - b > 0 \\ bk < 1 \end{cases}$$

2.3. El modelo del jugador arruinado

Supongamos que un jugador va a jugar a una sucesión de juegos contra un solo adversario. En cada juego, la probabilidad de que el jugador gane 1$ es un valor conocido a y la probabilidad de perder 1$ es $1-q$, donde $0 \leq q \leq 1$. El juego se termina si pierde todo su dinero o bien alcanza su objetivo de conseguir N dólares. Si el jugador se queda sin dinero antes, se dice que el jugador se ha arruinado.

Por tanto, sea p_n la probabilidad de que el jugador se arruine si posee n dólares. Así, siendo $p_n = 1$ y $p_0 = 0$, por el teorema de la probabilidad total tenemos
$$p_n = qp_{n+1} + (1-q)p_{n-1}$$
y si cambiamos n por $n+1$, obtenemos:
$$p_{n+2} - \frac{1}{q}p_{n+1} + \frac{1-q}{q}p_n = 0, \quad n = 0, 1, \cdots, N, \quad p_0 = 1, p_N = 0$$
Ahora, la ecuación característica viene dada por :
$$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1-q}{q} = 0$$
Y esta ecuación tendrá como raíces:
$$\lambda_1 = \frac{1-q}{q} \quad y \quad \lambda_2 = 1$$
Por tanto, la solución general será de la forma:
$$p_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \implies p_n = c_1(\frac{1-q}{q})^n + c_2$$
Además, con $p_0 = 0$ y $p_n = 1$, tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas y podemos resolverlo.

3. Sistemas de ecuaciones en diferencias

3.1. Introducción

En esta sección vamos a abordar el estudio de **sistemas de ecuaciones en diferencias**. Para ello, es necesario hacer un repaso de algunos conceptos que ya se conocen de otras asignaturas como *Geometría II* o *Métodos Numéricos I*. Es por esto que muchos resultados aparecen sin demostración, pues lo que nos interesa es su aplicación a la resolución y el estudio de sistemas de ecuaciones en diferencias.

Ejemplo 3.1. Vamos a estudiar el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias lineal con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= x_n - 2y_n \end{aligned}\right\}$$

Podemos reescribirlo matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Llamamos $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, que serán el *vector de incógnitas* y la *matriz de coeficientes*, respectivamente. Entonces, el sistema se escribe:

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n \geq 0 \tag{2}$$

Ahora observamos lo siguiente, iterando la expresión (2):

$$X_{n+1} = AX_n = A(AX_{n-1}) = A^2X_{n-1} = A^2(AX_{n-2}) = \ldots = A^{n+1}X_0,$$

donde $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ son las condiciones iniciales.

Por tanto, la solución del sistema es $X_n = A^nX_0, \ n \geq 0$. Observemos que tenemos una potencia de una matriz. En muchos casos, lo que nos interesará será el comportamiento asintótico de la solución, que se reducirá a estudiar cómo se comportan las potencias de una cierta matriz.

Ejemplo 3.2. Sabemos que la *sucesión de Fibonacci* es una ecuación en diferencias lineal de orden 2,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 0, \quad f_0 = f_1 = 1$$

Veamos cómo podemos transformarla en un sistema de ecuaciones en diferencias. Para ello, definimos:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= f_n \\ y_n &= f_{n+1} \end{aligned}\right\}$$

Y realizando transformaciones, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} &= f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = y_n + x_n \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \end{aligned}\right\} \quad n \geq 0$$

Al escribirlo en forma matricial, nos queda:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 0,$$

donde las condiciones iniciales son $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, la solución es $X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 0$.

3.1.1. Valores y vectores propios

Definición 3.1 (Valor propio). λ es *valor propio* de $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ si y solo si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^k$ tal que

$$Av = \lambda v$$

El vector v se llama *vector propio asociado al valor propio* λ.

Nota. Vemos el vector v como un vector columna.

3.1.2. Cálculo de valores y vectores propios

Tenemos que $Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I)v = 0$. Esto es un sistema de ecuaciones homogéneo, dependiente del parámetro λ, donde v es el vector de incógnitas. Por ser homogéneo, siempre tiene solución. Si esa solución es única, necesariamente es la solución trivial $v = 0$, que desechamos.

Queremos entonces que sea un sistema compatible indeterminado, con el fin de encontrar vectores v no nulos. Para ello imponemos que $det(A - \lambda I) = 0$, es decir, debemos calcular las raíces de ese polinomio.

Definición 3.2 (Polinomio característico). Si $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, el polinomio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ se llama *polinomio característico* de la matriz A.

Si $\dim A = k$, entonces $p(\lambda)$ es de grado k.

Nota. Por el *Teorema fundamental del Álgebra*, sabemos que $p(\lambda)$ tiene k raíces entre reales y complejas, contando multiplicidades. Además, el término de mayor grado es siempre $(-1)^k\lambda^k$.

Definición 3.3 (Ecuación característica). Llamamos *ecuación característica* a la ecuación
$$p(\lambda) = 0$$

Con esta notación, los *valores propios* de una matriz son las raíces de su polinomio característico, y los *vectores propios* son soluciones no triviales del sistema $(A-\lambda I)v = 0$. De hecho, cada valor propio define un **subespacio vectorial** de vectores propios, pues sabemos que hay infinitas soluciones. Recogemos esta información en los siguientes teoremas y definiciones.

Teorema 3.1. Sea $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. Entonces, $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A si y solo si
$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0,$$
es decir, λ es solución de la ecuación característica.

Una consecuencia inmediata de este teorema es que **una matriz de orden k tiene k valores propios**, contando multiplicidades. Es decir, dada $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tales que
$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m1}(\lambda-\lambda_2)^{m2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r},$$
donde $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = k$.

Definición 3.4 (Multiplicidad algebraica). Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ los valores propios distintos de una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. Llamamos *multiplicidad algebraica de* λ_i, y lo denotamos como m_i, a la multiplicidad de λ_i como raíz de $p(\lambda)$.

Se tiene que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = k$.

En lo que respecta a vectores propios, tenemos lo siguiente.

Definición 3.5 (Subespacio propio). Denotamos como $\mathcal{V}_\lambda$ al subespacio vectorial de vectores propios asociados al valor propio λ. Además, tenemos que
$$\mathcal{V}_\lambda = \ker(A-\lambda I) = \{v \in \mathbb{C}^k : Av = \lambda v\}$$

Definición 3.6 (Multiplicidad geométrica). Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ los valores propios distintos de una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. Llamamos *multiplicidad geométrica de* λ_i, y la denotamos como σ_i, a la dimensión del subespacio propio $\mathcal{V}_{\lambda_i}$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Nota. Obsérvese que siempre se verifica $\sigma_i \geq 1$.

Ejemplo 3.3. Calcular los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

En primer lugar, hallamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)+3 = \lambda^2 - 1$$

Resolvemos ahora la ecuación característica $p(\lambda) = 0$, y obtenemos dos raíces distintas, 1 y -1. Por tanto, tenemos dos valores propios distintos: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Ahora vamos a obtener los vectores propios, que son soluciones no triviales del sistemas de ecuaciones lineales $(A - \lambda I)v = 0$. Lo que vamos a hacer es sustituir los valores propios obtenidos.

(*i*) Para $\lambda_1 = 1$, tenemos que:
$A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, y el sistema resultante es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
De aquí sacamos que $v_1 = 3v_2,\ v_2 \in \mathbb{C}$. Es decir, tenemos el subespacio vectorial

$$\mathscr{V}_{\lambda_1} = \mathscr{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : v_1 = 3v_2 \right\} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

(*ii*) Para $\lambda_2 = -1$, se tiene
$A - (-1) \cdot I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y el sistema que tenemos es $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Por tanto, se tiene que $v_1 = v_2,\ v_2 \in \mathbb{C}$. De nuevo hemos obtenido un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2$:

$$\mathscr{V}_{\lambda_2} = \mathscr{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : v_1 = v_2 \right\} = \mathscr{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Ejemplo 3.4. Fibonacci. Calcular los valores propios de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Su polinomio característico, $p(\lambda) = det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$.

Sus valores propios son las soluciones de $p(\lambda) = 0$, es decir, $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Notemos que el polinomio característico **es el mismo** que el que obtuvimos en el tema anterior para la ecuación de Fibonacci.

Veamos ahora un teorema que nos será útil a la hora de calcular potencias de una matriz.

Teorema 3.2 (Cayley-Hamilton). Toda matriz cuadrada anula su polinomio característico:

$$p(A) = 0$$

Nota. Merece la pena aclarar la notación utilizada. Si $p(\lambda) = (-1)^k \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, con $a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, 1, \ldots, k-1$, entonces $p(A) = (-1)^k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0 \in \mathscr{M}_k(\mathbb{C})$.

Ejemplo 3.5. Para la matriz A del *Ejemplo* (3.3), ¿es verdad que $p(A) = 0$? Comprobémoslo.

$$\left.\begin{array}{r} p(A) = A^2 - I \\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{array}\right\} \implies p(A) = 0$$

Una de las consecuencias del *Teorema de Cayley-Hamilton* es que nos permite hallar cualquier potencia de una matriz con relativa facilidad. Veámoslo.

Dada una matriz $A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{C})$, tenemos que $0 = p(A) = (-1)^k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$, con lo que

$$A^k = (-1)^k \left[-a_{k-1}A^{k-1} - a_{k-2}A^{k-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I\right]$$

Así, para calcular A^k necesitaríamos el polinomio característico y las potencias anteriores $(A^2, A^3, \ldots, A^{k-1})$. Entonces, si conocemos las $k-1$ primeras potencias de la matriz A, podemos calcular cualquier potencia superior:

$$A^{n+k} = A^k A^n = (-1)^k \left[-a_{k-1}A^{k-1} - a_{k-2}A^{k-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I\right] A^n =$$

$$= (-1)^k \left[-a_{k-1}A^{n+k-1} - a_{k-2}A^{n+k-2} - \ldots - a_1 A^{n+1} - a_0 A\right]$$

Ejemplo 3.6. Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz de Fibonacci. Calcular B^3 y B^4.

Tenemos que $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, luego por el *Teorema de Cayley-Hamilton* se tiene que

$$p(B) = B^2 - B - I = 0 \implies B^2 = B + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular las potencias sucesivas realizando manipulaciones algebraicas:

$B^3 = BB^2 = B(B+I) = B^2 + B = (B+I) + B = 2B + I$

$B^4 = BB^3 = B(2B+I) = 2B^2 + B = 2(B+I) + B = 3B + 2I$

En vista de lo anterior, podemos conjeturar que $B^n = (n-1)B + (n-2)I$ para $n \geq 3$, algo que tendríamos demostrar por inducción.

Concluimos este apartado con dos definiciones.

Definición 3.7 (Espectro de una matriz cuadrada). Llamamos espectro de una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ al conjunto

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}$$

Nota. Será útil incluir en el espectro de una matriz la multiplicidad de las raíces del polinomio característico.

Definición 3.8 (Radio espectral de una matriz cuadrada). Llamamos radio espectral de una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ al número real

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \ p(\lambda) = 0\}$$

Nota. En general, $\rho(A) \geq 0$. Además, el hecho de que $\rho(A) = 0$ implica que $\sigma(A) = \{0, 0, \ldots, 0\}$, pero no implica que $A = 0$, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7. Calcular el radio espectral de la matriz $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y de la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En ambos casos, el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2$. Por tanto, $\sigma(O) = \sigma(C) = \{0, 0\}$, y se tiene que $\rho(O) = \rho(C) = 0$.

3.1.3. Diagonalización de matrices

Definición 3.9 (Matrices semejantes). Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ se dicen *semejantes* si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ verificando

$$A = PBP^{-1}$$

A la matriz P se le suele llamar *matriz de paso*.

Proposición 3.1. Si dos matrices son semejantes, también lo son sus potencias

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}$$

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ semejantes. Entonces, $\exists P \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ invertible tal que $A = PBP^{-1}$. Así, tenemos que

$$A^n = A \cdot A \ldots \cdot A = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \ldots (PBP^{-1}) = PBP^{-1}PBP^{-1} \ldots PBP^{-1} = PB^nP^{-1}$$

Hemos usado la asociatividad del producto de matrices, y el hecho de que $P^{-1}P = I$. □

Definición 3.10 (Matriz diagonal). Una matriz $D \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ con $D = (d_{ij})$ se dice que es *diagonal* si $d_{i,j} = 0 \quad \forall i \neq j$. Esto es, si es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{kk} \end{pmatrix}$$

Nota. En una matriz diagonal, puede ser que $d_{ij} = 0$ para $i = j$.

