Análisis Matemático I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Análisis Matemático I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

I. Teoría 5

1. Topología de un espacio métrico. 6

1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$. 6

1.2. Conceptos topológicos. 7

2. Sucesiones en $\mathbb{R}^N$. 10

3. Funciones continuas en $\mathbb{R}^N$. 12

3.1. Clasificación de conjuntos en $\mathbb{R}^N$ 15

3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida. 17

3.3. Teoremas sobre funciones continuas en $\mathbb{R}^N$ 17

4. Límite funcional en $\mathbb{R}^N$. 19

5. Funciones derivables en $\mathbb{R}^N$. 20

5.1. Concepto de función derivable. 20

6. Matriz asociada a $Df(x_0)$. 21

7. FALTA MUCHO CONTENIDO 22

8. Teorema de la función inversa e implícita 32

II. Ejercicios 36

9. Topología de un espacio métrico. 36

10. Conexión. 36

Parte I.
Teoría

Introducción.

El objetivo de este curso es el estudio de las funciones de varias variables, es decir, de funciones $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Para ello, empezaremos caracterizando el espacio $\mathbb{R}^N$, y proseguiremos intentando traspasar los resultados principales sobre funciones reales de variable real a nuestro campo de estudio, así como enunciando otros nuevos.

Es por esto que es fundamental haber cursado con aprovechamiento las asignaturas de *Cálculo I y II*, que tratan exclusivamente sobre funciones reales de variable real.

Aunque nos centraremos en funciones en el espacio $\mathbb{R}^N$, muchos de los resultados que obtendremos son igual de válidos en un espacio métrico en general, e incluso en espacios topológicos.

1. Topología de un espacio métrico.

1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$.

Definición 1.1 (Espacio métrico). Consideremos un conjunto X cualquiera, y una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

(i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X.$
(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall x,y \in X.$
(iii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X.$
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X. \quad (desigualdad\ triangular)$

Entonces, se dice que el par (X,d) es un *espacio métrico*.

Nota. En adelante, entenderemos $\mathbb{R}^N$ como el espacio métrico $(\mathbb{R}^N, d)$, siendo d la distancia usual **(distancia euclídea)** dada por:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i)^2} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en $\mathbb{R}^N$. Las más destacadas son las siguientes:

(i) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N}|x_i - y_i| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N.$
(ii) $d_\infty(x,y) = máx\{|x_i - y_i| : i = 1,\dots,N\} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N.$
(iii) $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{N}|x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N.$

Definición 1.2. Sean (X,d) y (X,d') dos espacios métricos sobre un mismo conjunto X. Se dice que las distancias d y d' son *equivalentes* si, y solo si,

$$\exists k_1, k_2 > 0 : \ k_1 d(x,y) \leq d'(x,y) \leq k_2 d(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

Proposición 1.1. En $\mathbb{R}^N$, todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia euclídea es equivalente a todas ellas.

1.2. Conceptos topológicos.

Definición 1.3 (Bola abierta). Sea (X,d) un espacio métrico, y fijemos un $x \in X$ y un $\epsilon > 0$. Se llama *bola abierta de centro x y radio ϵ* al conjunto $B(x,\epsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}$.

Definición 1.4 (Bola cerrada). De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro x y radio ϵ* como el conjunto $\overline{B}(x,\epsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq \epsilon\}$.

Definición 1.5 (Conjunto abierto). Sea (X,d) un espacio métrico, y sea $A \subseteq X$. Decimos que A *es abierto* $\iff \forall a \in A\ \exists \epsilon > 0 : B(x,\epsilon) \subseteq A$.

Proposición 1.2. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X\ \forall \epsilon > 0$ se tiene que $B(x,\epsilon)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $x \in B(x_0,\epsilon_0)$ arbitrario. Para demostrar que $B(x_0,\epsilon_0)$ es un abierto, tenemos que encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \subseteq B(x_0,\epsilon_0)$, y por lo tanto comprobar que se verifica que $\forall y \in B(x,\epsilon) \Rightarrow y \in B(x_0,\epsilon_0)$.

Sea $y \in B(x,\epsilon)$ cualquiera. Consideremos $r = d(x,x_0)$, y tomemos $\epsilon = \epsilon_0 - r$. Queremos demostrar que $y \in B(x_0,\epsilon_0)$. Para ello, veamos que $d(x_0,y) < \epsilon_0$. En efecto, por la desigualdad triangular se cumple que:

$$d(x_0,y) \leq d(x,x_0) + d(x,y) < r + \epsilon = r + \epsilon_0 - r = \epsilon_0$$

Luego queda demostrado que $y \in B(x_0,\epsilon_0)$, y por tanto podemos afirmar que para todo punto $x \in B(x_0,\epsilon_0)$ se puede encontrar una bola abierta centrada en él, tal que todos sus puntos están en el conjunto de origen. $\square$

Proposición 1.3. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

(i) Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto.

(ii) Si $\{A_1,\ldots,A_n\}$ es una familia finita de abiertos de X, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

(iii) $X, \emptyset$ son abiertos.

Definición 1.6 (Punto interior). Sea (X,d) un espacio métrico, y consideremos $A \subseteq X$, $a \in A$. Se dice que *a es un punto interior de A* si, y solo si, $\exists \epsilon_0 > 0 : B(a,\epsilon_0) \subseteq A$. Definimos $int(A) = \mathring{A} = \{a \in A \mid a \text{ es punto interior de } A\}$.

Proposición 1.4. Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

(i) $\mathring{A} \subseteq A$.
(ii) $\mathring{A}$ es abierto.
(iii) Si $B \subseteq A$ es un subconjunto abierto de A, entonces $B \subseteq \mathring{A}$. Es decir, $\mathring{A}$ es el abierto más grande contenido en A.
(iv) $\mathring{A} = \bigcup\{B \subseteq A \mid B \text{ } es \text{ } abierto\}$.
(v) A es abierto $\iff \mathring{A} = A$.
(vi) $int(int(A)) = int(A)$.
(vii) Si $A \subseteq B$, entonces $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

Definición 1.7 (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico, y $F \subseteq X$. Se dice que el conjunto F *es cerrado* $\iff X - F$ *es abierto*.

Proposición 1.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X \ \forall \epsilon > 0$ se tiene que $\overline{B}(x, \epsilon)$ es un conjunto cerrado.

Proposición 1.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

(i) *Si* $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de cerrados de X, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ es cerrado.
(ii) Si $\{F_1, \ldots, F_n\}$ es una familia finita de cerrados de X, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es cerrado.
(iii) $X, \emptyset$ son cerrados.

Definición 1.8 (Clausura). Sea (X, d) un espacio métrico. Se llama *clausura o cierre de* A al conjunto $\overline{A} = X - int(X - A)$.

Proposición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

(i) $A \subseteq \overline{A}$.
(ii) $\overline{A}$ es cerrado.
(iii) Si $B \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X tal que $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq B$. Es decir, $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.
(iv) $\overline{A} = \bigcap\{F \subseteq X \mid F \text{ } es \text{ } cerrado \text{ } y \text{ } A \subseteq F\}$.
(v) A es cerrado $\iff \overline{A} = A$.
(vi) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(vii) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Definición 1.9 (Frontera). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Llamamos *frontera de* A al conjunto $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$.

Proposición 1.8. Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifica lo siguiente: $x \in \partial A \iff \forall \epsilon > 0\ B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,\epsilon) \cap (X-A) \neq \emptyset$.

Definición 1.10 (Punto de acumulación). Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Dado $x \in X$, decimos que x *es punto de acumulación de* $A \iff \forall \epsilon > 0\ B(x,\epsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Definimos $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$.

Proposición 1.9. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

(i) $\mathring{A} = X - \overline{X-A}$

(ii) $\overline{A} = A \cup \partial A$.

(iii) $\overline{A} = A \cup A'$

(iv) $X = int(A) \cup \partial A \cup int(X-A)$. Además, la unión es disjunta dos a dos.

2. Sucesiones en $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.1 (Sucesión en $\mathbb{R}^N$). Una sucesión en $\mathbb{R}^N$ es una aplicación $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder un $x(n) \in \mathbb{R}^N$. Por simplicidad, al elemento imagen de n se le denomina x_n, y la aplicación x se denota $\{x_n\}$.

Definición 2.2 (Convergencia de sucesiones). Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A converge a x si, y solo si:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_o \in \mathbb{N} : \ n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Nota. Este concepto no depende de la distancia equivalente elegida.

Proposición 2.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A. Adoptemos la notación $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$, y $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$. Entonces, se verifica que:

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_n^j\} \to x^j.$$

Definición 2.3. Sea (X,d) un espacio métrico, y $x \in X$. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $a_n \in X$. Entonces, decimos que $d(a_n, x) \to 0 \iff \{a_n\} \to x$.

Definición 2.4 (Conjunto acotado). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que A *está acotado* si, y solo si, $\exists R > 0 : A \subseteq B(0,R)$.

Definición 2.5 (Sucesión acotada). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de R^N. Entonces, decimos que $\{x_n\}$ *está acotada* sí, y solo sí, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Proposición 2.2. Si una sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotada, entonces $\forall i = 1, \dots, n$ la sucesión $\{x_n^i\}$ es acotada (en $\mathbb{R}$).

Nota. Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotado, entonces cualquier sucesión de puntos de A es acotada.

Teorema 2.1 (Bolzano-Weierstrass). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ acotada. Entonces, existe una sucesión parcial suya $\{x_{\sigma_{(n)}}\}$ convergente.

Demostración. Notaremos $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^N)$. Como $\{x_n^1\}$ es acotada en $\mathbb{R}$, existe $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{x^1_{\sigma_1(n)}\}$ es convergente.

Ahora, como $\{x_n^2\}$ es acotada, $\{x^2_{\sigma_1(n)}\}$ también es acotada, y existe $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{x^1_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}\}$ es convergente.

Procediendo de esta forma con cada componente de x_n, obtenemos $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, y
$\{x^1_{\sigma_1(n)}\}, \{x^2_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}\}, \dots, \{x^N_{(\sigma_N \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}\}$ sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$. Al ser σ_i estrictamente creciente $\forall i = 1, \dots, N$, $\{x^i_{(\sigma_N(n) \circ \cdots \circ \sigma_{i+1} \sigma_i \circ \cdots \circ \sigma_1)(n)}\}$ también es convergente (toda sucesión parcial de una sucesión convergente es convergente).

Así, tomando $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_N$, $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente. $\square$

Definición 2.6 (Sucesión de Cauchy). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_o \in \mathbb{N} : \ n, m \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Teorema 2.2 ($\mathbb{R}^N$ es completo). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces:

$$\{x_n\} \ es\ de\ Cauchy \iff \{x_n\} \ es\ convergente.$$

Proposición 2.3. Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ *con* $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ es convergente a x.

Demostración. Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación tal que $\sigma(n+1) > \sigma(n) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ahora, $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Como x_n es convergente:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \ n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \epsilon$$

Pero $\sigma(n) \geq n \ \ \forall n$ así que

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \ \sigma(n) \geq n \geq n_0 \implies d(x_{\sigma(n)}, x) < \epsilon$$

Luego $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$ $\square$

3. Funciones continuas en $\mathbb{R}^N$.

Definición 3.1 (Función continua). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ y $a \in A$. Decimos que f *es continua en* a si, y solo si:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; x \in A, \; d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Además, se dice que f es continua si lo es en todos sus puntos.

