Procesos Estocásticos

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Procesos Estocásticos

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

Parte I.
Teoría

1. Teoría general de procesos estocásticos

1.1. Definición y propiedades generales

1.1.1. Teoría de la medida

Veremos primero nociones básicas sobre la teoría de la medida.

Definición 1.1 (σ-álgebra). Una *σ-álgebra* $\mathscr{A}$ sobre un conjunto Ω es una familia de subconjuntos de Ω ($\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$) que cumple:

$$(i)\quad \forall A \in \mathscr{A} \implies \overline{A} \in \mathscr{A}$$
$$(ii)\quad \forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

Nota. $\mathscr{P}(\Omega)$ son las partes de Ω, es decir, todos los subconjuntos posibles de Ω.

La pertenencia del total, vacío y ser cerado para intersecciones se deduce de las condiciones de la definición.

Definición 1.2 (Espacio medible). Un *espacio medible* es una tupla $(\Omega, \mathscr{A})$ donde Ω es un conjunto y $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra.

Para la teoría de la probabilidad tiene especial interés los espacios Borel, en los que toman valores las variables aleatorias.

Ejemplo 1.1. $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$.

Definición 1.3 (σ-álgebra Borel). La *σ-álgebra de Borel* es la generada por las semirrectas:

$$\mathscr{B}^n = \sigma(\mathfrak{I}^n),\ \mathfrak{I}^n = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Nota. $\sigma(D)$ es la σ-álgebra minimal generada por D.

Definición 1.4 (σ-álgebra Borel restringida). Sea un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$, la *σ-álgebra restringida a E* es

$$\mathscr{B}_E = \{B \cap E : B \in \mathscr{B}\},$$

Definición 1.5 (Espacio Borel restringido). Sea un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$, el *espacio Borel restringido a E* es $(E, \mathscr{B}_E)$.

Ahora veamos que pasa con las aplicaciones y funciones medibles.

Definición 1.6 (Aplicación medible). Sean dos espacios medibles $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ una aplicación $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ se dice *aplicación medible* $\iff \forall A \in \mathscr{A}_2, f^{-1}(A) \in \mathscr{A}_2 \iff f^{-1}(\mathscr{A}_2) \subset \mathscr{A}_1$.

Proposición 1.1 (Caracterización de aplicaciones medibles). Una aplicación entre espacios medibles $f : (\Omega_1, \mathscr{A}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ es aplicación medible $\iff$ $f^{-1}(D) \subset \mathscr{A}_1$ siendo $D \subset P(\Omega_2)$ y $\sigma(D) = \mathscr{A}_2$.

Proposición 1.2 (Composición de aplicaciones medibles). Sean dos aplicaciones medibles $f : (\Omega_1, \mathscr{A}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{A}_2)$, $g : (\Omega_2, \mathscr{A}_2) \to (\Omega_3, \mathscr{A}_3)$ entre tres espacios medibles. Entonces la composición $g \circ f : (\Omega_1, \mathscr{A}_1) \to (\Omega_3, \mathscr{A}_3)$ es una aplicación medible.

Demostración. $(g \circ f)^{-1}(\mathscr{A}_3) = f(g^{-1}(\mathscr{A}_3)) \in \mathscr{A}_1$ porque f es aplicación medible y $g^{-1}(\mathscr{A}_3) \in \mathscr{A}_2$ (g es aplicación medible). □

Definición 1.7 (Función medible). Una *función medible* es una aplicación medible cuyo espacio de llegada es un espacio de Borel.

Nota. Si el espacio Borel es $\mathbb{R}$ se denomina función medible *finita* (no toman valores en $\pm\infty$).

Proposición 1.3 (Caracterización de funciones medibles (1)). Una función entre un espacio medible y espacio Borel $f : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ es función medible $\iff f^{-1}(\mathscr{B}^n) \subset \mathscr{A}$.

Nota. Para $n = 1$ se dice función medible (*unidimensional*), para $n > 1$ se denomina función medible *multidimensional*.

Proposición 1.4 (Caracterización de funciones medibles (2)). Una función entre un espacio medible y espacio Borel $f : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ es función medible $\iff f^{-1}((-\infty, x]) \in \mathscr{A}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nota. $f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} = [f \in B]$.
$f^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq x\} = [f \leq x]$.

Definición 1.8 (Función medible Borel). Una *función medible Borel* es una función medible cuyo espacio inicial también es espacio de Borel.

Ejemplos de funciones medibles:

Ejemplo 1.2. $\forall A \in \mathscr{A}$, función indicadora $1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Ejemplo 1.3. Función constante $f(\omega) = c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4. Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, función simple $f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}(\omega)$.

Nota. Cualquier función que parte del espacio medible $(\Omega, P(\Omega))$ es medible.

Veamos que la medibilidad de una función depende de la σ-álgebra del espacio de partida:

Ejemplo 1.5. $f(\omega) = \omega$ es medible si $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$, pero no lo es si $f : (\mathbb{R}, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ con $\mathscr{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ o } \overline{A} \text{ es numerable}\}$.

Finalmente sobre medidas y espacios medibles:

Definición 1.9 (Función σ-aditiva). Una *función de conjunto σ-aditiva definida sobre $\mathscr{A}$* es una función $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ que cumple:

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, A_i \cap A_j = \emptyset \, \forall i \neq j, \ \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

Definición 1.10 (Medida). Una *medida* μ es una función σ-aditiva *no negativa*, es decir que $\forall A \in \mathscr{A} \quad \mu(A) \geq 0$.

Definición 1.11 (Espacio de medida). Un *espacio de medida* es una terna $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ formada por un espacio medible y una medida sobre dicho espacio.

Definición 1.12 (Integral en espacio de medida). Sea una función medible $f : (\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ entonces definimos la *integral de f* en este espacio como:

$$\int f \, d\mu := \int_{\Omega} f \, d\mu = \int_A f \mu = \int f \chi_A d\mu$$

1.1.2. Teoría de la probabilidad

La teoría de la probabilidad se desarrolla sobre un tipo especial de espacios de medida llamados *espacios de probabilidad*, a los elementos de la σ-álgebra se les llama *sucesos*; y a la medida *probabilidad*.

