Ecuaciones Diferenciales I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Ecuaciones Diferenciales I

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

Parte I.
Teoría

1. Primeras definiciones

En esta asignatura estudiaremos ecuaciones diferenciales, es decir, ecuaciones que relacionan una función $x \in \mathscr{C}^k(I)$ con sus derivadas. Para formalizar este concepto, vamos a dar algunas definiciones.

Definición 1.1 (Dominio). Sea $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Diremos que es un dominio si es abierto y conexo.

Nota. Ya sabemos que un dominio, por ser abierto y conexo, es conexo por arcos.

Durante todo el desarrollo de los apuntes, reservaremos la letra D para representar un dominio. Por un lado, necesitamos poder derivar, por lo que es natural exigir que D sea abierto. Por otro, muchos de los resultados que se aplican a funciones continuas exigen la conexión, por lo que es también una propiedad deseable.

Definición 1.2 (Ecuación diferencial). Sean $D \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$ un dominio y $\phi : D \to \mathbb{R}$ continua.

Entonces la relación

$$\phi\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{k)}(t)\right) = 0$$

es una ecuación diferencial de orden k.

Pensamos en t como la variable independiente, y en $x = x(t)$ como una función que representa la incógnita de nuestra ecuación (también llamada variable dependiente).

Definición 1.3 (Solución de una ecuación diferencial). Sean

- $\exists x^{i)}(t), \ \forall t \in I, \ \forall i = 1, \dots, k$
- $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{k)}(t)) \in D, \ \forall t \in I$
- $\phi(t, x(t), x'(t), \dots, x^{k)}(t)) = 0, \ \forall t \in I$

Entonces, x es solución de la ecuación diferencial dada por ϕ si

$$\phi(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0 \ \forall t \in I$$

Definición 1.4 (Problema de valores iniciales). Dada una ecuación diferencial $\phi : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1}$, un problema de valores iniciales es un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \phi\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{k)}(t)\right) = 0 \\ \left(x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{k-1)}(t_0)\right) = x_0 \end{cases}$$

Donde $(t_0, x_0) \in$???? es un punto dado, llamado **condición inicial**.

Nota. Cuando $k \geq 2$, se tiene que $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k})$

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Definición 2.1 (Forma normal de una ecuación diferencial de primer orden). Una ecuación diferencial de primer orden está en forma normal cuando la derivada aparece despejada, es decir, existe $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que podemos expresar la ecuación como

$$x' = F(t, x)$$

Se dice que (2) es la forma normal de (1).

Nota. Al pasar una ecuación diferencial a forma normal se podrían perder soluciones.

Vamos a ver algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales de primer orden y soluciones suyas (marcadas con subíndices).

Ejemplo 2.1.

$$x(t)^2 + x'(t)^2 = 4, \text{ o equivalentemente,}$$

$$\phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

Algunas soluciones son:

$$\begin{array}{ll} x_1(t) = 2 & x_2(t) = -2 \\ x_3(t) = \sqrt{2}\sin t & x_4(t) = \sqrt{2}\cos t \\ x_5(t) = \sqrt{2}\cos(t+\alpha) \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} & \end{array}$$

Ejemplo 2.2.

$$x'(t) = 7x(t), \text{ o equivalentemente,}$$

$$\phi(t, x, y) = y - 7x$$

Soluciones:

$$x_1(t) = e^{7t}, \quad x_2(t) = Ke^{7t} \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2.3. La ecuación $x(t)x'(t) = 1$ está dada por $\phi(t,x,y) = xy - 1$. ¿Es $\varphi(t) = \sqrt{2t+1}$ una solución de la ecuación?

φ está definida en $[-1/2, \infty)$ y es derivable en $I = (-1/2, \infty)$

- I es abierto de $\mathbb{R}$
- $\exists \varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}, \forall t \in I$
- $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D = \mathbb{R}^3, \forall t \in I$
- $\phi(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$

Comprobamos que por tanto que es solución.

También se puede despejar x' de la ecuación para hallar la forma normal:

$$x' = \frac{1}{x} \implies \phi(t,x,y) = y - \frac{1}{x}$$

Y podemos elegir entonces dos dominios distintos:

$$D_1 = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}$$
$$D_2 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$$

Nótese que al dividir por x, hemos eliminado la solución cero, pero como no era solución son la misma ecuación.

