

Variable Compleja I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM



Este libro se distribuye bajo una licencia CC BY-NC-SA 4.0.

Eres libre de distribuir y adaptar el material siempre que reconozcas a los autores originales del documento, no lo utilices para fines comerciales y lo distribuyas bajo la misma licencia.

creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Variable Compleja I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

I. Teoría	5
II. Ejercicios	6
1. Números complejos	6
2. Topología del plano complejo	11
3. Funciones holomorfas	13
4. Funciones analíticas	16
5. Funciones elementales	19
6. Integral curvilínea	24
7. Teorema local de Cauchy	27
8. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía	30
9. Ceros de las funciones holomorfas	34
10. Teorema de Morera y sus consecuencias	37
11. Comportamiento local de una función holomorfa	40
12. El teorema general de Cauchy	44
13. Singularidades	46
14. Residuos	47

Parte I.

Teoría

Parte II.

Ejercicios

1. Números complejos

Ejercicio 1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a \mathbb{C} .

Ejercicio 1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los números complejos

$$\frac{i - \sqrt{3}}{1 + i} \quad \text{y} \quad \frac{1}{i\sqrt{3} - 1}$$

Ejercicio 1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \forall z \in U$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

Solución.

$$|f(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1$$

$$f^{-1}(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

Si $|z| = 1$, entonces

$$|f(z)| = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|$$

multiplicando en esta expresión por \bar{z}

$$\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \bar{z} = \frac{1 - a\bar{z}}{1 - \bar{a}z}$$

Tenemos entonces que f es holomorfa en el disco $D(0, 1)$, lleva la frontera en la frontera.

1. Números complejos

Ejercicio 1.4. Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Solución. Por inducción, todos los números complejos deben tener el mismo argumento, son vectores linealmente dependientes sin que se invierta el signo de ninguno de ellos.

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 : \lambda_1 z_1 = \lambda_2 z_2 = \dots = \lambda_n z_n$$

para probar que es necesaria no hace falta hacer inducción

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_k} z_1 \right| = |z_1| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_k} = |z_1| \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{|z_1|} = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Sabemos que en el caso $n = 2$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = \lambda z_1 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sea cierto para $n \in \mathbb{N}$ $|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = |z_{n+1} + \sum_{k=1}^n z_k| = |z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^n z_k|$

Donde en este último paso hemos usado que

$$|z_{n+1}| + \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |z_k|$$

donde la otra desigualdad entre los extremos se sabe de la desigualdad triangular.

Vemos que

$$|z_{n+1}| + \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Por la hipótesis de inducción para $k = 2$, tenemos que

$$\exists \lambda > 0 : z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k$$

Nos queda por hacer lo análogo con el resto de números complejos $z_k, k = 1 \dots n$

Por la hipótesis de inducción para $k = n, \exists \mu_1, \dots, \mu_n : \mu_1 z_1 = \mu_2 z_2 = \dots = \mu_n z_n$, como $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k = \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\mu_1}{\mu_k} z_1$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

entonces tenemos

$$z_1 \bar{z}_2 = \lambda > 0 \quad \text{y} \quad z_1 = \frac{\lambda}{|z_2|^2} z_2$$

1. Números complejos

Ejercicio 1.5. Describir geoméricamente los subconjuntos del plano dados por

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 2|z - i|\} \text{ y } B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$

Solución.

Veamos el conjunto A, notamos $z = (a, b)$,

$$\sqrt{a^2 + (b + 1)^2} = 2\sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$$

Entonces

$$a^2 + b^2 + 1 + 2b = a^2 + (b + 1)^2 = 4(a^2 + (b - 1)^2) = 4a^2 + 4b^2 + 4 - 8b$$

Luego

$$3a^2 + 3b^2 - 10b + 3 = 0 \implies a^2 + b^2 - \frac{10}{3}b + 1 = 0$$

Sumamos y restamos $\frac{25}{9}$

$$a^2 + \left(b - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 \implies a^2 + \left(b - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

Por lo tanto A es la circunferencia con $c = (0, 5/3)$ y radio $r = \frac{4}{3}$

Veamos el B, elevando dos veces al cuadrado tenemos como resultado una elipse

$$\frac{a^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{b^2}{2^2} = 1$$

Ejercicio 1.6. Probar que $\arg(z) = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) + |z|}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Solución. Usamos la fórmula del ángulo doble

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z + |z|}\right) \implies \phi = 2\alpha = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z + |z|}\right)$$

Pista para otra forma de hacerlo

$$\phi = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z + |z|}\right) |z| (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = ?z$$

Para ello usamos, si $t = \theta/2$

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \quad \sin(\theta) = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$$

1. Números complejos

Ejercicio 1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.8. Probar las fórmulas de De Moivre:

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución. Haremos la prueba por inducción, para el caso inicial $n = 1$ es trivial, suponemos cierto para un $n \in \mathbb{N}$ genérico. Probamos que en ese caso es cierto para $n + 1$.

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta) &= \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + i \cos(n\theta)\sin(\theta) + i \sin(n\theta)\cos(\theta) \\ &= \cos(n\theta)(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) + i \sin(n\theta)(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{n+1} \end{aligned}$$

La última igualdad la tenemos por la hipótesis de inducción.

Ejercicio 1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^8$

Ejercicio 1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ \text{(b)} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=1}^n \sin(kx) &= \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \end{aligned}$$

Solución. Pista Probar las dos simultáneamente y usar la fórmula de Moivre $\sum_{k=0}^n (\cos(x) + i \sin(x))^k$

$$\sin(x/2) \sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sin(x/2) \sum_{k=0}^n \sin(kx)$$

Sacamos factor común

$$\sin(x/2) \left(\sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sin(kx) \right)$$

Usamos la fórmula de Moivre

$$\sin(x/2) \sum_{k=0}^n (\cos(x) + i \sin(x))^k$$

1. Números complejos

Usamos que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\sin(x/2) \frac{1 - (\cos(x) + i \sin(x))^{n+1}}{1 - (\cos(x) + i \sin(x))} = \sin(x/2) \frac{1 - (\cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x))}{1 - \cos(x) - i \sin(x)}$$

Usamos que $2 \sin^2(x/2) = 1 - \cos(x)$ y que $\sin(x) = \sin(x/2) \cos(x/2)$,

$$\begin{aligned} \sin(x/2) \frac{1 - (\cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x))}{2 \sin^2(x/2) - 2i \sin(x/2) \cos(x/2)} &= \frac{1 - (\cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x))}{2 \sin(x/2) - 2i \cos(x/2)} \\ &= \frac{2 \sin^2(\frac{n+1}{2}x) - i 2 \sin(\frac{n+1}{2}x) \cos(\frac{n+1}{2}x)}{2 \sin(x/2) - 2i \cos(x/2)} \end{aligned}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \left(\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) - i \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \right) (\sin(x/2) + i \cos(x/2)) \\ &= \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \left(\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cos(x/2) + \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin(x/2) + i \left(\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cos(x/2) - \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin(x/2) \right) \right) \\ &= \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

2. Topología del plano complejo

Ejercicio 2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal, $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Solución. Usamos la fórmula de la relación anterior para probar que es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$

$$\arg z = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$$

Luego nos aproximamos por sucesiones

$$\left\{ z + \frac{i}{n} \right\} \rightarrow z \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arg \left(z + \frac{i}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan \left(\frac{1}{nz} + \pi \right) \right) = \pi$$

$$\left\{ z - \frac{i}{n} \right\} \rightarrow z \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arg \left(z - \frac{i}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan \left(\frac{-1}{nz} - \pi \right) \right) = -\pi$$

Como los límites no coinciden no existe dicho límite y la función no es continua.

Ejercicio 2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin \operatorname{Arg}(z)\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$

Solución. Definimos

$$f(z) = z(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)) \quad f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}$$

$$\phi(z) = \arg(f(z)) - (\pi - \theta) \quad \phi : S_\theta \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}$$

$$\begin{aligned} \phi(z) &\in \operatorname{Arg}(f(z)) + \theta - \pi \subset \operatorname{Arg}(f(z)) + \operatorname{Arg}(\cos(\theta - \pi) + i \sin(\theta - \pi)) \\ &= \operatorname{Arg}(f(z) - \cos(\theta - \pi) + i(\theta - \pi)) = \operatorname{Arg} z \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3. Probar que no existe ninguna función $\phi \in \mathcal{C}^*$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo \mathbb{C}^* por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Solución. \mathbb{T} compacto y conexo $\implies \phi(\mathbb{T})$ es un intervalo cerrado y acotado

Sea $\alpha \in \mathbb{T} : \phi(\alpha) \neq \min(\phi(\mathbb{T})), \max(\phi(\mathbb{T}))$ $\phi(\mathbb{T} - \{\alpha\})$ conexo $\implies [\min(\phi(\mathbb{T})), \phi(\alpha) \cup \phi(\alpha), \max(\phi(\mathbb{T}))]$ que es una contradicción.

Si $\exists h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$ con $h(z) \in \operatorname{Arg}(z) \forall z \in \mathbb{C}^*$ y h continua, entonces $h|_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $h|_{\mathbb{T}}(z) \in \operatorname{Arg}(z) \forall z \in \mathbb{T}$

2. Topología del plano complejo

Ejercicio 2.4. Probar que la función $Arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \rightarrow z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in Arg(z)$, se puede elegir $\theta_n \in Arg(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \rightarrow \theta$.

Solución.

$$\{z_n\} \rightarrow z \implies \forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies |z_n - z| < \epsilon$$

Sea $\epsilon = \frac{|z|}{2}$, entonces $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m$ se tiene $z_n \in D(z, |z|/2)$

A partir de aquí usamos el ejercicio 2 para concluir.

Ejercicio 2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.