Definición 1.13 (Probabilidad). Una función $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ se dice que es una *probabilidad* si cumple con los tres axiomas de Kolmogorov:

(i) $\forall A \in \mathscr{A}$, $P(A) \geq 0$ (no negativa).

(ii) $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ disjuntos $\implies P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (σ-aditividad).

(iii) $P(\Omega) = 1$ (normalización).

Luego una probabilidad es una medida normalizada.

Definición 1.14 (Variable aleatoria). Una *variable aleatoria*(v.a) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$ es una función medible de un espacio de probabilidad en un espacio Borel; es decir:

$$X : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}), \ \forall B \in \mathscr{B} \ X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

Proposición 1.5 (Caracterización de variables aleatorias). X es una variable aleatoria $\iff \forall x \in \mathbb{R} \ X^{-1}((-\infty, x]) = [X \leq x] \subset \mathscr{A}$.

Definición 1.15 (Vector aleatorio). Un *vector aleatorio*(v.a) $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \mapsto X(\omega)$, es una función medible multidimensional de un espacio de probabilidad en un espacio Borel (multidimensional).

La caracterización anterior es válida para vectores aleatorios, pero además veamos otra:

Definición 1.16 (Caracterización de vectores aleatorios). X es un vector aleatorio $\iff \forall i = 1, \ldots, n$, $X_i : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ es una variable aleatoria.

Demostración. Se deja propuesto como ejercicio. □

Definición 1.17 (Distribución de probabilidad). Se llama *distribución de probabilidad* de una variable aleatoria a una función de probabilidad definida en el espacio de Borel:

$$\begin{aligned} P_X : \mathscr{B} &\to \mathbb{R} \\ B &\mapsto P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P[X \in B] \end{aligned}$$

Demostración. Hecho en 2.2 □

El teorema de correspondencia nos dice que la función de conjunto P_X puede ponerse en correspondencia biunívoca con la función de distribución F_X.

Definición 1.18 (Función de distribución). La *función de distribución* es la función de puntos:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P[X \leq x] \end{aligned}$$

El teorema de correspondencia nos permite también establecer una correspondencia biunívoca entre la función de distribución y la función característica φ_X.

Definición 1.19 (Función característica). La *función característica* se define como $\varphi_X(t) = E[e^{itX}], \ \forall t \in \mathbb{R}$.

La correspondencia entre estos tres tipos de funciones se llama *ley de la variable aleatoria* y existe también la versión análoga para vectores aleatorios.

Definición 1.20 (Función masa de probabilidad). Sea X una v.a discreta, se define la *función masa de probabilidad* como $f(x) = P[X = x], \ \forall x \in \mathscr{B}_X$.

Su función característica asociada es $\varphi_X(t) = \sum_{x \in \mathscr{B}_X} e^{itx} P[X = x], \forall t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.21 (Función de densidad). Sea X una v.a continua, la *función de densidad* es la que cumple $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Su función característica asociada es $\varphi_X(t) = \int e^{it} f(x)dx, \forall t \in \mathbb{R}$.

1.1.3. Definición de proceso estocástico

Veamos que es un proceso estocástico y ciertas definiciones sobre él:

Definición 1.22 (Proceso estocástico). Un *proceso estocástico*(p.e) es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$, donde T un conjunto ordenado arbitrario y cada v.a está definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Nota. En algunas ocasiones llamaremos al proceso estocástico como proceso.

Definición 1.23 (Espacio paramétrico). Se llama *espacio paramétrico* al conjunto ordenado arbitrario T: en el caso discreto se suele tomar $\mathbb{N} \cup \{0\}$, y en el continuo $[0, +\infty)$.

Definición 1.24 (Proceso estocástico real). Un p.e se dice que es *real* si $\forall t \in T$, $X_t : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$.

Nota. En este curso son los procesos estocásticos que consideraremos, junto tambien a los p.e multidimensionales (espacio Borel de llegada muldimensional).

Definición 1.25 (Espacio de estados). Se llama *espacio de estados* al espacio Borel donde toman valores las v.a. En general, sea $E \subset \mathbb{R}$ con la σ-álgebra Borel restringida $\mathscr{B}_E$, el espacio de estados es $(E, \mathscr{B}_E)$,

Nota. Si no se especifica uno diferente, se considera $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$.

Definición 1.26 (Trayectoria). $\forall \omega \in \Omega$ fijo, definimos la *trayectoria* asociada a ω como

$$\begin{aligned} X(w) : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto X_t(w). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6. Proceso de recuento:

- $X_t \equiv$ número de veces que ocurre un suceso en el intervalo $[0, t)$.
- $T = [0, +\infty]$.
- $E = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $s \leq t \in T \implies X_s \leq X_t$ trayectorias crecientes a saltos.

Ejemplo 1.7. Recorrido aleatorio:

- $X_n \equiv$ posición de la particula en el instante n.
- $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $E = \mathbb{Z}$.

1.1.4. Algunas características de procesos estocásticos

Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ p.e definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, A, P), suponemos que existen las esperanzas de las siguientes definiciones:

Definición 1.27 (Función media). La *función media* es una función que asigna a cada t la esperanza de la variable aleatoria asociada a t, es decir:

$$\begin{aligned} \mu : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \mu(t) = \mu_t = E[X_t] \end{aligned}$$

Nota. Para que la definición sea válida se debe tener $\forall t \in T$, $E[|X_t|] < \infty$.

Definición 1.28 (Proceso centrado). Un p.e se dice *centrado* si se cumple $\mu(t) = 0$, $\forall t \in T$.