Proposición 3.1 (Caracterización de continuidad). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces:

$$f \; es \; continua \; en \; a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \; con \; \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a).$$

Definición 3.2 (Continuidad uniforme). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Se dice que f es uniformemente continua si, y solo si:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; x, y \in A, \; d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Definición 3.3 (Conjunto compacto). Sea (X,d) un espacio métrico, y sea $\emptyset \neq A \subseteq X$.

$$A \; es \; compacto \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \;\; \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A.$$

Definición 3.4 (Recubrimiento abierto). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Se dice que una familia $\{O_i, i \in I\}$ de abiertos es un *recubrimiento abierto* de A si

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$$

También, si R_1 y R_2 son recubrimientos abiertos de A y $R_1 \subseteq R_2$, se dice que R_1 es un *subrecubrimiento abierto* de R_2.

Proposición 3.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\bigcup_{i \in I} O_i$ un recubrimiento cualquiera de A. Entonces, A es compacto si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$$

es decir, existe un subrecubrimiento de A finito.

Proposición 3.3 (Caracterización de cerrados). Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, son equivalentes:

(i) A es cerrado.
(ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A$ convergente a un $x \in X$, se verifica que $x \in A$.

Demostración. Veamos las dos implicaciones:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces, $X - A$ es abierto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A que converge a un $x \in X$. Para comprobar que, de hecho, $x \in A$, argumentamos por reducción al absurdo:

Supongamos $x \notin A$. Entonces, $x \in X - A$, y por ser este último conjunto abierto, encontramos un $\epsilon > 0 \ tal \ que \ B(x,\epsilon) \subseteq (X - A)$. Pero por ser x el límite de la sucesión $\{x_n\}$, se tiene que $\exists n_o \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$. Es decir, a partir de cierto índice en adelante, $x_n \in B(x,\epsilon) \ con \ x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$. Esto se contradice con el hecho de que $B(x,\epsilon) \subseteq (X - A)$, pues encontramos en dicha bola puntos x_n que no pertenecen a $X - A$.

Por tanto, concluimos que $x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $A \subseteq X$, y supongamos que se verifica que $\forall \{x_n\} \subseteq A \ tal \ que \ \{x_n\} \to x \in X, \ se \ tiene \ que \ x \in A$. Para ver que A es cerrado, utilizaremos la siguiente caracterización de conjuntos cerrados:

$$A \ es \ cerrado \iff \overline{A} = A$$

Si recordamos, se define la frontera de A como $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$. Por tanto, la equivalencia anterior quedaría así: $A \ es \ cerrado \iff \partial A \cup \mathring{A} = A$. Para comprobar esta última igualdad, veamos las dos inclusiones:

$\boxed{\subseteq}$ Sabemos por la definición del conjunto de puntos interiores de A, que $\mathring{A} \subseteq A$.
Comprobemos entonces que $\partial A \subseteq A$:
Sea $x \in \partial A$ cualquiera. Por una caracterización de la frontera de A, sabemos que $\forall \epsilon > 0 \ B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Si tomamos $\epsilon = \frac{1}{n} > 0 \ con \ n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $\exists a_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A \ tal \ que \ d(x,a_n) < \epsilon = \frac{1}{n}$.
Podemos construir entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{a_n\}$.
Así, se tiene que $0 < d(x,a_n) < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$, de donde concluimos que $d(x,a_n) \to 0$. Por definición, esto significa que $\{a_n\} \to x$, lo que por hipótesis implica, al ser $\{a_n\}$ una sucesión convergente de puntos de A, que $x \in A$.
Por tanto, se verifica que $\partial A \subseteq A$.

$\boxed{\supseteq}$ Esta inclusión es trivial, pues sabemos que $A \subseteq \overline{A}$, y por tanto $A \subseteq \partial A \cup \mathring{A} = \overline{A}$.

De esta forma, queda probada la equivalencia. $\square$

Podemos dar ahora un teorema importante que caracteriza a los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1 (Teorema de Heine-Borel). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$A\, es\ compacto \iff \text{A es cerrado y acotado}$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$
Suponemos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto. Entonces, por su definición, $\forall \{x_n\} \subset A\ \exists \{x_{\sigma(n)}\}$ parcial de $\{x_n\}$ con $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$. Supongamos que A no está acotado. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A :\ |a_n| \geq n$, por lo que $\{a_n\}$ no converge y por tanto $\sigma(n) \geq n \implies \{a_{\sigma(n)}\}$ no converge, por lo que A está acotado.

Supongamos ahora que $\{x_n\} \to x \implies \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$, y como sabemos que si una sucesión es convergente todas sus parciales convergen al mismo límite, entonces eso implica que $\{x_n\} \to x \in A$ por lo que toda sucesión converge a un punto de A, y así A es cerrado.
$\boxed{\Leftarrow}$
Supongamos ahora que A es cerrado y acotado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de puntos de A.

Como A es acotado, entonces $\exists R > 0 :\ \ A \subset B(0,R)$. Además, como $\{x_n\} \subset A\ \forall n \implies |x_n| < R\ \forall n \in \mathbb{N}$, así $\{x_n\}$ es acotada.

Como $\{x_n\}$ es acotada, por el teorema de Bolzano Weierstrass, $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente con $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in \mathbb{R}^n$, y como $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una subsucesión de puntos de A que converge a x y el conjunto A es cerrado, entonces el límite de esta sucesión está en A , es decir:

$$\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$$

Por lo que tenemos la definición de conjunto compacto. □

Proposición 3.4. Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ convergente a un $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Entonces, el conjunto
$A = \{x_n :\ n = 0, 1, 2, \dots\}$ es compacto.

Demostración.
Probaremos que es cerrado y acotado.

- **Acotado:** Sea $\epsilon > 0$ fijo. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \implies x_n \in B(x_0, \epsilon)$, que es acotado. Por tanto $A \subset B(x_0, \epsilon) \cup \{x_m : m < n_0\}$.
- **Cerrado:** Veamos que $A = \bar{A}$. Ya sabemos que $A \subseteq \bar{A}$. Ahora, supongamos que $\exists a_0 \in \bar{A} : a_0 \notin \bar{A}$. Entonces a_0 verificaría que $\forall \epsilon > 0\ \ B(a_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ x_{n_0} \in B\left(a_0, \frac{1}{n}\right)$. Sabiendo esto, vamos a probar que existe una sucesión parcial convergente a a_0, con lo que $a_0 = x_0$, llegando a contradicción. Definimos

  $$\varphi(n) := \min\left\{m \in \mathbb{N} : x_m \in B\left(a_0, \frac{1}{n}\right)\right\}$$

  De la definición se deduce que $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)$ (el mínimo de un subconjunto es mayor que el del conjunto). Supongamos que φ es constante a partir de un punto. Entonces existiría $m \in \mathbb{N} : x_m \in B(a_0, \frac{1}{n}) \ \forall n \in \mathbb{N} \implies x_m = a_0$, pero esto es una contradicción. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} : \varphi(m) > \varphi(n)$. Luego, si definimos $B = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n+1) > \varphi(n)\}$ y σ como la única aplicación estrictamente creciente que lleva $\mathbb{N}$ en B, $\{x_{(\varphi\circ\sigma)(n)}\}$ es una sucesión parcial convergente a a_0, como queríamos.

□

3.1. Clasificación de conjuntos en $\mathbb{R}^N$

En esta sección, vamos a intentar definir una serie de tipos de conjuntos sobre los que luego trataremos de establecer ciertas propiedades

Definición 3.5 (Conjunto convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in A$ se tiene que el segmento de extremos x e y está incluido en A. En otras palabras:

$$A\, convexo \iff [x,y] = \{tx + (1-t)y : \ t \in [0,1]\} \subseteq A.$$

Definición 3.6 (Poligonalmente convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *poligonalmente convexo* si $\forall x, y \in A$ existe una poligonal que los une y no se sale de A. En otras palabras: $A\ poligonalmente\ convexo \iff \exists\{x = a_0, a_1, \ldots, a_k = y\} \subseteq A$ tal que:

$$\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

Definición 3.7 (Conjunto arco-conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *arco-conexo(conexo por arcos)* si $\forall x, y \in A$ existe un camino incluido en A que los une. En otras palabras, $A\ es\ conexo\ por\ arcos \iff \exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a,b]) \subseteq A.$$

Definición 3.8 (Conjunto no conexo). Decimos que un conjunto $A \in \mathbb{R}^N$ es *NO conexo* si existen $U,\ V$ abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Nota. La misma definición se aplica para un espacio topológico (X, τ).

Definición 3.9 (Conjunto conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice conexo si no es no conexo. Equivalentemente, $\forall\ U, V$ abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$, se tiene que forzosamente $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Proposición 3.5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arco-conexo. Entonces, A es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in A$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $x \leq y$. Sabemos que por ser A arco-conexo, $\exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a,b]) \subseteq A.$$

Como φ es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, aplicamos el **teorema del valor intermedio** en $\mathbb{R}$, y obtenemos que $\varphi([a,b])$ es un intervalo. Por ser un intervalo, verificará que $\forall \alpha, \beta \in \varphi([a,b])\ con\ \alpha \leq \beta,\ \ [\alpha, \beta] \subseteq \varphi([a,b])$.

Por tanto, como $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi([a,b])$, concluimos que:

$$[\varphi(a),\ \varphi(b)] = [x,y] \subseteq \varphi([a,b]) \subseteq A.$$

Así, hemos demostrado que $\forall x, y \in A\ \ [x,y] \subseteq A$, y por tanto, A es convexo. □

Proposición 3.6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ convexo. Entonces, A es arco-conexo.

Demostración.
Fijemos $x, y \in A$ arbitrarios, y construyamos la aplicación $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dada por:

$$\varphi(t) = (1-t)x + ty \quad \forall t \in [0,1]$$

Una primera observación es que $\varphi([0,1]) = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\} = [x,y] \subseteq A$ por ser A convexo. También se desprende de la definición de φ que $\varphi(0) = x$ y $\varphi(1) = y$.

Para comprobar que φ es continua, utilicemos la caracterización de la continuidad por sucesiones:

Sea $\{x_n\} \subseteq [0,1]\ con\ \{x_n\} \to a \in [0,1]$. Entonces, $\{\varphi(x_n)\} = \{(1-x_n)x + x_n y\}$. Apliquemos ahora propiedades de las sucesiones convergentes, y obtenemos que:

$$\{\varphi(x_n)\} \to (1-a)x + ay = \varphi(a).$$

Entonces, $\forall \{x_n\} \subseteq [0,1]\ con\ \{x_n\} \to a \Rightarrow \{\varphi(x_n)\} \to \varphi(a)$, por lo que φ es continua.

Así, queda probado que A es conexo por arcos. □

Proposición 3.7. Sea $A \in \mathbb{R}^N$ arco-conexo. Entonces, A es conexo.

Proposición 3.8. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y conexo por arcos. Entonces, A es poligonalmente convexo.

3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida.

Definición 3.10 (Continuidad en espacios topológicos). Sean (X,τ_x), (Y,τ_y) dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua } \Longleftrightarrow f^{-1}(B) \in \tau_x \quad \forall B \in \tau_y.$$

Definición 3.11 (Topología inducida). Sea (X,τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, $\tau_A = \{B \cap A : B \in \tau\}$ es la *topología inducida en A*.

Proposición 3.9 (Caracterización de abiertos en topología inducida). Sea (X,τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Si (A,τ_A) es el espacio topológico inducido en A, entonces:

$$B' \in \tau_A \Longleftrightarrow \exists B \in \tau : B' = B \cap A.$$

Proposición 3.10. Sea (X,τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, A es no conexo si, y solo si, existen U,V **abiertos en (A,τ_A)** tales que:

$$U \neq \emptyset \neq V; \quad A \subseteq U \cup V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

Definición 3.12 (Continuidad en topología inducida). Sean (X,τ_x), (Y,τ_y) dos espacios topológicos, $A \subseteq X$, y $f : A \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua } \Longleftrightarrow f \text{ es continua en } (A,\tau_A).$$

3.3. Teoremas sobre funciones continuas en $\mathbb{R}^N$

A continuación, daremos ciertos de los teoremas más usados en el análisis elemental. Se revisitarán los teoremas dados con anterioridad para funciones continuas en $\mathbb{R}$ y se enunciarán y probarán sus versiones correspondientes en $\mathbb{R}^n$ o en espacios métricos en general.