Idea

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &\rightarrow e^{Rez} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(|1 + \frac{z}{n}| - 1)} \\ arg\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right) &\rightarrow Imz \end{aligned}$$

Solución. Sea $z_n \in \mathbb{C}$ con $\phi_n \in Arg(z_n)$

$$\{|z_n|\} \rightarrow |z| \quad \{\phi_n\} \rightarrow \phi \in Arg(z)$$

Vamos a usar que si tiene una sucesión de números complejos y la sucesión de los módulos converge y hay una sucesión de los argumentos de forma que convergen, la sucesión converge al módulo por $\cos(x) + i\sin(x)$

Sabemos que

$$\phi_n \in Arg(z_n)$$

Con lo que tenemos

$$\begin{aligned} z_n &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a+ib}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right) + \left(\frac{ib}{n}\right)\right]^n |z_n| = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right) + \frac{ib}{n}\right]^n = \\ &= \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2\right]^{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a^2}{n^2} + \left(\frac{a}{n} + \frac{b^2}{n^2}\right)\right)\right]^{n/2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n/2 \left(\frac{a^2}{n^2} + 2a/n + b^2/n^2\right)} = \\ e^a &= e^{Rez} \end{aligned}$$

Vamos a utilizar la fórmula de Moivre.

$$Arg\left(a + \frac{a+ib}{n}\right)^n = n Arg\left(a + \frac{a+ib}{n}\right) = n * \arctan\left(\frac{b/n}{1+a/n}\right) = n * \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$$

Llamamos $y = b/(n+a)$ y usamos $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y} = 1$:

$$n * \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right) = \frac{\arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)}{\frac{n+a}{n} \frac{b}{n+a} \frac{1}{b}} = b$$

3. Funciones holomorfas

Ejercicio 3.1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como se indica:

- (a) $f(z)z(\operatorname{Re}(z))^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- (b) $f(x + iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \frac{x^2}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c) $f(x + iy) = \frac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(0) = 0$

Solución. a) Cauchy Riemman

c)

$$f(x + iy) = \frac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{con } f(0) = 0$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

En \mathbb{C}^* tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{3x^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^4(-1)2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{3y^2}{x^2 + y^2} = \frac{y^4(-1)2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{x^3(-1)2y}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{y^3(-1)2x}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemman de las dos primeras ecuaciones deducimos

$$3x^2(x + y^2) - 2x^4 = 3y^2(x^2 + y^2) - 2y^4 \implies x^4 - y^4 = 0 \implies |x| = |y|$$

de las últimas dos deducimos

$$2yx^3 = -2xy^3 \implies xy(x^2 + y^2) = 0 \implies xy = 0 \text{ ó } x^2 + y^2 = 0$$

Como conclusión, para que la función sea derivable en un punto $x \in \mathbb{C}$ dicho punto debe cumplir que el módulo de su parte real sea igual que el módulo de su parte imaginaria.

Ejercicio 3.2. Probar que existe una función entera f tal que

$$\operatorname{Re}(f(x + iy)) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces f es única.

3. Funciones holomorfas

Solución. Sabemos que dicha función debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así que tenemos

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(x+iy) = 4x^3 - 12xy^2 = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(x+iy)$$

Integrando con respecto de la variable y el término central nos queda que $\operatorname{Im}(f) = 4x^3 * y - 4xy^3 + k$ tal que $k \in \mathbb{R}$, ya que también se cumple la condición

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}(x+iy) = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}(x+iy)$$

Si se exige $f(0) = 0$ nos queda una única ecuación como resultado de sustituir $k = 0$.

Ejercicio 3.3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que

$$\operatorname{Re}(f(x+iy)) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Usamos Cauchy-Riemann, deben cumplir la condición $a = -c$.

Ejercicio 3.4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que

$$a\operatorname{Re}(f(z)) + b\operatorname{Im}(f(z)) = c \quad \forall z \in \Omega$$

Probar que f es constante.

Solución. Definimos las funciones u y v : $\operatorname{Re}(f(x+iy)) = u(x, y)$, $\operatorname{Im}(f(x+iy)) = v(x, y)$

Los casos extremos son $a = 0$ o $b = 0$, donde o la imagen o la parte real que quedan serían constantes.

$$au(x, y) + bv(x, y) = c \implies -bv(x, y) = c - au(x, y) \implies v(x, y) = c' - a'u(x, y)$$

Derivamos con respecto a x e y a ambos lados de la última ecuación:

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -a' \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -a' \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = -a' \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = a' \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

Con lo que nos queda

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = -a' \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

por tanto

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Como tenemos que la parte imaginaria es constante dentro del dominio Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con lo que deducimos que la función f es constante.

3. Funciones holomorfas

Ejercicio 3.5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Solución. Un dominio es un abierto conexo no vacío.

La función $g := f + \bar{f} = 2\operatorname{Re}(f)$ es holomorfa por ser suma de holomorfas, y su parte imaginaria es constante, por tanto g es constante.

Por tanto $\operatorname{Re}(f)$ es constante, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y Ω es un dominio deducimos que f es constante.

Ejercicio 3.6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\bar{z} : z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \forall z \in \Omega^*$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

Solución.

$$a \in \Omega^* \iff \bar{a} \in \Omega$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f^*(z) - f^*(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{a})}}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}} \right)} = \overline{f'(\bar{a})}$$

Ejercicio 3.7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

Solución. Suponemos que existe dicha función racional:

$$R(z) = \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i z^i}{\sum_{i=0}^m \mu_i z^i} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Usamos que la derivada de la exponencial es ella misma:

$$R(z) = R'(z) = \frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B(z)^2} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Entonces

$$A(z) = A'(z) - \frac{A(z)B'(z)}{B(z)} \implies B(z)A(z) = A'(z)B(z) - B'(z)A(z) \quad \forall z \in D(a, r), a \in \mathbb{C}, r > 0$$

Tienes dos polinomios que son iguales en un entorno no vacío de un punto.

$$gr(B(z)) + gr(A(z)) \leq \max\{gr(A'(z)) + gr(B(z)), gr(A(z)) + gr(B'(z))\}$$

Por tanto llegamos a una contradicción, al derivar un polinomio su grado disminuiría, con lo que no puede cumplirse la última desigualdad. Como nuestra hipótesis no es cierta tenemos que dicha función nunca es una función racional.

4. Funciones analíticas

Ejercicio 4.1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

- (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$
- (b) $\sum_{n \geq 0} z^{2n}$
- (c) $\sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!}$
- (d) $\sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^n z^n$
- (e) $\sum_{n \geq 0} (n + a^n) z^n \quad (a \in \mathbb{R}^+)$
- (f) $\sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$

Solución. c)

$$\sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!}$$

Si $|z| \geq 1$ entonces la serie diverge, en el caso $|z| < 1$:

$$\sqrt[n]{|2^n z^{n!}|} = \sqrt[n]{2^n |z|^{n!}} = 2|z|^{(n-1)!}$$

Dicha sucesión tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, por tanto

$$\sum_{n \geq 0} |2^n z^{n!}| < \infty \implies \sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!} < \infty$$

Entonces el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

e)

$$\sum_{n \geq 0} (n + a^n) z^n \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Podríamos separar en dos series, calcular sus radios de convergencia y cogemos el menor:

$$\sum_{n \geq 0} n z^n \quad \sum_{n \geq 0} a^n z^n \quad a \in \mathbb{R}^+$$

También podemos usar otros criterios:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) + a^{n+1}}{n + a^n}$$

por tanto el radio de convergencia buscado es:

$$R = \begin{cases} 1/a & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4.2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

- (a) $\sum_{n \geq 0} n^k \alpha_n z^n$ ($k \in \mathbb{N}$ fijo)
- (b) $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$

Solución. a)

El radio de convergencia no se reduce, podemos comprobarlo utilizando el criterio de la raíz.

b)

Vemos el cociente entre los términos $n + 1$ y n :

$$\frac{\alpha_{n+1}/(n+1)!}{\alpha_n/n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n(n+1)}$$

Tomando límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{R} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Por tanto el radio de convergencia de la serie es infinito.

Ejercicio 4.3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

Solución. Convergen en todo el plano las que a partir de cierto término son 0, o sea, las que son una suma finita

Sea $\sum_{n \geq 0} \alpha_n (z - a)^n$ que converge uniformemente

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z-a)^k \text{ converge uniformemente} \iff S_n \text{ es uniformemente de Cauchy}$$

Lo cual, por definición, es:

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : p \geq q \geq n \implies |S_p(z) - S_q(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sea un polinomio $p \in \mathbb{P}[\mathbb{C}]$, tenemos que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} p(z) = \infty \iff \text{gr}(p) > 0 \text{ (grado del polinomio)}$$

Vemos que $|S_p(z) - S_q(z)|$ es un polinomio que está acotado, tiene que ser constante para no diverger en infinito, en particular es la constante 0, ya que $S_p(a) = S_q(a)$, por tanto

$$\sum_{q=m}^{p-1} \alpha_n (z-a)^n = 0 \implies \alpha_n = 0 \quad \forall n \geq m$$

4. Funciones analíticas

Ejercicio 4.4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum_{n \geq 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$

5. Funciones elementales

Ejercicio 5.1. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función verificando que

$$f(z+w) = f(z)f(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Probar que, si f es derivable en algún punto del plano, entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha condición y no sea entera.

Solución. Vemos los posibles valores de $f(0)$

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2 \implies f(0) = 0 \text{ ó } f(0) = 1$$

Si $f(0) = 0$ la función es constante, si es $f(0) = 1$ y suponiendo que f es derivable en $\alpha \in \mathbb{C}$:

$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ vemos que cumple la fórmula de adición

$$f'(\alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha) \frac{f(h)-f(0)}{h} \iff f \text{ es derivable en } 0$$

y eso se puede aplicar $\forall z \in \Omega$ de la siguiente forma:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h+0)-f(y+0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y)f(h+0)-f(y)f(0)}{h} = f(y) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} = f(y)f'(0)$$

Ahora encontramos todas las funciones enteras que cumplan la condición del enunciado.

Sea $z \in \Omega$, $f(z) = 0$, $f(z) = e^{wz} : w \in \mathbb{C}$

Sea f tal que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f'(z) = f(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$(f(z)e^{-wz})' = f'(z)e^{-wz} + (-w) + ze^{-wz} = f(z)we^{-wz} - f(z)we^{-wz} = 0$$

Por lo que las funciones son iguales salvo una constante. En el punto 0 las dos funciones valen lo mismo, por lo que la función es la constante 1, ya que $f(0) = 1$

El ejemplo de función entera que verifique dicha condición es $f(z) = e^{Re(z)}$

Ejercicio 5.2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

Solución. Podemos ver la exponencial como $e^z = e^{Re(z)}(\cos(Imz) + i \sin(Imz))$, sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Definimos las bandas horizontales y verticales:

$$B_H = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Re z \leq b\} \quad B_V = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Im z \leq b\}$$

5. Funciones elementales

Si $a \leq \operatorname{Re} z \leq b$, $e^a \leq e^{\operatorname{Re} z} \leq e^b$ la función se mueve por toda la circunferencia.

Cuando la parte imaginaria se puede mover donde quiera le das infinitas vueltas a la circunferencia unidad. Tenemos que $\exp(B_H)$ es la corona circular de centro 0 y radios e^a y e^b .