Obsérvese que para una matriz diagonal es muy sencillo calcular las potencias:

$$D^n = \begin{pmatrix} d_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{kk}^n \end{pmatrix}$$

Si A es semejante a una matriz diagonal $D = (d_{ij})$, sabemos que A^n es semejante a D^n por la *Proposición 3.1*. Entonces, podemos calcular también fácilmente A^n:

$$A^n = P \begin{pmatrix} d_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{kk}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Es precisamente este hecho el que da pie a la siguiente definición.

Definición 3.11 (Matriz diagonalizable). Una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ se dice *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal.

Puesto que diagonalizar una matriz es útil para calcular sus potencias, lo que nos interesa ahora es ver bajo qué condiciones una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ es diagonalizable.

A es diagonalizable si $\exists D$ diagonal, $\exists P$ regular tal que $A = PDP^{-1}$. Entonces:

$$A = PDP^{-1} \iff AP = PDP^{-1}P \iff AP = PD$$

Viendo la matriz P por columnas, dicha expresión es equivalente a que

$$A\left(P_1 \,\middle|\, P_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, P_k \right) = \left(P_1 \,\middle|\, P_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, P_k \right) \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \left(AP_1 \,\middle|\, AP_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, AP_k \right) = \left(d_{11}P_1 \,\middle|\, d_{22}P_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, d_{kk}P_k \right)$$

Igualando las columnas de ambas matrices, se tiene que $AP_i = d_{ii}P_i$, $i = 1,\ldots,k$; es decir, los números d_{ii} deben ser valores propios de A. Además, los vectores columna $P_1, P_2, \ldots, P_k$ deben ser vectores propios asociados a valores propios de A.

La conclusión que hemos extraído es que, si A fuese diagonalizable, entonces la matriz P sería una matriz **cuyas columnas serían una base de cada subespacio propio de A**. También sabemos que la matriz D sería de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$ son los valores propios de A.

Veamos a continuación algunas propiedades sobre vectores propios, valores propios y matrices semejantes en general.

Proposición 3.2. Dada una matriz $A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{C})$, se verifican las siguientes propiedades.

(*i*) $\text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{kk} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$.

(*ii*) $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k$.

(*iii*) Los valores propios de una matriz regular son no nulos.

(*iv*) Los valores propios de una matriz simétrica real son reales.

(*v*) Vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes. Además, si la matriz es simétrica y real, entonces son ortogonales.

(*vi*) Para cualquier valor propio λ_i de A se verifica que $1 \leq \sigma_i \leq m_i$.

(*vii*) Para cualquier valor propio λ_i de A se verifica que $\sigma_i = k - \text{rango}(A - \lambda_i I)$.

(*viii*) Si λ es un valor propio de A, entonces λ^n es un valor propio de A^n

(*ix*) Dos matrices semejantes A y B tienen los mismos valores propios. Además, si v es un vector propio asociado a la matriz A, entonces $P^{-1}v$ es vector propio de la matriz B, donde P es la matriz regular que cumple $A = PBP^{-1}$.

Demostración. Razonaremos únicamente los dos últimos apartados. El resto se dejan como ejercicio al lector.

$(viii)$ Sea v un vector propio asociado al valor propio λ. Sabemos que se verifica la igualdad $Av = \lambda v$. Por tanto:

$$A^n v = A^{n-1}Av = A^{n-1}\lambda v = \lambda A^{n-2}Av = \lambda^2 A^{n-2}v = \lambda^2 A^{n-3}Av = \cdots = \lambda^n v$$

(ix) Supongamos que $A = PBP^{-1}$ con P regular. Si λ es un valor propio de A, entonces:

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}[A - \lambda I]P) =$$

$$= \det(P^{-1})\det(A-\lambda I)\det(P) = 0,$$

pues $\det(A-\lambda I) = 0$ al ser λ un valor propio de A. Por tanto, λ es un valor propio de B.
Ahora, sea $w = P^{-1}v$, donde v es un vector propio de A asociado a un valor propio λ. Entonces, tenemos que

$$Bw = BP^{-1}v = P^{-1}PBP^{-1}v = P^{-1}Av = P^{-1}\lambda v = \lambda P^{-1}v = \lambda w$$

Es decir, $w = P^{-1}v$ es un vector propio de B asociado al valor propio λ.

□

Vamos ahora a intentar caracterizar cuándo una matriz es diagonalizable.

Teorema 3.3 (Caracterización de la diagonalización). Sea $A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{C})$. Son equivalentes:

(i) A es diagonalizable.
(ii) Existe una base de $\mathbb{C}^k$ formada por vectores propios de A.

Nota. Atendiendo a las propiedades expuestas en la *Proposición 3.2*, tenemos que la afirmación (ii) del teorema equivale a que **coincidan la multiplicidad geométrica y algebraica** de cada uno de los valores propios de A.

Corolario 3.1.

(i) Una matriz cuyos valores propios sean todos simples es diagonalizable.
(ii) Toda matriz real simétrica es diagonalizable.

Hemos visto que no toda matriz cuadrada es diagonalizable. Para finalizar, veremos un proceso parecido a la diagonalización, que se puede aplicar siempre a toda matriz cuadrada.

Teorema 3.4 (Forma canónica de Jordan). Toda matriz $A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{C})$ es semejante a una matriz diagonal por bloques

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

donde $1 \leq r \leq k$, y

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \sigma(A)$$

Nota. La forma canónica de Jordan de una matriz A es única salvo eventuales permutaciones de los bloques.

Observemos lo siguiente: sea $A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{C})$, con J su forma canónica de Jordan. Podemos distinguir dos casos:

(*i*) Supongamos que r es el número de valores propios distintos de A. Entonces, la **multiplicidad geométrica** de un valor propio λ_i de A es 1, y la **multiplicidad algebraica** de λ_i es la dimensión del bloque asociado a λ_i.

(*ii*) Entonces, se tiene que la **multiplicidad geométrica** de un valor propio λ_i de A es el número de bloques de J correspondientes a λ_i. Asimismo, la **multiplicidad algebraica** de λ_i es la suma de las dimensiones de todos los bloques correspondientes a λ_i.

3.1.4. Modelos lineales en genética

Hemos visto hasta ahora una serie de herramientas para calcular potencias de matrices, y estudiar así el comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema de ecuaciones en diferencias. Veamos un ejemplo de aplicación a un modelo lineal.

Modelo: En un invernadero se producen flores rojas (AA), rosas (Aa) y blancas (aa). Se realiza un programa de fertilización artificial que consiste en polinizar cada planta con su propio color. Estudie la distribución de la población a largo plazo.

Llamamos X_n al número de flores rojas en la etapa n, Y_n a las rosas y Z_n a las blancas. Si cruzamos flores rojas con flores rojas (AA × AA) obtenemos un 100% de flores rojas. Si hacemos Aa × Aa, tendremos 25% rojas, 50% rosas y 25% blancas. Con las blancas (aa × aa), obtenemos siempre flores blancas.

Supondremos además que el número total de flores se mantiene constante. Entonces, obtenemos un sistema como este:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \frac{1}{4}Y_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{2}Y_n \\ Z_{n+1} = \frac{1}{4}Y_n + Z_n \end{cases} \implies \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}}_{W_n}$$

Nota. Podemos darnos cuenta de que A verifica que $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1$, para $j = 1, 2, 3$. A estas matrices se les conoce como *matrices estocásticas* o *de Markov*, y las estudiaremos más adelante.

Ya podemos intuir que eventualmente nos vamos a quedar sin flores rosas, pero vamos a comprobarlo analíticamente. El sistema se reduce a la expresión $W_{n+1} = AW_n,\ n \geq 0$. La solución, como ya sabemos, es $W_n = A^n W_0,\ n \geq 0$. El objetivo es calcular A^n, y estudiar el comportamiento de la población a largo plazo.

Para ello, comenzamos diagonalizando (si es posible) la matriz A:

(*i*) Obtenemos los valores propios de A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\frac{1}{2}-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad doble ($m_1 = 2$) y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, de multiplicidad simple ($m_2 = 1$).

(*ii*) Obtenemos los vectores propios. Para ello resolvemos el sistema $(A - \lambda_i I)v = 0$, para $i = 1, 2$.

$$(A - I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = 0$$

Por tanto, $\mathcal{V}_{\lambda_1} = \mathcal{V}_1 = \left\{v \in \mathbb{C}^3 : v_2 = 0\right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Es un subespacio de dimensión 2, luego $\sigma_1 = 2$. Como $1 \leq \sigma_2 \leq m_2 = 1$, tenemos que $\sigma_2 = 1$, y coinciden las multiplicidades geométrica y aritmética de todos los valores propios de A. Por tanto, ya sabemos que **es diagonalizable**

Ahora, calculamos una base del subespacio propio restante:

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right)v = 0 \implies \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = 0 \\ \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = -v_2 \\ v_1 = v_3 \end{cases}$$

Luego, $\mathcal{V}_{\lambda_2} = \mathcal{V}_{\frac{1}{2}} = \{v \in \mathbb{C}^3 : v_1 = v_3,\ 2v_1 = -v_2\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(*iii*) Diagonalizamos A. Para ello, calculamos las matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$, con D diagonal y P regular. Ya sabemos por la teoría que D tiene en su diagonal los valores propios de A, tantas veces como indiquen cada una de sus multiplicidades algebraicas.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por su parte, P es la matriz que resulta de poner por columnas los vectores que forman base de los subespacios propios $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$. Un detalle a tener en cuenta es que deben aparecer en el mismo orden que los valores propios correspondientes aparecen en D.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ya podemos calcular la potencia n-ésima de la matriz A:

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, la solución al sistema anterior es,

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} X_n = X_0 + \frac{1}{2}Y_0\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \\ Y_n = Y_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ Z_n = \frac{1}{2}Y_0\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + Z_0 \end{cases}$$

Donde X_0, Y_0 y Z_0 son las poblaciones iniciales de flores de cada tipo. Por último, veamos el comportamiento asintótico, es decir, si $n \to \infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_0 + \frac{1}{2}Y_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} Z_n = \frac{1}{2}Y_0 + Z_0 \end{cases}$$

Como podemos ver, la población de flores rosas tiende a extinguirse y, a largo plazo, dicha población se transormará en flores rojas y blancas a partes iguales.

3.2. Normas vectoriales

Definición 3.12 (Norma vectorial). Dado E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, una *norma* es una aplicación

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando:

(i) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in E$ (positividad)
(ii) $\|cx\| = |c|\|x\|, \ \forall c \in \mathbb{C}, \ \forall x \in E$ (homogeneidad)
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in E$ (desigualdad triangular)
(iv) $\|x\| = 0 \iff x = 0, \ \forall x \in E$

Sea E un espacio de dimensión k y sea $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ una base suya. Recordemos que cualquier vector $x \in E$ puede ser expresado de forma única en función de los vectores de la base $\mathscr{B}$:

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i u_i,$$

donde los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son las **coordenadas del vector x en la base $\mathscr{B}$**. Teniendo en cuenta esta notación, veamos algunos ejemplos de normas vectoriales.

Ejemplo 3.8. Para $1 \leq p < +\infty$, la aplicación dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

es una norma (*norma p*). En particular, sabemos que la **norma euclídea** es:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}$$

Ejemplo 3.9. La aplicación

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\}$$

es una norma, y se conoce como la *norma infinito* o *norma del máximo*.

Veamos ahora como se vería la bola unidad para distintas normas en $\mathbb{R}^2$.

3.2.1. Equivalencia entre normas vectoriales

En un espacio normado, muchas definiciones y resultados no dependen de la norma concreta que se considere, sino que son aplicables a cualquier norma equivalente.

Definición 3.13 (Normas equivalentes). Decimos que dos normas vectoriales $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en un espacio E son equivalentes si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq B\|x\|_a, \quad \forall x \in E$$

Puesto que en general trabajaremos en espacios de dimensión finita, nos será de utilidad el siguiente resultado.

Teorema 3.5. En un espacio vectorial E de **dimensión finita** todas las normas vectoriales son equivalentes.

Ejemplo 3.10. En $\mathbb{C}^k$ se verifica que:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{C}^k$$

3.3. Normas matriciales

Definición 3.14 (Norma matricial). En el espacio vectorial $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden k, una norma matricial es una aplicación:

$$||\cdot|| : \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades:

(i) $||A|| \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ (positividad)
(ii) $||cA|| = |c|||A||, \ \forall c \in \mathbb{C}, \ \forall A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ (homogeneidad)
(iii) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||, \ \forall A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ (desigualdad triangular)
(iv) $||A|| = 0 \iff A = 0, \ \forall A \in E$
(v) $||AB|| \leq ||A||||B||, \ \forall A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$

Nota. Si se cumplen las cuatro primeras propiedades, estaríamos ante una norma vectorial.