Teorema 3.2 (Weierstrass). Sea (X,d) un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Entonces, $\exists x_1, x_2 \in A : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \ \forall x \in A$. En otras palabras, la función f alcanza su mínimo y su máximo.

Teorema 3.3 (Weierstrass generalizado). Sean (X,d), (Y,d) espacios métricos, $\emptyset \neq K \subseteq X$ compacto, y $f : K \longrightarrow Y$ continua. Entonces, $f(K)$ es compacto.

Demostración. Sea $\{y_n\} \subseteq f(K)$ una sucesión cualquiera en $f(K)$. Para demostrar que $f(K)$ es compacto debemos demostrar que $\{y_n\}$ tiene una subsucesión convergente a algún punto de $f(K)$. Sea $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in K$, por ser A compacto $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente a un $a \in K$. Por lo tanto, $\{f(x_{\sigma(n)})\}$ convergente a un $f(a) \in f(K)$, siendo $\{f(x_{\sigma(n)})\}$ una subsucesión de

$\{f(x_n)\}$, es decir, de $\{y_n\}$. $\square$

Teorema 3.4 (Valor Intermedio). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ arco conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es arco-conexo en $\mathbb{R}^M$.

Demostración. Sean $X, Y \in f(A)$. Entonces, $\exists x, y \in A : X = f(x),\ Y = f(y)$. Como A es arco-conexo, $\exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua tal que $\varphi(a) = x,\ \varphi(b) = y,\ \varphi([a,b]) \subseteq A$.

Ahora, definimos $\psi := f \circ \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^M$, que es continua por ser composición de funciones continuas. Entonces, se verifica que:

$$\psi(a) = f(\varphi(a)) = f(x) = X; \quad \psi(b) = f(\varphi(b)) = f(y) = Y; \quad \psi([a,b]) = f(\varphi([a,b])) \subseteq f(A).$$

Por tanto, queda probado que $f(A)$ es arco-conexo en $\mathbb{R}^M$. $\square$

Teorema 3.5 (Valor Intermedio revisitado). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es conexo en $\mathbb{R}^M$.

El siguiente resultado, tiene mucha relevancia en el estudio de la continuidad uniforme de funciones en un espacio métrico como es $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.6 (Heine-Cantor). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Entonces f es uniformemente continua en A.

Demostración. f es continua en A $\Longrightarrow$ f es continua en $a \ \ \forall a \in A$. Ahora, sea $\epsilon > 0$ fijo.

$$\forall a \in A \quad \exists \delta = \delta_a > 0 \ \forall x \in A \ d(x,a) < \delta_a \Longrightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$$

Tomamos un recubrimiento abierto de A, y como A es compacto, encontramos un subrecubrimiento finito.

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\delta_a}{2}) \Longrightarrow \exists a_1, \ldots, a_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right)$$

Por esta última inclusión:

$$\forall x \in A \quad \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right) \cap A \Longrightarrow f(x) \in B(f(a_i), \epsilon)$$

Sean $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{a_i}}{2} : i \in \{1, \ldots, n\}\right\} > 0$ y $y \in A : d(x,y) < \delta < \delta_{a_i}$ para un $x \in A$ fijo. Tomamos el a_i proporcionado por la proposición anterior para x.

$$d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < \delta_{a_i} \Longrightarrow y \in B(a_i, \delta_{a_i}) \Longrightarrow f(y) \in B(f(a_i), \epsilon)$$

Finalmente,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(y)) < \epsilon$$

Para cualquier ϵ para el que se desee que se verifique la condición de la continuidad uniforme, basta tomar $\frac{\epsilon}{2}$ en la continuidad. $\square$

Demostración alternativa. La condición para la continuidad uniforme es la siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in A : d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Vamos a proceder por reducción al absurdo, para lo cual negamos esta condición:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in A : d(x, y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Tomamos este ϵ_0, lo que nos da, para cada $\delta > 0$, un par de puntos x e y que cumplen la propiedad expresada arriba. Tomamos $\delta = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Esto nos da dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \wedge d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0$$

Por ser A compacto, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos da dos sucesiones parciales $\{x_{n_k}\}$ a x_0 e $\{y_{n_k}\}$ a y_0. Por tanto:

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \wedge d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \epsilon_0$$

Sin embargo, $\{x_{n_k}\}$ e $\{y_{n_k}\}$ convergen al mismo punto (por converger su distancia a cero), y como f es continua, esta proposición no puede ser verdadera. Hemos llegado por tanto a una contradicción, luego f debe ser uniformemente continua. $\square$

4. Límite funcional en $\mathbb{R}^N$.

Definición 4.1 (Límite funcional). Sean $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $a \in A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces f tiene límite l en $x = a$, y se denota $\lim_{x \to a} f(x)$ si:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left.\begin{matrix} 0 < d(x, a) < \delta \\ x \in A \end{matrix}\right\} \implies d(f(x), l) < \epsilon$$

Proposición 4.1 (Caracterización punto de acumulación). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Consideremos un punto $x \in X$. Son equivalentes:

(i) x es punto de acumulación de A.
(ii) $\exists \{a_n\} \subseteq A - \{x\}$ tal que $\{a_n\} \to x$.
(iii) $\forall \epsilon > 0 \ B(x, \epsilon) \cap (A - \{x\})$ es un conjunto infinito.

5. Funciones derivables en $\mathbb{R}^N$.

5.1. Concepto de función derivable.

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^N$. Partimos de la siguiente observación:

$$\forall x_0 \in A \quad \exists \delta > 0 : B(x_0,\delta) \subset A \implies \forall v \in \mathbb{R}^N \quad \exists \epsilon > 0 : [\ t \in (-\epsilon,\epsilon) \implies x_0 + tv \in B(x_0,\delta)\ ]$$

En particular, si $|v| = 1 \implies \epsilon = \delta$.

Definición 5.1 (Función derivable). Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ y $x_0 \in A$. Se dice que f es derivable en x_0, según Fréchet, si

$$\exists L \in Lin(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M) : \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0$$

Notamos $Df(x_0) = L$.

Nota (1).

(*i*) El límite tiene sentido porque $x_0 \in A$.
(*ii*) El límite anterior es equivalente a $\lim_{y\to 0} \frac{|f(x_0+y)-f(x_0)-L(y)|}{|y|}$.

Nota (2). A es abierto $\implies L$ (si existe) es única. De aquí se exige que A sea un abierto.

Demostración (Nota 2). Suponemos que $\exists L_1, L_2 \in Lin(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$ tales que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L_1(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0 = \frac{|f(x) - f(x_0) - L_2(x-x_0)|}{|x-x_0|}$$

Entonces, dado un $x \in A$:

$$\frac{|L_1(x-x_0) - L_2(x-x_0)|}{|x-x_0|} \leq \frac{|f(x) - f(x_0) - L_1(x-x_0)|}{|x-x_0|} + \frac{|f(x) - f(x_0) - L_2(x-x_0)|}{|x-x_0|}$$

$$\implies \lim_{x\to x_0} \frac{|(L_1-L_2)(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0 \implies \lim_{x\to x_0} |(L_1-L_2)(x-x_0)| = 0$$

Como A es abierto, sea $y \in \mathbb{R}^N, y \neq 0 \implies x := x_0 + y \in B(x_0,\delta) \subset A$

$$\lim_{x\to x_0} (L_1-L_2)(x-x_0) = 0 = \lim_{y\to 0} (L_1-L_2)(y) \implies L_1 = L_2$$

□

Proposición 5.1. En los mismos términos: si f es derivable en $x_0 \implies f$ es continua en x_0.

Demostración. Para probar esta proposición, hay que probar que $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \underbrace{\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)-L(x-x_0))}_{=0\ (f\ \text{derivable})} + \underbrace{\lim_{x-x_0} L(x-x_0)}_{=0\ (L\ \text{lineal}\ \Longrightarrow\ \text{continua})} = 0$$

□

Definición 5.2 (Derivada direccional). Sea $v\in\mathbb{R}^N$, con $|v|=1$. f es derivable en x_0 en la dirección v si:

$$\exists \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = D_v f(x_0) \iff$$

$\iff f_1, f_2, \cdots f_m$ derivable direccionalmente en x_0 en la dirección v. $\iff$

$$\iff D_v f(x_0) = (D_v f_1(x_0), \cdots, D_v f_m(x_0))$$

Proposición 5.2. Sea f derivable en $x_0 \Longrightarrow f$ derivable a lo largo de la dirección v y $D_v f(x_0) = Df(x_0)(v)$

Demostración. f derivable en x_0. Tomo $y=tv$. Podemos ver entonces:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)-Df(x_0)(tv)}{t} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0}\left|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - Df(x_0)(\frac{tv}{t})\right| \Longrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - Df(x_0)(v)$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = Df(x_0)(v)$$

Hemos probado que $\exists D_v f(x_0)$ □

6. Matriz asociada a $Df(x_0)$.

Si $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^M$, con $\emptyset \neq B \in \mathbb{R}^N$, la matriz asociada a $Df(x_0)$ es una matriz de orden $M\times N$, (que notaremos A en lo sucesivo), como ya sabemos, por ser una aplicación lineal. Ahora, nuestro siguiente objetivo es encontrar esa matriz. Observemos cómo podemos obtenerla por filas, aplicándole los vectores de la base canónica:

$$e_i = (0,\ldots,\overset{i)}{1},\ldots,0) \Longrightarrow Df(x_0)(e_i) = D_{e_i} f(x_0) = Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi}\end{pmatrix}$$

Tras esta observación, vamos a caracterizar cada elemento a_{ji}:

$$D_{e_i} f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f_1(x_0+(0,\dots,\overset{i)}{t},\dots,0)-f_1(x_0)}{t}, \dots, \frac{f_M(x_0+(0,\dots,\overset{i)}{t},\dots,0)-f_M(x_0)}{t} \right) =$$

$$\left(\lim_{t\to 0} \frac{f_1(x_0+(0,\dots,\overset{i)}{t},\dots,0)-f_1(x_0)}{t}, \dots, \lim_{t\to 0} \frac{f_M(x_0+(0,\dots,\overset{i)}{t},\dots,0)-f_M(x_0)}{t} \right) =$$

$$\left(D_{e_i} f_1(x_0,\dots,D_{e_i} f_M(x_0))\right) = \left(\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_M(x_0)}{\partial x_i} \right) \implies a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

Por tanto, A queda de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M(x_0)}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_M(x_0)}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$

Deducimos que:

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} := D_v f(x_0) \iff f_1,\dots,f_M \text{ son derivables direc. en } x_0 \text{ en la dir. } v.$$

Además, $D_v f(x_0) = (D_v f_1(x_0),\dots,D_v f_M(x_0))$.

7. FALTA MUCHO CONTENIDO

Proposición 7.1. Sea L una aplicación lineal. Entonces L es derivable y $DL(a) = L$

Demostración. Tomaremos:

$$lim_{x\to a} \frac{||Lx - La - M(x-a)||}{||x-a||} = 0$$

Entonces, tenemos que encontrar : $M : R^n \to R^m$ lineal para que sea derivable. Entonces, podemos tomar $L = M$ y como L es lineal, es trivial que es verdad (por la linealidad de L) y esto implica que L es derivable y $DL(a) = M = L$. □

Proposición 7.2. Toda aplicación lineal es Lipschitziana. Si es Lipschitziana entonces es continua.