Tenemos que $\exp(B_V)$ es el sector del plano encerrado entre los ángulos a y b .

En el caso del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes su imagen quedaría una corona restringida a los ángulos determinados por la parte imaginaria de dicho rectángulo.

Ejercicio 5.3. Dado $\theta \in]-\pi, \pi[$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi(r) = \exp(re^{i\theta})$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 5.4. Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \rightarrow 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \implies \{z_n^{w_n}\} \rightarrow e^\lambda$$

Solución. Como la función exponencial es continua $\{w_n(z_n - 1)\} \rightarrow \lambda \implies \{e^{w_n(z_n - 1)}\} \rightarrow e^\lambda$

$$\lim\{\log(z_n)\} = 0 \implies \lim\{z_n - \log(z_n)\} = 1 \implies \lim\{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n\} = 0$$

$$\lim\{z_n^{w_n} = e^{\log(z_n)w_n}\} = \lim\{e^{w_n(z_n - 1)}\} \iff \lim\left\{\frac{e^{w_n(z_n - 1)}}{e^{w_n(\log(z_n))}} = e^{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n}\right\} = 1$$

Vemos que

$$z_n^{w_n} = e^{w_n \frac{\log(z_n)}{z_n - 1} (z_n - 1)} = e^{w_n(z_n - 1) \frac{\log(z_n)}{z_n - 1}}$$

Y sabemos que $\frac{\log(z_n)}{z_n - 1} \rightarrow 1$ ya que $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\log(z) - \log(1)}{z - 1} = \log'(1) = 1/1$

Ejercicio 5.5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n \geq 0} e^{-nz^2}$

Solución. La serie converge puntualmente si, y sólo si, $\left|\frac{1}{e^{z^2}}\right| < 1$, además

$$\left|\frac{1}{e^{z^2}}\right| < 1 \iff 1 < |e^{z^2}| \iff 0 < \operatorname{Re} z^2 = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 \iff |\operatorname{Re} z| > |\operatorname{Im} z|$$

donde en la última implicación hemos usado $e^{z^2} = e^{\operatorname{Re} z^2} e^{i \operatorname{Im} z^2}$

$$\operatorname{Re} z^2 = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 \quad \operatorname{Re} z^2 > 0 \iff |\operatorname{Re} z| > |\operatorname{Im} z|$$

Vemos ahora la convergencia uniforme, definimos

$$A = \{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)^2 > (\operatorname{Im} z)^2\}$$

Si un conjunto $B \subset A$ y satisface que $\inf_{z \in B} [(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2] > 0$, entonces hay convergencia uniforme en B .

Ejercicio 5.6. Probar que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a + b + c = 0$.

Solución. Para que los vértices en \mathbb{T} formen un triángulo equilátero deben tener entre ellos una diferencia en el argumento de $2\pi/3$, de esa forma los vértices quedan:

$$\{a, b, c\} = \{e^{(\lambda-2/3\pi)i}, e^{\lambda i}, e^{(\lambda+2/3\pi)i}\}$$

\Rightarrow

$$e^{2/3\pi i}(a + b + c) = e^{2/3\pi i}a + e^{2/3\pi i}b + e^{2/3\pi i}c = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 0$$

\Leftarrow

$$a' = \frac{a}{a} = 1, b' = \frac{b}{a}, c' = \frac{c}{a} \quad b' = e^{\theta i}, \quad c' = e^{\gamma i} = -b - 1$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a' + b' + c' = 0 \Rightarrow 1 + b' + c' = 0 \Rightarrow c' = -b' - 1 \text{ con } \gamma, \theta \in]-\pi, \pi[$$

De lo que deducimos que $(-\cos(\theta) - 1) - i \sin(\theta) = (\cos(\gamma)) + i(\sin(\gamma))$, además

$$-\sin(\theta) = \sin(\gamma) \Rightarrow \theta = -\gamma \quad -\cos(\theta) - 1 = \cos(\gamma)$$

por tanto

$$\theta = \pm \frac{2\pi}{3} = -\gamma$$

Ejercicio 5.7. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{C}^* y $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in \Omega$. Probar que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y calcular su derivada.

Solución. $a \in \Omega$ y vemos que es derivable por la definición

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a} \frac{\varphi(z) + \varphi(a)}{\varphi(z) + \varphi(a)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{z - a} \frac{1}{\varphi(z) + \varphi(a)} = \frac{1}{2\varphi(a)} = \varphi'(a)$$

donde hemos usado que $\varphi(a) \neq 0$.

Ejercicio 5.8. Probar que, para todo $z \in D(0, 1)$ se tiene:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1 + z)$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} = 2z - (1 + z)\log(1 + z) + (1 - z)\log(1 - z)$

Solución. a) $g = \log(1 + z) \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ y $(\log(1 + z))' = \frac{1}{1+z} \quad \forall z \in D(0, 1)$

$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ por otra parte la serie de potencias

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ tiene radio de convergencia 1 y su suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = f(z)$ es holomorfa en $D(0, 1)$ y su derivada se calcula término a término

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

5. Funciones elementales

Entonces $f'(z) = g'(z) \forall z \in D(0, 1)$, por tanto f y g difieren en una constante.

Como $g(0) = \log(1) = 0 = f(0)$ con lo que tenemos que f y g son iguales en $D(0, 1)$

Ejercicio 5.9. Probar que la función $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$$

es holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y calcular su derivada. Probar también que

$$f(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Solución. $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ la función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sabemos que $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$ y vemos cuando la función logaritmo cae dentro de dicho conjunto de forma intuitiva $\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^- \iff \exists r > 0 : z \neq 1, \frac{1+z}{1-z} = -r \iff 1+z = rz - r \iff z(r-1) = 1+r \iff z = \frac{1+r}{r-1}$

Viendo que $g(z) = \frac{1+z}{1-z} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subseteq \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ podemos asegurar que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por composición.

$$f'(z) = \frac{(1-z + (1+z))/(1-z)^2}{(1+z)/(1-z)} = \frac{2}{1-z^2}$$

Siendo $\xi \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\xi'(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2}$

Pista hacer $\frac{2}{1-z^2}$ en serie de potencias

Ejercicio 5.10. Sean $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ con $\alpha < \beta$ y consideremos el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg(z) < \beta\}$. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho\alpha, \rho\beta \in [-\pi, \pi]$, probar que definiendo $f(z) = z^\rho$ para todo $z \in \Omega$, se obtiene una biyección de Ω sobre el dominio $\Omega_\rho = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg(z) < \rho\beta\}$, tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_\rho)$.

Pista $z^\phi = e^{\phi \log z}$ con $\Omega, \Omega_\phi \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$

$$f^{-1}(z) = \phi^{\frac{1}{\phi \log z}} = z^{1/\phi}$$

Ejercicio 5.11. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nz)}{2^n}$

Pista

$\sin(nz) = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}$, entonces $\frac{1}{2i} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2^n}$ Tenemos que ver cuando, para un $z \in \mathbb{C}$ fijo, estudiar la convergencia de las series $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{inz}}{2^n}$ y $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-inz}}{2^n}$

$$e^{inz} = e^{in(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} = e^{-n \operatorname{Im} z + i n \operatorname{Re} z} = e^{-n \operatorname{Im} z} e^{i n \operatorname{Re} z} \text{ con } |e^{i n \operatorname{Re} z}| = 1$$

$$\left| \frac{e^{inz}}{2^n} \right| = \frac{e^{-n \operatorname{Im} z}}{2^n} = \left(\frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{2} \right)^n \text{ entonces}$$

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{e^{inz}}{2^n} \right| \text{ converge} \iff e^{-\operatorname{Im} z} < 2 \iff -\operatorname{Im} z < \ln 2 \iff -\ln 2 < \operatorname{Im} z$$

5. Funciones elementales

y tenemos convergencia uniforme en $B \subset A = \{z \in \mathbb{C} : |Imz| < \ln 2\}$ tal que $\sup_{z \in B} |Imz| < \ln 2$

Ejercicio 5.12. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\cos(f(z)) = z$ para todo $z \in \Omega$ y $f(x) = \arccos(x)$ para todo $x \in]-1, 1[$. Calcular la derivada de f .

Ejercicio 5.13. Para $z \in D(0, 1)$ con $Re(z) \neq 0$, probar que

$$\arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } Re(z) > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } Re(z) < 0 \end{cases}$$

6. Integral curvilínea

Ejercicio 6.1. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que $\int_{[\alpha, \alpha+r]} f(z) dz = \int_0^r f(\alpha + s) ds$ para cualquier función $f \in C([\alpha, \alpha+r]^*)$. ¿Cuál es la igualdad análoga para un segmento vertical?

Solución. Definimos $\gamma : [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(s) = \alpha + s, s \in [0, r]$

$$\int_{[\alpha, \alpha+r]} f(z) dz = \int_0^r f(\alpha + s) \gamma'(s) ds \quad \text{donde } \gamma'(s) = 1 \forall s \in [0, r]$$

Para la igualdad respecto a un segmento vertical definimos $\xi : [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$, $\xi(s) = \alpha + is \forall s \in [0, r]$

$$\int_{[\alpha, \alpha+ir]} f(z) dz = \int_0^r f(\alpha + is) \xi'(s) ds = i \int_0^r f(\alpha + is) ds$$

Ejercicio 6.2. Para $r \in]1, +\infty[$ se define $I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{z dz}{z^3 + 1}$ y $J(r) = \int_{\sigma_r} \frac{z^2 e^z}{z + 1} dz$ donde $\gamma_r = C(0, r)$ y $\sigma_r = [-r, -r + i]$. Probar que $\lim_{r \rightarrow +\infty} I(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} J(r) = 0$.

Solución. Para la primera integral buscamos una función $M(r)$ de forma que:

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{z}{z^3 + 1} dz \right| \leq \int_{\gamma_r} \frac{|z|}{|z^3 + 1|} dz \leq l(\gamma_r) M(r)$$

donde $M(r) > 0$ satisface que $\frac{|z|}{|z^3 + 1|} \leq M(r) \quad \forall z \in \gamma_r^*$. Dado $z \in C(0, r)^*$, $|z| = r$

$$\frac{|z|}{|z^3 + 1|} \leq \frac{r}{|z^3| - 1} = \frac{r}{r^3 - 1} \implies l(\gamma_r) M(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{r}{r^3 - 1} = 0$$

Para la segunda integral

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{z^2 e^z}{z + 1} dz \right| < \int_{\gamma_r} \frac{|z|^2 |e^z|}{|z + 1|} dz$$

Si $z \in \sigma_r^*$

$$|z|^2 = |-r + is|^2 \leq (r + 1)^2 \quad s \in [0, 1]$$

$$|z + 1| \geq r - 1$$

Como $z \in \sigma_r^*$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^{-r}$ y podemos acotar el valor absoluto de la integral por 0.