3.3.1. Norma matricial inducida

Veamos que existe una relación entre normas vectoriales y normas matriciales.

Definición 3.15 (Norma matricial inducida). Dada una norma vectorial $||\cdot||$ en $\mathbb{K}^n$, se define la *norma matricial inducida* (o subordinada) en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ del siguiente modo:

$$||A|| := \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max \{||Ax|| : ||x|| = 1\}$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Notemos que en la definición anterior, Ax es siempre un vector de $\mathbb{K}^n$, y por tanto podemos tomar su norma (vectorial). La equivalencia entre las dos definiciones se deduce de la siguiente igualdad, recordando que al dividir un vector por su módulo obtenemos un vector unitario:

$$\{Ax : ||x|| = 1\} = \left\{ \frac{Ax}{||x||} : x \neq 0 \right\}$$

Ahora, tomando normas, tenemos que $\left\| \frac{1}{||x||} Ax \right\| = \left| \frac{1}{||x||} \right| ||Ax|| = \frac{||Ax||}{||x||}$, por la homogeneidad y la positividad de la norma.

Intentamos encontrar ahora una expresión explícita de una norma matricial inducida por alguna de las normas vectoriales que conocemos. Sea $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$. Entonces, es inmediato comprobar que:

(i) *(Norma 1).* $||A||_1 = \max_{j=1,\dots,k} \sum_{i=1}^{k} |a_{ij}|$

(ii) (Norma infinito). $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,k} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|$

Ejemplo 3.11. Dadas la matriz y el vector

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

tenemos lo siguiente:

$$\|x\|_1 = 3 \quad ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{5} \quad ; \quad \|x\|_\infty = 2$$

$$\|A\|_1 = 8 \quad ; \quad \|A\|_\infty = \frac{13}{2}$$

Sin embargo, no todas las normas matriciales son inducidas. Un ejemplo es la **norma de Frobenius**, que no es una norma inducida:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|^2}$$

Proposición 3.3. Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ y la correspondiente norma matricial inducida, se verifica

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

Demostración. Es evidente de la definición. Dados $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^k$ no nulo:

$$\|A\|\|x\| = \left(\max_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \right) \|x\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \|x\| = \|Ax\|$$

Si $x = 0$ la desigualdad se cumple trivialmente. □

Relacionamos ahora los conceptos de norma matricial y radio espectral, enlazando con los apartados anteriores.

Proposición 3.4. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, se verifica:

(i) $\rho(A) \leq \|A\|$ para cualquier norma matricial inducida.
(ii) $\rho(A) = \inf \{\|A\| : \|\cdot\| \text{ es una norma matricial inducida }\}$

Demostración. Veremos únicamente (i). Sea A cualquier matriz cuadrada, λ un valor propio de A, y v un vector propio asociado a λ. En primer lugar, sabemos que

$$\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$$

Ahora, como λ es valor propio de A, tenemos que $Av = \lambda v$. Tomando normas, y teniendo en cuenta la *Proposición 3.3*:

$$\|\lambda v\| = \|Av\| \implies |\lambda|\|v\| = \|Av\| \leq \|A\|\|v\|$$

Por tanto, como $v \neq 0$, dividimos por su norma, obteniendo:

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

□

Por último, el siguiente teorema nos permite estudiar el **comportamiento asintótico de las potencias de una matriz**.

Teorema 3.6. Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, son equivalentes:

(i) $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$.

(ii) Para cada vector no nulo $v \in \mathbb{C}^k$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} (A^n v) = 0$.

(iii) $\rho(A) < 1$.

Demostración.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Si $A^n \to 0$, por la continuidad del producto matriz-vector, se tiene que $A^n \cdot v \to 0$.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Sea λ un valor propio de A. Ya sabemos por la *Proposición* 3.2 $viii$ que λ^n es valor propio de A^n. Sea $v \neq 0$ tal que $A^n v = \lambda^n v$. Entonces, por hipótesis:

$$\lim_{n\to\infty} (A^n v) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\lambda^n v) = v \lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0 \tag{3}$$

Como sabemos que $v \neq 0$, que $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0 \iff |\lambda| < 1$ y que (3) se verifica para cualquier λ valor propio de A, concluimos que necesariamente $\rho(A) < 1$.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Sea A tal que $\rho(A) < 1$. Trabajaremos con su forma canónica de Jordan, es decir, $A = PJP^{-1}$. Ya sabemos que entonces $A^n = PJ^nP^{-1}$.

Basta probar que $\lim_{n\to\infty} J^n = 0$, pues $\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} (PJ^nP^{-1}) = P(\lim_{n\to\infty} J^n)P^{-1}$.

Supongamos que r es el número de valores propios de A **distintos entre sí**. Entonces, tenemos que:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix} \Rightarrow J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^n \end{pmatrix},$$

donde

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \lambda_i \in \sigma(A) \Longrightarrow J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & n\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \dots & \binom{n}{m_i-1}\lambda_i^{n-m_i+1} \\ & \lambda_i^n & n\lambda_i^{n-1} & \dots & \binom{n}{m_i-2}\lambda_i^{n-m_i+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_i^n & n\lambda_i^{n-1} \\ & & & & \lambda_i^n \end{pmatrix}$$

Para un razonamiento del cálculo de la forma explícita de J_i^n, consultar *[Ejercicios, 3.7]*.

Recordemos que $\dim J_i$ es la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i. Como por hipótesis $|\lambda_i| < 1$ para todo i, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} J_i^n = 0 \ \ \forall i \implies \lim_{n\to\infty} J^n = 0$$

Donde hemos usado que una función exponencial domina a una potencial en el límite. □

3.4. Valor propio dominante

Definición 3.16 (Valor propio dominante). Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ con espectro

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\},$$

donde $r \leq k$ es el número de valores propios diferentes. Decimos que λ_1 es el *valor propio dominante* si

(i) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_r|$

(ii) Es simple (multiplicidad algebraica 1)

Ejemplo 3.12. No todas las matrices tienen un valor propio dominante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A) = \{0, 1\} \implies \lambda_1 = 1 \text{ dominante.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(B) = \{1, -1\} \implies |\lambda_1| = |\lambda_2|, \text{ no hay valor propio dominante.}$$

Teorema 3.7. Si $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}), k \geq 2$ es una matriz con valor propio dominante λ_1, entonces la sucesión

$$\left\{ \frac{1}{\lambda_1^n} A^n \right\}_{n\geq 0}$$

converge a una matriz $Q \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ que verifica:

(i) $Im(Q) = Ker(A - \lambda_1 I)$

(ii) $Qv = v$, donde v es el vector propio asociado al valor propio λ_1

(iii) $Q^2 = Q$

(iv) $QA = AQ$

Nota. Si λ_1 es el valor propio dominante de A, se verifica que $\lambda_1 \neq 0$.

Demostración. A es una matriz $k \times k$ con $k \geq 2$, luego A es semejante a su forma canónica de Jordan, por lo que existe P inversible y J su forma canónica tales que $A = PJP^{-1}$.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_r \end{pmatrix} \quad |\lambda_1| > |\lambda_i|, i = 1,2,\ldots,r \ \rho(J_i) < |\lambda_1| \implies \rho\left(\frac{1}{\lambda_1}J_i\right) < 1$$

$$\frac{1}{\lambda_1}J = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{\lambda_1}J_2 & & & \\ & & \frac{1}{\lambda_1}J_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{\lambda_1}J_r \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\lambda_1^n}A^n = \frac{1}{\lambda_1^n}(PJ^nP^{-1}) = P\frac{1}{\lambda_1^n}J^nP^{-1} = P\left(\frac{1}{\lambda_1}J\right)^n P^{-1} \to P\theta P^{-1} = Q, \text{ donde}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

- Sea $Ker(A - \lambda_1 I)$ = subespacio propio asociado al valor propio λ_1 de dimensión $1 = \langle v_1 \rangle = \langle p_1 \rangle$
  $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{pmatrix}$ donde p_1 es una columna que representa al vector propio asociado al valor propio λ_1. Por otro lado, $Q = P\theta P^{-1} \Rightarrow QP = P\theta \Rightarrow Q\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$
  $\begin{pmatrix} Qp_1 & Qp_2 & \ldots & Qp_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$
- $$\left.\begin{array}{rcl} Qp_1 & = & p_1 \\ Qp_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ Qp_k & = & 0 \end{array}\right\} \text{ luego } ImQ = \langle p_1 \rangle = Ker(A - \lambda_1 I)$$
- $$Q^2 = P\theta^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\theta P^{-1} = Q$$

- ¿$QA = AQ$?

$$QA = (P\theta P^{-1})A = \left[P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^n}J^n\right)P^{-1}\right]A = \frac{1}{\lambda_1^n}A^nA = A^{n+1} = A\frac{1}{\lambda_1^n}A^n = AQ$$

□

3.5. Dinámica de poblaciones

Cuando la variación de una población se realiza en función del tiempo, obtenemos un proceso que recibe el nombre de dinámica de población.

El objetivo de la dinámica de poblaciones es estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas.

Existen dos procesos que afectan al cambio del tamaño de la población:

- Los nacimientos y las migraciones, que aumentan su tamaño.
- Las defunciones y las emigraciones que la disminuyen.

En los modelos más simples podemos suponer que estamos estudiando una población en la que no intervienen procesos migratorios.

Las hipótesis más simples que podemos plantear serían del tipo:

- Todos los individuos son iguales (especialmente lo que hace referencia a la natalidad y a la supervivencia).
- Los recursos disponibles son ilimitados.
- La tasa de mortalidad será mayor entre los individuos de mayor edad que entre los más jóvenes.
- La tasa de fecundidad depende también de la edad.

Con carácter general, se suelen estudiar las hembras de la población.

Vamos a plantear un modelo para el estudio de una población en el que se tiene en cuenta características particulares de cada uno de los individuos.

Según estas características los agruparemos en clases que sean homogéneas a efectos reproductivos y de supervivencia.

3.5.1. El modelo de Leslie

El modelo de Leslie describe el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a los individuos por edades en intervalos de igual número de años.

Realizaremos varias consideraciones en este modelo:

- Supondremos que la edad máxima alcanzada por un individuo de una población son L años.
- Dividimos esta población en N clases de edades. Cada clase es evidente que tendrá $\frac{L}{N}$ años de duración.

La población se censará cada $\frac{L}{N}$ años para que todos los individuos que sobreviven de una clase pasen a la siguiente.

Llamamos $x_i^{(n)}$ al número de individuos en la clase i en el recuento n-ésimo. La población en cada censo viene descrita por el vector de distribución de la población según las edades

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_N^{(n)} \end{bmatrix}$$

Los procesos de nacimiento y muerte entre dos censos consecutivos se pueden describir mediante los siguientes parámetros demográficos:

- Al promedio del número de hijas que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase i lo llamaremos a_i, con $i = 1, 2, \ldots, N$. Es claro que $a_i \geq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$.
- La fracción de las hembras que están en la clase i que se espera que sobrevivan y pasen a la clase $i+1$ la llamaremos b_i, con $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Es claro que $0 < b_i \leq 1$, un porcentaje.

Tras estas consideraciones, ya podemos pasar a ver el modelo en sí:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= a_1\, x_1^{(n)} + a_2\, x_2^{(n)} + \ldots + a_N\, x_N^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} &= b_1\, x_1^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} &= b_2\, x_2^{(n)} \\ &\vdots \\ x_N^{(n+1)} &= b_{N-1}\, x_{N-1}^{(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_N \\ b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_N - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \\ x_N^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)} \\ \vdots \\ x_N^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

A esta matriz la llamamos *matriz de Leslie*.

Ejemplo 3.13. Describa y estudie la evolución de una población distribuida en grupos de edad cuya matriz de Leslie viene dada por

$$\mathscr{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Decimos que hay dos clases de edad, $[0, \frac{L}{2}), [\frac{L}{2}, L]$. Las tasas de reproducción son:

- La primera clase tiene un media de una cría por cada individuo.

- La segunda clase tiene una media de 1,5 crías por individuo.

Las tasas de mortalidad: de la primera a la segunda clase sobreviven el 50% de los individuos.

El objetivo es el estudio de $X^{(n+1)} = \mathscr{L}^n X^{(0)}$.

Añadimos una hipótesis adicional:

Para algún índice $i \in \{1, 2, \dots, N-1\},\ a_i a_{i+1} > 0$.