Demostración. Como L es lineal, entonces L es derivable y por tanto continua. Entonces:

$$||Lx|| \leq M||x|| \quad \forall x \in R^n$$

$$||Lx - Ly|| = ||L(x-y)|| \leq M||x-y|| \implies L \; es \; Lipschitziana$$

□

Proposición 7.3. Si $L : R^n \to R^m$ lineal $\implies$ L es continua y $\exists M \geq 0 : ||Lx||_{R^m} \leq M||x||_{R^n} \quad \forall x \in R^n$

Demostración. Si tomamos $L|_{S(0,1)}$ y vemos que es acotada, entonces podríamos definir:

$$M = sup\{Lx : x \in S(0,1)\} \implies ||Lx|| \leq M \quad \forall ||x|| = 1 \implies ||L(x)|| = || \, ||x|| \, L(\frac{x}{||x||})||$$

donde hemos usado que L es lineal. Y esto implica:

$$|| \, ||x|| \, ||L(\frac{x}{||x||})|||| = ||x|| \, ||L(\frac{x}{||x||})|| \leq M||x|| \quad \forall x \in R^n - \{0\}$$

□

Proposición 7.4. Si $\left.\begin{matrix} B : R^N x R^n \to R \\ Bilineal \end{matrix}\right\} B \; es \; continua.$

Es más, $\exists M \geq 0 : |B(x,y)| \leq M||x||||y|| \quad \forall x, y \in R^n$

Se deja como ejercicio la demostración. Se debe usar que :

$$B(x,y) = ||x|| \, ||y|| B(\frac{x}{||x||}, \frac{y}{||y||})$$

Y tomar el $M = sup\{|B(x,y) : ||x|| = 1 \; y \; ||y|| = 1\}$ y para ello necesito ver que $S_{R^n}(0,1)xS_{R^n}(0,1)\{(x,y) \in R^n x R^n : ||x|| = 1 \; y \; ||y|| = 1\}$ es compacto.

Quién sería en este caso el candidato a $DB(x_0, y_0)(u,v) = D(x_0, v) + B(u, y_0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|B(x,y) - B(x_0,y_0) - B(x_0, y-y_0) + B(x-x_0, y_0)}{||(x-x_0, y-y_0)||}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|B(x,y) - B(x_0,y_0) - B(x_0,y) + B(x_0,y_0) - B(x,y_0) + B(x_0,y_0)|}{||(x-x_0, y-y_0)||}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|B(x-x_0,y) - B(x-x_0,y_0)|}{||(x-x_0, y-y_0)||} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|B(x-x_0, y-y_0)|}{||(x-x_0, y-y_0)||}$$

Y ahora, como $(x,y) \to (x_0,y_0) \implies (x-x_0, y-y_0) \to (0,0)$ y ahora si ponemos $(x-x_0, y-y_0) = (u,v)$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{|B(u,v)|}{||(u,v)||} = 0$$

Estudiando ese límite por cualquier método, nos saldría 0. Luego, tenemos que intentarlo pasando el problema a coordenadas polares o con algún otro método.

Ejemplo 7.1. Sea $f : R^2 \to R$ bilineal con $f(x,y) = xy$.

Entonces, en un punto (x_0, y_0):

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|x(x,y)-f(x_0,y_0)-L(x-x_0,y-y_0)|}{||(x-x_0,y-y_0||} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|xy-x_0y_0-L(x-x_0,y-y_0)}{||(x-x_0,y-y_0||}$$

Pero, ¿cuál es esa L?. Si tomáramos $L(x-x_0,y-y_0) = y_0(x-x0)-x_0(y-y_0)$ en el numerador nos quedaría $|xy-x_0y_0-y_0(x-x0)+x_0(y-y_0)| = |xy-x_0y_0-y_0x-x_0y_0-x_0y+x_0y_0| = |(x-x_0)(y-y_0)|$. Y tenemos en el límite que:

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|(x-x_0)(y-y_0)|}{||(x-x_0,y-y_0))||} = 0$$

Así, la derivada $Df(x_0,y_0)(u,v) = x_0v + y_0u$

Proposición 7.5. Sea $g,f: R^n \to R^m$ derivable en $a \in R^n$. El producto escalar es derivable.

Demostración. Construyo $h: R^n \to R$ con $h(x) =< f(x), g(x) >$. Probar que es derivable:
$h = Bo(f,g)$ con $B(x,y) =< x,y > \quad \forall x,y \in R^n$
La derivada de la h es:

$$Dh(x_0)(x) = [DB(f(x_0)g(x_0)oD(f,g)(x_0)](x) =$$
$$DB(f(x_0),g(x_0))[D(f,g)(x_0)(x)] = DB(f(x_0),g(x_0)) * [Jacob(f)](x) =$$
$$= B(f(x_0),[Jacob(g)(x)]) + B([Jacob(f)(x),g(x_0)] =$$
$$= B(f(x_0),Dg(x_0)(x)) + B(Df(x_0)(x),g(x_0)) =$$
$$< f(x_0),Dg(x_0)(x) > + < Df(x_0)(x),g(x_0) >$$

□

Nota. La aplicación $R^n \to R$ que se lleva $y \to y^t \mathscr{H}f(c)y$ Forma cuadrática asociada a la aplicación bilineal $B: R^nxR^n \to R$ tal que $(y,z) \to y^t\mathscr{H}f(c)z$ la matriz Hessiana $\mathscr{H}f(c)$ es simétrica. Se puede pruede probar que:

Lema de Schwarz Sea $A \subset R^n$ no vacío, y f una función de clase $\varphi^2(A)$ $\forall i,j = 1,...,n$ con $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$$

Demostración. Vamos a hacer esta prueba para $N = 2$.
Si $(x,y) \in A \implies \exists h_0\ ,\ k_0 > 0: \left.\begin{matrix} 0 < h < h_0 \\ 0 < k < k_0 \end{matrix}\right\} \implies (x,y),(x+h,y),(x,y+k),(x+h,y+k) \in A$
Podemos escribir:

$$S_{k,h}(x) = [f(x+h,y+k) - f(x,y+k)] - [f(x+h,y) - f(x,y)]$$

Como f es de clase 2, es de clase 1 y podemos usar el TVM para evaluar cuánto valen las diferencias que hemos expresado en $S_{k,h}(x)$. Esa diferencia se puede estimar como la derivada en el segmento aplicado al vector diferencia de esos dos puntos.

$$TVM \implies Df(c)[(x+h-x,(y+k)-(y-k)]-Df(d)[(x+h-x,y-y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(c)h-\frac{\partial f}{\partial x}(d)h$$

Y podemos volver a usar el TVM pues sigue siendo de clase 1.

Por otro lado, vemos que:

$$S_{k,h}(x) = [f(x+h,y+k)-f(x+h,y)]-[f(x,y+k)-f(x,y)]$$

Usando de nuevo el TVM obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(e)k-\frac{\partial f}{\partial y}(g)k$$

El teorema sin embargo no nos dice dónde están esos puntos y (por estar en R^2) tenemos que buscar que los puntos que nos de el TVM estén alineados.

Supongamos que c,d están siempre en la misma vertical. Entonces, usando el TVM para $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(P)kh$$

Y supongamos que e,g están en la misma vertical. Usando el TVM para $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(Q)hk$$

Como ambos eran iguales, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(P)kh = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(Q)hk \implies \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(P) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(Q)$$

Si lo que hacemos es que $h \to 0 \implies x+h \to x$ y lo mismo con la k y así $P,Q \to (x,y)$ y de esta forma:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(P) \to \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(Q) \to \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Y así, como eran iguales y tienden a lo mismo, tenemos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Pero habíamos supuesto que c y d están siempre en la misma vertical. Ahora, lo que tendríamos que hacer es intentar haber usado sólamente una vez el TVM. Par ello, definimos:

$$F_h(k) = f(x+h,y+k)-f(x,y+k)$$

Con esta definición, tenemos $F_h(0) = f(x+h, y) - f(x, y)$ y ahora si hacemos:

$S_{k,h}(x) = [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] - [f(x+h, y) - f(x, y) = F_h(k) - F_h(0)$

Vamos a ver primero que

$$F_h'(K) = [\frac{\partial f}{\partial x}(x+h, y+K)*0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+K)*1] -$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+K)*0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+K)*1] = \frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+K) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+K)$$

Luego: **NO PUEDO COPIAR MÁS, COMPLETAR**

□

Demostración para el caso general. Tenemos $f : A \to R$ y $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$.

Definimos $g(s, t) = f(x_1, ..., x_{i-i}, s, ..., x_{j-1}, t, ..., x_n)$ Si ahora hacemos

$$\frac{\partial g}{\partial s \partial t}(x_i, x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Y también:

$$\frac{\partial g}{\partial t \partial s}(x_i, x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Y como lo teníamos probado para $N = 2$, entonces ya tenemos que las dos son iguales pues g es una función de $N = 2$ variables.

□

Nota (Observación 1). . Si tenemos $f \in \varphi^k$, podríamos hacer:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1})) = \frac{\partial}{\partial x_2 \partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1})$$

Si desarrolláramos:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}$$

Se podría ver que se llega a lo mismo e incluso podemos notarlo como:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}$$

Nota. Podemos escribir:

$$D^{(\alpha_1, ..., \alpha_n)} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_k^{\alpha_n}}$$

Con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathcal{N} \cup \{0\}$. A esto se le llama multiíndice.

Nota. Si $v \in R^n$ con $|v| = 1$ y $D_v f(a) = Df(a)(v)$. Así:

$$D_{\frac{w}{|w|}} f(a) = (1/|w|) * Df(a)(w)$$

$$|w| D_{\frac{w}{|w|}} f(a) = Df(a)(w)$$

Teorema 7.1 (Teorema de Taylor(Orden 2)). $A \subset R^n$ convexo y abierto, $x_0 \in A$ y $f : A \to R \in \varphi^2(A)$

$\forall x \in A : [x, x_0] \subset A \implies f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0) + \mathscr{H}f(x)(x - x_0)$ con $c \in [x, x_0]$ siendo este el segmento que une $x\ con\ x_0$

Teorema 7.2 (Teorema de Taylor de orden n). Sea $\emptyset \neq A \subset R^n$ abierto, $a \in A$ y $f \in \varphi^{n+1}(A)$

Entonces $\forall x \in A$: el segmento que une x con a está contenido en A , se tiene que $\exists c$ en el segmento que une x con a tal que:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{D^\alpha f(c)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

Teorema 7.3. Sea $\neq A \subset R^n\ abierto$, $x_0 \in A$ con $f : A \to R$ de clase C^2

1. f tiene un maximo relativo en $x_0 \implies \begin{cases} Df(x_0) = 0 \iff Jf(x_0) = 0 \\ \mathscr{H}f(x_0)\ es\ semidefinida\ negativa \end{cases}$
2. $\left.\begin{array}{r} Df(x_0) = 0 \\ \mathscr{H}f(x_0)\ es\ definida\ negativa \end{array}\right\} \implies$ f tiene un máximo relativo

Demostración. Probaremos 1 y 2:

1. Como f presenta un máximo relativo en $x_0 \in A = abierto$ entonces $\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A$ y $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0, r) \subset A$. Por ello, ya sabemos que $Df(x_0) = 0$. Entonces, aplicamos Taylor $\forall x \in B(x_0, r)$ segmento que une x con x_0 está contenido en $B(x_0, r) \subset A \implies$

$$0 \geq f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^t \mathscr{H}f(c)(x - x_0)$$

Por tanto, podemos ver que

$$0 \geq (x - x_0)^t \mathscr{H}f(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

Pues como la matriz hessiana está llena de las derivadas segundas en c, cuando $c \to x_0$ entonces $\mathscr{H}f(c) \to \mathscr{H}f(x_0)$.