6. Integral curvilínea

Ejercicio 6.3. Probar que $\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = 0$ y deducir que $\int_0^\pi \log(1+r^2+2r \cos(t)) dt = 0$, para todo $r \in]0, 1[$.

Solución. Sabemos que $C(0, r)^* \subset D(0, 1)$, definimos $f(z) = \log(1+z)$, $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$

Usando la fórmula de Cauchy para la circunferencia (Tema 7):

$$\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = f(0)2\pi i = 0$$

Sin usar la fórmula de Cauchy para la circunferencia vemos:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

La serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente sobre compactos de $D(0, 1)$ y la sucesión $\{\frac{1}{z}\}$ está acotada en el compacto $C(0, 1)^*$. Por lo tanto $\frac{1}{z} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $C(0, r)^*$ a $\frac{\log(1+z)}{z}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(1+re^{it})}{re^{it}} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} \log(1+re^{it}) dt \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}| dt - \int_{-\pi}^{\pi} \arg(1+re^{it}) dt \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}| dt = 0$$

Sabemos que

$$\log(1+re^{it}) = \ln(|1+re^{it}|) + i \arg(1+re^{it})$$

y además

$$\gamma(t) = re^{it}, \gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma'(t) = ire^{it}$$

también sabemos que

$$|1+re^{it}| = ((1+r \cos(t))^2 + r^2 \sin^2(t))^{1/2} = (1+2r \cos(t)+r^2 \cos^2(t)+r^2 \sin^2(t))^{1/2} = (1+2r \cos(t)+r^2)^{1/2}$$

por tanto

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|1+re^{it}|) dt = 1/2 \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1+2r \cos(t)+r^2) dt$$

Como sabemos que el coseno es par $1/2 \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1+2r \cos(t)+r^2) dt = \int_0^\pi \ln(1+2r \cos(t)+r^2) dt$

Ejercicio 6.4. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ verificando que $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in D(0, 1)$. Admitiendo que f' es continua, probar que $\int_{C(0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ para todo $r \in]0, 1[$.

Solución. Sabemos que f no se anula en $D(0, 1)$ (de lo contrario en la integral se dividiría por 0) y del hecho de que $|f(z) - 1| < 1$ deducimos que $f(D(0, 1)) \subset D(1, 1)$. Por tanto $\log(f) \in \mathcal{H}(D(0, 1))$

Como $\log(f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} \implies \frac{f'}{f}$ admite primitiva holomorfa en $D(0, 1)$ y $C(0, r) \subset D(0, 1)$ es un camino cerrado, por tanto

$$\int_{C(0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

Ejercicio 6.5. Sean $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por $f(z) = 1/(1 + z^2)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que f no admite una primitiva en Ω .

Solución. Sabemos que

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{A}{z - i} + \frac{B}{z + i} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right]$$

Por tanto

$$\int_{C(i, 1)} \frac{1}{1 + z^2} dz = \frac{1}{2i} \left[\int_{C(i, 1)} \frac{1}{z - i} dz - \int_{C(i, 1)} \frac{1}{z + i} dz \right] \neq 0$$

La primera es $2\pi i$ y la segunda integral es 0 por el teorema de Cauchy para dominios estrellados (Tema 7), teniendo que $C(i, 1) \subset D(i, 3/2)$.

Ejercicio 6.6. Probar que $\int_{\sigma} \frac{dz}{1 + z^2} = 0$, donde $\sigma(t) = \cos(t) + (i/2)\sin(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Idea

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| > 1\}$ $\arctan \in \mathcal{H}(\Omega)$ y \arctan es una primitiva de $\frac{1}{1 + z^2}$

$\sigma^* \subset \Omega$ y σ es un camino cerrado.

Con esa información sabremos que $\int_{\sigma} \frac{1}{1 + z^2} dz = 0$

7. Teorema local de Cauchy

Ejercicio 7.1. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que para $z \in \mathbb{C}$ con $|z - a| > r$ se tiene

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

Solución. Fijo $z \in \mathbb{C}$ con $|z - a| > r$, $\exists r' > 0 : |z - a| > r' > r$. Consideramos $\Omega = D(a, r')$, $f(w) = \frac{1}{w-z}$, $f \in \mathcal{H}(D(a, r'))$. Sabemos que $D(a, r')$ es convexo (en particular estrellado), por tanto, usando el teorema de Cauchy para dominios estrellados tenemos

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

Ejercicio 7.2. Probar la siguiente versión, más general, de la fórmula de Cauchy:

Sean $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y $f : \overline{D}(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(a, R)$ y holomorfa en $D(a, R)$. Se tiene entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D(a, R)$$

Solución. Fijo $z \in D(a, R)$ Fijo $0 < r < R : |z - a| < r < R$, $\overline{D}(a, r) \subset D(a, R)$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(w)}{w-z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a + Re^{it}) i Re^{it}}{a + Re^{it} - z} dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a + re^{it}) i re^{it}}{a + re^{it} - z} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(a + Re^{it}) R}{a + Re^{it} - z} - \frac{f(a + re^{it}) r}{a + re^{it} - z} \right| dt \end{aligned}$$

Definimos

$$g : [r, R] \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C} \quad g(p, t) = \frac{f(a + pe^{it}) p}{a + pe^{it} - z}$$

por lo que el término de la integral queda $|g(R, t) - g(r, t)|$. Vemos que g es uniformemente continua por ser una función continua en un compacto.

Dado $\epsilon > 0 \exists \delta > 0 : si \|(p, t) - (p', t')\|_{\infty} < \delta \implies |g(p, t) - g(p', t')| < \epsilon$, y lo utilizamos para $(p, t) = (R, t)$ y $(p', t') = (r, t)$. Si $|R - r| < \delta$ entonces

7. Teorema local de Cauchy

$$|g(R, t) - g(r, t)| < \epsilon:$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(a + Re^{it})R}{a + Re^{it} - z} - \frac{f(a + re^{it})r}{a + re^{it} - z} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \epsilon 2\pi = \epsilon$$

Ahora solamente queda hacer que $r \rightarrow R$.

Ejercicio 7.3. Dados $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $b, c \in \mathbb{C} \setminus C(a, r)^*$, calcular todos los posibles valores de la integral

$$\int_{C(a, r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)}$$

dependiendo de la posición relativa de b, c respecto a la circunferencia $C(a, r)^*$.

Solución. Primero dividimos la integral en dos partes

$$\frac{1}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c} \left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c} \right]$$

Vemos primero el caso $b \neq c$, tendríamos tres subcasos:

- b interior, c exterior, la segunda parte es 0 por el ejercicio 1

$$\int_{C(a, r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c} \left[\int_{C(a, r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a, r)} \frac{dz}{z-c} \right] = \frac{2\pi i}{b-c} (1 - 0)$$

- b y c interiores

$$\int_{C(a, r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c} [2\pi i - 2\pi i] = 0$$

- b y c exteriores, por el ejercicio 1 ambas partes son 0

$$\int_{C(a, r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)} = 0 - 0 = 0$$

Ahora vemos el caso $b = c$, se tiene primitiva holomorfa en $\mathbb{C}^*, \frac{-1}{z-b}$

$$\int_{C(a, r)} \frac{dz}{(z-b)^2} = 0$$

Ejercicio 7.4. Calcular las siguientes integrales:

- (a) $\int_{C(0, r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz \quad (r \in \mathbb{R}^+, r \neq 2)$
 (b) $\int_{C(0, 1)} \frac{\cos(z) dz}{(a^2+1)z - a(z^2+1)} \quad (a \in \mathbb{C}, |a| \neq 1)$

7. Teorema local de Cauchy

Solución. a) Tenemos $\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz$, donde $r \neq 2, z \neq \pm 2i$

$$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}$$

Nos queda $A = 1/4, B = 1/8 - i/4, C = -1/8 + i/4$, por tanto

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz = \frac{1}{4} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} + \left(\frac{1}{8} - \frac{i}{4}\right) \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z-2i} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{i}{4}\right) \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z+2i}$$

Tenemos para las dos últimas integrales y $r \neq 2$ dos casos, si $r < 2$ ambas integrales son 0, si $r > 2$ ambas integrales valen lo mismo ($2\pi i * 1$) y se anulan entre sí. Por tanto

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz = \frac{1}{4} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 7.5. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$, sea $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \max\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = 2\pi i \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante.

Solución. Como $R > \max\{|a|, |b|\}$

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{1}{b-a} \left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz \right]$$

Por el ejercicio 3 tenemos

$$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{f(z)}{b-a} \left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right]$$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia

$$\frac{1}{b-a} \left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz \right] = 2\pi i \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Consecuencia

Si $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\frac{2\pi|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = \frac{|2\pi i(f(b)-f(a))|}{|b-a|} \leq \int_{C(0,R)} \frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|} dz \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} 2\pi R$$

que tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ ya que $|z-a| \geq R-|a|$ y $|z-b| \geq R-|b|$

8. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Ejercicio 8.1. Sea γ un camino y $\varphi : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se define $f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

Probar que f es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y que

$$f^{(k)}(z) = k! \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Solución. Definimos

$$\phi(w, z) = \frac{\varphi(w)}{w-z} \quad \phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$$

Sabemos que ϕ es continua por ser composición de funciones continuas. Vemos

$$\phi_w(z) = \phi(w, z) \quad \phi_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$$

Por el teorema de holomorfía de una integral dependiente de un parámetro (Tema 10) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$. Podemos proceder también de otra forma, sea $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ fijo:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-a} dw}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)((w-a) - (w-z))}{(z-a)(w-z)(w-a)} dw = \lim_{z \rightarrow a} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)dw}{(w-z)(w-a)}$$

Vamos a ver que podemos intercambiar límite e integral. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeño, definimos

$$\psi : \phi_{|\gamma^* \times \overline{D}(a, r)} \rightarrow \mathbb{C} \quad \psi(w, z) = \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-a)}$$

La función ψ es continua en $\gamma^* \times \overline{D}(a, r)$, como dicho conjunto es compacto, ϕ es uniformemente continua en $\gamma^* \times \overline{D}(a, r)$ y podemos intercambiar límite e integral. De esta forma vemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$, y, por la equivalencia entre analiticidad y holomorfía, vemos que f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

La fórmula de $f^{(k)}(z)$ la podemos obtener a partir de la *fórmula de Cauchy para las derivadas* teniendo en cuenta que

$$f(z) = 2\pi i \varphi(z)$$

Ejercicio 8.2. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se define:

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \text{ y } \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \quad \forall z \in D(0,1)$$

Solución. Vemos que la siguiente función es analítica en el disco $D(0,1)$.