Proposición 3.5. El polinomio característico de la matriz de Leslie $\mathscr{L}_N$ viene dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\mathscr{L}_N - \lambda I) \\ &= (-1)^N \left[\lambda^N - a_1\lambda^{N-1} - a_2 b_1 \lambda^{N-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{N-3} - \dots - a_N b_1 b_2 \dots b_{N-1}\right] \end{aligned}$$

Demostración. Vamos a proceder por inducción. Comenzamos con $N = 2$. Así,
$det(\mathscr{L}_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & -\lambda \end{vmatrix} = (a_1 - \lambda)(-\lambda) - a_2 b_1 = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2 b_1$

Suponiéndolo cierto hasta $N-1$, por hipótesis de inducción, veámoslo ahora para N.

$$det(\mathscr{L}_N - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \dots & a_N \\ b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+N} a_N \begin{vmatrix} b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} \end{vmatrix} + (-1)^{2N}(-\lambda) \cdot p_{N-1}(\lambda)$$

$$= (-1)^{N+1} a_N \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{N-1} + (-\lambda)\left((-1)^{N-1}\left(\lambda^{N-1} - a_1\lambda^{N-2} - a_2 b_1 \lambda^{N-3} - \dots - a_{N-1} b_1 \cdot\right.\right.$$

$$= (-1)^N \left[\lambda^N - a_1\lambda^{N-1} - a_2 b_1 \lambda^{N-2} - \dots - a_{N-1} b_1 b_2 \dots b_{N-2}\lambda\right] - (-1)^N a_N b_1 b_2 \dots b_{N-1}$$

□

Proposición 3.6. Se considera el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^N - \beta_{N-1}\lambda^{N-1} - \dots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

con $\beta_i \geq 0,\ i = 0, \dots, N-1$, y para algún $i \in \{0, \dots, N-2\}$, $\beta \cdot \beta_{i+1} > 0$.

Entonces $p(\lambda)$ tiene una única raíz real positiva $\lambda_1 \in (0, +\infty)$, que es simple y dominante.

Demostración. Sea λ_1 una raíz de $p(\lambda)$,

$$p(\lambda) = \lambda^N - \beta_{N-1}\lambda^{N-1} - \dots - \beta_1\lambda - \beta_0 = \lambda^N\left(1 - \left(\frac{\beta_{N-1}}{\lambda} + \frac{\beta_{N-2}}{\lambda^2} + \dots + \frac{\beta_1}{\lambda^{N-1}} + \frac{\beta_0}{\lambda^N}\right)\right) = \lambda^N(1 - q(\lambda))$$

Sea $q(\lambda) = \frac{\beta_{N-1}}{\lambda} + \frac{\beta_{N-2}}{\lambda^2} + \ldots + \frac{\beta_1}{\lambda^{N-1}} + \frac{\beta_0}{\lambda^N}$ con $\lambda \neq 0$.
Con $\lambda \neq 0$, raíz de $p(\lambda) \Longleftrightarrow q(\lambda_1) = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0^+} q(\lambda) = +\infty \\ \lim_{\lambda\to\infty} q(\lambda) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} q(\lambda) \in C^\infty(0,+\infty) \\ q(\lambda) > 0, \forall \lambda > 0 \end{aligned}\right\}$$

Además, q es estrictamente decreciente:

$$q'(\lambda) = -\frac{\beta_{N-1}}{\lambda^2} - \frac{2\beta_{N-2}}{\lambda^3} - \ldots - \frac{(N-1)\beta_1}{\lambda^N} - \frac{N\beta_0}{\lambda^{N+1}} < 0$$

Acabamos de ver que $\exists \lambda_1 > 0$ tal que $q(\lambda - 1) = 1$ luego $p(\lambda_1) = 0$.

Para comprobar la unicidad, puesto que $q(\lambda)$ es estrictamente decreciente entonces existe una única por el Teorema de Rolle.

Ahora tenemos que probar que la raíz es simple. Sabemos que $p(\lambda_1) = 0$. Veamos lo que vale $p'(\lambda_1)$.

$$\begin{aligned} p'(\lambda) &= N\lambda^{N-1}(1 - q(\lambda)) + \lambda^N(-q'(\lambda)) \\ p'(\lambda_1) &= N\lambda_1^{N-1}(1 - q(\lambda_1)) + \lambda_1^N(-q'(\lambda_1)) \\ &= -\lambda_1^N q'(\lambda_1) > 0, \text{ luego es simple} \end{aligned}$$

Finalmente, nos queda probar que es dominante. Sea $\mu \in \mathbb{C}$ cualquier otra raíz de $p(\lambda) \Rightarrow |\mu| < |\lambda_1| = \lambda_1$.

Si $\mu = 0$ entonces $|\mu| = 0 < |\lambda_1| = \lambda_1$, por lo que se cumple. Supongamos que $\mu \neq 0, \mu \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$. Entonces, existe $r > 0$ y $\theta \in (0, 2\pi)$

$$\mu = r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$$

Queremos ver que $r < \lambda_1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)} = \frac{1}{r}\frac{cos\ \theta - i\ sen\ \theta}{(cos\ \theta + i\ \ sen\theta)(cos\ \theta - i\ sen\ \theta)} \\ &= \frac{1}{r}(cos\ \theta - i\ sen\ \theta) \\ \frac{1}{\mu^j} &= \frac{1}{r^j}(cos\ j\theta - i\ sen\ j\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &p(\mu) = 0 \iff q(\mu) = 1 \\ &1 = q(\mu) = \frac{\beta_{N-1}}{\mu} + \frac{\beta_{N-2}}{\mu^2} + \ldots + \frac{\beta_1}{\mu^{N-1}} + \frac{\beta_0}{\mu^N} \\ &\quad = \frac{\beta_{N-1}}{r}(cos\theta - isen\theta) + \frac{\beta_{N-2}}{r^2} + \ldots + \frac{\beta_1}{r^{N-1}}(cos(N-1)\theta - isen(N-1)\theta + \frac{\beta_0}{r^N}(cosN\theta - isenN\theta) \end{aligned}$$

Igualamos las partes reales:

□

3.5.2. Población total

Se cumple
$$\frac{1}{\lambda_1^n}\mathscr{L}^n v = v,\ n \geq 0$$
donde v es un vector propio asociado al valor propio λ_1. Además, existe el límite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^n}\mathscr{L}^n = Q$$

Por tanto, para todo vector inicial X_0 (la población inicial) se tiene:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^n}\mathscr{L}^n X_0 = QX_0 = \alpha v, \alpha \in \mathbb{R}$$

Lema 3.1. Si $X >> 0$ entonces $QX >> 0$.

Nota. Diremos que un vector $X >> 0$ si todas sus componentes son estrictamente positivas.

Sea $X_0 >> 0$ la población inicial. Entonces $||X_n|| > 0$ y $||X_n|| = ||L^n X_0||$. Por tanto,
$$\frac{1}{\lambda_1^n}||x_n|| = ||\frac{1}{\lambda_1^n}L^n X_0|| \to ||QX_0||$$
Entonces tenemos que:
$$||X-n|| \sim \lambda_1^n ||QX_0||$$
Sabemos que $p(\lambda-1)=0$, donde $q(\lambda)=\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2b_1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{a_N b_1 b_2 \ldots b_{N-1}}{\lambda^N}$. Entonces,
$$q(1) = a_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_N b_1 b_2 \ldots b_{N-1}$$

que es lo que llamamos *tasa de reposición*, es decir, el número medio de crías que tiene una hembra a lo largo de toda su vida.

Lo que ocurre entonces es que ocurre es que: {

Puesto que $||QX_0|| > 0$ por el lema anterior, $||X_n||$ se comporta asintóticamente como una progresión geométrica de razón λ_1. Se presentan por tanto tres casos dependiendo del valor propio positivo λ_1:

- La población crece si $\lambda_1 > 1$
- La población decrece si $\lambda_1 < 1$.
- La población se estabiliza si $\lambda_1 = 1$.

¿Cómo podemos saber el valor de λ_1 a partir de $p(\lambda)$?

Dado $p(\lambda) = (-1)^N\big[\lambda^N - a_1\lambda^{N-1} - a_2b_1\lambda^{N-2} - \ldots - a_N b_1 b_2 \ldots b_{N-1}\big] = (-1)^N\lambda^N\big[1 - q(\lambda)\big]$.

3.5.3. Pirámide de edad

Dado $X_0 >> 0$ la pirámide de edad viene dada por $\frac{1}{||X_0||}X_0$ usando la norma de la suma. Indica las proporciones de cada una de las clases respecto a la población total.

La pirámide de edad en cada etapa n viene dada por

$$\frac{1}{||X_n||}X_n = \frac{1}{||L^n X_0||}L^n X_0 = \frac{1}{||(\frac{1}{\lambda_1^n}L^n)X_0||}\left(\frac{1}{\lambda_1^n}L^n\right)X_0 \to \frac{1}{||QX_0||}QX_0$$

que converge a un vector de norma 1.

Dado que $||QX_0|| > 0$ e $ImQ = \langle v \rangle$, entonces $QX_0 = \alpha v$, con $\alpha > 0$ por lo que

$$\frac{1}{||X_n||}X_n \to \frac{1}{||v||}v$$

Ejemplo 3.14. La ayudante del profesor Oak decide hacer un estudio de viabilidad de la granja Pokémon en la que trabaja. Observa que tres cuartas partes de los Pokémon llegan a la primera evolución mientras que sólo un tercio de éstos alcanzan la segunda evolución (los que no evolucionan son cedidos a entrenadores novatos para que practiquen ellos). Como es bien sabido, los Pokémon sin evolucionar son incapaces de poner huevos viables, mientras que ls ya evolucionados una vez ponen una media de tres huevos viables. Existe un tratamiento de fertilidad para que los Pokémon evolucionados dos veces y aún no se conoce la tasa de fecundidad definitiva.

- Describa el modelo de evolución de los Pokémon de la granja.
- Estime el comportamiento asintótico de la población en términos de la tasa de fecundidad de los Pokémon dos veces evolucionados.
- Si los Pokémon dos veces evolucionados pusieran una media de diez huevos viables, explique el comportamiento a largo plazo incluyendo la pirámide de población asintótica.

Solución:
Definimos tres clases por .$^{\text{ev}}$olución":

$$\begin{aligned} x_1^n &= \text{ número de Pokémon sin evolucionar en la etapa n} \\ x_2^n &= \text{ número de Pokémon 1 vez evolucionados en la etapa n} \\ x_3^n &= \text{ número de Pokémon 2 veces evolucionados en la etapa n} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= 3x_2^n + \alpha x_3^n \\ x_2^{n+1} &= \frac{3}{4}x_1^n \\ x_3^{n+1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}x_1^n = \frac{1}{3}x_2^n \end{aligned}$$

La matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \alpha \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos ahora el comportamiento asintótico:

La tasa de reposición es

$$\begin{aligned} R = q(1) &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 \\ &= 0 + 3 \cdot \frac{3}{4} + \alpha \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{4}{4} > 1 \end{aligned}$$

Por tanto la población crece asintóticamente para cualquier $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$, no existe i tal que $a_i a_{i+1} > 0$ y no podríamos aplicar la teoría.

Ahora tomamos $\alpha = 14$. Estudiemos su comportamiento a largo plazo. Por el apartado anterior sabemos que la población crece indefinidamente, incluyendo la pirámide de edad asintótica. Calculamos $\frac{1}{||v||_1} \cdot v$, donde v es el vector propio asociado al valor propio λ_1.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4\lambda_1} \\ \frac{1}{4\lambda_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \end{pmatrix}$$

Necesitamos calcular λ_1. $det(L - \lambda I) = 0$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 14 \\ \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^3 \left(\lambda^3 - 0\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda - 14 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) \\ &= (-1)^3 \left(\lambda^3 - \frac{9}{4}\lambda - \frac{14}{4} \right) \\ \lambda &= 2 \text{ valor propio} \end{aligned}$$

4. Matrices estocásticas. Aplicaciones en genética

4.1. Matrices positivas y estrictamente positivas

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$ una matriz.

Definición 4.1 (Debilmente positiva o no negativa). Una matriz A se dice débilmente positiva o no negativa $A \geq 0$ si $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$

Definición 4.2 (Matriz positiva). Una matriz A es positiva $A > 0$ si $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$ con al menos un $a_{ij} > 0$

Definición 4.3 (Estrictamente positiva). Una matriz es A es estrictamente positiva $A >> 0$ si $a_{ij} > 0 \quad \forall i, j$

Proposición 4.1. Toda matriz de Leslie es positiva

Nota. Notación: Si X, Y son dos vectores columna de dimensión d, diremos:

(*i*) $X \geq Y \iff X - Y \geq 0$
(*ii*) $X > Y \iff X - Y > 0$
(*iii*) $X >> Y \iff X - Y >> 0$

Proposición 4.2 (Propiedades).