Definición 1.29 (Momentos no centrados de orden k). El *momento no centrado*

> *de orden k* se define como:
>
> $$\begin{aligned} \mu_k : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \mu_k(t) = E[X_t^k] \end{aligned}$$

> **Definición 1.30 (Momentos centrados de orden k).** El *momento centrado de orden k* se define como:
>
> $$\begin{aligned} m_k : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto m_k(t) = E[(X_t - \mu_t)^k] \end{aligned}$$

> **Definición 1.31 (Función varianza).** La *función varianza* es $\sigma_t^2 = m_2(t)$

> **Definición 1.32 (Función correlación).** La *función correlación* se define como:
>
> $$\begin{aligned} R : T \times T &\to \mathbb{R} \\ (s,t) &\mapsto R(s,t) = E[X_s X_t] \end{aligned}$$

> **Definición 1.33 (Función covarianza).** La *función covarianza* se define como:
>
> $$\begin{aligned} C : T \times T &\to \mathbb{R} \\ (s,t) &\mapsto C(s,t) = E[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)] = R(s,t) - \mu_s \mu_t \end{aligned}$$

Nota. Consideraciones:

- $C(t,t) = \sigma_t^2$.
- Si el proceso es centrado entonces la correlación y la covarianza coinciden.

> **Definición 1.34 (Procesos de segundo orden).** Un p.e $\{X_t\}_{t\in T}$ se dice de *segundo orden* si $\forall t \in T$, $E[X_t^2] < \infty$ (las v.a son cuadrado integrables).

1.2. Clasificación de los procesos estocásticos

1.2.1. Clasificación atendiendo al T y E

Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ p.e definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, A, P) con espacio de estados $(E, \mathscr{B}_E)$.

> **Definición 1.35 (Procesos en tiempo discreto).** Un p.e es en *tiempo discreto* si T es discreto, es decir, $T \subset \mathbb{Z}$.

Nota: para TD usaremos $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y notamos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (sucesiónes de v.a).

Definición 1.36 (Procesos en tiempo continuo). Un p.e es en *tiempo continuo* si T es continuo, es decir, $T \subset \mathbb{R}$.

Nota: para TC usaremos $T = [0, +\infty]$ y notamos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Definición 1.37 (Procesos discretos). Un p.e es *discreto* si E es discreto, es decir, E es conjunto numerable.

Nota: también se les denota como Cadenas.

Definición 1.38 (Procesos continuos). Un p.e es en *continuo* si E es continuo, es decir E es conjunto no numerable.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1.8. PDTD. Resultado de lanzar un dado en el n-ésimo lanzamiento.
$T = \mathbb{N}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ejemplo 1.9. PCTD. Cantidad de lluvia en el n-ésimo día.
$T = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_0^+$.

Ejemplo 1.10. PDTC. Cantidad de clientes en el instante t.
$T = [0, +\infty)$, $E = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejemplo 1.11. PCTC. Cantidad de lluvia en el instante t.
$T = [0, +\infty)$, $E = \mathbb{R}_0^+$.

1.2.2. Clasificación atendiendo a la relación entre las variables del proceso

Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ p.e definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Definición 1.39 (Proceso independiente). Un p.e es *independiente* si $\forall n > 1, t_1, \ldots, t_n \in T$

$$X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} \text{ son v.a independientes.}$$

Definición 1.40 (Proceso con incrementos independientes). Un p.e tiene *incrementos independientes* si $\forall n > 1, \forall t_1 < \ldots < t_n \in T$

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{son v.a independientes.}$$

Definición 1.41 (Proceso con incrementos estacionarios). Un p.e tiene *incrementos estacionarios* si $\forall s < t \in T, \forall h$

$$(X_t - X_s) \sim (X_{t+h} - X_{s+h}).$$

Nota. $X \sim Y$ indica que X sigue la misma distribución que Y.

Definición 1.42 (Proceso estacionario). Un p.e es *estrictamente estacionario* si $\forall n, \forall t_1 < \ldots < t_n \in T, \forall h$

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \sim (X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}).$$

Definición 1.43 (Proceso débilmente estacionario). Un p.e de 2º orden es *débilmente estacionario* si cumple

(*i*) Su función media es constante
(*ii*) $C(s,t) = C(s+h, t+h) = C(0, t-s), \ \forall s, t \in T.$

Nota. Todos procesos de *2º orden* estrictamente estacionarios son débilmente estacionarios.

Definición 1.44 (Martingala (tiempo discreto)). Un p.e es una *martingala* si $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E[X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n] = X_n \ \ c.s$$

Definición 1.45 (Procesos de Markov). Un p.e es un *Proceso de Markov* si $\forall s < t \in T, \forall B \in \mathscr{B}$

$$P[X_t \in B | X_n, \ n \leq s] = P[X_t \in B | X_s] \ \ c.s$$

1.3. Procesos estocásticos en tiempo discreto (PETD): Trayectorias y distribución

1.3.1. Definición de PETD

Consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, espacio paramétrico discreto $T \equiv \mathbb{N}$, y espacios de estados $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$.

Definición 1.46 (Proceso estocástico en tiempo discreto). Un *p.e en tiempo discreto*(PETD) es una sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a definidas en $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ t.q $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$X^{-1}(B) \in \mathscr{A}, \forall B \in \mathscr{B} \iff [X \leq x] \in \mathscr{A}, \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3.2. Trayectorias en un PETD

Definición 1.47 (Trayectoria (PETD)). Sea un PETD $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, fijando $\omega \in \Omega$

definimos la *trayectoria* de ω como:

$$\begin{aligned} X(\omega): \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto X_n(\omega) \end{aligned}$$

Vemos que $\{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales. Así, definiendo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $\{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Definición 1.48 (Trayectoria asociada (PETD)). Sea un PETD $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definimos la *trayectoria asociada* como la función que asigna a cada elemento su trayectoria:

$$\begin{aligned} \chi : (\Omega, \mathscr{A}) &\to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}^{\mathbb{N}}) \\ \omega &\mapsto X(\omega) = \{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Necesitamos saber como es el espacio Borel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}^{\mathbb{N}})$, para ello veamos unas definiciones:

Definición 1.49 (Rectángulo). Dados $B_1, \ldots, B_n \subset \mathbb{R}$ llamamos un *rectángulo* de lados $B_1, \ldots, B_n$ a $\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n\} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \times \mathbb{R} \times \ldots$.