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)} \in \mathcal{H}(D(0,1))$$

Por el *teorema de desarrollo de Taylor* de la exponencial centrada en cero:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Ejercicio 8.3. Obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función f , centrado en el origen, en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2) \quad \forall z \in D(0,1)$
- (b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$
- (c) $f(z) = \arcsin(z) \quad \forall z \in D(0,1)$
- (d) $f(z) = \cos^2(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Solución. a) Derivamos

$$f'(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2} \quad \frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{1-z} = \frac{A/2}{1-z/2} + \frac{B}{1-z}$$

Por tanto el desarrollo en serie de potencias de la original se puede conseguir a partir de desarrollo de las dos partes por separado. Como $z \in D(0,1)$, $|z| < 1$ podemos usar la fórmula de la suma de una serie geométrica

$$f'(z) = (2z-3) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^n + B z^n \right) = (2z-3) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A}{2^{n+1}} + B \right) z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A}{2^n} + 2B \right) z^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3 \left(\frac{A}{2^{n+1}} + B \right) z^n$$

que nos da como resultado

$$f'(z) = -\left(\frac{3A}{2} + B \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{A}{2^{n+1}} - B \right) z^n$$

Ejercicio 8.4. Dado $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{N}$, probar que existe una única función $f \in$

8. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

$\mathcal{H}(D(0, 1))$, verificando que

$$zf'(z) - \alpha f(z) = \frac{1}{1+z} \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Ejercicio 8.5. Probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$, verificando que $f(0) = 0$ y

$$\exp(-zf'(z)) = 1 - z \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Ejercicio 8.6. Para $z \in \mathbb{C}$ con $1 - z - z^2 \neq 0$ se define $f(z) = (1 - z - z^2)^{-1}$. Sea $\sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n$ la serie de Taylor de f centrada en el origen. Probar que $\{\alpha_n\}$ es la sucesión de Fibonacci:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1 \quad \text{y} \quad \alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Calcular en forma explícita dicha sucesión.

Solución. Vemos los ceros del denominador

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)}$$

$$z^2 + z - 1 = 0 \iff z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{donde} \quad a_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{(a_1 - z)(a_2 - z)} = \frac{1}{a_1 - a_2} \left[\frac{1}{a_1 - z} - \frac{1}{a_2 - z} \right]$$

Expresamos α_n en términos de a_1 y a_2

$$a_1 + a_2 = -1 \quad a_1 * a_2 = -1 \quad (z - a_1)(z - a_2) = z^2 - (a_1 + a_2)z + a_1 a_2$$

α_{n+2} a partir de aquí se puede expresar en términos de α_n y α_{n+1}

Ejercicio 8.7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $f^{(n)}(0) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

- (a) $\Omega = \mathbb{C}$, $a_n = n$
- (b) $\Omega = \mathbb{C}$, $a_n = (n + 1)!$
- (c) $\Omega = D(0, 1)$, $a_n = 2^n n!$
- (d) $\Omega = D(0, 1/2)$, $a_n = n^n$

Ejercicio 8.8. Dados $r \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, y $a, b \in \mathbb{C}$ con $|b| < r < |a|$, calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0, r)} \frac{dz}{(z - a)(z - b)^k}$$

Ejercicio 8.9. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)}$, para $\gamma = C(1/4, 1/2)$, $\gamma = C(1, 1/2)$ y $\gamma = C(0, 2)$.

Ejercicio 8.10. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcular las siguientes integrales:

- (a) $\int_{C(0,1)} \frac{\sin(z)}{z^n} dz$
- (b) $\int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz$
- (c) $\int_{C(0,1/2)} \frac{\log(1+z)}{z^n} dz$

Ejercicio 8.11. Probar la siguiente *fórmula de cambio de variable* para la integral curvilínea:

Si Ω es un abierto del plano, γ un camino en Ω y $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\varphi \circ \gamma$ es un camino y, para cualquier función f que sea continua en $(\varphi \circ \gamma)^*$ se tiene:

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(\varphi(w)) \varphi'(w) dw$$

Ejercicio 8.12. Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular las siguientes integrales:

- (a) $\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2}$
- (b) $\int_{C(0,2)} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)}$

Solución.

a)

Definimos la función y el camino $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$

$$\phi(z) = \frac{1}{z} \quad \gamma^* = \mathcal{C}(0, 1/2)^* \quad \gamma(t) = \frac{1}{2} e^{-it}$$

$$\phi(\gamma(t)) = 2e^{it} \implies \phi(\gamma^*) = \mathcal{C}(0, 2)^*$$

Por tanto

$$\int_{\mathcal{C}(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} = \int_{\mathcal{C}(0,1/2)} \frac{1}{\frac{1}{w^2}(\frac{1}{w}-1)^2} \frac{1}{w^2} dw = \int_{\mathcal{C}(0,1/2)} \frac{w^2 dw}{(1-w)^2}$$

9. Ceros de las funciones holomorfas

Ejercicio 9.1. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Probar que $|f^{(n)}(0)| \leq e(n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9.2. Sea f una función entera verificando que existen constantes $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$z \in \mathbb{C}, |z| > \rho \implies |f(z)| \leq \alpha |z|^\beta$$

Probar que f es una función polinómica de grado menor o igual que β .

Ejercicio 9.3. Sea f una función entera verificando que

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 9.4. Sea f una función entera verificando que $f(f(z)) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f ?

Solución. Existe la posibilidad de que f sea constante.

En otro caso, si f no es constante usando el *teorema de Liouville* sabemos que $f(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C} . Entonces $\forall z \in f(\mathbb{C}), \exists c \in \mathbb{C} : f(c) = z \implies f(z) = f(f(c)) = f(c) = z$

Por tanto

$$f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C} \implies f(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

también se puede razonar de la siguiente forma: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$z_n \in f(\mathbb{C}) \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \{z_n\} \rightarrow z \implies \{f(z_n)\} \rightarrow f(z) = z \implies f(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

Ejercicio 9.5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f , holomorfa en un entorno del origen, y verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande:

$$(a) \ a_{2n} = 0, \ a_{2n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9. Ceros de las funciones holomorfas

$$(b) \ a_{2n} = a_{2n-1} = \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(c) \ a_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 9.6. Enunciar y demostrar un resultado referente al orden de los ceros de una suma, producto o cociente de funciones holomorfas.

Ejercicio 9.7. Dado un abierto Ω del plano, probar que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio de integridad si, y sólo si, Ω es conexo.

Ejercicio 9.8. ¿Qué se puede afirmar sobre dos funciones enteras cuya composición es constante?

Solución. Siendo f y g las funciones cuya composición es constante tenemos que su derivada se anula

$$f'(g(z))g'(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$$

entonces puede darse $f'(g) = 0$ o $g' = 0$

Ejercicio 9.9. Sea f una función entera verificando que $f(z) \rightarrow \infty (z \rightarrow \infty)$. Probar que f es una función polinómica.

Solución. Definimos

$$h(z) = \frac{1}{f(1/z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Sea $R > 0$, entonces $\exists w \in \mathbb{C}$ de forma que si $|w| > R$, entonces $|f(w)| > 1$. Si $z \in D(0, 1/R) \setminus \{0\}$, $|z| < 1/R \iff 1/|z| > R$, entonces podemos definir

$$h : D(0, 1/R) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad h \in \mathcal{H}(D(0, 1/R) \setminus \{0\})$$

Como $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$ deducimos por el Teorema de Extensión de Riemann $h \in \mathcal{H}(D(0, 1/R))$ y $h(0) = 0$

$$\exists g \in \mathcal{H}(D(0, 1/R)) \text{ con } g(0) \neq 0, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } h(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z^k g(z)$$

$f(1/z) = \frac{1}{z^k g(z)}$ donde el valor absoluto del segundo término está acotado, por tanto

$$f(w) = w^k \frac{1}{g(1/w)}$$

Como $g(0) \neq 0 \exists \delta > 0, \exists C > 0$ tal que $D(0, \delta) \subset D(0, 1/R)$:

$$|g(z)| \geq C > 0 \quad \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(z)|} \leq \frac{1}{C} \quad \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(1/w)|} \leq \frac{1}{C} \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/\delta)$$

$$|f(w)| = |w|^k \frac{1}{|g(1/w)|} \leq \frac{1}{C} |w|^k \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/\delta)$$

por el ejercicio 2 de esta relación tenemos que f es un polinomio, en particular de grado menor o igual que k .

Ejercicio 9.10. Sea f una función entera verificando que

$$z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \implies |f(z)| = 1$$

Probar que existen $\alpha \in \mathbb{C}$ on $|\alpha| = 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución. Pista

Lema 9.1. Si f verifica que $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$, entonces $f(0) = 0$ o f es constante.

PISTA DEMOSTRACIÓN LEMA: $1 = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} \forall z \in \mathbb{T}$ $1 = f(\bar{z})\overline{f(\bar{z})} = f(1/z)\overline{f(\bar{z})}$

Si hemos probado eso y f es constante es trivial, en caso contrario

$$f(0) = 0 \implies \exists g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } g(0) \neq 0 \text{ y } f(z) = z^k g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$1 = |f(z)| = |z|^k |g(z)| \quad z \in \mathbb{T}$$

g está en las mismas condiciones que f y por el lema anterior g es constante.

10. Teorema de Morera y sus consecuencias

Ejercicio 10.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un abierto Ω del plano, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ otra función continua. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω .
- Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω que converja a un punto $z \in \Omega$ se tiene que $\{f_n(z_n)\} \rightarrow f(z)$.

Ejercicio 10.2. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones enteras definida por $f_n(z) = z \exp(-n^2 z^2/2)$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} pero no converge uniformemente en ningún entorno del origen.

Ejercicio 10.3. Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} f(z^n)$ converge en $D(0, 1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0, 1)$.

Ejercicio 10.4. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ tal que $f(0) = 0$. Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} f(z^n)$ converge en $D(0, 1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0, 1)$.

Ejercicio 10.5. Probar que la sucesión de funciones enteras definida por

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sin(nz) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge uniformemente en \mathbb{R} pero no converge uniformemente en ningún subconjunto de \mathbb{C} que tenga interior no vacío.