4.1.1. Sistemas de ecuaciones lineales en diferencias

Consideraremos sistemas de ecuaciones lineales en diferencias de la foram:

$$X_{n+1} = AX_n \quad n \geq 0$$

con A es una matriz positiva o estrictamente positiva. Así, la solucion es:

$$X_n = A^n X_0$$

Definición 4.4. Una matriz positiva A se dice que es primitiva o ergódica si $\exists m \in \mathbb{N} : A^m >> 0$

Teorema 4.1 (Teorema de Perron-Frobenius). Si A es una matriz primitiva, entonces:

(*i*) A tiene un valor propio λ_1 real, estrictamente positivo y dominante. Esto es:
$$\exists \lambda_1 : \quad |\lambda_i| < \lambda_1, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A) \backslash \{\lambda_1\}$$
y $p(A) = \lambda_1$

(*ii*) Se puede tomar un vector propio v_1 asociado al valor propio λ_1 con todas sus componentes

Corolario 4.1. Si A es una matriz primitiva, λ_1 es su valor propio real, estrictamente positivo y dominante y $v_1 >> 0$ el vector propio asociado a λ_1, entonces

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n X_0 = \alpha v_1$$

Corolario 4.2. En las condiciones anteriores, si $X_0 > 0$ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||X_n||_1} X_n = \frac{1}{||v_1||_1} v_1$$

Demostración. Sabemos que si $X_{n+1} = AX_n$, entonces $X_n = A^n X_0$. Así

$$\frac{1}{||X_n||_1} X_n = \frac{1}{||A^n X_0||_1} A^n X_0 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1^n} ||A^n X_0||_1} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n X_0 \to \frac{1}{||\alpha v_1||_1} \alpha v_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1$$

□

Proposición 4.3. Sea $A \geq 0$ una matriz. Entonces:

(*i*) Existe un valor propio $\lambda_M \geq 0$ que verifica $|\mu| \leq \lambda_M$ para todo valor propio μ. Esto es, $p(A)$ es valor propio de A. Lo llamamos el mayor valor propio

(*ii*) Existe $v > 0$ vector propio asociado a λ_M

Demostración. $A \geq 0 \implies p(A) = max\{|\lambda_i|,\ i = 1, 2..., r\}$. Entonces, $\exists \lambda_M \geq 0$ tal que $|\lambda_M| = \lambda_M \geq |\mu| \ \ \forall \mu \in \sigma(A)$.

Ahora, λ_M es mayor, pero no es dominante (podría ser porque o bien $\exists \mu$: $|\mu| = \lambda_M$ o bien porque λ_M fuese de multiplicidad $m \geq 2$) □

Ejemplo 4.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Esta matriz es primitiva? Sí, pues existe un m tal que $A^m >> 0$. Por tanto, aplicamos el teorema de Perron-Frobenius para decir que $\exists_1 \lambda_1 > 0$ valor propio dominante y su vector propio asociado.

Para comprobarlo, si hallamos su polinomio característico este es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$. Así, sus valores propios son $\lambda_1 = 2$, el dominante y $\lambda_2 = 0$. Calculamos ahora v_1.

$$V_{\lambda_1} = V_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \ \ (A - 2I)v = 0\}$$

Escribimos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es $w_1 = w_2$ con $w_2 \in \mathbb{R}$ y tomamos por ejemplo el vector $(1, 1)$

Proposición 4.4. Sea $A \geq 0$ y $p(A) = \lambda_M \geq 0$ su mayor valor propio. Sean también:

$$c_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij}, \qquad R_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}$$

las sumas de los elementos de la j-ésima columna y de la i-ésima fila de A.

Entonces:

$$mnC_j \leq \lambda_m \leq mxC_j, \qquad mnR_i \leq \lambda_M \leq mxR_i$$

Demostración. Con $A \geq 0$, $a_{ij} \leq 0$. Entonces, por la proposición anterior tiene un mayor valor propio positivo λ_M. □

Definición 4.5 (Matriz reducible). Una matriz real A se dice reducible si existe una matriz de permutación P tal que

$$P^t AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$$

donde A_1 y A_2 son matrices cuadradas.
Si A no es reducible, se dice que es irreducible.

Equivalentemente, A se dice reducible si existe una matriz de permutación Q tal que

$$Q^t AQ = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B} \\ 0 & \hat{A}_2 \end{pmatrix}$$

donde $\hat{A}_1$ y $\hat{A}_2$ son matrices cuadradas.

Ejemplo 4.2. ¿Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ reducible?

Si permutamos la F_2 y F_4 entonces tenemos que: $\exists P$ de permutación tal que $P^t AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos claramente que A es reducible, ya que la matriz resultante cumple la definición: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ejemplo 4.3. Es ¿$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ reducible?

No, es irreducible ya que la caja de ceros no hace el corte bien: $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Definición 4.6 (Grafo asociado a una matriz). Dada una matriz cuadrada real A, se llama grafo asociado a A a la gráfica dirigida sobre d nodos $\{N_1, N_2, ..., N_d\}$ tal que si $a_{ij} > 0$ entonces existe una flecha desde N_j hacia N_i

Definición 4.7 (Matriz de adyacencia). La matriz A de la definición anterior, se le llama la matriz de adyacencia del grafo.

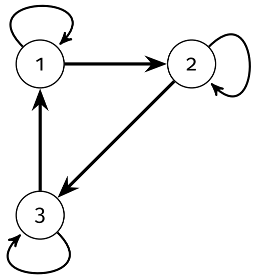
Definición 4.8 (Grafo fuertemente conectado). Se dice que $graf(A)$ está fuertemente conectado si existe $m > 1$ tal que para toda pareja de nodos N_j,N_i existe un camino de longitud m que los conecta. Es decir, se puede ir del nodo N_j al N_i tras m pasos en el grafo asociado a la matriz A.

Ejemplo 4.4. Determine el grafo de la matriz de adyacencia:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Simplemente empezamos:
$a_{11} > 0$ luego hay una flecha con origen 1 y llegada 1
$a_{12} > 0$ luego hay una flecha con origen 2 y llegada 1
Y repetir con todos.

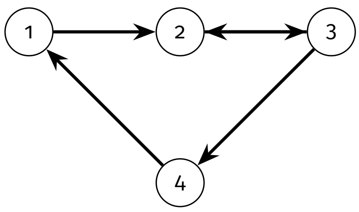
Figura 1: Grafo resultante.



¿Está el grafo fuertemente conectado? Para $m = 2$ sí, (puedo ir cualquier nodo a otro en 2 pasos, en el caso de los cortos por ejemplo sería: 1 a 2, 2 a 2)

Ejemplo 4.5. Determine la matriz de adyacencia del grafo:

Figura 2: Grafo dado.



Solo tenemos que contar que la fila i-ésima son las flechas que llegan al nodo -ésimo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.6. Esta matriz es reducible (permutando la primera fila por la tercera), y además el grafo no está fuertemente conectado, lo que nos da una idea para la siguiente proposición.

Proposición 4.5. Sea $A \geq 0$ de orden dxd, son equivalentes:

(*i*) A es irreducible.
(*ii*) $graf(A)$ está fuertemente conectado.

Teorema 4.2. Sea $A \geq 0$ de orden dxd e irreducible, entonces:

(*i*) $\lambda_i = \rho(A)$ es valor propio positivo y simple (no es dominante).
(*ii*) $\exists! u_1$ vector propio asociado a $\lambda_1 = \rho(A)$ verificando $u_1 >> 0$ y $\|u_1\|_1 = 1$, llamado vector de Perron.
(*iii*) Si $\exists j \in \{1, 2, ..., d\} : a_{ij} > 0 \implies \lambda_i = \rho(A)$ es dominante.
(*iv*) Todos los valores propios de módulo igual a $\rho(A)$ son simples.

Sea $X_{n+1} = AX_n, n \geq 0$, sistema lineal de ecuaciones en diferencias con solución: $X_n = A^n X_0, n \geq 0$. Si la matriz A es positiva e irreducible vemos los casos posibles:

(*i*) $\lambda_1 = \rho(A)$ es dominante, entonces:

a) $\lim_{n\to\infty} X_n = 0 \iff \rho(A) < 1$
b) Si $\rho(A) = 1$ y $X_0 \gg 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} X_n = X >> 0$, que es vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$

(*ii*) $\lambda_1 = \rho(A)$ no es dominante, entonces habrá valores propios simples de igual módulo:

a) $\rho(A) > 1$: las soluciones oscilan creciendo en radio.
b) $\rho(A) < 1$: las soluciones oscilan decreciendo hacia cero.
c) $\rho(A) = 1$: las soluciones se mantienen en la circunferencia unidad y podrían ser eventualmente periódicas.

4.2. Matrices estocásticas. Cadenas de Markov

Definición 4.9 (Matriz estocástica). Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden d positiva. Se dice que A es estocástica o de probabilidad o de Markov

por columnas si
$$\sum_{i=1}^{d} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, d$$

Ejemplo 4.7. Veamos si las siguientes matrices son de Markov:

(i) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es de Markov.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ no es de Markov, falla para $j = 1$

(iii) $B = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ es de Markov.

Nota. *(i)* Las entradas de una matriz de Markov deben ser $0 \leq b_{ij} \leq 1$
(ii) Las matrices de Markov pueden ser reducibles o irreducibles.

Proposición 4.6. Sea A una matriz estocástica, entonces:

(i) $\rho(A) = 1$ y además $\lambda_1 = 1$ es valor propio de A.
(ii) Admite un vector v_1 asociado a $\lambda_1 = 1$ con $v_1 > 0$.

Demostración. Como A es una matriz estocástica, debe ser positiva por tanto $A \geq 0$, luego podemos usar el criterio de las cotas por columnas (Proposición 4.4) que nos da $1 \leq \lambda_1 \leq 1$ siendo $\lambda_1 = 1$ el mayor valor propio de A, luego queda demostrado. □

Definición 4.10 (Cadenas de Markov). Una cadena de Markov es una sucesión de vectores positivos $\{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\}$ solución de un sistema de ecuaciones en diferencias
$$P_{n+1} = M P_n, \qquad n \geq 0,$$
donde P_0 cumple $||P_0||_1 = 1$, y se le llama distribución inicial de probabilidad, y la matriz de transición M es estocástica.

Nota. Se tiene que con $||P_0||_1 = 1 \implies ||P_n||_1 = 1, n \geq 0$

Las cadenas de Markov se utilizan para el estudio de repeticiones de experimentos con d resultados posibles correspondientes a los estados $S_1, S_2, \dots, S_d$ con ciertas hipótesis:

(i) La probabilidad de que resulte un estado S_i solo depende del resultado en la repetición anterior del experimento, y no de los anteriores.
(ii) $m_{ij}, j = 1, 2, \dots, d$, representa la probabilidad de que se de el estado S_j habiéndose dado el estado j en la etapa anterior.

(*iii*) Sea $p_n(i)$ la probabilidad de que en la n-ésima repetición del experimento salga S_i. Entonces:

$$p_{n+1}(i) = m_{i1}p_n(1) + m_{i2}p_n(2) + ... + m_{id}p_n(d),$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{d2} & \cdots & m_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ \vdots \\ p_n(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1}(1) \\ p_{n+1}(2) \\ \vdots \\ p_{n+1}(d) \end{pmatrix}$$

Así, si $P_n = (p_n(1), p_n(2), ..., p_n(d))^t$, entonces

$$P_{n+1} = MP_n, \qquad n \geq 0$$

Por el Teorema de la Probabilidad Total, si estoy en el estado S_j solo puedo pasar a otro de los estados finitos $S_1, ..., S_d$ luego la suma de la columna j-ésima debe ser 1, que es lo mismo que decir que la matriz de transición M es estocástica.

Hay dos tipos de cadenas de Markov:

(*i*) Cadenas regulares: Una cadena de Markov es regular si la matriz M es primitiva, es decir, $M^k >> 0$ para algún entero positivo k.
En este caso, el valor propio λ_1 es dominante y por tanto la cadena que parte de un $P_0 >> 0$ tiende a una distribución estacionaria (vector propio asociado) de probabilidad que nos indican las probabilidades (proporciones) de cada uno de los estados del experimento a largo plazo.

(*ii*) Cadenas absorbentes: Una cadena de Markov es absorbente si hay al menos un estado S_j absorbente ($m_{ij} = 1$) y desde cualquier otro estado podemos conectar a uno absorbente

Ejemplo 4.8. Un ejemplo de cadena absorbente sería el problema del borracho. En este problema nos imaginamos 4 puntos: un lago, una farola, un bar y la casa del borracho; de manera que están conectados en el orden que se han descrito (de la farola se puede ir al bar o al lago). El borracho sale del bar y tiene una probabilidad p de girar a la derecha, y una probabilidad q de girar a la izquierda, cumpliendo que $p + q = 1$. Si el borracho llega a la casa, lo encierran (estado absorbente); si llega al lago se ahoga (estado absorbente).