$$0 \geq f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^t \mathscr{H}f(c)(x - x_0) \iff \mathscr{H}f(c)\,semidefinida\,negativa$$

$$\iff y^t \mathscr{H}f(c)\, y \leq 0 \quad \forall y \in B(0, r)$$

Y como hemos dicho que cuando $c \to x_0$ entonces $\mathscr{H}f(c) \to \mathscr{H}f(x_0)$ entonces $0 \geq z^t \mathscr{H}f(x_0) z \quad \forall z \in R^n \implies 0 \geq <^t \mathscr{H}f(x_0) < \quad \forall z \in R^n$ y así la matriz Hessiana es semidefinida negativa.
2. Como f presenta un máximo relativo en $x_0 \in A = abierto$ entonces $\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A$ y $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0, r) \subset A$. Por ello, ya sabemos

que $Df(x_0) = 0$.Usando el teorema de Taylor, obtenemos que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2!}(x - x_0)^t \mathcal{H}f(c)(x - x_0)$$

La hipótesis que tenemos ahora es:

$$z^t \mathcal{H}f(x_0)z < 0 \quad \forall z \in R^n - \{0\}$$

Ahora, si el límite es menor estricto que cero implica que los números que se aproximen tienen que ser estrictamente menor que cero, por eso es definida negativa.
Por tanto, tenemos que demostrar la implicación:

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{H}f(x_0)\ definida\ negativa \\ \mathcal{H}f(c) \to \mathcal{H}f(x_0)\ si(c \to x_0) \end{array}\right\} \implies \mathcal{H}f(c)\ definida\ negativa$$

Y teniendo eso, podemos ver que

$$z^t \mathcal{H}f(c) < 0 \quad \forall z \in R^n - \{0\} \iff \forall x \in B(x_0, r) - \{x_0\}$$

Y entonces:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)\mathcal{H}f(c)(x - x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0) \forall x \in B(x_0, r)$$

□

Definición 7.1 (Gradiente). Sea $A \subset R^n$ abierto y $f : A \to R$ derivable, llamaremos:

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \in R^n$$

Además, a

$$\nabla f : A \to R^n$$

Se le llama campo de vectores.

Propeiedad de ∇f.
Sea $a \in R$ y $S = \{x \in A : f(x) = a\}$. Entonces, $\forall x_0 \in S \quad \nabla f(x_0) \perp S$

Demostración. Sea $c : I \to R$ con $0 \in I$ una función derivable y $c(I) \subset S$ con $c(0) = x_0$. Ahora,

$$c(t) \in S \quad \forall t \in I \iff f \circ c(t) = f(c(t) = c \implies 0 = (f \circ c)'(t) \implies 0 = Df(c(t)) * c'(t)$$

Donde en el último paso hemos usado la regla de la cadena y eso es igual a:

$$Jf(c(t)) * c'(t) = \nabla f(c(t)) * c'(t)$$

Y dando a t el valor 0

$$\implies \nabla f(x_0) * c'(0) = 0$$

Lo que implica la perpendicularidad del gradiente y S. □

Definición 7.2. Sea $A \subset R^n$ abierto, no vacío y $a \in A$. Sea también $f \in \mathscr{C}^1(A, \mathbb{R})$. Tomamos las restricciones: $g_1, \ldots, g_k \in \mathscr{C}^1(A, \mathscr{R})$. Llamaremos:

$$S = \{x \in A : g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0\}$$

Definición 7.3 (Mínimo relativo condicionado). Si a es un punto de S, diremos que f presenta un mínimo relativo en A condicionado por las restricciones $g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0$ si y solamente si :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap B(a, \varepsilon_0) \cap S$$

Teorema 7.4 (de los Multiplicadores de Lagrange). En las condiciones que hemos expuesto, las dos definiciones dadas que suponemos ciertas:

Sea $a \in S$ en el que presenta un mínimo relativo condicionado a S, entonces $\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_k \in R$:

(*i*) $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$ y $\lambda_0 \geq 0$
(*ii*) $\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, N$

FALTARLA UN HUECO

Demostración. $\exists \varepsilon_0 : B(a, \varepsilon_0) \subset A$y $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in B(a, \varepsilon) \cap S$. Vamos a hacer la prueba en dos pasos:

1. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \exists M > 0 : f(x) + |x-a|^2 + M \sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2 > f(a) \quad \forall |x-a| = \varepsilon$,
   Esta prueba se hará por contradicción. Es decir, probando:
   $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall M > 0 \ \ \exists x \in A : |x-a| = \varepsilon$ y $f(x) + |x-a|^2 + M \sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2 \leq f(a) \quad \forall |x-a| = \varepsilon$.
   Ahora, si tomamos $M = n$, $\exists x_n \in A$:

$$f(x_n) + |x_n - a|^2 + M \sum_{i=1}^{k} g_i(x_n)^2 \leq f(a) \quad \forall |x-a| = \varepsilon$$

   Y como $\{x_n\}$ está acotada, existirá $\sigma : N \to N : \{x_{\sigma(n)}\} \to x^*$, por lo que

$$|x^* - a| = \lim_{n \to \infty} |x_{\sigma(n)} - a| = \varepsilon$$

   Tenemos , tras varias transformaciones , que:

$$\frac{f(x_{\sigma(n)})}{-\sigma(n)} + \frac{\varepsilon^2}{-\sigma(n)} - \frac{f(a)}{-\sigma(n)} \geq \sum_{i=1}^{k} g_i(x_{\sigma(n)})^2$$

   Pero ahora, los dos segundos términos de la izquierda del $\geq$ convergen a 0 si tomamos límites cuando $n \to \infty$ nos queda que: $0 \geq \sum_i g_i(x^*)^2$ y por ello $x^* \in S$
   De esta forma, hemos obtenido que $f(x^*) \geq f(a)$ y que

FALTAN COSAS QUE NO HE COPIADO
Hemos encontrado por ello $\forall\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ un $M > 0 : f(x) + |x-a|^2 + M\sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2 > f(a) \quad \forall |x-a| = \varepsilon$

2. $\forall\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ $\exists x^\epsilon$ (x depende de epsilon, no es x elevado a epsilon) verificando $|x^\epsilon - a| < \epsilon$, $\exists(\lambda_0^\epsilon, ..., \lambda_k^\epsilon) \in \mathbb{R}^{k+1} : |(\lambda_0^\epsilon, ..., \lambda_k^\epsilon)| = 1$ y

$$\lambda_0^\epsilon\{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^\epsilon) + 2(x_j^\epsilon - a_j\} + \sum_i^k \lambda_i^\epsilon \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^\epsilon) = 0$$

Utilizando el paso 1, definiendo:

$$F(x) := f(x) + |x-a|^2 + M\sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2$$

Por el teorema de Weierstrass, existe el mínimo de $F(x)$ en $\overline{B}(a,\epsilon)$. Es equivalente a decir:

$$\exists x^\epsilon \in \overline{B}(x,\epsilon) : \quad F(x^\epsilon) = MinF$$

Y además, por el paso 1:

$$MinF \le F(A) \le F|_{\partial B(a,\epsilon)} \implies x^\epsilon \in B(a,\epsilon)$$

Dicho de otra forma, x^ϵ es un mínimo relativo de F en $B(a,\epsilon)$

$$\implies \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^\epsilon) = 0 \;\; \forall j = 1, ..., N$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^\epsilon) + 2(x_j^\epsilon - a_j) + M\sum_i^k 2g_i(x^\epsilon) * \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^\epsilon) = 0$$

Esa es la derivada de F. Ahora, si dividiéramos esa derivada por:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sum_i^k 4M^2 g_i(x^\epsilon)^2}}$$

Lo haríamos de módulo 1.

□

Definición. Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado, y sea $G : E \longrightarrow E$. Decimos que G es una *contracción* si es Lipschitziana con constante de Lipschitz menor que 1, es decir, si $\exists c \in (0,1) : \; ||G(x) - G(y)|| \; \le c||x-y|| \;\; \forall x, y \in E$.

Teorema (del punto fijo de Banach). Sea E un espacio de Banach (i.e, un espacio normado y completo), y sea $G : E \longrightarrow E$ una contracción. Entonces, G tiene un único punto fijo, esto es, $\exists!\; x_0 \in E \; tal \; que \; x_0 =$ G(x_0). Además, se verifica lo siguiente:

(i) $\forall y \in E$, si defino inductivamente $y_1 = y$, $y_n = G(y_{n-1})$ $\forall n > 1$, entonces $\{y_n\} \to x_0$.

(ii) $\forall y \in E$ $\quad ||y - x_o|| \leq \dfrac{||y - G(y)||}{1-c}$

Demostración.

Probemos primero (i), y la existencia del punto fijo.

Por simplicidad, trabajaremos en un espacio métrico. La primera observación que hacemos es la siguiente: dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y usando que G es una contracción, se tiene que

$$d(y_{n+1}, y_n) = d(G(y_n), G(y_{n-1})) \leq c \cdot d(y_n, y_{n-1}) \leq \cdots \leq c^{n-1} \cdot d(y_2, y_1) \qquad (*)$$

Entonces, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, podemos usar la desigualdad triangular, la desigualdad $(*)$, y la fórmula de la suma de los primeros términos de una progresión geométrica, para ver que:

$$0 < d(y_m, y_n) \leq d(y_m, y_{m-1}) + d(y_{m-1}, y_{m-2}) + \cdots + d(y_{n+1}, y_n) \leq \left(\sum_{k=n-1}^{m-2} c^k \right) \cdot d(y_2, y_1) =$$

$$= \frac{c^{n-1}(c^{m-n} - 1)}{c-1} \cdot d(y_2, y_1) = \left(\frac{c^{n-1}}{1-c} - \frac{c^{m-1}}{1-c} \right) \cdot d(y_2, y_1) \qquad (**)$$

Como sabemos también que para $c \in (0,1)$ la sucesion $\{\frac{c^{k-1}}{c-1}\} \to 0$, podemos decir que dicha sucesión es de Cauchy, pues E es completo. Ahora, dado $\epsilon > 0$, escogemos $\epsilon/(d(y_2, y_1) + 1) > 0$, y usando $(**)$ tenemos que:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; tal \; que \; m, n \geq n_0 \implies d(y_m, y_n) \leq \left| \frac{c^{n-1}}{1-c} - \frac{c^{m-1}}{1-c} \right| \cdot d(y_2, y_1) < \frac{\epsilon}{d(y_2, y_1) + 1} \cdot d(y_2, y_1) < \epsilon$$

Esto nos garantiza que $\{y_n\}$ es de Cauchy. Entonces, como el espacio E es completo, tenemos que $\{y_n\}$ es convergente, es decir, $\exists x_0 \in E : \; \{y_n\} \to x_0$. Veamos ahora que x_0 es necesariamente un punto fijo de G.

En efecto, por ser x_0 el límite de la sucesión, dado $\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(y_n, x_0) = = d(G(y_{n-1}), x_0) < \epsilon$, lo que implica que $\{G(y_n)\} \to x_0$. Pero $\{G(y_n)\} \to G(x_0)$ por ser G continua (es Lipschitziana). Por tanto, $x_0 = G(x_0)$ por unicidad del límite.

Veamos ahora la unicidad del punto fijo.

Supongamos que existe otro punto fijo $y_0 \in E$. Entonces, como G es una contracción, se tendría que:

$$d(G(y_0), G(x_0)) \leq c \cdot d(y_0, x_0) \Rightarrow d(y_0, x_0) \leq c \cdot d(y_0, x_0) \; con \; 0 < c < 1$$

Esto implica que $d(y_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$. Por tanto, si hay dos puntos fijos, han de ser necesariamente iguales.

Por último, probemos (ii).