Definición 1.50 (Rectángulo medible). Un *rectángulo medible* es un rectángulo donde $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}$.

Definición 1.51 (Clase de rectángulos medibles). Denotamos por $\mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ la *clase de rectángulos medibles*.

Definición 1.52 (Semi-álgebra). Una *semi-álgebra* sobre Ω es un conjunto $\mathscr{C} \in \mathscr{P}(\Omega)$ verificando:

(i) $\Omega \in \mathscr{C}$

(ii) $\forall A, B \in \mathscr{C} \implies A \cap B \in \mathscr{C}$

(iii) $\forall A \in \mathscr{C} \implies \overline{A}$ es unión finita disjunta de elementos de $\mathscr{C}$.

No hay ningún método constructivo para hallar la σ-álgebra minimal asociada a un conjunto, pero si tenemos una semi-álgebra solo nos falta comprobar que estén los complementarios, o lo que es lo mismo, que las uniones finitas disjuntas estén.

Definición 1.53 (σ-álgebra de rectángulos medibles). El *σ-álgebra de rectángulos medibles* es el σ-álgebra minimal generada por los rectangulos medibles, es decir, $\sigma(\mathscr{C}^{\mathbb{N}})$.

Definición 1.54 (σ-álgebra Borel sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). La *σ-álgebra Borel sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$* es $\mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ que es la σ-álgebra sobre la clase $\mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, es decir $\mathscr{B}^{\mathbb{N}} \equiv \sigma(\mathscr{C}^{\mathbb{N}})$.

Teorema 1.1 (Teorema de medibilidad (Caracterización de PETD)). Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ espacio de probabilidad, $T \equiv \mathbb{N}$, consideramos $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ y

$$\begin{aligned} \chi : \Omega &\to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \omega &\mapsto \{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Entonces, $\chi : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}^{\mathbb{N}})$ es función medible $\iff$ $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$ es v.a $\iff$ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es PETD.

1.3.3. Distribución de un PETD

Definición 1.55 (Distribución de un PETD). Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un PETD definido sobre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, la *distribución del PETD* es una probabilidad definida:

$$\begin{aligned} P_\chi : \mathscr{B}^{\mathbb{N}} &\to [0,1] \\ B &\mapsto P(\chi^{-1}(B)) = P[\chi \in B] \end{aligned}$$

P_χ está bien definida porque $\chi^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ al ser χ función medible (T. medibilidad), y es una probabilidad (se puede comprobar facilmente).

Por los Teoremas de extensión podemos conocer la medida en el σ-álgebra conociendo solo la medida finita en el semi-álgebra, ya que se extiende de forma única a una medida sobre el álgebra minimal sobre la semi-álgebra (sumatoria de los conjuntos); que a su vez se extiende de forma única sobre la σ-álgebra minimal sobre la álgebra (que desconocemos).

Teorema 1.2 (Teorema de consistencia de Kolmogorov). Sea $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n medida en $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ verificando la *propiedad de consistencia*:

$$P_n(B_1 \times \ldots \times B_n) = P_{n+1}(B_1 \times \ldots \times B_n \times \mathbb{R}),\ \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}$$

Entonces:

$$\exists!\ \hat{P} : \mathscr{B}^{\mathbb{N}} \to [0,1],\ \hat{P}(\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n\}) = P_n(B_1 \times \ldots \times B_n)$$

Corolario 1.1. La distribución de probabilidad P_χ está determinada por las distribuciones finito dimensionales, $\forall n \in \mathbb{N}$, $dist(X_1, \ldots, X_n) = P_n = P_{(X_1,\ldots,X_n)}(B_1 \times \ldots \times B_n) = P[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n]$.

Demostración. Veamos que $\{P_{(X_1,\ldots,X_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de distribuciones de probabilidad que verifican la propiedad de consistencia.

Se verifica ya que $P_{(X_1,\ldots,X_n)}(B_1 \times \ldots \times B_n) = P[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = P[X_1 \in$

$B_1, \ldots, X_n \in B_n, X_{n+1} \in \mathbb{R}] = P_{(X_1,\ldots,X_n,X_{n+1})}(B_1 \times \ldots \times B_n \times R)$.

Ahora veamos que $P_\chi \equiv \hat{P}$.

Sea $S \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, $P_\chi(S) = P(\chi^{-1}(S)) = P\{w \in \Omega : \ \chi(\omega) \in S\} = P\{\omega \in \Omega : \{X_n(w)\}_{n\in\mathbb{N}} \in S\} = P[X_1 \in B, \ldots, X_n \in B_n] = P_{(X_1,\ldots,X_n)}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \hat{P}(S)$ □

1.4. Procesos estocásticos en tiempo continuo (PETC): Trayectorias y distribución

1.4.1. Definición de PETC

Definición 1.56 (Proceso estocástico en tiempo continuo). Sea espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ y un intervalo $T \subseteq R$, un *proceso estocástico en tiempo continuo*(PETC) $\{X_t\}_{t\in T}$ es una familia de v.a definidas sobre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, es decir:

$$\forall t \in T,\ X_t : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}) \text{ es medible } \iff X_t^{-1}(B) \in \mathscr{A},\ \forall B \in \mathscr{B} \iff X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathscr{A},\ \forall x \tag{1}$$

1.4.2. Trayectorias

Definición 1.57 (Trayectoria(PETC)). Sea $\omega \in \Omega$, definimos la *trayectoria* de ω como

$$\begin{aligned} X(\omega) : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Tenemos que ver ahora si la función que asocia elementos a sus trayectorias es medible:

$$\begin{aligned} \chi : \Omega &\to \mathbb{R}^T \\ \omega &\mapsto \{X_t(\omega)\}_{t\in T} \end{aligned}$$

Definición 1.58 ($\mathbb{R}^T$). Definimos $\mathbb{R}^T$ como $\mathbb{R}^T = \{f : T \to \mathbb{R}\}$ (trayectorias).