4.3. Aplicaciones

Parte II.
Ejercicios

5. Relación 1

5.1. Ejercicio 2

Sea la ecuación:

$$x_{n+1} = 1/3x_n + 2^n$$

Hallar una solución del tipo $x_n = c2^n$.

Llo primero es ver que esta ecuación es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Vamos a hallar el c que nos piden. Entonces:

$$c2^{n+1} = \frac{1}{3}c2^n + 2^n \implies 2^n[2c - c\frac{1}{3} - 1] = 0$$

$$2c - \frac{1}{3}c - 1 = 0 \implies c = \frac{3}{5}$$

Por tanto, la solución es: $x'_n = \frac{3}{5}2^n$, pero esta es una solución particular.

Ahora, probaremos que x_n es solución de la ecuación inicial $\iff z_n = x_n - x'_n$ donde x'_n es una solución particular, es solución de: $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n$.

Lo probamos: Que x_n es solución de la inicial implica que $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2^n$. Que x'_n es solución de la inicial implica que $x'_{n+1} = \frac{1}{3}x'_n 2^n$.

Si restamos estas dos obtenemos que:

$$x_{n+1} - x'_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n - x'_n)$$

Lo que implica que $z_{n+1} = x_{n+1} - x'_{n+1}$ y $z_n = (x_n - x'_n)$

Ahora, continuamos la resolución del ejercicio:

1. Encontrar una solución particular de la ecuación inicial, $x'_n = \frac{3}{5}2^n$
2. Resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n \implies z_n = K(\frac{1}{3})^n$$

3. Usando el resultado:

$$x_n = x'_n + z_n = \frac{3}{5}2^n + K(\frac{1}{3})^n$$

4. Aplicamos la condición inicial $x_0 = 1$.

Así, la solución es $x_n = \frac{3}{5}2^n + \frac{2}{5}(\frac{1}{3})^n$ con $n \geq 0$

5.2. Ejercicio 3

Primero calculamos $KerL$.

$$x \in KerL \Leftrightarrow L(x) = 0$$

$$x_n^* = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} - (2+i)x_n = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = (2+i)x_n$$

Solución general:

$$x_n = K(2+i)^n \ , \ K \in C$$

Por lo tanto los elementos de X que pertenecen al $KerL$ son de la forma que acabamos de indicar. Veamos ahora los elementos de X tales que $L(x) = b$ siendo b = { 1,1,1,1.. }.

$$x_{n+1} - (2+i)x_n = 1 \Leftrightarrow x_{n+1} = (2+i)x_n + 1$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= (2+i)x_n + 1 \\ x_{n+1}^* &= (2+i)x_n^* + 1 \end{aligned}\right\}$$

Restamos y tenemos que:

$$x_{n+1} - x_{n+1}^* = (2+i)(x_n - x_n^*)$$

LLamamos $y_n = x_n^* - x_n$, y tenemos que $y_{n+1} = (2+i)y_n$. Por lo tanto la solucion general de y_n es: $y_n = K(2+i)^n \ , \ k \in C$. Ahora calculamos la solucion constante x^*.

$$x^* = (2+i)x^*+1 \Leftrightarrow x^*(1-2-i) = 1 \Leftrightarrow x^* = \frac{1}{-1-i} \Leftrightarrow x^* = \frac{1(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} \Leftrightarrow x^* = \frac{-1+i}{2}$$

Y ya podemos calcular la solución general de x_n que es:

$$x_n = y_n + x^* = K(2+i)^n + \frac{-1+i}{2}$$

Es decir los elementos de X que cumplen que $L(x) = b$ son de esa forma.

5.3. Ejercicio 4

Llamaremos primero x_n el número de clientes de $Paga^+$ en el año n. Llamaremos y_n el número de clientes de $Paga^-$ en el año n. Ahora, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.5x_n + 0.25y_n \\ y_{n+1} &= 0.75y_n + 0.5x_n \end{aligned}\right\}$$

Sabemos que $x_n + y_n = 1$, que es el 100% de los clientes. Podemos despejar así una en función de la otra y nos queda:

$$x_{n+1} = 0.5x_n + 0.25(1 - x_n)$$

Esta es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Despejando, tenemos:

$$x_{n+1} = 0.25x_n + 0.25 \implies x_n = x^* + z_n \implies x_n = \frac{0.25}{1-0.25} + K(0.25)^n$$

Ahora, tenemos que tomar el límite pues nos piden el mercado a largo plazo. Esto es:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$

Podemos afirmar ahora que, asintóticamente , $\frac{1}{3}$ de los clientes estarán en $Paga^+$ y $\frac{2}{3}$ en $Paga^-$

5.4. Ejercicio 6

Vamos a llamar A_n al número de empleados en el departamento A en el año n. Del mismo modo, llamaremos B_n a los del departamento B en el año n. Si $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq q \leq 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= (1-p)A_n + qB_n \\ B_{n+1} &= pA_n + (1-q)B_n \end{aligned}\right\}$$

Y tenemos ahora que $A_n + B_n = M$, (aunque se podría tomar como 1) por lo que el sistema lo reducimos a una ecuación teniendo:

$$A_{n+1} = (1-p)A_n + q(M - A_n) \implies A_{n+1} = (1-p-1)A_n + qM$$

Teniendo de nuevo una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Así, su solución es:

$$A_n = \frac{qM}{1-(1-p-q)} + K(1-p-q)^n$$

Estudiamos primero la solución constante.

$$A_* = \frac{qM}{1-(1-p-q)} = \frac{qM}{p+q}$$

Impondremos que $p + q \neq 0$, al menos 1 trabajador cambiará de departamento. Nuestro término general es:

$$A_n = \frac{qM}{p+q} + K(1-p-q)^n$$

Estudiaremos esto a largo plazo. Tenemos que $-1 \leq 1-p-q < 1$. Tenemos que $|1-p-q| < 1$, por lo que:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} A_n = \dfrac{qM}{p+q} = M\dfrac{q}{p+q} \\ \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}(M - A_n) = M - M\dfrac{q}{p+q} = \dfrac{p}{p+q}M \end{cases}$$

5.5. Ejercicio 8

1. X_n es el número de árboles en el año n.

$$x_{n+1} = 0.9x_n + K$$

Esto tiende a la solución constante $x_* = \dfrac{K}{0.1}$

5.6. Ejercicio 12

La ecuación logística de Pielou es una ecuación en diferencias no lineal de la forma:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n} \qquad \alpha > 1 \quad \beta > 0$$

1. Demuestre que posee un punto de equilibrio positivo. Tenemos que buscar un $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{\alpha} = f(\bar{\alpha})$ donde $f(x) = \frac{ax}{1+bx}$. Por tanto, buscamos la solución de:

   $$\alpha = \frac{ax}{1+bx} \implies b\alpha^2 - a\alpha + \alpha = 0 \implies \alpha[b\alpha + (1-a)] = 0 \implies \alpha = 0$$

   Es un punto de equilibrio, así que tenemos que:

   $$b\alpha + (1-a) = 0 \implies \alpha = \frac{a-1}{b} > 0$$

2. Tomando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, probar que el punto de equilibrio es Asintóticamente Estable. Para ello , trabajaremos ahora en $\mathbb{R}^+$. Tenemos que $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} \in \mathscr{C}^\infty$ y que su derivada es:

   $$f'(x) = \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2} \implies |f'(1)| = \frac{1}{2} < 1$$

   Por lo que sí es A.E.

3. Demostrar que el cambio de variable $x_n = \dfrac{1}{z_n}$ trasnforma esa ecuación en una ecuación lineal del primer orden. Tenemos ahora por tanto:

   $$\frac{1}{z_{n+1}} = \frac{a\dfrac{1}{z_n}}{1+b\dfrac{1}{z_n}} \implies z_{n+1} = \frac{1}{a}z_n + \frac{b}{a} \quad (2)$$

   Que es una ecuación lineal de primer orden

4. A partir del resultado anterior, determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación logística.
   Esta es una ecuación en diferencias lineal no homogénea, por tanto tendremos una solución $z_n = z_* + y_n$ donde z_* es la solución constante y y_n es la solución de la homogénea asociada.

Tenemos que $z_* = \frac{b/a}{1-(1/a)} = \frac{b}{a-1} > 0$. Ahora, calculamos la ecuación homogénea asociada a (2), calculado en el apartado anterior:

$$y_n = \mathscr{C} + (\frac{1}{a})^n$$

Ya tenemos la solución, por tanto la solucion de z_n es:

$$z_n = \frac{b}{a-1} + \mathscr{C}(\frac{1}{a})^n \quad n \geq 0$$

El comportamiento asintótico de esta es convergente a $\dfrac{b}{a-1}$ pues , como $a > 1$, entonces $(\frac{1}{a})^n \to 0$
Ahora, volviendo al cambio de variable, como z_n tiene límite distinto de cero, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} z_n} = \frac{1}{b/(a-1)} = \frac{a-1}{b}$$

Que es el punto de equilibrio de x_n, luego $\alpha = \frac{a-1}{b}$ es Asintóticamente Estable.

5.7. Ejercicio 15

1. Hecho en clase
2. Para conseguir un equilibrio poblacional asintóticamente estable (a.e.), se propone vender una fracción $\alpha(0 < \alpha < 1)$ de la población en cada periodo de tiempo dando lugar al modelo:

$$p_{n+1} = 10(1-\alpha)p_n e^{(1-\alpha)p_n}$$

i) Encuentre el intervalo abierto (de amplitud máxima) donde elegir α para que esté asegurada la estabilidad asintótica del equilibrio positivo.
Si :

$$\mu = \frac{ln(10(1-\alpha)}{(1-\alpha)}$$

Vamos a comprobar que es L.A.E.

$$f'(x) = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x}(1 + x(-(1-\alpha))$$

$$f'(\mu)01 - ln(10(1-\alpha)) \quad y \quad 0 < ln(10(1-\alpha)) < 2$$

Y ahora, si:

- $\alpha < 9/10$
- $\alpha > \frac{10-e^2}{10}$

Por tanto μ es L.A.E si $\frac{10-e^2}{10} < \alpha < 9/10$
ii) Calcule el valor de α para el que la población de equilibrio alcanza su valor máximo y es a.e.
Ahora, si $g(x) = \frac{ln(10(1-x))}{1-x} \implies g'(x) = \frac{-1+ln(10(1-x))}{(1-x)^2}$.
Ahora, $g'(x) = 0 \implies 1 - ln(10(1-x)) = 0 \implies x = \frac{10-e}{10}$ es donde la poblaciñon alcanza su máximo.
Ahora, si comprobamos: $x_0 > \mu \implies x_1 = 10(1-\alpha)x_0 e^{-(1-\alpha)x_0} = x_0 \frac{10(1-\alpha)}{e^{(1-\alpha)x_0}} < x_0 \implies x_{n+1} < x_n$. Y Si miramos ahora si $x_0 < \mu$, veremos que $x_{n+1} > x_n$

5.8. Ejercicio 17

En cierto mercado, los precios de determinado producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña pero se ha observado que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por:

$$O(p) = 1 + p^2,\ D(p) = c - dp$$

donde c >1 y d >0. Suponemos, además, que el equilibrio del mercado se da si la Oferta iguala a la Demanda y que la oferta en el periodo (n+1)-ésimo depende del precio del periodo n-ésimo.

a) Deduzca la ED, $p_{n+1} = F(p_n)$, que describe la dinámica planteada y calcule el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

b) Deduzca las condiciones sobre c y d que aseguran la estabilidad asitótica de p^*. ¿Qué ocurre si d = 2 y c = 4 ?

c) Para c = 3 y d = 2, use el diagrama de Cobweb para trazar los valores p_1 y p_2 a partir de $p_0 = 1$. A largo plazo, ¿cómo se comportarán los precios en el caso contemplado?

a)

Deducimos la ED, sabemos que el equilibrio del mercado se da si la oferta es igual a la demanda por lo que :

$$O(p_{n-1}) = D(p_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + p_{n-1}^2 = c - dp_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{c-1}{d} - \frac{p_{n-1}^2}{d} \Rightarrow$$

puesto que $d > 0$

$$\Rightarrow p_{n+1} = \frac{c-1}{d} - \frac{p_n^2}{d} = F(p_n)$$

Para calcular el punto de equilibrio (α) tenemos que resolver la ecuación

$$\alpha = F(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\alpha) = \frac{c-1}{d} - \frac{\alpha^2}{d} = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + d\alpha - c + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4(-c+1)}}{2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{2}$$

Dado que α es el precio de equilibrio y éste es un número real entonces se tiene que dar que el discriminante sea mayor que 0 lo cual es cierto ya que c>1 y d>0. Además se tiene que el precio de equilibrio es un número positivo así que debemos escoger aquellos αs que sean positivos. Así se verifica que :

$$d^2 + 4c - 4 > d^2 \Rightarrow$$

$$-d + \sqrt{d^2 + 4(c-1)} > -d + \sqrt{d^2} = 0$$

Se puede ver que el precio de equilibrio que buscamos es:

$$\alpha = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{2}$$

b) Recordemos que para que un punto de equilibrio sea localmente asintóticamente estable (L.A.E.) se tienen que dar dos condiciones: la primera es que la función sea de clase 1 y segundo que el valor absoluto de la derivada evaluada en el punto de equilibrio sea menor que 1. Como podemos ver $F \in C^\infty$ luego, en particular, $F \in C^1$, basta con ver para que valores de c y d se tiene que la mencionada derivada sea menor que 1.

$$F(x) = \frac{c-1}{d} - \frac{1}{d}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F'(x)| = |\frac{-2}{d}x|$$

$$\alpha = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F'(\alpha)| = |\frac{d - \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d}| = |1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d}| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 < -\frac{\sqrt{d^2+4c-4}}{d} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 > \frac{\sqrt{d^2+4c-4}}{d} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d > \sqrt{d^2+4c-4} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4d^2 > d^2+4c-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3d^2-4c+4 > 0$$

Si d = 2 y c = 4

$$\Rightarrow 3*4-4*4+4 = 0$$

Luego la condición anterior no nos garantiza que ese punto sea L.A.E.