Sea $y \in E$. Entonces, si tomamos $y_1 = y$ en la sucesión, se tiene que, usando $(**)$:

$$d(y,x_0) = \lim_{n\to\infty} d(y_1,y_n) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-2} c^k\right)\cdot d(y_1,y_2) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-2} c^k\right)\cdot d(y,G(y)) = \frac{d(y,G(y))}{1-c}$$

donde hemos usado la fórmula de la suma de los términos de una *serie geométrica* de razón $0 < c < 1$. □

8. Teorema de la función inversa e implícita

Teorema 8.1 (Teorema de la función inversa. Caso N=1). Sea $A \subset R$, $a \in A$ abierto y $f : A \to \mathbb{R}$. Supongamos que f es de clase 1 y $f'(a) \neq 0$.
Entonces, $\exists I$ un intervalo abierto con $I \subset A$ y $a \in I$, y $\exists J$ intervalo abierto con $J \subset \mathbb{R}$ con $f(a) \in J$ tal que $f|_I : I \to J$ es invertible si $g = (f|_U)^{-1} \implies g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Ahora, como podemos ver una relación:

$$Df(a) \equiv Jf(a) = (f'(a))$$

Por lo que, el determinante de $Jf(a) \neq 0$, es decir que $Df(a)$ es invertible

Teorema 8.2 (Teorema de la función inversa. Caso general.). Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $a \in A$ y $f : V \to \mathbb{R}^n$ de clase 1. Si $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible
$\implies \exists U \subset V$ abierto y $\exists W \subset \mathbb{R}^n$ abierto tales que $a \in U$, $f(a) \in W$ y $f|_U : U \to W$ es biyectiva, y por tanto existe la inversa de la función $g = (f|_U)^{-1} : W \to U$ es de clase 1 y:

$$Dg(f(a)) = (Df(a))^{-1}$$

Recordemos que decir que $Df(a)$ es invertible es lo mismo que decir que $det(Jf(a)) \neq 0)$ Y decir que $Dg(f(a)) = (Df(a))^{-1}$ es lo mismo que decir $Jg(f(a)) = (Jf(a))^{-1}$

Demostración. El caso complicado de la demostración estaría en el caso en el que $0 = a$ y $f(a) = 0$. Ahora, si pudiéramos demostrar que la derivada es la aplicación identidad, entonces podremos demostrarlo en general. Lo que vamos a probar es lo siguiente:

Teorema 8.3 (Caso particular). Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $0 = a \in A$,y $f : V \to \mathbb{R}^n$ de clase 1 con $f(0) = 0$. Si $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible
$\implies \exists U \subset V$ abierto y $\exists W \subset \mathbb{R}^n$ abierto tales que $0 \in U$, $0 \in W$ y $f|_U : U \to W$ es biyectiva, y por tanto existe la inversa de la función $g = (f|_U)^{-1} : W \to U$

es de clase 1 y:

$$Dg(0) = I$$

Demostración del caso particular del teorema.
Sea V un abierto de $\mathbb{R}^n$ con $0 \in V$. Como V es abierto, $2\delta > 0$ tal que $B(0,2\delta) \subset V$. Además, como f es de clase 1, su derivada es continua. Ahora, como $Df(0) = I$, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $B(0,2\delta) \subseteq V$ y $||Df(x) - I|| < \epsilon\ \forall x \in B(0,2\delta)$. Hay que recalcar que δ depende de ϵ.Vamos a suponer también que para epsilon más pequeños, el delta será también más pequeño. De hecho, vamos a escribir $\delta(\epsilon)$

Nota (1). Tomando ahora $r = 2\delta(\frac{1}{2}) \implies f$ es inyectiva en $B(0,r)$

Demostración de la afirmación 1.
Sean $x, y \in B(0,r)$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces, por el TVM, $\exists z \in B(0,r)$ tal que $f(x) - f(y) = Df(z)(x-y) \implies Df(z)(x-y) = 0$.
Es fácil ver que $||Df(z) - I|| < \frac{1}{2}$ pues $z \in B(0,r) = B(0,2\delta(\frac{1}{2})$
Ahora, si tomamos
$0 = (y-x) * Df(z)(y-x) = (y-x)[Df(z)(y-x) - I(y-x) + (y-x)] = (y-x)[(Df(z) - I)(y-x) + (y-x)] = ||y-x||^2 + (y-x)(Df(z) - I)(y-x)$
Y , como es una aplicación lineal, usamos que es Lipschitziana y nos queda que eso es mayor o igual que y por la desigualdad de Cauchy Schwarz
$||y-x||^2 + (y-x)(Df(z) - I)(y-x) \geq ||y-x||^2 - ||Df(z) - I||\ ||y-x||^2 \implies$ $||y-x|| = 0$ por lo que $x = y$, por lo que f es inyectiva.

□

Ahora, tenemos que probar que es sobreyectiva, habría ver si $\forall h \in W\ \ \exists x \in U = B(0,r):\ \ f(x) = h$. Para empezar, podemos escribir eso como $x + f(x) - x = h \implies x = h + (x - f(x) \implies x = h + r(x)$ siendo $r(x) = (x - f(x))$ y luego, llamaremos $G(x) = h + r(x)$, quedándonos $x = G(x)$. Así, $G : U \to \mathbb{R}^n$ con U abierto de $\mathbb{R}^n$ y así lo que tendríamos que encontrar es un $x \in U$ tal que $G(x) = x$, y si existe a ese x lo llamaremos punto fijo de G.

Ahora, por el teorema del punto fijo de Banach o teorema de la contracción
Lema. $\forall \epsilon \in (0,1/2)$ se tiene:

(i) $f(\overline{B(0,\delta(\epsilon))}) \supseteq B(0,\delta(\epsilon)/2)$

(ii)

$$\left.\begin{array}{r} h \in B(0,\delta(\epsilon)/2) \\ x \in \overline{B(0,\delta(\epsilon))}:\ f(x) = h \end{array}\right\} \implies ||x-h|| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}||h||$$

Demostración del lema. *(i)* Sea $h \in B(0,\delta(\epsilon)/2)$. Definimos $G(y) = y - f(y) + h$, con $G : \overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)} \to \mathbb{R}^n$.
Si x fijo $\in G \iff x = G(x) = x - f(x) + h \iff f(x) = h$. Definimos también $r(y) := y - f(y)$.
Ahora, vamos entonces a probar que G es una contracción para poder usar el teorema del punto fijo de Banach. Tenemos que:

$$DG(y) = I - Df(y) = Dr(y)$$

Y tenemos también que $||DG(y))|| \leq \epsilon \quad \forall y \in \overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)}$, luego si hacemos $G(y) - G(\overline{y})$, eso es:

$$||G(y) - G(\overline{y})|| \leq ||DG(z)||\ ||y - \bar{y}|| \leq \epsilon||y - \bar{y}||$$

Con $y, \bar{y} \in \overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)} \implies$ G es una contracción en $\overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)}$ Y como el teorema del punto fijo de Banach dice que la función G va de un espacio métrico en el mismo, tenemos que probar que $G(\overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)}) \subset \overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)}$.

Probamos esto, vemos que $G(0) = 0 - f(0) + h = h$, y ahora $\forall x \in \overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)} \quad ||G(x)|| \leq ||G(x) - G(0)|| + ||G(0)||$, y como es una contraccion, tenemos que eso es $\leq ||x|| + ||h|| < \epsilon\delta(\epsilon) + \frac{\delta(\epsilon)}{2} < \delta(\epsilon)$, lo que significa que $G(x) \in \overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)}$

Ahora, sí podemos usar el teorema del punto fijo de Banach, $\exists! x \in \overline{B(0,\delta(\epsilon)/2)}$: $G(x) = x \implies f(x) = h$, como queriamos probar

(*ii*) Deducimos que $||x - h|| \leq \frac{||h - G(x)||}{1-\epsilon} \frac{1}{1-\epsilon}||h - G(h)|| = \frac{1}{1-\epsilon}||-r(y)|| = \frac{1}{1-\epsilon}||r(h)||\frac{1}{1-\epsilon}||r(h) - r(0)|| \leq \frac{1}{1-\epsilon}\epsilon||h|| = \frac{1}{1-\epsilon}||h||$
Y queda así probado el lema

□

Ahora, para probar que la f es biyectiva que era lo que queríamos probar del teorema de la función inversa, tenemos que fijar un epsilon que será cualquier número entre 0 y 1/2, pues hemos obtenido un lema para ese rango de ϵ.

Consideramos el conjunto: $W = B(0,\delta(\epsilon)/2)$

Podemos ver que $\delta(\epsilon) < \delta(1/2) < 2\delta(1/2) = r$. Ahora, usando el primer apartado del lema obtenemos que:

$$f(\overline{B(0,\delta(\epsilon)})) \supseteq B(0,\delta(\epsilon)/2)$$

Y consideramos:

$$U = B(0,\delta(\epsilon)) \cap f^{-1}(W)$$

y, como f era inyectiva en la $B(0,r)$, si definimos: $f : U \to W$ es inyectiva porque es una restricción de la f inicial y es sobreyectiva por la definición de U.

Así, hemos probado que $f|_U : U \to W$ es biyectiva, lo segundo que queríamos probar.

Nos queda por último comprobar la derivabilidad de la función inversa. Habría que probar que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{||g(h) - g(0) - I(h)||}{||h||} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{||g(h) - h||}{||h||}$$

□

□

El teorema de la función inversa lo usaremos si tenemos las mismas ecuaciones que incógnitas. Si tenemos menos ecuaciones que incógnitas, usaremos el teorema de la función implícita.

Teorema 8.4 (Teorema de la función implícita). Sea $A \subset \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m$ abierto y no vacío. Sea $F : A \to \mathbb{R}^n$ una función de clase 1. Fijando un $(x_0, y_0) \in A$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Si:

$$det(\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial n_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0, y_0) \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix}) \neq 0$$

Entonces, existe U un entorno abierto de x_0 en $\mathbb{R}^n$ y también existe V un entorno abierto de y_0 en $\mathbb{R}^m$ tal que $UxV \subset A$ y $\forall y \in V \ \ \exists! x \in U : F(x, y) = 0$

Demostración. Lo demostraremos a partir del teorema de la función inversa.
Sea $f : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m$ definida por $f(x, y) = (F(x, y), y - y_0)$. □

Parte II.
Ejercicios

9. Topología de un espacio métrico.

Ejercicio 9.1. Dado el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, ¿es abierto?

Demostración. Tenemos que comprobar si A es abierto, es decir, si es cierto que
$\forall a \in A\ \exists s > 0\ tal\ que\ B(a, s) \subset A$. Para ello, fijo $y \in \mathbb{R}$ y escojo $x_o = (1, y) \in A$. Además, tomo $s > 0$ cualquiera. Veamos que hay puntos $z \in B(x_o, s)$ que no pertenecen a A.

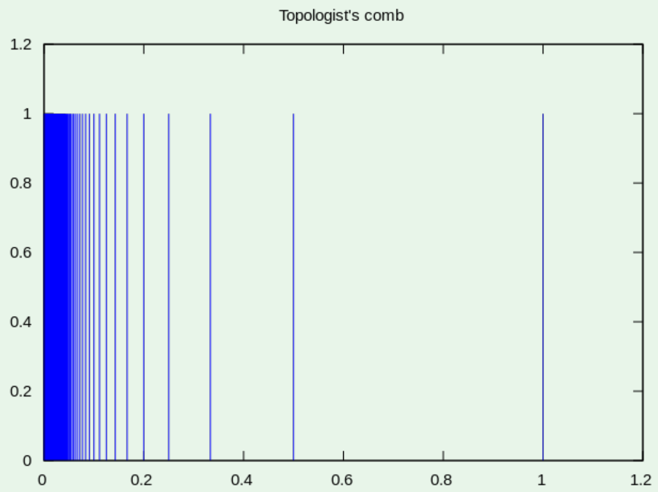
Sea $z = (1 + \frac{s}{2}, y)$. Entonces, se tiene que $d(z, x_o) = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 0} = \frac{s}{2} < s$, y por tanto $z \in B(x_o, s)$.