Solución. Sea $U \subset \mathbb{C}$ con interior no vacío, entonces $\exists z_0 \in U, \exists r \in \mathbb{R}^+$ con $|Im(z_0)| \geq r > 0$

$$\frac{1}{n} |\sin(nz_0)| = \frac{1}{n} \left| \frac{e^{inz_0} - e^{-inz_0}}{2i} \right| = \frac{1}{2n} |e^{inz_0} - e^{-inz_0}|$$

entonces si $Im(z_0) \geq r$

$$\frac{1}{2n} |e^{inz_0} - e^{-inz_0}| \geq \frac{1}{2n} (e^{nIm(z_0)} - e^{-nIm(z_0)})$$

que tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$

Ejercicio 10.6. Probar que la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nz)}{3^n}$ converge en la banda $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \log(3)\}$ y que su suma es una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Calcular $f'(0)$.

Solución. Expresamos el seno en función de la exponencial

$$\frac{\sin(nz)}{3^n} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{inz}}{3^n} - \frac{e^{-inz}}{3^n} \right)$$

La segunda parte del paréntesis tiene a 0 cuando $n \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{e^{inz}}{3^n} \right| = \frac{|e^{in\operatorname{Re}(z) - n\operatorname{Im}(z)}|}{3^n} = \frac{e^{n\operatorname{Im}(z)}}{3^n} = \left(\frac{e^{\operatorname{Im}(z)}}{3} \right)^n$$

tenemos que hacer que sea menor que δ^n con $0 < \delta < 1$, lo que pasa solamente cuando $-\operatorname{Im}(z) < \log(3) + \log(\delta)$.

Ejercicio 10.7. Sea $\Phi[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Probar que definiendo

$$f(z) = \int_0^1 \Phi(t) e^{itz} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

se obtiene una función entera y calcular el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen.

Solución. Es entera por el teorema de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro.

Ejercicio 10.8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t} e^{-tz} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.
- Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
- Deducir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-tz} dt$ para todo $z \in \Omega$.

Solución. a)

Usaremos el teorema de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro para ver que $f_n(z)$ es holomorfa en \mathbb{C} , y por tanto entera. Definimos

$$\gamma_n : [0, n] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma_n(t) = t \quad \gamma'_n(t) = 1$$

$$\Phi_n : \gamma_n^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \Phi_n(w, z) = \sqrt{w} e^{-wz} \quad \Phi_{n,w} = \Phi_n(w, z)$$

10. Teorema de Morera y sus consecuencias

Tenemos que buscar que se cumplan las condiciones:

- Φ_n es continua
- $\Phi_{n,w}(z)$ es entera $\forall w \in \gamma_n^*$

por el teorema de holomorfía

$$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \quad f'_n(z) = \int_{\gamma_n} \frac{d}{dz}(\Phi_n(w, z))dw$$

entonces

$$\int_{\gamma_n} \Phi_n(w, z)dw = \int_0^n \sqrt{t}e^{-tz}dt$$

b)

Sea $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \int_0^n \sqrt{t}e^{-tz}dt - \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-tz}dt \right| = \left| \int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tz}dt \right|$$

Usamos que $|e^{-tz}| = |e^{-t\operatorname{Re}(z) - it\operatorname{Im}(z)}| = e^{-t\operatorname{Re}(z)}$

$$\left| \int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tz}dt \right| \leq \int_n^\infty \sqrt{t}e^{-t\operatorname{Re}(z)}dt \leq \int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tk}dt$$

Y en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq k > 0\}$ tenemos

$$\int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tk}dt \leq \int_n^\infty te^{-tk}dt$$

11. Comportamiento local de una función holomorfa

Ejercicio 11.1. Sea $R \in \mathbb{R}^+$ y $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$, no constante. Probar que la función $M :]0, R[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$M(r) = \max\{|f(z)| : z \in C(0, r)^*\} \quad \forall r \in]0, R[$$

es estrictamente creciente.

Solución. Vamos a suponer que $M(r)$ no es estrictamente creciente, existirían $0 < r_1 < r_2 < R$ tal que

$$M(r_1) \geq M(r_2) = \max\{|f(z)| : z \in C(0, r_2)^*\} = \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, r_2)\}$$

por tanto $\exists z_0 \in D(0, r_1)$ en el que $|f|$ alcanza un máximo relativo para el disco $D(0, r_2)$. Ahora usamos el principio de módulo máximo para deducir que f es constante en $D(0, r_2)$ y por el principio de identidad f es constante en $D(0, R)$. Hemos llegado a una contradicción, por lo tanto nuestra hipótesis no es cierta y $M(r)$ es estrictamente creciente.

Ejercicio 11.2. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω , que tenga límite en ∞ . Probar que $|f|$ tiene un máximo absoluto en un punto de \mathbb{T} . Suponiendo que f no es constante, probar que la función $M : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$M(r) = \max\{|f(z)| : z \in C(0, r)^*\} \quad \forall r \in [1, +\infty[$$

es estrictamente decreciente.

Solución. Definimos

$$g : \overline{D}(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = f(1/z) \quad g \in \mathcal{H}(D(0, 1) \setminus \{0\}), \quad g \in C(\overline{D}(0, 1) \setminus \{0\})$$

Vemos el límite en el punto problemático

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{w \rightarrow \infty} f(w) \in \mathbb{C}$$

Por tanto, por el teorema de extensión de Riemann $g \in \mathcal{H}(D(0, 1))$

Ahora se aplica el resultado del ejercicio 1 a g y sacamos la conclusión sobre f .

11. Comportamiento local de una función holomorfa

Ejercicio 11.3. Sea P un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ y $M = \max\{|P(z)| : z \in \mathbb{T}\}$. Probar que

$$z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1 \implies |P(z)| \leq M|z|^n$$

Solución.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{z^n} = a_n$$

$$f(z) = \frac{P(z)}{z^n}, \quad f \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}) \text{ y } f \text{ es continua en } \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$$

y usando ejercicio 2 sabemos que $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ en un punto de \mathbb{T} .

$$\left| \frac{P(z)}{z^n} \right| = |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1$$

Ejercicio 11.4. Sea $f : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(0, 1)$ y holomorfa en $D(0, 1)$, que verifica la siguiente condición:

$$z \in \mathbb{T} \implies |f(z)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Re}(z) \leq 0 \\ 2 & \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0 \end{cases}$$

Probar que $|f(0)| \leq \sqrt{2}$.

Solución.

$$|f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-a} dw \right|$$

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{|f(w)|}{|w-a|} dw \leq \frac{l(C(a,r))}{2\pi r} \max\{|f(w)| : w \in C(a,r)\} = \max\{|f(w)| : w \in C(a,r)\}$$

Definimos $g(z) = f(z)f(-z)$, $|f(0)|^2 = |g(0)| = \max\{|g(w)| : w \in \mathbb{T}\} \leq 2$
 $\forall w \in \mathbb{T}$

Ejercicio 11.5. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r \in]0, 1[$ se tiene

$$\max\{|f(z)| : |z| = r\} = r^n$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0, 1)$.

Solución. Sabemos que $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ y usamos la desigualdad de la media en $C(0, r)$

$$|f(0)| \leq \max\{|f(z)| : z \in C(0, r)^*\} = r^n \quad 0 < r < 1$$

tomamos límite con $r \rightarrow 0$ obtenemos que $f(0) = 0$

11. Comportamiento local de una función holomorfa

Si f es constante no hay nada que demostrar. Si f no es constante, entonces, por el principio de los ceros de una función holomorfa $\exists g \in \mathcal{H}(D(0, 1))$, $\exists k \in \mathbb{N}$ con $g(0) \neq 0$ tal que $f(z) = z^k g(z) \forall z \in D(0, 1)$

Si tenemos que $k < n$

$$r^n = \max\{|f(z)| : |z| = r\} = \max\{|z|^k g(z)| : |z| = r\} = r^k \max\{|g(z)| : |z| = r\}$$

por tanto $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ tomando límite en $r \rightarrow 0$ tenemos que g diverge en $z = 0$, lo que es una contradicción.

Si tenemos que $n > k$, como $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ tomando límite en $r \rightarrow 0$ deducimos que $g(0) = 0$, lo que también es una contradicción.

Luego $k = n$, tenemos $f(z) = z^n g(z) \forall z \in D(0, 1)$. Como $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ deducimos que $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = 1 \forall r \in]0, 1[$ por el ejercicio 1 tenemos que g es constante.

Ejercicio 11.6. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ verificando que

$$|f(z)| \leq |f(z^2)| \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 11.7. Mostrar que el teorema fundamental del Álgebra se deduce directamente del principio del módulo mínimo.

Solución. $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$ En $\overline{D}(0, R)$, $|P|$ alcanza su mínimo absoluto en $\overline{D}(0, R)$ que vale

$$k = \min\{|P(z)| : z \in \overline{D}(0, R)\}$$

Entonces $\exists R^+ > R$ tal que si $|z| \geq R^+$ entonces $|P(z)| > k$

En $\overline{D}(0, R) \subset \overline{D}(0, R^+)$ $|P|$ alcanza su mínimo absoluto en $z_0 \in \overline{D}(0, R^+)$ y sabemos que es menor o igual que k . Como en $C(0, R^+)$ $|P| > k$ entonces $z_0 \in D(0, R^+)$

$P \in \mathcal{H}(D(0, R^+))$ y $|P|$ alcanza un mínimo relativo en z_0 , por el principio del módulo mínimo $P(z_0) = 0$.

Ejercicio 11.8. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Re}(f)$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω , entonces f es constante.

Solución. Tenemos un punto $a \in \Omega$ tal que $\operatorname{Re}(f)$ tiene un extremo relativo en a . Sabemos que $\exists R > 0$ tal que $D(a, R) \subset \Omega$ y $\operatorname{Re}(f(z)) \geq \operatorname{Re}(f(a))$ (respectivamente $\operatorname{Re}(f(z)) \leq \operatorname{Re}(f(a))$) $\forall z \in D(a, R)$.

Suponemos que f no es constante y por el teorema de la aplicación abierta, $f(a) \in (D(a, R))$, que es abierto. Sabemos que $\exists r > 0$ tal que $D(f(a), r) \subset f(D(a, R))$, lo que es una contradicción con que $\operatorname{Re}(f)$ alcance un extremo relativo en a .

Ejercicio 11.9. Sea $f : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(0, 1)$ y holomorfa en $D(0, 1)$, tal que $\text{Im}(f(z)) = 0$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Probar que f es constante.