Necesitamos un σ-álgebra con $\mathbb{R}^T$, veamos como la definimos:

Definición 1.59 (Rectángulo en $\mathbb{R}^T$). Definimos el *rectángulo de lados* $B_1, \ldots, B_n$ con $B_i \subseteq \mathbb{R}$ como $R = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t_1) \in B_1, \ldots, f(t_n) \in B_n,\ \forall t_1, \ldots, t_n \in T\}$.

Definición 1.60 (σ-álgebra Borel $\mathscr{B}^T$). Definimos *la σ-álgebra Borel* $\mathscr{B}^T$ como el σ-álgebra minimal sobre el álgebra de rectángulo medibles, es decir, $\mathscr{B}^T = \sigma(\text{Álg. de rect. medibles}) = \sigma(\mathscr{C}^T)$.

Definición 1.61 (Teorema de medibilidad(PETC)). Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, un intervalo $T \subseteq \mathbb{R}$, $\forall t \in T$, las funciones $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, y la función

$$\begin{aligned} \chi : \Omega &\to \mathbb{R}^T \\ \omega &\mapsto \{X_t(\omega)\}_{t\in T} \end{aligned}$$

. Entonces $\chi : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}^T, \mathscr{B}^T)$ es medible $\iff$ $\forall t \in T$, $X_t : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ es v.a $\iff$ $\{X_t\}_{t\in T}$ es un PETC.

1.4.3. Distribución de un PETC

Definición 1.62 (Distribución de un PETD). La *distribución de un PETD* $\{X_t\}_{t\in T}$ definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ es una probabilidad definida como:

$$\begin{aligned} P_\chi : \mathscr{B}^T &\to [0,1] \\ B &\mapsto P_\chi(B) = P(\chi^{-1}(B)) = P[\chi \in \mathscr{B}] \end{aligned}$$

Está bien definida por ser χ medible, y es una probabilidad (comprobable fácilmente).

1.4.4. Equivalencia de procesos

Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ el espacio de probabilidad, espacio paramétrico $T \subseteq \mathbb{R}$ y $\{X_t\}_{t\in T}$, $\{Y_t\}_{t\in T}$ dos PETC con distribuciones P_χ y P_y respectivamente.

Definición 1.63 (Equivalencia en sentido amplio de procesos). Dos PETC $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{Y_t\}_{t\in T}$ son *equivalentes en sentido amplio* si y solo si tienen la misma distribución, es decir, $P_\chi \equiv P_y$ o lo que es lo mismo:

$$P_\chi(B) = P_y(B),\ \forall B \in \mathscr{B}^T$$

Para esta definición no es necesario que los dos procesos estén definidos en el mismo espacio de probabilidad.

Proposición 1.6 (Caracterización de equivalencia). Dos PETC $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{Y_t\}_{t\in T}$ son *equivalentes en sentido amplio* si y solo si sus distribuciones finito-dimensional son iguales, es decir:

$$P[X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n], \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t_1, \ldots, t_n \in T,\ \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}$$

Definición 1.64 (Equivalencia de procesos). Dos PETC $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{Y_t\}_{t\in T}$ son *equivalente* si y solo si todas sus v.a son iguales casi seguramente, es decir:

$$P[X_t = Y_t] = 1, \ \forall t \in T$$

Definición 1.65 (Indistinguibilidad de procesos). Dos PETC $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{Y_t\}_{t\in T}$ son *indistinguibles* si y solo si

$$[X_t - Y_t] \in \mathscr{A}, \ P[X_t = Y_t, t \in T] = 1$$

Proposición 1.7. Sean las siguientes definiciones:

(*i*) Equivalentes en sentido amplio
(*ii*) Equivalentes
(*iii*) Indistinguibles

Entonces $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$, pero $1 \not\Rightarrow 2 \not\Rightarrow 3$.

Demostración. $\boxed{3 \Rightarrow 2}$
$1 = P[X_t = Y_t, \ t \in T] \leq P[X_t = Y_t] \leq 1 \implies P[X_t = Y_t] = 1, \forall t \in T.$
$\boxed{2 \Rightarrow 1}$
Denotamos $A_j = [X_{t_j} = Y_{t_j}]$, tenemos que

$$1 \geq P[X_{t_1} = Y_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = Y_{t_n}] = P[\bigcap_{j=1}^{n} A_j] = 1 - P(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n} P(\overline{A_j}) = 1$$

Luego tenemos que $P[X_t = Y_t] = 1 \implies P[X_{t_1} = Y_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = Y_{t_n}] = 1.$
$P[X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n] = P$
$\boxed{2 \not\Rightarrow 3}$
Sea el espacio de probabilidad $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]}, P \equiv \text{Lebesgue})$, con $T = [0,1]$, consideramos las v.a $\forall t \in T, \forall \omega \in \Omega, X_t(\omega) = 0$ y $Y_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq t \\ 1, & \omega = t \end{cases}$

Entonces $P[X_t \neq Y_t] = P\{\omega \in \Omega : \ X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = P\{w = t\} = 0$, por lo que los PETC son equivalentes, pero $P\{\omega \in \Omega : \ X_t(w) = Y_t(w), \ t \in T\} = P(\emptyset) = 0$, luego no son indistinguibles.
$\boxed{1 \not\Rightarrow 2}$
$P[X_t = Y_t] = P[X_t = 0, Y_t = 0] + P[X_t = 1, Y_t = 1] = P[X_t = 0]P[X_t = 0] + P[X_t = 1]P[Y_t = 1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, luego no son equivalentes. □

Nota. Para PETD se define exactamente igual y todo es igual, excepto para la indistinguibilidad que el conjunto pertenezca a la σ-álgebra ya se cumple por ser un conjunto numerable.