Sustituyendo en $F(x)$:

$$F(x) = \frac{4-1}{2} - \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$$

$$|F(x)|' = |-x| = x$$

Sustituyendo α por x:

$$x = \alpha = \frac{-2+\sqrt{2^2+4*4-4}}{2} = 1$$

El resultado como podemos ver es 1, lo cual no nos dice que sea L.A.E. ni inestable. Por tanto tendremos que comprobar que ocurre con la segunda derivada (si es distinta o mayor que 0 entonces es inestable y si es menor que 0 es L.A.E.) :

$$F(x)' = -x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)'' = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow F(\alpha)'' = -1$$

Por tanto, es inestable.

c) Si c = 3 , d = 2 y $p_0 = 1$, entonces usando que :

$$p_{n+1} = \frac{c-1}{d} - \frac{p_n^2}{d} = F(p_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}p_n^2 = F(p_n)$$

$$\Rightarrow p_1 = 1 - \frac{p_0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_2 = 1 - \frac{p_1^2}{2} = \frac{7}{8}$$

Podemos ver que el punto de equilibrio es un atractor y que la función converge a dicho punto:

$$\alpha = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{4 + 12 - 4}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

Para realizar este gráfico he usado wxmaxima, en concreto, la orden

$$staircase(1-(1/2)*x^2, 1, 100, [x, 0, 1.5], [y, 0, 1.5]);$$

donde el primer parámetro es la función obtenida antes (F_n) representada por al curva roja, el segundo parámetro es el punto inicial, el tercero es el número de iteraciones o valores que calculamos (n=100) y los últimos parámetros son opciones para representar el gráfico.

5.9. Ejercicio 19

Determine razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. a) Sea la ecuación en diferencias de primer orden, $x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f(x)$ es suficientemente derivable en un entorno del punto de equilibrio, s. Si $f'(s) = 1$y $f''(s) = 0$, entonces el punto de equilibrio siempre será inestable.

El punto de equilibrio es siempre inestable

b) Toda ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, con un punto de equilibrio inestable en $x = s$ admite, al menos, un 2-ciclo o solución 2-periódica.

Falso. Basta tomar la función $f(x) = ax + b$ tal que si $a > 1$, entonces la derivada es mayor que 1 y la función no tiene ningún ciclo.

c) Todas las soluciones no constantes de la ecuación en diferencias lineal $x_{n+2} + x_{n-1} = 0$, son 3-periódicas.

Si despejamos la ecuación, vemos que:

$$x_{n+3} = -x_n$$

Dados 3 datos iniciales, x_0, x_1, x_2, podemos escribir algunos términos de la recurrencia en función de los anteriores y escribimos su órbita, quedando:

$$\{x_0, x_1, x_2, -x_0, -x_1, -x_2, x_0, \cdots\}$$

Por lo que el periodo es 6, no 3 y por tanto es FALSO.

d) La dinámica de cierta población ovina se rige mediante un modelo logístico discreto. Si la tasa de crecimiento para una población de 10 cientos es de 1.5 y para una de población de 20 cientos es de 1; entonces, a largo plazo, la población tiende a un valor constante.

Tenemos que $P_n = 10$ y la tasa de P_n es 1.5 . También que si $P_m = 20$, entonces su tasa es de 1.

Ajustando por un modelo conveniente, tenemos que:

$$tasa(P_n) = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = a - bP_n$$

y si despejamos, obtenemos:

$$P_{n+1} = P_n + P_n - bP_n^2 \implies P_{n+1} = (1+a)P_n(1 - \frac{b}{1+a}P_n)$$

ASí que si tomamos $\mu = (1+a)$, $x_n = \frac{b}{1+a}P_n$, entonces:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Ahora, debemos hallar a y b. planteamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 1.5 &= a - 10b \\ 1 &= a - 20b \end{aligned}\right\} \begin{cases} a = 2 \\ b = 0.05 \end{cases}$$

y planteamos la ecuación:

$$P_{n+1} = 3P_n - 0,05P_n^2$$

entonces:

$$P_* = 3P_* - 0,05P_*^2$$

Si igualamos $0,05P_*^2 - 2P_* = 0 \implies P_* = 0$, pero también tenemos que tener en cuenta el caso $0,05P_* - 2 = 0 \implies P_* = 40$

Ahora, si $f(x) = 3x - 0,05x^2$, entonces $f'(0) = 3$, por lo que es inestable y $f'(40) = 3 - 4 = -1$ y $f''(40) = -0,05$ pero como la derivada vale -1, no podemos determinar con claridad lo que ocurre en este caso. Sin embargo, si realizamos el dibujo en $wxmaxima$, veríamos que se realiza la tela de araña y así converge.

6. Relación 2

6.1. Ejercicicio 2

Calcule una solución de la ecuación $x_{n+3} - x_n = 0$ con condiciones iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

Lo primero es ver que su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

y las raíces de este son:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}i}{2}$$

y por tanto tenemos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})$ y $\lambda_3 = cos(\frac{2\pi}{3}) - isen(\frac{2\pi}{3})$
Así, la solución general es:

$$x_n = c_1 * 1^n + c_2 cos(n(\frac{2\pi}{3})) + c_3 sen(n(\frac{2\pi}{3}))$$

Solo faltaría resolver el sistema con las condiciones iniciales para obtener la solución particular del sistema.

6.2. Ejercicio 4

Dado un número real α, determine una expresión para la sucesión $\{x_n\}$ que verifica:

$$\{x_{k+2} = x_{k+1} + x_k \ \ k \in \mathbb{N} x_1 = 1, \quad x_2 = \alpha$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, cuyas soluciones son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Con las condiciones iniciales, podemos obtener la expresión de la sucesión hallando c_1 y c_2.

Apartado b): estudiar el comportamiento de la sucesión $\{y_n\}$ definida por:

$$y_{k+1} = \frac{1}{1 + y_k} \quad k \geq 2 \quad y \quad y_2 = 1$$

Hallando su polinomio característico, sus raíces son $y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

6.3. Ejercicio 9

La sucesión $\{\overline{x_n}\}_{n\geq 0} = \{1, 2, 5, 12, 29, \ldots\}$ es solución de cierta ecuación en diferencias lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes.

a) Deduzca dicha ecuación en diferencias.
Sabemos que la ecuación en diferencias será de la forma

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{4}$$

Si sustuimos en (4) los valores $n = 0$ y $n = 1$ para la solución particular $\{\overline{x_n}\}_{n\geq 0}$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 + 2a_1 + a_0 = 0 \\ 12 + 5a_1 + 2a_0 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $a_1 = -2$, $a_0 = -1$. Por tanto, la ecuación en diferencias es:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{5}$$

b) Dé una expresión de la solución general de la ecuación en diferencias.

Resolvemos la ecuación (5) como ya sabemos. Comenzamos hallando las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Como λ_1 y λ_2 son dos raíces distintas de $p(\lambda)$, sabemos que $\{X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}\}$ es una base del espacio de soluciones Σ, donde

$$X_{\lambda_1} = \{\lambda_1^n\}_{n\geq 0} \quad ; \quad X_{\lambda_2} = \{\lambda_2^n\}_{n\geq 0}$$

Por tanto, la solución general $\{x_n\}_{n\geq 0}$ será una combinación lineal de la base $\{X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}\}$, es decir:

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad n \geq 0 \tag{6}$$

Para determinar las constantes c_1 y c_2, sustituimos los valores $n = 0$, y $n = 1$ en (6) para la solución particular $\{\overline{x_n}\}_{n\geq 0}$, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \overline{x_0} = c_1 + c_2 = 1 \\ \overline{x_1} = c_1(1 + \sqrt{2}) + c_2(1 - \sqrt{2}) = 2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $c_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $c_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Por tanto, la expresión de la solución general es:

$$x_n = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{2}\right)^n, \quad n \geq 0 \tag{7}$$

c) Deduzca de forma razonada el valor, si existe, de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Como $\sqrt{2} < 2$, se tiene que $\left|1 - \sqrt{2}\right| < 1$, y por tanto $(1 - \sqrt{2})^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Utilizando esa información, y atendiendo a (7), podemos expresar el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n} + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\sqrt{2}\right) = 1+\sqrt{2}$$

Por tanto, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1+\sqrt{2}$.

6.4. Ejercicio 13

Presentamos el modelo de Samuelson modificado:

$$Y_n = C_n + I_n$$

$$C_n = b \cdot I_{n-1}$$

$$I_n = C_n - kC_{n-1} + G$$

Donde Y_n es la renta nacional, C_n es el consumo e I_n es la inversión. G es el gasto público que suponemos constante.

Debemos escribir en primer lugar la ley de recurrencia para las inversiones anuales I_n y posteriormente calcular las condiciones sobre los parámetros k y b para que haya convergencia.

Para comenzar tomamos la expresión de I_n e intentamos expresarla exclusivamente con términos de I_n. Para ello sustituimos en la tercera ecuación los C_n por la expresión correspondiente que observamos en la segunda ecuación.

$$I_n = b \cdot I_{n-1} - k \cdot (b \cdot I_{n-2}) + G \qquad n \geq 2$$

Como nos interesa tener la ecuación en recurrencia para valores mayores o iguales que 0 hacemos una pequeña transformación en los índices (le sumamos 2 a todos)

$$I_{n+2} = b \cdot I_{n+1} - k \cdot (b \cdot I_n) + G \qquad n \geq 0$$

Y reordenamos para obtener la **ley de recurrencia:**

$$I_{n+2} - b \cdot I_{n+1} + k \cdot b \cdot I_n = G$$

Ahora procederemos a calcular las condiciones sobre k y b para que haya convergencia.

Sabemos que la $I_n = I_n^h + I_n^{(1)}$, es decir, que podemos expresar I_n como suma de la homogénea asociada más una solución particular. Y para que se produzca esta situación de convergencia la homogénea asociada debe converger a cero ($\lim_{n \to +\infty} X_n = 0$).

$$I_n^h : \ I_{n+2} - b \cdot I_{n+1} + k \cdot b \cdot I_n = 0$$

Cuyo polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + kb$$

Al estar ante una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden dos, para que converja a 0 tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & p(1) = 1 - b + kb \ > \ 0 \\ (2) & p(-1) = 1 + b + kb \ > \ 0 \\ (3) & p(0) = kb \ < \ 1 \end{array}\right\}$$

Y a partir de esto obtenemos las condiciones: Partimos de $1 > b > 0$ y de $k > 0$.

Probamos que la condición (1) se cumple siempre. Restamos b en la primera expresión:

$$1 - b > b - b$$
$$1 - b > 0$$

Y de la segunda multiplicamos por b, un número positivo y la expresión se mantiene:

$$k \cdot b > 0$$

Si sumamos estas dos expresiones obtenemos:

$$1 - b + k \cdot b > 0$$

La condición (2) es trivial. Suma de números positivos es positiva.