2.1. Modelos de tasa de crecimiento

Podemos pensar en una función $x(t)$ que represente una cantidad o proporción de población en el instante t respecto de algún tiempo inicial. Entonces, definimos la tasa de crecimiento como

$$\frac{x'(t)}{x(t)}$$

Veamos dos modelos que se ajustan a este problema, donde la tasa de crecimiento será constante en uno y variable en otro.

2.1.1. Ecuación de crecimiento constante

Si la tasa de crecimiento es constante, digamos $k \in \mathbb{R}$, la ecuación queda como sigue:

$$x' = kx, \tag{E}$$

Teorema 2.1. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\varphi(t)$ una solución de (E). Entonces,

$$\varphi(t) = Ae^{kt}, \ \forall t \in I$$

para algún $A \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\varphi(t)$ solución de $x'(t) = kx(t)$ definida en I. Para cada $t \in I$ considero $e^{-kt}\varphi(t)$, que es derivable y su derivada viene dada por:

$$(e^{-kt}\varphi(t))' = -ke^{-kt}\varphi(t) + e^{-kt}\varphi'(t) = -ke^{-kt}\varphi(t) + e^{-kt}k\varphi(t) = e^{-kt}\varphi(t)(-k+k) = 0, \ \forall t \in I$$

Por tanto, como I es conexo y $e^{-kt}\varphi(t)$ es continua en I, se tiene que:

$$e^{-kt}\varphi(t) = A,\ A \in \mathbb{R} \implies \varphi(t) = Ae^{kt}$$

□

2.1.2. Ecuación logística o de Verhulst

El problema de considerar una tasa de crecimiento constante es que, si es positiva, las soluciones (la población) crecen de forma indefinida. Una forma más adecuada de enfocar el problema es considerar un parámetro b que represente la capacidad del hábitat en cuestión, y pensar que la rapidez con la que varía la población es proporcional al número de individuos que hay en un instante y al número de individuos que faltan para alcanzar b.

$$x'(t) = ax(t)(b - x(t)),\ a, b > 0$$

Para resolver esta ecuación, emplearemos la técnica de resolución de ecuaciones de variables separadas, que veremos a continuación.

3. Métodos elementales de integración

3.1. Variables separadas

Consideramos la ecuación

$$x' = f(t)g(x)$$

con $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ continuas.

Sabemos que $x(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$ es una familia de soluciones, para las que $x' = 0$. Ahora, si suponemos que x no es constante, vamos a dar condiciones bajo las cuales la solución a un problema de valores iniciales dado por esa ecuación es única.

Suponemos además que $g(x) \neq 0\ \forall x \in (c, d)$.

Sea $x(t)$ solución de la ecuación $\implies$ $x : I \to \mathbb{R}$ tal que $I \subset (a, b)$, con $x(t) \in (c, d), \forall t \in I$

Entonces $\dfrac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t), \forall t \in I$

Fijado $t_0 \in I$, tal que $x(t_0) = x_0$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{g(x(t))} ds = \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \forall t \in I \implies G(x(t)) - G(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

Donde G es una primitiva de $\frac{1}{g}$. $G'(u) = \frac{1}{g(u)}$ tiene signo constante, luego G es estrictamente monótona. Por el teorema de la función inversa, existe G^{-1} y por tanto:

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right), \forall t \in I$$

Por tanto, dado un problema de valores iniciales para una ecuación de esta forma, con g no nula en ningún punto, las soluciones son de esta forma. Veamos ahora la unicidad de la solución.

Teorema 3.1. Sea $f \in \mathscr{C}(a,b), g \in \mathscr{C}(c,d)$, con $g(u) \neq 0, \forall u \in (c,d)$. Entonces dado $t_0 \in (a,b), x_0 \in (c,d)$, existe una única solución de $x' = f(t)g(x)$ que cumple que $x(t_0) = x_0$.

Si x_1 es otra solución $\implies$ $x_1 = x|_{I_1}$ con $I_1 \subset I$.