Parte II.
Ejercicios

2. Tema 1

2.1. Ejercicios mandados

> **Ejercicio 2.1.** Definir la distribución de probabilidad, función de distribución y función característica de una variable aleatoria y expresar dichas funciones en términos de la función masa de probabilidad o la función de densidad, según que la variable sea de tipo discreto o continuo, respectivamente.

Solución. La *distribución de probabilidad* de una variable aleatoria es una función de probabilidad definida en el espacio de Borel:

$$\begin{aligned} P_X : \mathscr{B} &\to [0,1] \\ B &\mapsto P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P[X \in B] \end{aligned}$$

La *función de distribución* es la función de puntos definida como:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P[X \le x] \end{aligned}$$

La *función característica* es la función definida como

$$\begin{aligned} \varphi_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \varphi_X(t) = E[e^{itX}] \end{aligned}$$

- Caso discreto:

$$\forall B \in \mathscr{B},\ P_X(B) = \sum_{x \in B \cap E_X} P[X = x] = \sum_{x \in B \cap E_X} f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P_X[(-\infty, x]] = \sum_{x \in E_X, x \le y} P[X = x] = \sum_{x \in E_X, x \le y} f(x)$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{x \in E_X} e^{itx} P[X = x] = \sum_{x \in E_X} e^{itx} f(x)$$

- Caso continuo:

$$\forall B \in \mathscr{B},\ P_X(B) = \int_{\mathscr{B}} f(x)dx$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P_X[(-\infty, x]] = P[X \in (-\infty, x]] = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$$

Donde $f(x)$ representa la función masa de probabilidad en el caso discreto, y la función densidad en el caso continuo.

> **Ejercicio 2.2.** Demostrar que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una medida de probabilidad definida sobre la σ-álgebra de Borel.

Solución. Veamos si

$$\begin{aligned} P_X : \mathscr{B} &\to \mathbb{R} \\ B &\mapsto P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P[X \in B] \end{aligned}$$

cumple con los tres Axiomas de Kolmogorov, usando que P es una probabilidad:

(i) $P_X(B) = P[X \in B] \geq 0,\ \forall B \in \mathscr{B}$.

(ii) $\forall \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}$ disjuntos

$$P_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = P[X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n] = P[\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \in B_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P[X \in B_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n)$$

(iii) $P_X(\mathbb{R}) = P[X^{-1}(\mathbb{R})] = P[\Omega] = 1$

> **Ejercicio 2.3.** Demostrar la caracterización de vectores aleatorios mediante variables aleatorias.

Solución. Sea $X = (X_1, \ldots, X_n) : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$, entonces X es vector aleatorio $\iff X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias.

$$\begin{aligned} X \text{ v.a} \iff \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ X^{-1}((-\infty, x]) = [X \leq x] = \\ = [X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x_i] \subset \mathscr{A} \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall x_i \in \mathbb{R} \\ \mathscr{A} \supset [X_i \leq x_i] = X^{-1}((-\infty, x_i]) \iff X_1, \ldots, X_n \text{ v.a} \end{aligned}$$

Vemos la penúltima implicación tomando $x_j = \infty \forall j \neq i$ en $\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x_i] \subset \mathscr{A} \implies [X_i \leq x_i] \subset \mathscr{A}$, y al revés sabiendo que $\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x_i] \subset [X_i \leq x_i] \subset \mathscr{A}$.

Ejercicio 2.4. Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $E[X]=0$, $Var(X)=1$ y la variable Y tiene distribución uniforme en $[-\pi,\pi]$. Consideremos el proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ definido por

$$X_t = X\cos(t+Y)$$

Calcular las funciones media y covarianza y decir si el proceso es débilmente estacionario.

Solución. Primero veamos que efectivamente $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico. Para $t\geq 0$, tenemos que $X_t:(\Omega,\mathscr{A},P)\to(\mathbb{R},\mathscr{B})$, luego falta ver que es medible, pero funciones Borel de variables aleatorias son medibles y el producto de funciones medibles es medible.

Función media: $\mu(t)=E[X_t]=E[X\cos(t+Y)]$, como $\cos(t+Y)$ es función medible por composición de funciones medibles junto a que X y Y son independientes, entonces X y $\cos(t+Y)$ son independientes; luego $E[X\cos(t+Y)] = E[X]E[\cos(t+Y)]=0$. Luego $\mu(t)=0$, $\forall t\geq 0$.

Función covarianza: $C(s,t)=R(s,t)-\mu_t\mu_s=R(s,t)=E[X_tX_s]=E[X^2\cos(t+Y)\cos(s+Y)]$, por la independencia otra vez, $E[X^2\cos(t+Y)\cos(s+Y)] = E[X^2]E[\cos(t+Y)\cos(s+Y)] = Var(X)E[\cos(t+Y)\cos(s+Y)] = E[\cos(t+Y)\cos(s+Y)]$, resolvemos la integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+y)\cos(s+y)dy$ y tenemos que $C(s,t)=\frac{1}{2}\cos(s-t)$.

Este pe. es débilmente estacionario ya que su función media es constante, $\mu(t)=0$, $\forall t\geq 0$; y la función covarianza cumple $C(s,t)=\frac{1}{2}\cos(s-t)=\frac{1}{2}\cos(s+h-t-h)=C(s+h,t+h)=C(0,t-s)$, $\forall t,s\geq 0$.

Ejercicio 2.5. Ejemplos de procesos estocásticos atendiendo a la clasificación según el espacio de estados y espacio paramétrico.

Solución. Ejemplos:

- PDTD: Nº de productos fabricados al día $\equiv X_n$
  $T\equiv\mathbb{N}$(días), $E=\mathbb{N}\cup\{0\}$(nº productos).
- PCTD: Nota media por curso $\equiv X_n$
  $T=\{1,2,3,4,5\}$(curso), $E=[0,10]$(nota media).
- PDTC: Nº de lanzamientos hechos en el instante $t\equiv X_t$
  $T=\mathbb{R}_0^+$(tiempo), $E=\mathbb{N}\cap\{0\}$(lanzamientos).
- PCTC: Temperatura en una ciudad en el instant $t\equiv X_t$
  $T=\mathbb{R}_0^+$(tiempo), $E=\mathbb{R}_0^+$(Kelvin).