Y de la condición (3) obtenemos:

$$k < \frac{1}{b}$$

Con esto deducimos finalmente que converge si:

$$\left.\begin{array}{r} 0 < k < \dfrac{1}{b} \\ 0 < b < 1 \end{array}\right\}$$

7. Relación 3

Ejercicio 7.1 (1). Demuestre el Teorema de Cayley-Hamilton.

Solución. Sea $A \in \mathscr{M}_r(\mathbb{C})$ y sea $p(\lambda) = |A-\lambda I| = (-1)^r(\lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0)$ su polinomio característico, con $c_i \in \mathbb{C}$. Llamemos $C = A - \lambda I$. Sabemos que:

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot Adj(C)^T \implies |C|I = C\, Adj(C)^T$$

Entonces, tendremos que

$$p(\lambda)I = (A-\lambda I)\, Adj(A-\lambda I)^T \tag{8}$$

Consideremos la matriz $B = Adj(A-\lambda I)$. Como las entradas de B son polinomios en λ, podemos separar para cada $0 \le i \le r$ los coeficientes del término λ^i, y formar una matriz de números B_i tal que:

$$Adj(A-\lambda I)^T = B_{r-1}\lambda^{r-1} + B_{r-2}\lambda^{r-2} + \ldots + B_0$$

Ahora, sustituyendo en (8) nos queda que

$$\begin{aligned}(-1)^r(\lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + c_0)I &= (A-\lambda I)(B_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + B_0)\\ &= -(B_{r-1}\lambda^r + \ldots + B_0\lambda) + (AB_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + AB_0)\\ &= -B_{r-1}\lambda^r + (-B_{r-2} + AB_{r-1})\lambda^{r-1} + \ldots + (-B_0 + AB_1)\lambda + AB_0\end{aligned}$$

Identificando término a término en la igualdad anterior, notamos que se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned}(-1)^r I &= -B_{r-1}\\ (-1)^r c_{r-1} I &= -B_{r-2} + AB_{r-1}\\ &\vdots\\ (-1)^r c_1 I &= -B_0 + AB_1\\ (-1)^r c_0 I &= AB_0\end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$$\begin{aligned}p(A) &= (-1)^r\left[A^r + c_{r-1}A^{r-1} + c_{r-2}A^{r-2} + \ldots + c_1 A + c_0 I\right]\\ &= (-1)^r\left[IA^r + (c_{r-1}I)A^{r-1} + \ldots + c_1 IA + c_0 I\right]\\ &= -A^r B_{r-1} + A^{r-1}(-B_{r-2} + AB_{r-1}) + \ldots + A(-B_0 + AB_1)A + AB_0\\ &= 0\end{aligned}$$

Ejercicio 7.2 (3). Sea A una matriz 4×4 con un valor propio $\lambda = 3$ de multiplicidad algebraica 4. Escriba todas las formas canónicas de Jordan asociadas a A posibles.

Solución.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} \quad J_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.3 (5). Resuelva la ecuación matricial $X^2 = I$, donde X es una matriz real 2×2.

Solución. Sabemos que $X^2 = X\cdot X = I \iff X^{-1} = X$. Además, por el *teorema de la forma canónica de Jordan*, sabemos que $X = PJP^{-1}$, y J puede ser una de estas tres matrices, donde $\lambda_i \in \sigma(X)$:

(*i*) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(*ii*) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

(*iii*) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Ahora, realizando manipulaciones algebraicas, tenemos que

$$X^2 = X\cdot X = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) = PJP^{-1}PJP^{-1} = P^{-1}J^2P$$

Entonces, se verifica la siguiente equivalencia:

$$X^2 = I \iff PJ^2P^{-1} = I \iff P^{-1}(PJ^2P^{-1})P = PIP^{-1} \iff J^2 = I$$

Es decir, para que se verifique la ecuación del enunciado, necesariamente debe ser $J^2 = I$. Evaluemos ahora los casos que teníamos:

(*i*) $J^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Supongamos $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Entonces, la matriz X que verifica $X^2 = I$ será de la forma

$$X = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad P \in M_2(\mathbb{R}) \text{ regular}$$

(*ii*) $J^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \\ & \lambda_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = I$ ó $J = -I$. Luego tenemos que $X = PJP^{-1} \Rightarrow X = I$ ó $X = -I$.

(*iii*) $J^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vemos que no puede darse este caso.

Ejercicio 7.4 (7).

(*i*) Demuestre que una matriz $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ es nilpotente si y sólo si $\sigma(A) = \{0\}$.

(*ii*) Describa todas las matrices nilpotentes 2×2.

Solución. Decimos que una matriz A es **nilpotente** si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Al menor n tal que A es nilpotente se le llama *orden de nilpotencia*. Por ejemplo, las matrices

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son nilpotentes de orden 2 y 3, respectivamente. En general, si J es un bloque de Jordan con todos los elementos diagonales nulos, entonces J es nilpotente de orden $\dim J$. Esto es una consecuencia directa del *Teorema de Cayley-Hamilton*.

Resolveremos ahora los dos apartados del ejercicio.

Comenzamos probando (i). Sea $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Aplicando el *Teorema de la forma canónica de Jordan*, sabemos que A es semejante a una matriz diagonal por bloques J, y también sabemos que $A^n = 0 \iff J^n = 0$. Además, es obvio que $J^n = 0$ si y solo si cada uno de los bloques que la forman es nulo.

Consideremos un bloque arbitrario de J, digamos

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \sigma(A)$$

Tenemos que $J_\lambda = \lambda I + F$, donde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz recibe el nombre de *shift matrix*, y tiene la propiedad de que sus sucesivas potencias desplazan una posición hacia la derecha la diagonal con 1, dejando el resto de entradas a 0. Como F es un bloque de Jordan con todos los elementos diagonales nulos, es nilpotente de orden $\dim F = \dim J_\lambda = p$. Se puede demostrar por inducción la siguiente fórmula para la potencia n-ésima de la matriz J_λ:

$$J_\lambda^n = (\lambda I + F)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} F^k$$

Ahora, como F es nilpotente de orden p, tenemos que

$$J_\lambda^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} F^k, \quad \forall n \geq p$$

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{p-1}\lambda^{n-p+1} \\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{p-2}\lambda^{n-p+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}, \quad n \geq p$$

Teniendo en cuenta todo el desarrollo anterior, concluimos que J es nilpotente de orden p si y solo si $\lambda = 0$.

Demostración alternativa. En primer lugar, sea $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ tal que su único valor propio es 0. Entonces, el polinomio característico asociado será $p(\lambda) = (-1)^d \lambda^d$. Por el *Teorema de Cayley-Hamilton*, tenemos que $p(A) = (-1)^d A^d = 0$, por lo que A es nilpotente de orden d.

Supongamos ahora que A es nilpotente de orden p. Si λ es un valor propio de A, ya sabemos que λ^p es valor propio de A^p. Por tanto, existirá un $v \neq 0$ tal que

$$0 = A^p v = \lambda^p v,$$

lo cual es absurdo salvo en el caso $\lambda = 0$.

Probamos ahora (ii). Consideremos $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Ya sabemos por (i) que A es nilpotente si y solo si su único valor propio es el 0.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 - (a+d)\lambda - bc + ad$$

Como queremos que 0 sea la única raíz de $p(\lambda)$, imponemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ bc = 0 \\ ad = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = d = 0 \\ b = 0 \text{ ó } c = 0 \end{cases}$$

Es decir, las matrices nilpotentes de orden 2 son de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 7.5 (9). Supongamos que el polinomio $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ tiene k raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Sea A la matriz *compañera* de $p(\lambda)$ definida en el problema anterior y sea V la matriz de *Vandermonde*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

Demuestre que la matriz $V^{-1}AV$ es diagonal.

Solución. Vamos a probar que: $V^{-1}AV = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$. En realidad, lo que vamos a demostrar es que $AV = VD$.

Vamos a multiplicar A por V.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \ldots & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \ldots & \ldots & \lambda_k^k \end{pmatrix} \\ &= VD \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.6 (11). Sea A una matriz $k \times k$ tal que $|\lambda| < 1$ para cualquier valor propio λ de A. Demuestre que:

Solución.

- Si $|A - I| = 0$ entonces $\lambda = 1$ es valor propio de A.

- $I-A$ es regular, luego $\exists(I-A)^{-1}$.

$$\rho(A)<1 \Longleftrightarrow \{A^k\}_{k\geq 0}\to 0$$

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^{n} A^k = I+A+A^2+\ldots+A^n \\
(I-A)s_n &= (I-A)+(A-A^2)+(A^2-A^3)+\ldots+(A^n-A^{n+1}) \\
&= I-A^{n+1} \\
s_n &= (I-A)^{-1}(I-A^{n+1}) \\
\sum_{k=0}^{\infty} A^k &= \lim_{n\to\infty} s_n = (I-A)^{-1}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.7 (15). Se considera la matriz de Leslie

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha,\beta \in]0,1[$. Encuentra las regiones donde se produce extinción, crecimiento ilimitado o convergencia a equilibrio en el plano de parámetros (α,β).

Solución. La tasa de fertilidad del primer grupo es $\frac{1}{2}$, la del segundo 2, y la del tercero, 1.

$$\begin{aligned}
X_n &= L^n X_0 \\
\left\{\frac{1}{\lambda_1^n} L^n X_0\right\}_{n\geq 0} \to V \ &; \ LV = \lambda_1 V
\end{aligned}$$

Entonces

- $0<\lambda_1<1 \Rightarrow$ extinción.
- $\lambda_1 = 1 \Rightarrow$ equilibrio.
- $\lambda_1 > 1 \Rightarrow$ crecimiento ilimitado.

Ejercicio 7.8 (17). Se considera la matriz de Leslie

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \delta & \gamma \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\delta,\gamma \geq 0$.

a) Encuentre las regiones donde se produce extinción, crecimiento ilimitado o convergencia a equilibrio en el plano de parámetros (δ,γ).

> b) Describa la pirámide de edad a largo plazo correspondiente a los valores $\delta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$.

Solución.

a) $R = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\gamma &= 1 \\ \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\gamma &= \frac{1}{2} \\ 2\delta + \gamma &= 2 \\ \gamma &= 2 - 2\delta \end{aligned}$$

b) $\delta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists \lambda_1$ valor propio dominante (único positivo). ¿Es $\lambda_1 = 1$?

$$\begin{aligned} |L - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} &= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\lambda^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{-\lambda}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$p(1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$
Buscamos $v_1 : (L - I)v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}v_1 - v_2 = 0 \\ \frac{1}{2}v_2 - v_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} v_2 = \frac{1}{2}v_1 \\ v_3 = \frac{1}{2}v_2 \end{aligned}\right\}$$

Por ejemplo $v_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 2 \\ v_3 = 1 \end{cases}$

$$V = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{V}{||V||_1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.9 (20). Una determinada población está estructurada en base a tres grupos diferentes de edad: crías (hasta los 3 años), jóvenes (de 3 a 6 años) y adultos (de 6 a 9 años). Es conocido que cada cría engendra en media una nueva cría, cada joven engendra en media 1,5 crías y cada adulto engendra en media 0,5 crías. Además, las observaciones arrojan el dato de que la mitad de las crías llegan a jóvenes, en tanto que sólo el 20 % de los jóvenes sobrevive.

- Construya la matriz del modelo.
- Si la distribución de tamaños iniciales es $P_0 = (3, 1, 0)^t$ (en las unidades adecuadas), calcule cuál será la distribución de tamaños al cabo de seis años.
- Explique el comportamiento a largo plazo de la población (incluyendo su distribución porcentual por grupos

de edad).

Solución.

a) La matriz de Leslie del modelo queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Al cabo de seis años, la distribución será

$$P_6 = A^2 P_0 = (6.85,\ 2.25\ ,\ 0.3)$$

c) Para calcular la distribución porcentual por grupos de edad a largo plazo, primero vamos a comprobar la *tasa de natalidad*:

$$R = 1 + 1.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5 \times 0.2 = 1.8 > 1$$

Por tanto, la población no se extinguirá a largo plazo, sino que crecerá indefinidamente. Calculemos la pirámide de población. Para ello, tenemos que calcular el valor propio dominante de la matriz del modelo. Un breve análisis del polinomio característico basta para comprobar que no podemos calcular sus raíces mediante procedimientos algebraicos. El método de la potencia nos da el valor propio $\lambda_1 \approx 1.51$, y el vector propio asociado $v_{\lambda_1} \approx (1.000000, 0.3297385, 0.04349099)$.
La pirámide de población a largo plazo será, aproximadamente:

$$\frac{v_{\lambda_1}}{||v_{\lambda_1}||_1} \approx (0.72821, 0.24011, 0.03167)$$