Claramente $z \notin A$, pues $1 + \frac{s}{2} > 1$. Así, concluimos que z es un punto de $B(x_o, s)$ que no pertenece a A, por lo que $B(x_o, s) \nsubseteq A$, y A no es abierto. □

10. Conexión.

Ejercicio 10.1. Dado el conjunto *peine* de la siguiente forma, probar que es conexo:

$$P = (\{0\} \times (0, 1]) \cup ((0, 1] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times (0, 1))$$



Demostración. Para la demostración vamos a definir el siguiente conjunto:

$$S = ((0,1] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times (0,1))$$

Es decir, el mismo conjunto P quitandole el eje y. Siendo $\bar{S} = P \cup (0,0)$. De esta forma tenemos:

$$S \subset P \subset \bar{S}$$

Para demostrar este ejercicio utilizaremos la siguiente proposición:

Proposición 10.1. Sea A un conjunto conexo, y B tal que $A \subset B \subset \bar{A} \implies B$ es conexo.

Demostración. Para la demostración probaremos su contrarecíproco, consistente en: B no es conexo $\implies$ A no es conexo.

B no es conexo $\implies \exists O, O'$ abiertos : $\begin{cases} B \subset O \cup O' \\ O \cap B \cap O' = \emptyset \\ O \cap B \neq \emptyset \neq O' \cap B \end{cases}$

Debemos probar que los 3 resultados se cumplen para A.

1. $B \subset O \cup O' \implies A \subset B \subset O \cup O'$

2. $B \cap (O \cap O') = \emptyset \implies \nexists x \in B$ tq $x \in O \cap O'$.

Entonces $\forall x \in A \implies x \in B \implies x \notin O \cap O'$

3. $O \cap B \neq \emptyset \implies O \cap \bar{A} \neq \emptyset \implies O \cap (A \cup fr(A) \neq \emptyset \implies (O \cap A) \cup (O \cap fr(A)) \neq \emptyset$ En este punto tenemos 3 posibilidades:

- El primer elemento de la union es distinto del vacio, en cuyo caso hemos acabado.
- Ambos elementos son distintos del vacio, en cuyo caso tambien queda demostrado.
- El segundo elemento de la unión es distinto del vacio. $\exists x \in$

$O \cap fr(A) \implies \exists\epsilon > 0 : B(x,\epsilon) \in O$. Por estar en la frontera: $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \implies \exists y \in B(x,\epsilon) \cap A \subset A \cap O$.

Nota: La idea de esta demostración es que: dado un conjunto conexo, su unión con elementos que se encuentran cerca de el, sigue siendo conexa.

□

Teniendo esto demostrado, haciendo uso de la proposición y de que S es conexo (por ser arco-conexo). Queda demostrado que P es conexo.

□

Ejercicio 10.2. Estudiar los máximos y mínimos relativos de la función $f : R^2 \to R$ dada por:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$. Tenemos que estudiar los puntos críticos de f. Para ello, estudiamos:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r}2x = 0\\ 2y = 0\end{array}\right\}$$

   Ahí podemos obtener los puntos críticos, que como vemos es el (0,0). Ahora, tenemos que ver si es un máximo o un mínimo usando la matriz Hessiana, que se calcula derivando dos veces por cada variable.[REVISAR CÓMO SE OBTENDRÍA LA HESSIANA]
   Calculamos la matriz Hessiana y la evaluamos en el (0,0), el punto obtenido:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Por tanto en el (0,0) también es esa matriz y queda ver que es definida positiva, pero eso es trivial por los determinante encajados. Por tanto, f tiene un mínimo local en 0.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$. Este apartado es igual, pero la matriz tendrá -2 en vez de 2 y por ello tendrá un máximo.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$. Estudiamos puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r}2x = 0\\ -2y = 0\end{array}\right\}$$

   Por tanto, su matriz hessiana es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Y esta matriz no es ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa. Por tanto, en este caso el (0,0) no es ni máximo ni mínimo relativo. Como no es ni máximo ni crítico pero su derivada es cero, se denomina punto de silla.

4. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ Estudiamos puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r}2x - y = 0\\ 2y - x = 0\end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema, y nos queda la solución (0,0) también como solución única.
Por tanto, su matriz hessiana es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como los determinantes encajados son positivos, la matriz hessiana es definida positiva por tanto (0,0) es un mínimo

Ejercicio 10.3 (5 relación derivabilidad). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $a \in \Omega$ con $Df(a) = 0$ (es decir, $\nabla f(a) = 0$) con $def(Hessf(a)) \neq 0$.

Probar que $\exists U$ abierto en Ω tal que $a \in U$ tal que:

$$\left.\begin{array}{r}Df(x) = 0\\ x \in U\end{array}\right\} \Longleftrightarrow x = a$$

Solución. Calculamos su hessiana:

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_n^2} \end{pmatrix} = Jg(a) = J(\nabla f)(a)$$

Y tenemos que $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $g(x) = \nabla f(x) = (\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n})$.

Ahora, como el determinante de la Hessiana de f en a es distinto de cero, por el Teorema de la función inversa aplicado a $g = \nabla f$, entonces $\exists U$ abierto en Ω, $a \in U$ y también $\exists V$ abierto en $\mathbb{R}^n$ con $g(a) = \nabla f(a) \in V$ tales que:

$g = \nabla f : U \to V$ biyectiva que lleva $a \mapsto g(a) = \nabla f(a) = 0$

□

Ejercicio 10.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (e^x cos(y), e^x sen(y)) = e^x(cosy, seny) \in \partial B(0, e^x)$. Probar que f es localmente invertible en todo punto de $\mathbb{R}^2$

Solución. Primero, es fácil ver que f no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^2$,pues basta ver que $f(x, y+2\pi) = f(x, y)$

Lo único que tendríamos que hacer es ver que el determinante de $Jf(x_0, y_0)$.

$$det\begin{pmatrix} e^x cos y & -e^x sen y \\ e^x sen y & e^x cos y \end{pmatrix} = e^x \neq 0$$

Y como no es 0, la función es localmente invertible en el punto x_0, y_0 por el Teorema de la función inversa.

□

Ejercicio 10.5 (6 de la relación).

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^4 = -4 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 - 3v^2 = -8 \end{aligned}\right\} = \left.\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^4 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 - 3v^2 + 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Podemos considerarla como la función $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, u, v) = (x^2 - y^2 - u^3 + v^4 + 4, 2xy + y^2 - 2u^2 - 3v^2 + 8)$ Y podemos ver la ecuación como $F(x, y, u, v) = (0, 0)$. Tendremos que usar dos variables como parámetros, pues necesitaríamos 4 variables para resolver el sistema. Hacemos entonces la jacobiana de esta función:

$$det\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x + 2y \end{pmatrix}$$

Y habría que evaluar el determinante en el punto que nosotros habíamos tomado, que es una solución particular que sería : $x = 2, y = 1, u = 2, v = 1$, por lo que sería ver el determinante de:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

, que es distinto de 0, por lo que por el teorema de la función implícita, existen U entorno abierto de (2,-1) en $\mathbb{R}^2$ y existe V entorno abierto de (2,1) en $\mathbb{R}^2$ tales que:

1. UxV$\subset A = \mathbb{R}^2$
2. $\forall (u, v) \in V \quad \exists! (x, y) \in U : F(x, y, u, v) = (0, 0)$

Ejercicio 10.6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 4x + 2y + 1$.

Procedimiento: Para estudiar los extremos relativos hacemos puntos criticos y eso nos lleva a un conjunto de puntos que tendremos que estudiar. Luego,si estudiamos el máximo o el mínimo absoluto en un compacto, tendremos probar que el máximo y el mínimo se alcanzan (T.W.) y sabiendo que son máximo o mínimos absolutos, si el punto estuviera en el interior sería un máximo o mínimo relativo luego tenemos que estudiar los puntos de los bordes estudiando las funciones que están definidas en un abierto(IMPORTANTE). Cuando tengamos los puntos que puedan ser puntos críticos, calculamos su valor por la función y afirmamos cuál es el máximo y cuál es el mínimo.

Apartado a:
Estudiar extremos relativos y puntos de silla de f.

Los puntos criticos de f son los puntos en los que el gradiente de f vale 0 ($\nabla f(x,y) = (0,0)0$). Calculamos derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + 2$$

Por lo que tenemos que calcular las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4 = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Cuya solución es el punto (-1,1). Estudiamos la matriz hessiana en ese punto para ver qué es.

$$Hesf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Y el determinante de esa es -8 y además el primer determinante encajado es positivo, luego esa matriz no es ni definida positiva ni definida negativa luego tenemos que en (-1,1) hay un punto de silla (esta es su definición).

Apartado b:

Si llamamos T= triángulo cerrado de vértices (-3,0),(0,0) y (0,3) que es cerrado y acotado. Este T es compacto por ser cerrado y acotado por tanto, por el teorema de Weierstrass f alcanza un máximo valor y un mínimo en puntos de T. Esto es un problema de extremos condicionados.

Si estuvieran los puntos críticos que hemos encontrado antes dentro del triángulo, entonces serían extremos relativos y hemos visto antes que no tiene. Luego el máximo y mínimo absoluto de f en T no puede ser un punto interior a T. Hay que estudiarlos en la frontera de T.

La frontera de T está constituida por los 3 segmentos que unen los 3 puntos del triángulo y los puntos, es decir, "6 partes". Esto es:

$$\partial T = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup (0,3) \cup (-3,0) \cup (0,0)$$

Siendo:
$A_1 = \{(0,y) : 0 < y < 3\} = \{(x,y) \in (-3,0)x\mathbb{R} : x = 0\}$,

$A_2 = \{(x,0) : -3 < x < 0\} = \{(x,y) \in (-3,0)x\mathbb{R} : y = 0\}$
$A_3 = \{(x,x+3) : -3 < x < 0\} = \{(x,y) \in (-3,0)x\mathbb{R} : y - x - 3 = 0\}$.

Ahora, al descomponerlo así podemos usar en cada fragmento el teorema de lso multiplicadores de Lagrange.

Empezamos por A_3 . Definimos $g(x,y) = y - x - 3$ y sabemos que los posibles extremos condicionados serían extremos de la Lagrangiana es decir, tienen que ser puntos críticos de la función: $f + \lambda g$ dependiendo de λ. Esta función es:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

E igualamos de nuevo el gradiente de esta función a 0:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

Obteniendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4 - \lambda = 0 \\ -2y + 2 + \lambda = 0 \\ y - x - 3 = 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x = 0 \\ y = 3 \end{aligned}\right\}$$

Pero el punto (0,3) no está en A_3, es un punto aparte luego no hay ningún extremo condicionado a la restricción de pertenecer a A_3. Si existiera un extremo relativo en ese segmento también sería extremo relativo sobre ese segmento, pero como hemos visto que no tiene, no puede haber extremo relativo.

Hacemos lo mismo con A_2. En este caso $g(x,y) = y$ Nos queda el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4 = 0 \\ -2y + 2 + \lambda = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x = -1 \\ y = 0 \\ \lambda = -2 \end{aligned}\right\}$$

Tenemos el punt (-1,0) que sí pertenece a A_2, por tanto este punto puede ser extremo relativo condicionado por la condición $y = 0$

Repetimos el proceso para A_1. En este caso, $g(x,y) = x$. Volvemos a hacer el sistema y nos queda:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4 + \lambda = 0 \\ -2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda = -4 \end{aligned}\right\}$$

Tenemos el punto(0,1) que sí está en este segmento.

Todo esto sirve para afirmar que el máximo y el mínimo de f en T es uno de estos puntos:

$$(0,1),(-1,0),(0,0),(0,3),(-3,0)$$

Ahora, sabiendo esto calculamos la f en cada uno de estos puntos y vemos cuáles son los extremos y hemos acabado.