Ejercicio 2.6. Demostrar que si las componentes del vector aleatorio $X = (X_1,\ldots,X_n)^T$ son independientes, entonces la funcion característica del vector X es igual al producto de las funciones características de las variables X_k, $k=1,\ldots,n$.

Solución. Sea un vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$, la función característica del vector X es $\varphi_X(t) = E[e^{it^TX}] = E[e^{i(t_1X_1+\ldots+t_nX_n)}] = E[e^{it_1X_1+\ldots+it_nX_n}] = E[\prod_{k=1}^{n} e^{it_kx_k}] = \prod_{k=1}^{n} E[e^{it_kx_k}] = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t_k)$. Podemos separar las esperanzas ya que $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y e^{itx} es función Borel de variable aleatoria; y por tanto e^{itX_k}, $k = 1, \ldots, n$, siguen siendo independientes.

Ejercicio 2.7. Demostrar que para un proceso con incrementos independientes las distribuciones finito dimensionales del proceso (esto es, las distribuciones de los vectores $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})^T$, $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$) están determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales (X_{t_1}) y por las distribuciones de los incrementos $(X_{t_i} - X_{t_1-1}$, $i = 2, \ldots, n)$.

Solución. Tenemos un $\{X_t\}_{t\in T}$ p.e con incrementos independientes, entonces $\forall t_1 < \ldots < t_n \in T, X_{t_1}, X_{t_2} - x_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son v.a independientes.

Definimos $S_1 = X_{t_1}$, $S_2 = X_{t_2} - X_{t_1} \implies X_{t_2} = S_1 + S_2$

$S_3 = X_{t_3} - Xt_2 \implies X_{t_3} = S_1 + S_2 + S_3$, por tanto $X_{t_k} = \sum_{j=1}^{k} S_j$.

$\phi_{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})}(u_1, \ldots, u_n) = \phi_{(s_1, \ldots, s_n)}(v_1, \ldots, v_n)$

Ejercicio 2.8. Demostrar que la clase de rectángulos medibles $\mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ es una semi-álgebra.

Solución. Tenemos que

$$\mathscr{C}^{\mathbb{N}} = \{\prod_{i=1}^{\infty} A_i : n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathscr{B},\ A_j = \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n,\ j > n\}$$

.

Veamos que $\mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ es una semi-álgebra.

(i) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$.
Como $\mathbb{R} \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ es σ-álgebra) $\implies \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}} \implies A \cap B \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$.
Sean $A, B \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, $A \cap B = (\prod_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\prod_{n=1}^{\infty} B_n) = \prod_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, ya que $A_i, B_i \in \mathscr{B} \implies A_i \cap B_i \in \mathscr{B}$ (por ser $\mathscr{B}$ σ-álgebra).

(iii) $\forall A, B \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, $\exists \{C_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tal que $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.
Sean $A, B \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, $A \setminus B = (\prod_{n=1}^{\infty} A_n) \setminus (\prod_{n=1}^{\infty} B_n) = \prod_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n) = C \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, ya que $A_i \setminus B_i = A_i \cap \overline{B_i} \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ es σ-álgebra).

Ejercicio 2.9. Demostrar el Teorema de medibilidad para procesos estocásticos en tiempo discreto.

Solución. Sea la función

$$\begin{aligned}\chi : (\Omega, \mathscr{A}) &\to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}^{\mathbb{N}})\\ \omega &\mapsto X(\omega) = \{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Entonces χ es medible $\iff$ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son medibles.
$\boxed{\Longrightarrow}$
$\boxed{\Longleftarrow}$

2.2. Ejercicios en clase

Ejercicio 2.10. Sea el espacio de probabilidad $([-1,1], \mathscr{B}_{[-1,1]}, U[-1,1])$ y

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) = \begin{cases} -1, \omega \in [-1, \frac{-1}{n}] \\ 0, \omega \in [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, \omega \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Y las trayectorias:

$$\omega \in [-1,0) \to \chi(\omega) = \begin{cases} 0, & n \leq \frac{-1}{\omega} \\ -1, & n \geq \frac{-1}{w} \end{cases}$$

$$\omega \in [0,1] \to \chi(\omega) = \begin{cases} 0, & n < \frac{1}{\omega} \\ 1, & n \geq \frac{1}{w} \end{cases}$$

Solución. Los pasos a seguir son:

(*i*) Demostrar que tenemos un PETD (p.e)
(*ii*) Obtener las trayectorias
(*iii*) Obtener la distribución basandonos en la trayectoria
(*iv*) Ver que la distribución queda dada por distribuciones finito dimensionales

Veamos la distribución:
$P[X_1 = 0] = P((-1,1)) = 1$
$P[X_1 = 0, X_2 = 0] = P[(-1,1) \cap (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})] = P[(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})] = \frac{1}{2}$
$P[X_1 = 0, X_2 = 1] = P[(-1,1) \cap [-1, \frac{-1}{2})] = P[(-1, \frac{-1}{2}]] = \frac{1}{4}$
$P[X_1 = 0, X_2 = 2] = P[(-1,1) \cap (\frac{1}{2}, 1]] = P[[\frac{1}{2}, 1]] = \frac{1}{4}$
$P[X_1 = 0, \dots, X_n = 0] = P[(-1,1) \cap (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \cap \dots \cap (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})] = P((\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$.
$P[X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = -1, \dots, X_n = -1] = P((-1,1) \cap \dots \cap (\frac{-1}{k-1}, \frac{1}{k-1}) \cap [-1, \frac{-1}{k}] \cap \dots \cap [-1, \frac{-1}{n}]) = P((\frac{-1}{k-1}, \frac{1}{k-1}) \cap [-1, \frac{-1}{k}]) = \frac{1}{2k(k-1)}$
$P[X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1, \dots, X_n = 1] = P((-1,1) \cap \dots \cap [\frac{1}{k-1}, 1] \cap \dots \cap [\frac{1}{n}, 1]) = P((\frac{-1}{k-1}, \frac{1}{k-1}) \cap [\frac{1}{k}, 1]) = \frac{1}{2k(k-1)}$
Comprobamos que es una probabilidad (viendo que suma):

$$\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k(k-1)}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k(k-1)}=\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)},\ k=2,3,\ldots,n$$