Demostración. Hemos visto que si x es una solución definida en un intervalo $\tilde{I}$, es de la forma

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right), \ t \in I$$

$$g(u) \neq 0 \ \forall u \in (c,d) \implies \frac{1}{g} \in \mathscr{C}(c,d) \implies G \text{ una primitiva de } \frac{1}{g}, \ G \in \mathscr{C}^1(c,d)$$

$$G'(u) = \frac{1}{g(u)} \neq 0, \ \forall u \in (c,d) \implies \exists G^{-1} : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ G^{-1} \text{ derivable}$$

Con V un abierto y $G(x_0) \in V$. Sean $x_0 \in (c,d)$ y $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \ F(t_0) = 0$.

Como V es abierto y F es continua, existe $\tilde{I} \ni t_0$ tal que

$$t \mapsto G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds \in V \text{ cuando } t \in \tilde{I}$$

Por tanto, $x(t) = G^{-1}(G(x_0) + F(t)), \ \forall t \in \tilde{I}$ está bien definida y por el teorema de la función inversa:

$$x'(t) = \frac{F'(t)}{G'(G^{-1}(G(x_0) + F(t)))} \overset{\text{TFC}}{=} g\left(G^{-1}(G(x_0) + F(t))\right) f(t) = g(x(t))f(t), \ t \in \tilde{I}$$

y

$$x(t_0) = x_0, \ t \in \tilde{I}$$

□

3.2. Cambio de variable en ecuaciones diferenciales

El objetivo del cambio de variable será transformar una ecuación en una más fácilmente resoluble. Vamos a estudiar el caso de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Consideramos una ecuación de este tipo en forma normal:

$$x' = F(t,x),\ F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (E)$$

y un difeomorfismo

$$\varphi : \quad D \to \widetilde{D}$$

de forma que, si $\widetilde{F} = F \circ \varphi$, la ecuación

$$\frac{dy}{ds} = \widetilde{F}(s,y) \quad (\widetilde{E})$$

es equivalente a la que estamos considerando.

Proposición 3.1. Dado $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : D \to \widetilde{D}$ un difeomorfismo, tal que

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x(t))F(t,x(t)) \neq 0\ \forall (t,x) \in D$$

Entonces el cambio de variable:

$$s := \varphi_1(t,x)$$
$$y := \varphi_2(t,x)$$

transforma (E) en otra equivalente $(\widetilde{E})$ $\quad \frac{dy}{ds} = \widetilde{F}(s,y)$ en el sentido de que para cualquier solución $x = x(t)$ de (E) definida en un intervalo I, existe una función $y = y(s)$ solución de $(\widetilde{E})$ definida en un intervalo J y $\varphi(t,x(t)) = (s(t),\ \ y(s(t)))\ \forall t \in I$ y recíprocamente.

Demostración. De una parte, sabemos que $\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{ds}$. De otra, si $x(t)$ es solución de la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{ds(t)}{dt} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x(t)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x(t))x'(t) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x(t)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x(t))F(t,x) \\[2ex] \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x(t)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x(t))x'(t) = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x(t)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x(t))F(t,x) \end{cases}$$

Con lo cual

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x(t)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x(t))F(t,x)}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x(t)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x(t))F(t,x)} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\varphi^{-1}(s,y(s))) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\varphi^{-1}(s,y(s)))F(\varphi^{-1}(s,y}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\varphi^{-1}(s,y(s))) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\varphi^{-1}(s,y(s)))F(\varphi^{-1}(s,y}$$

□

3.3. Ecuación homogénea

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua. Tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right) \implies F(t,x) = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

con $t \neq 0,\ f : I$ intervalo $\to \mathbb{R}, \dfrac{x}{t} \in (a,b)$.

$$Dom(F) = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0,\ \frac{x}{t} \in (a,b)\right\}$$

Podemos dividir el dominio de F en dos dominios (abiertos y conexos):

$$D_1 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0,\ at < x < bt\}$$
$$D_2 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t < 0,\ at > x > bt\}$$

Realizamos un cambio de variable:

$$s = t$$
$$y = \frac{x}{t}$$

Los nuevos dominios son:

$$\widetilde{D}_1 = \{s > 0, a < y < b\}$$
$$\widetilde{D}_2 = \{s < 0, a > y > b\}$$

La ecuación diferencial queda como una ecuación de variables separadas:

$$y' = \frac{1}{s}(f(y) - y)$$

que sabemos resolver.