Solución. Como $C(0, 1)$ es cerrado y acotado su imagen por f (continua) es un compacto. Si $\text{Im}(f(z)) = 0 \forall z \in D(0, 1)$, entonces f es constante en $\overline{D}(0, 1)$. En caso contrario $\exists z_0 \in D(0, 1)$ tal que $\text{Im}(f(z_0)) \neq 0$, se continuará suponiendo que $\text{Im}(f(z_0)) > 0$, en caso de ser menor que 0 se razonaría igual pero usando el mínimo.

$$\text{Im}(f) : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{es continua en un compacto}$$

Por tanto $\exists w_0 \in \overline{D}(0, 1)$ tal que $\text{Im}(f(w_0)) = \max\{\text{Im}(f(z)) : z \in \overline{D}(0, 1)\} > 0$. Como $\text{Im}(f(w_0)) > 0$ tenemos que $w_0 \in D(0, 1)$ y $\text{Im}(f)$ tiene un máximo relativo en w_0 . Por el ejercicio 8 tenemos que f es constante.

Ejercicio 11.10. Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función inyectiva. Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, calcular, para cada $z \in D(a, r)$, la integral

$$\int_{C(a, r)} \frac{wf'(w)}{f(w) - f(z)} dw$$

Solución. Tenemos un abierto $\Omega \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ inyectiva. $\overline{D}(a, r) \subseteq \Omega \forall z_0 \in D(a, r)$

Aplicando la fórmula del cambio de variable con

$$\gamma = C(a, R) \quad \varphi(w) = f(w) \quad g(z) = \frac{f^{-1}(z)}{\text{den}}$$

nos queda

$$g(\varphi(w)) = \frac{w}{f(w) - f(z_0)}$$

Por lo tanto

$$\int_{C(a, r)} \frac{wf'(w)}{f(w) - f(z_0)} dw = \int_{f(C(a, r))} \frac{f^{-1}(z)}{z - f(z_0)} dz$$

Por el teorema general de Cauchy ($\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \text{Ind}_{\Gamma}(z_0)f(z_0)$, tema 12) nos queda

$$\int_{f(C(a, r))} \frac{f^{-1}(z)}{z - f(z_0)} dz = 2\pi i \text{Ind}_{f(C(a, r))}(f(z_0)) * f^{-1}(f(z_0)) = 2\pi i \text{Ind}_{f(C(a, r))}(f(z_0)) * z_0$$

12. El teorema general de Cauchy

Ejercicio 12.1. Enunciar con detalle y demostrar que el índice de un punto respecto a un camino cerrado se conserva por giros, homotecias y traslaciones.

Solución. Veamos el giro de centro z_0 y ángulo θ .

$$\varphi(z) = z_0 + (z - z_0)e^{i\theta}$$

La homotecia de centro z_0 y módulo $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\varphi_\lambda(z) = z_0 + (z - z_0)\lambda$$

Y la traslación de vector z_0

$$\varphi_{z_0}(z) = z + z_0$$

Sea γ un camino cerrado en $\Omega = \Omega^\circ$ y $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. Queremos ver si

$$\text{Ind}_\gamma(w) = \text{Ind}_{\varphi \circ \gamma}(\varphi(w_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi \circ \gamma} \frac{dz}{z - \varphi(w_0)}$$

Por el ejercicio 11 de la relación 8 deducimos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi \circ \gamma} \frac{1}{z - \varphi(w_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\varphi(w)) \varphi'(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} dw$$

$$\varphi(w) - \varphi(w_0) = (w - w_0)\xi \quad z_0 + (w - z_0)e^{i\theta} - (z_0 + (w_0 - z_0))e^{i\theta} \quad \varphi'(w) = \xi \in \{e^{i\theta}, \lambda, 1\}$$

De esa forma tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - w_0} = \text{Ind}_\gamma(w_0)$$

Ejercicio 12.2. Sea $\rho : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de clase C^1 , con $\rho(-\pi) = \rho(\pi)$ y sea $\sigma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ el arco definido por

$$\sigma(t) = \rho(t)e^{it} \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Calcular $\text{Ind}_\sigma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$.

Solución. Sea $\mathbb{C} \setminus \sigma^*$ tiene una única componente conexa no acotada U y $\forall z \in U, \text{Ind}_\sigma(z) = 0$

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \exists t \in [-\pi, \pi], z = |z|e^{it}, |z| < \rho(t)\}$$

12. El teorema general de Cauchy

Como $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ es continua alcanza su mínimo absoluto que es positivo.

$0 \in \Omega$ y Ω es estrellado respecto al cero (dado $z \in \Omega$ $\lambda z + (1 - \lambda)0 \in \Omega$ con $\lambda \in [0, 1]$), por tanto Ω es conexo.

$$\Omega \cup \sigma^* \cup U = \mathbb{C}$$

Si $z \in \Omega$, como el índice es constante en cada componente conexa tenemos que

$$\text{Ind}_\sigma(z) = \text{Ind}_\sigma(0)$$

$$\text{Ind}_\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{1}{z-0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma(t)} \sigma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi'(t) + i\varphi(t)}{\varphi(t)} dt$$

13. Singularidades

14. Residuos

Ejercicio 14.1. Probar que, para $a \in]0, 1[$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3t)dt}{1+a^2-2a\cos(2t)} = \pi \frac{a^2-a+1}{1-a}$$

Solución.

$$1+a^2-2a\cos(2t) = |1-ae^{2it}|^2 = 1+a^2-2a\operatorname{Re}(e^{2it}) = 1+a^2-2a\cos(2t)$$

$$= (1+ae^{2it})(1-\overline{ae^{2it}}) = (1-ae^{2it})(1-\overline{ae^{2it}}) = (1+ae^{2it})(1-ae^{-2it})$$

$$\gamma(t) = e^{it} \quad \gamma'(t) = ie^{it}$$

Entonces

$$(1+ae^{2it})(1-ae^{-2it}) = (1-az^2)(1-\frac{a}{z^2})$$

por lo que consideramos la función $\frac{z^2}{(1-az^2)(z^2-a)}$, como tenemos que multiplicar por $\gamma'(t)$ consideramos $\frac{z}{(1-az^2)(z^2-a)}$, lo que es igual a

$$\frac{e^{it}}{(1-ae^{2it})(e^{2it}-a)} ie^{it}$$

Haciendo el mismo procedimiento con el numerador

$$\cos^2(3t) = \frac{1+\cos(6t)}{2} = \frac{1+\operatorname{Re}(e^{i6t})}{2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1+e^{i6t}}{2}\right)$$

Así vemos que la función que finalmente tendríamos que considerar es

$$f(z) = \frac{(1+z^6)z}{2(1-az^2)(z^2-a)} \quad f: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A) \quad A = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{a}}, \pm \sqrt{a} \right\}$$

El camino $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ es nulhomólogo con respecto a \mathbb{C} . Como $A' = \emptyset$ por el teorema de los residuos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname{Ind}_{\gamma}(-\sqrt{a}) \operatorname{Res}(f(z), -\sqrt{a}) + \operatorname{Res}(f(z), \sqrt{a}) \right)$$

Ejercicio 14.2. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2 \cos(t))^n \cos(nt)}{3 + 2 \cos(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} (3 - \sqrt{5})^n$$

Ejercicio 14.3. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(nt - \sin(t)) dt = \frac{2\pi}{n!}$$

Ejercicio 14.4. Probar que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}$$

Solución. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. En el caso $a \neq b$ tomamos

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2} \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\pm ia, \pm ib\})$$

Tomamos $R > \max\{a, b\}$, consideramos el camino cerrado $\Gamma = [-R, R] + SC(0, R)$ (semicircunferencia recorrida en sentido positivo) y definimos

$$\gamma : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma(x) = x \quad \gamma'(x) = 1$$

Usamos que Γ es nul-homologa con respecto a \mathbb{C}

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{SC(0, R)} f(x) dx$$

Por el teorema de los residuos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i [Ind_{\Gamma}(ia) Res(f(z), ia) + Ind_{\Gamma}(ib) Res(f(z), ib)]$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i [Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib)]$$

Ambos índices son 1

$$\left| \int_{SC(0, R)} f(z) dz \right| \leq l(SC(0, R)) \max\{|f(z)| : z \in SC(0, R)\} \leq \frac{\pi R}{(R^2 - a^2)(R^2 - a^2)^2}$$

que tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + a^2||z^2 + b^2|} \leq \frac{1}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)^2}$$

si $|z| = R$ $|z^2 + a^2| \geq |z|^2 - a^2 = R^2 - a^2$

$$\text{Res}(f(z), ia) = \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia)f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{(z - ia)}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2} = \frac{1}{(b^2 - a^2)^2} \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z - ia}{z^2 + a^2}$$

por l'Hopital es igual a

$$\frac{1}{(b^2 - a^2)^2} \frac{1}{2ia}$$

k es el orden del polo ib

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), ib) &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow ib} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - ib)^k f(z)) = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{d}{dz} ((z - ib)^2 f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow ib} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z - ib)^2}{(z^2 + a^2)(z - ib)^2(z + ib)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{2z * (z + ib)^2 + 2(z + ib)(z^2 + a^2)}{(z^2 + a^2)^2(z + ib)^4} = \frac{4b + 2(-a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2(-ib^3)8} \end{aligned}$$

por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{2ia} \frac{1}{(b^2 - a^2)^2} + \frac{4b + 2(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(-i)8b^34} \right) = \frac{4b^3 - a(4b + 2(b^2 - a^2))}{4ab^3(b^2 - a^2)^2}$$

continuará

Ejercicio 14.5. Probar que, para $a \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^4)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a}$$

Ejercicio 14.6. Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, integrar una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del sector $D(0, R) \cup \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg(z) < 2\pi/n\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$, para probar que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec}(\pi/n)$$

Ejercicio 14.7. Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx) dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3} (1 + at) e^{-at}$$

Ejercicio 14.8. Probar que: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 - 5x + 6} dx = -5\pi$

Ejercicio 14.9. Integrando la función $z \rightarrow \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \epsilon, R)$, probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

14. Residuos

Solución. Usaremos el teorema general de Cauchy

$$0 = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = \int_{[-R,-\epsilon]} f(z)dz + \int_{[\epsilon,R]} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz \quad (1)$$

Sabemos que

$$\int_{[-R,-\epsilon]} f(z)dz = \int_{-R}^{-\epsilon} f(z)dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx \quad \gamma_1 : [-R,-\epsilon] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_1(x) = x$$

$$\int_{[\epsilon,R]} f(z)dz = \int_{\epsilon}^R \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx \quad \gamma_2 : [\epsilon,R] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2(x) = x$$

Para los dos primeros términos usamos

$$\frac{1 - (\cos(2x) + i \sin(2x))}{x^2} = 2 \frac{\sin^2(x)}{x^2} - i \frac{\sin(2x)}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_{[-R,-\epsilon]} f(z)dz + \int_{[\epsilon,R]} f(z)dz &= 2 \left[\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx + \int_{\epsilon}^R \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx \right] + i \left[- \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx - \int_{\epsilon}^R \frac{\sin(2x)}{x^2}dx \right] \\ \int_{[-R,-\epsilon]} f(z)dz + \int_{[\epsilon,R]} f(z)dz &= 2 \left[\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx + \int_{\epsilon}^R \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx \right] \end{aligned}$$

Resolvemos los dos últimos términos

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz$$

$$\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma_R(t) = Re^{it} \quad \gamma_{R'}(t) = iRe^{it}$$

Para la primera parte tomamos módulos:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{1-e^{2iRe^{it}}}{R^2 e^{2it}} iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|1| + |e^{2iRe^{it}}|}{R} dt \leq \frac{2\pi}{R}$$

Donde en el último paso hemos usado que

$$|e^{2iRe^{it}}| = e^{-2R \sin(t)} \leq 1 \quad \forall t \in [0, \pi]$$

De esa forma sabemos que cuando $R \rightarrow \infty$ la integral tiende a 0.