Por ejemplo por $n=3,4$:
$n=3\to\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1.$
$n=4\to\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1.$

2.3. Ejercicios PETC

Ejercicio 2.11. Sea $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espacio probabilístico, con $\Omega=[0,1]$, $\mathscr{A}=\mathscr{B}_{[0,1]}$, y P la distribución uniforme en $[0,1]$. Definimos $\{X_n\}_{n>4}$ sobre $(\Omega,\mathscr{A},P)$ por

$$\forall n>4,\ X_n(\omega)=\begin{cases}0,\ \text{si } 0\le\omega<\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\\ 1,\ \text{si } \frac{1}{4}-\frac{1}{n}\le\omega<\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\ 2,\ \text{si } \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\le\omega<\frac{3}{4}-\frac{1}{n}\\ 3,\ \text{si } \frac{3}{4}-\frac{1}{n}\le\omega\le 1\end{cases}$$

Demostrar que $\{X_n\}_{n>4}$ es un proceso estocástico, calcular sus trayectorias y su distribución.

Solución. Veamos primero que es un proceso estocástico (las X_n son medibles):

Como $X_n=1_{[\frac{1}{4}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]}+2_{[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{3}{4}-\frac{1}{n}]}+3_{[\frac{3}{4}-\frac{1}{n},1]}$, es decir, es suma de funciones indicadoras de conjuntos medibles, por tanto medibles.

Definimos las trayectorias:

$$\begin{aligned}\chi:\Omega&\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ \omega&\mapsto\{X_n(\omega)\}_{n>4}\end{aligned}$$

Tenemos que:

- $\chi(0)=\{0,0,\ldots,0,\ldots\}$
- $\chi(\frac{1}{4})=\{1,1,\ldots,1,\ldots\}$
- $\chi(\frac{1}{2})=\{2,2,\ldots,2,\ldots\}$
- $\omega\in[\frac{3}{4},1]\implies\chi(\omega)=\{3\}_{n>4}$
- $\omega\in(0,\frac{1}{4})=(0,\frac{1}{4}-\frac{1}{n})\cup[\frac{1}{4}-\frac{1}{n},\frac{1}{4}]$
  - $\omega<\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\iff\frac{1}{n}<\frac{1}{4}-\omega\iff n>\frac{4}{1-4\omega}\implies X_n(\omega)=0$
  - $\omega\ge\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\iff n\le\frac{4}{1-4\omega}\implies X_n(\omega)=1$

  Por tanto
- $\omega\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})=(\frac{1}{4},\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\cup[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2})$
  - $\omega<\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\iff n>\frac{2}{1-2\omega}\implies X_n(\omega)=1$

– $\omega \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \iff n \geq \frac{2}{1-2\omega} \implies X_n(\omega) = 2$

Por tanto $\forall \omega \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}),\ \chi(\omega) =$

Ahora obtendremos la distribución, que está determinada por las distribuciones finito dimensionales:

- $P[X_5 = 0, X_6 = 0, \ldots, X_n = 0] = P[(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cap \ldots \cap (0, \frac{1}{4} - \frac{1}{n})] = P[(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{5})] = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$
- $P[X_5 = 1, X_6 = 1, \ldots, X_n = 1] = P[(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \cap \ldots \cap (\frac{1}{4} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})] = P[(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{5})] = \frac{1}{n} + \frac{1}{20}$
- $P[X_5 = 2, \ldots, X_n = 2] = P[C_5 \cap \ldots \cap C_n] = P[(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{3}{4} - \frac{1}{5})] = \frac{1}{20} + \frac{1}{n}$
- $P[X_5 = 3, \ldots, X_n = 3] = P[D_5 \cap \ldots D_n] = P[(\frac{3}{4} - \frac{1}{n}, 1)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$
- $P[X_5 = 1, X_6 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0, \ldots, X_n = 0] = P[B_5 \cap B_6 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap A_k \cap \ldots \cap A_n] = P[(\frac{1}{4} - \frac{1}{k-1}, \frac{1}{4} - \frac{1}{k})] = \frac{1}{(k-1)k}$
- $P[X_5 = 2, X_6 = 2, \ldots, X_{k-1} = 2, X_k = 1, \ldots, X_n = 1] = P[C_5 \cap \ldots \cap C_{k-1} \cap B_k \cap \ldots \cap B_n] = P[(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}, \frac{3}{4} - \frac{1}{5}) \cap (\frac{1}{4} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{k})] = P[(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{k})] = \frac{1}{(k-1)k}$
- $P[X_5 = 3, \ldots, X_{k-1} = 3, X_k = 2, \ldots, X_n = 2] = P[D_5 \cap \ldots \cap D_{k-1} \cap C_k \cap \ldots \cap C_n] = P[(\frac{3}{4} - \frac{1}{k-1}, \frac{3}{4} - \frac{1}{k})] = \frac{1}{(k-1)k}$

Comprobamos que las probabilidades suman uno:

$$\frac{1}{20} + (\frac{1}{n} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{n} + \frac{1}{20}) + (\frac{1}{n} + \frac{1}{20}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) + 3\sum_{k=6}^{n} \frac{1}{(k-1)k} =$$
$$= \frac{3}{n} + \frac{2}{5} + 3\sum_{k=6}^{n} \frac{1}{(k-1)k},\ n > 4$$

Tomamos valores de n y lo comprobamos fácilmente, por ej $n = 5, 6, \ldots, 10, 50$.