Ejercicio 10.7. Tomemos la gráfica $G\{(x,1/x):x>0\}$ (gráfica de la función $y=1/x$) .Probar que existe un punto en G tal que

$$d((0,0),(x,1/x)=Min\{d((0,0),(y,1/y):y>0\}$$

Para ello, debemos definir

$$f(y)=d((0,0),(x,1/x))\ \ continua$$

Si nos enfrentaramos a un ejercicio donde el conjunto no es compacto, un "truco.[a] seguir es coger un punto del conjunto al azar, y trazar la bola cerrada de distancia la del (0,0) a ese punto. Al tomar la interseccion entre el conjunto y esa bola cerrada, tenemos un conjunto cerrado, que nos aseguramos que contiene el mínimo.

Ejercicio 10.8 (26 de la relacion de derivabilidad). Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y acotado . Sea $u\in\varphi(\bar{\Omega}\cup\varphi^2(\Omega)$.

Apartado a:

$\triangle u(x):=\sum_i^n\frac{\partial^u}{\partial x_i^2}(x)<0\ \forall x\in\Omega$ es la traza. Entonces, u no puede alcanzar su mínimo absoluto en $\bar{\Omega}$ en un punto de Ω.

Nota: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y acotado $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{r} cerrado+acotado=compacto \\ u\in\mathscr{C}(\bar{\Omega})\end{array}\right\}\Longrightarrow$ u alcanza su maximo y minimo en $\bar{\Omega}$

Solución apartado a: **Este ejercicio es trivial.**

Supongamos que fuese falso, es decir:supongamos que el mínimo absoluto de u en $\bar{\Omega}$ se alcanza en $a\in\Omega:u(a)=min\{u(x):x\in\bar{\Omega}\}$, esto implica que $\exists r>0:B(a,r)\subset\Omega$ y $u(x)\geq u(a)\forall x\in B(a,r)\implies a$ es un mínimo relativo de u, por lo que:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(a)=0\quad\forall i=1,\ldots,N$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(a)\geq 0\implies\sum_i^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\geq 0$$

Y esto es una contradicción. □

Apartado b:
Si el $\triangle u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \implies (min)_{x\in\bar{\Omega}}\ u(x) = (min)_{x\in\partial\Omega}\ u(x)$.

Ejercicio 10.9 (14 de la relación de derivabilidad).
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y) = (y + cosx, x + e^y)$
Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $g(t,u) = t + u$

(i) Calcular la matriz jacobiana de $F = gof$
(ii) Calcular la derivada direccional de F en el punto $(0,0)$ a lo largo de la dirección $(2,-1)$
(iii) Calcular el valor máximo de la derivada direccional de F en $(0,0)$
(iv) $F(x,y) = 2$ define a y como una función implícita diferenciable $\mathscr{C}^\infty$ en un entorno de (0,0).

Solución. (i) $F = g(f(x,y)) = g(y + cosx, x + e^y) = y + cosx + x + e^y$.
Lo haremos usando la regla de la cadena. $DF(x,y) = Jg(f(x,y))Jf(x,y)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} -senx & 1 \\ 1 & e^y \end{pmatrix} = Jg(y + cosx, x + e^y)$$

$$Jg(f(x,y)) = Jg(y + cosx, x + e^y) = (1,1)$$

$$Jg(f(x,y))Jf(x,y) = (1 \quad 1)\begin{pmatrix} -senx & 1 \\ 1 & e^y \end{pmatrix} = (1 - senx \quad 1 + e^y)$$

(ii) Vamos a calcular primero el vector unitario de (2,-1). $|(2,-1)| = 5 \implies (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$. Ahora, tenemos

$$D_{(2/\sqrt{5},-1/\sqrt{5})}F(0,0) = JF(0,0)\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = 0$$

(iii)

$$D_vF(0,0) = JF(0,0)v = \nabla F(0,0)v \leq \sqrt{5} \quad \forall |v| = 1$$

Es una cota superior por el lema de cauchy schwarz. Ahora,

$$v = \frac{\nabla F(0,0)}{|\nabla F(0,0)|} \implies D_vF(0,0) = \nabla F(0,0)\frac{\nabla F(0,0)}{|\nabla F(0,0)|} = |\nabla F(0,0)| = \sqrt{5}$$

Podemos obtener como un resultado o propiedad:

Proposición 10.2. Si $\nabla F(a,b) \neq (0,0)$ entonces:

$$D_{\frac{-\nabla F(a,b)}{|\nabla F(a,b)|}}F(a,b) = |\nabla F(a,b)| \leq D_vF(a,b) \leq |\nabla F(a,b)| = D_{\frac{\nabla F(a,b)}{|\nabla F(a,b)|}}F(a,b) \quad \forall |v| = 1$$

Otra forma de haber hecho el ejercicio era mediante extremos condicionados:

$$(1 \quad 2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

(iv) Lo haremos pensando en la función $H(x,y)=F(x,y)-2=0$, pues nos ayudará para usar el teorema de la función implicita. Ahora, la función H es de clase infinito pues es composición de dos funciones que son de clase infinito, por lo que podemos usar el teorema. Tenemos que comprobar que $H(0,0)=0$, que se comprueba fácilmente.

$$JH(x,y)=JF(x,y)=\begin{pmatrix}1-senx & e^y+1\end{pmatrix}$$

$$JH(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

Ahora, tenemos que aclarar cuál de los menores vamos a coger de la matriz (1 2), pues pueden ser la x o la y las funciones implícitas. Para ver cual cogeremos, usar una regla pnemotécnica.
Calcular $y'(0)$ e $y''(0)$ con y la función implícita una vez que la hemos calculado.

□

Ejercicio 10.10 (14 de la relación de derivabilidad). Sea $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $F(x,y)=y+cosx+x+e^y \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Apartado d). Probar que $F(x,y)=2$ define a y como función implícita diferenciable C^∞ en un entorno de $(0,0)$. Además, calcular $y'(0)$ e $y''(0)$.

Solución. Definimos $H:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $H(y,x)=F(y,x)-2$.

Observación 1. H es C^∞, por ser suma de funciones C^∞.

Observación 2. $H(0,0)=0+cos0+0+e^0-2=0$. Esto es condición indispensable para poder aplicar el *teorema de la función implícita*.

Observación 3. Vemos el conjunto de definición de H como $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, donde la primera componente es "*el parámetro*" (y), y la segunda componente es "*la variable*" (x).

El siguiente paso es comprobar que $\det\left(\frac{\partial H}{\partial y}(0,0)\right)\neq 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(y,x)=1+e^y;\quad \det\left(\tfrac{\partial H}{\partial y}(0,0)\right)=\det\left(1+e^0\right)=\det(2)=2\neq 0.$$

Ahora, estamos en las condiciones de aplicar el **teorema de la función implícita** a H: $\exists U$ entorno abierto de 0 en $\mathbb{R}$, $\exists V$ entorno abierto de 0 en $\mathbb{R}$, tal que:

1. $U\times V\subseteq\mathbb{R}^2$
2. $\forall x\in V\ \exists!\ y\in U\ tal\ que\ H(y,x)=0$

Es decir, podemos definir la función $y:V\longrightarrow U$ que a cada $x\in V$ le hace corresponder un $y(x)\in U$, de tal forma que $H(y(x),x)=0$. Además, el teorema garantiza que y es C^∞ por serlo H. Por tanto, hemos probado que $F(x,y)=2$ define a y como función implícita C^∞ en un entorno de $(0,0)$.

Calculamos ahora $y'(0)$. Sabemos que $y(0)=0$, pues $H(0,0)=0$. También sabemos que, dado $x \in V$, la pareja $(y(x),x)$ es solución de la ecuación $H(y,x)=0$. Por tanto, se tiene que:

$$y(x)+cosx+x+e^{y(x)}-2=0$$

Derivamos ahora la función con respecto a "la variable"x, obteniendo:

$$y'(x)-senx+1+e^{y(x)}\cdot y'(x)=0$$

Por último, evaluamos en el punto $x=0$, que sabemos que es solución:

$$y'(0)-sen0+1+e^{y(0)}\cdot y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)+1+y'(0)=0 \Rightarrow \mathbf{y'(0)=\frac{-1}{2}}$$

Calculamos ahora $y''(0)$. Sabiendo que $y'(0)=-1/2$, volvemos a derivar la expresión anterior, obteniendo:

$$y''(x)-cosx+e^{y(x)}\cdot y''(x)+e^{y(x)}\cdot y'(x)=0$$

Por último, evaluamos en el punto $x=0$, que sabemos que es solución:

$$y''(0)\text{–}cos0\text{+}e^{y(0)}\left(y''(0)+y'(0)\right)=0 \Rightarrow y''(0)\text{–}1\text{+}y''(0)\text{–}\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \mathbf{y''(0)=\frac{3}{4}}$$

□

Ejercicio 10.11 (Función lipschitziana respecto de una variable).

En orden a probar el **teorema de Ascoli-Arzelá** (ó *teorema de Picard-Lindelöf*) necesitábamos verificar que una cierta función f cumplía la condición de Lipschitz respecto de su segunda variable, bajo la hipótesis de que f era C^1. Sin embargo, basta que f cumpla una condición menos restrictiva, como veremos.

Proposición. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable respecto de su segunda variable, y verificando que $\frac{\partial f}{\partial x}(s,x)$ es continua. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, y consideremos dos funciones $y,z \in C([a,b],\mathbb{R})$. Entonces, se tiene que:

$$\exists K>0: \quad |f(s,y(s))-f(s,z(s))| \leq K|y(s)-z(s)| \quad \forall s \in [a,b]$$

Demostración.

Para probar el resultado, podemos considerar sin pérdida de generalidad que f está definida en el conjunto $[a,b]\times\mathbb{R}$. Además, como y,z son funciones continuas definidas en un compacto, sabemos que sus imágenes son compactas. Así, podemos definir $A=y([a,b])\cup z([a,b])$, y afirmamos que A es compacto, pues es unión finita de compactos. Por tanto, existirán números reales c y d tales que $c = \text{mín} A$ y $d = máxA$, con $c \leq d$. Entonces, podemos restringir aún más el conjunto de definición de f, y consideramos que está definida en el compacto $D = [a,b] \times [c,d]$.

Ahora, como f es C^1 respecto de su segunda variable, tenemos que la función $\dfrac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua definida en un compacto. Por tanto, su imagen está acotada, y esto nos permite definir:

$$M := sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(s,x) \right| : (s,x) \in D \right\} \geq 0$$

Fijamos $s \in [a,b]$, y consideramos la función $f_s(x) : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_s(x) = f(s,x)$.
Es inmediato comprobar que f_s es C^1, pues $f_s'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(s,x)$. Observamos también que si $y(s) = z(s)$, la proposición se cumple trivialmente para cualquier valor de K, por lo que podemos suponer $y(s) < z(s)$ (en otro caso, intercambiamos sus papeles). Entonces, por el **teorema del valor medio** aplicado a f_s, tenemos que $\exists c \in [y(s), z(s)]$ verificando:

$$|f_s(y(s)) - f_s(z(s))| = |f_s'(c)| \cdot |y(s) - z(s)|$$

De esta igualdad concluímos que:

$$|f(s,y(s)) - f(s,z(s))| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(s,c) \right| \cdot |y(s) - z(s)| \leq M \cdot |y(s) - z(s)|$$

Notemos que si $M = 0$, sería $f_s'(x) = 0 \ \forall x \in [c,d]$, por lo que f_s sería constante, y la proposición sería cierta para todo K positivo. Es por esto que podemos suponer $M > 0$. Como s era un punto arbitrario de $[a,b]$, queda probado el resultado, donde elegimos $K = M$. □

Nota. En el caso en que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, podemos aplicar directamente el resultado anterior, pues sabemos que en particular f es continua, y derivable respecto de su segunda variable con derivada continua.