Proposición

Sea $a \in \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(D(a, r) \setminus \{a\})$, $r > 0$. Si g tiene un polo de orden 1 en a y $\gamma_\epsilon : [c, a] \rightarrow \mathbb{C}$ es un trozo de circunferencia centrado en a con radio $\epsilon < r$ (recorrido en sentido positivo) entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} g(z)dz = (d - c)i \operatorname{Res}(g(z), a)$$

Utilizando la proposición obtenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

Calculamos el residuo

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2iz}}{z}$$

Usando l'Hopital nos queda $-2i$, por lo que la integral queda:

$$-\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = -2\pi$$

Tomando límites en 1 tenemos

$$0 = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - 2\pi \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi/2$$

Ejercicio 14.10. Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \rightarrow \frac{z}{a - e^{-iz}}$ sobre la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que

$$\int_{-\pi}^{\pi}$$

Ejercicio 14.11. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \epsilon, R)$, probar que, para $\alpha \in]-1, 3[$, se tiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4} (1-\alpha) \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

Ejercicio 14.12. Probar que, para $\alpha \in]0, 2[$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} dx}{1 + e^x + e^{2x}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} dt}{1 + t + t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin(\pi(1-\alpha)/3)}{\sin(\pi\alpha)}$$

Ejercicio 14.13. Integrando la función $z \rightarrow \frac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

Ejercicio 14.14. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{e^x + e^{-x}}$$

Solución. Probamos con la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \quad e^{i(R+ti)} = e^{iR}e^{-t}$$

$$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} + 1 = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff 2z \in \text{Log}(-1)$$

$$2z \in \{\ln(|1|) + i(\pi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \iff z \in \{(\pi/2 + k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega = \mathbb{C} \quad \Gamma = [-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$$

$$A = \{(\pi/2 + k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\} \quad f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A) \quad \Gamma \text{ es nulhomólogo con respecto a } \Omega = \mathbb{C}$$

Sabemos que $A \cup \Omega = \emptyset$, luego por el teorema de los residuos sabemos que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma}(\frac{\pi}{2}i) \text{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}i) = 2\pi i \text{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}i)$$

Que es igual a la siguiente expresión (integrales (1), (2), (3) y (4))

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx + \int_R^{R+\pi i} f(z)dz + \int_{[R+\pi i, -R+\pi i]} f(z)dz + \int_{[-R+\pi i, -R]} f(z)dz$$

Vemos (3) y usamos la parametrización $x \rightarrow x + \pi i, x \in [-R, R]$

$$\int_{[R+\pi i, -R+\pi i]} f(z)dz = \int_{[-R+\pi i, R+\pi i]} f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{e^{i(x+\pi i)}dx}{e^{x+\pi i} + e^{-(x+\pi i)}} = e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{\cos(x) + i \sin(x)}{e^x + e^{-x}} dx$$

Veamos que $\lim R \rightarrow \infty \int_R^{R+\pi i} f(z)dz$, donde usaremos la parametrización $R + ti, t \in [0, \pi]$

$$\left| \int_{[R, R+\pi i]} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{i(R+ti)}}{e^{R+ti} + e^{-R-ti}} \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-t}}{e^R - e^{-R}} dt \leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \text{ que tiende a 0 cuando } R \rightarrow \infty$$

donde hemos usado que

$$|e^{R+ti} + e^{-R-ti}| \geq |e^{R+ti}| - |e^{-R-ti}| = e^R - e^{-R}$$

Tomando límite con $R \rightarrow \infty$ en la expresión

$$(1) + (2) + (3) + (4) = 2\pi i \text{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}i)$$

$$(1) + (3) = 2\pi i \text{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}i)$$

Y ahora tomamos las partes reales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx + e^{-\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx = \operatorname{Re}(2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}i))$$

Tras hacer los cálculos vemos que

$$\operatorname{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}i) = \frac{e^{-\pi/2}}{2i}$$

Por lo que

$$\operatorname{Re}(2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}i)) = \pi e^{-\pi/2}$$

y tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}}$$

Ejercicio 14.15. Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \epsilon < |z| < R, 0 < \arg(z) < \pi/2\}$, con $0 < \epsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^4} dx$$

Solución. Probamos con la función

$$f(z) = \frac{\log(z)}{1+z^4}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{[\epsilon, R]} f(z) dz &= \int_{\epsilon}^R \frac{\log(x)}{1+x^4} dx \\ \int_{[iR, i\epsilon]} f(z) dz &= - \int_{[i\epsilon, iR]} f(z) dz = - \int_{\epsilon}^R \frac{\log(ix)}{1+(ix)^4} i dx \end{aligned}$$

Vemos

$$\log(ix) = \log(|ix|) + i\pi/2$$

entonces

$$- \int_{\epsilon}^R \frac{\log(ix)}{1+(ix)^4} i dx = -i \int_{\epsilon}^R \frac{\log(x)}{1+x^4} + \frac{\pi}{2} \int_{\epsilon}^R \frac{dx}{1+x^4}$$

Como **idea** para las partes que quedan:

$$|f(z)| = \frac{|\log(|z|) + i\theta_z|}{|1+z^4|} \leq \frac{\pi/2 + \log(R)}{R^4 - 1} \quad z = |z|e^{i\theta_z} \in \gamma_R^* \text{ tal que } \theta_z \in [0, \pi/2]$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{l(\gamma_R)(\pi/2 + \log(R))}{R^4 - 1} \quad \text{que tiene a 0 cuando } R \rightarrow \infty$$

14. Residuos

Si $z \in \gamma_\epsilon^*$

$$|f(z)| = \frac{|\log(\epsilon)| + \pi/2}{1 - \epsilon^4}$$

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz \right| \leq \frac{l(\gamma_\epsilon)(|\log(\epsilon)| + \pi/2)}{1 - \epsilon^4}$$

Como tenemos

$\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ que es homologicamente conexo y $\Gamma = [\epsilon, R] + \gamma_R + [iR, i\epsilon] + \gamma_\epsilon$

podemos deducir que Γ es nulhomólogo con respecto a Ω y que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ con

$$A = \{e^{i\pi/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}\}$$

Y aplicando el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma}(e^{i\pi/4}) \text{Res}(f(z), e^{i\pi/4}) = 2\pi i \text{Res}(f(z), e^{i\pi/4})$$

donde

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{(z - e^{i\pi/4})}{1 + z^4} \log(z) = -\frac{\pi i}{16} e^{i\pi/4} = -\frac{\pi i}{16} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{16} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 14.16. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i, -R]$ con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx$$

Solución. Consideramos $f(z) = \frac{e^{z/2}}{e^z + 1}$

$$e^z + 1 = 0 \iff e^z = -1 \iff z \in \text{Log}(-1) = \{0 + i(\pi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = A$$

$$f : \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C} \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$$

El camino $\Gamma_R = [-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ es nulhomólogo con respecto a \mathbb{C} , además A no tiene puntos de acumulación en \mathbb{C} . Por el teorema de los residuos

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma_R}(i\pi) \text{Res}(f(z), i\pi)$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), i\pi) = \int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{[R, R+2\pi i]} f(z) dz + \int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} f(z) dz + \int_{[-R+2\pi i, -R]} f(z) dz$$

Vemos el segundo término

$$\left| \int_{[R, R+2\pi i]} f(z) dz \right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [R, R+2\pi i]\} \leq 2\pi \frac{e^{R/2}}{e^R - 1}$$

Que tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ donde hemos usado:

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{z/2}}{e^z + 1} \right| = \frac{e^{R/2} e^{ti/2}}{e^R - 1} = \frac{e^{R/2}}{e^R - 1} \text{ y } |e^z + 1| \geq |e^z| - 1 = e^R - 1 \quad \text{ya que } z = R + ti$$

Vemos el cuarto término

$$\left| \int_{-R+2\pi i, -R} f(z) dz \right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [-R+2\pi i, -R]\} \leq 2\pi \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}}$$

que igualmente tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ y hemos usado que si $z = -R + ti$, $t \in [0, 2\pi]$, entonces

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{-R/2} e^{ti/2}}{e^{-R} e^{ti} + 1} \right| \leq \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}}$$

El primer término:

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} \gamma'(x) dx \text{ con } \gamma(x) = x \text{ y } x \in [-R, R]$$

Y por último el segundo término:

$$\int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} f(z) dz = - \int_{[-R+2\pi i, R+2\pi i]} f(z) dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{x/2} e^{\pi i}}{e^x + 1} dz = \int_{[-R, R]} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx$$

donde hemos usado

$$\varphi(x) = x + 2\pi i : x \in [-R, R], \varphi'(x) = 1 \quad f(\varphi(x)) = \frac{e^{x/2} e^{\pi i}}{e^{x+2\pi i} + 1} = \frac{-e^{x/2}}{e^x + 1}$$

Tomando límite con $R \rightarrow \infty$ obtenemos que $2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx = 2\pi i \text{Res}(f(z), i\pi)$

$$\text{Res}(f(z), i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} f(z) = \lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{z/2}}{e^z + 1} = e^{i\pi/2} \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{z - i\pi}{e^z + 1}$$

y usando l'Hopital nos queda $-i$. Conclusión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx = \pi i \text{Res}(f(z), i\pi) = \pi i(-i) = \pi$$