3.3.1. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Tenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$F(t,x) = f\left(\frac{ax + bt + c}{a'x + b't + c'}\right)$$

Donde si $c, c' = 0$ entonces la ecuación ya es homogénea (diviendo entre t numerador y denominador).

Supongamos que las rectas del plano $ax + bt + c = 0$ y $a'x + b't + c' = 0$ tienen un punto de corte en $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Este punto verifica:

$$\begin{cases} a\beta + b\alpha + c = 0 \\ a'\beta + b'\alpha + c' = 0 \end{cases}$$

Entonces tomamos el cambio de variable:

$$s = t - \alpha$$
$$y = x - \beta$$

Que verifica que $\frac{ds}{dt} = 1 \neq 0$. Tenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f\Big(\frac{a(y+\beta)+b(s+\alpha)+c}{a'(y+\beta)+b'(s+\alpha)+c'}\Big)$$

$$y' = f\left(\frac{a\frac{y}{s}+b}{a'\frac{y}{s}+b'}\right) = g\Big(\frac{y}{s}\Big)$$

3.4. La ecuación lineal de orden 1

En este caso, tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$x' = F(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t) \tag{E}$$

con $\alpha, \beta \in \mathscr{C}(a,b)$, donde es inmediato que $F : (a,b)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal en x. Tomamos la ecuación homogénea asociada:

$$x' = \alpha(t)x$$

Sabemos que las soluciones de esta ecuación son:

$$x(t) = Ae^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}\ \forall t \in (a,b),\ A \in \mathbb{R}$$

Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial inicial en I. Entonces, sea $x := \varphi_1 - \varphi_2 \implies x' = \alpha x$.

Por tanto, toda solución es $\varphi(t) + Ae^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}$, con φ una solución concreta de la ecuación.

Eso quiere decir que nuestro problema se reduce a buscar una única solución, para ello lo que vamos a hacer es que nuestra constante (A) dependa de t, $\varphi(t) = A(t)e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}$ (método de variación de las constantes).

Si existen $I \subseteq (a,b)$ intervalo y $A \in \mathscr{C}^1(I)$ tal que $\varphi(t) = A(t)e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}$ es solución de (E), debe darse que

$$\varphi'(t) = A'(t)e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds} + A(t)\alpha(t)e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds} = A'(t)e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds} + \alpha(t)\varphi(t)$$

Luego, basta que $A'(t)e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds} = \beta(t)\ \forall t \in I$, es decir,

$$A'(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}\beta(t) \implies A(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds}\beta(t)$$

Proposición 3.2. Sean $P, Q \in \mathscr{C}^1(D)$ con D dominio de $\mathbb{R}^2$, si $\exists F \in \mathscr{C}^1(D)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} = P$ $\frac{\partial F}{\partial x} = Q$, entonces, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ en D.

Demostración.

$$P, Q \in \mathscr{C}^1(D) \implies F \in \mathscr{C}^2(D) \implies \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}$$

□

Definición 3.1. Se dice que $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado si $\exists x_0 \in D$ tal que $\forall x \in D$ $[x_0, x] \subset D$

Teorema 3.2. Sean $P, Q \in \mathscr{C}^1(D)$ con D dominio de $\mathbb{R}^2$ y estrellado, con $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ en D. Entonces $\exists F \in \mathscr{C}^2(D)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} = P$ y $\frac{\partial F}{\partial x} = Q$

Demostración. Tomamos el punto que hace D estrellado como origen.

$$F(t,x) := t\int_0^1 P(\lambda t, \lambda x)d\lambda + x\int_0^1 Q(\lambda t, \lambda x)d\lambda$$

La función esta bien definida en las integrales por ser D estrellado.
En el siguiente desarrollo usaremos la siguiente proposición:

Proposición 3.3. Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio y $g : D \times [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^1(D \times [a,b])$
Sea f una función tal que:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_a^b g(x_1, \ldots, x_n, t)\, dt$$

Entonces f es de clase 1 y $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_i}$

$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \int_0^1 P(\lambda t, \lambda x)d\lambda + t\int_0^1 \lambda\frac{\partial P}{\partial t}(\lambda t, \lambda x)d\lambda + x\int_0^1 \lambda\frac{\partial Q}{\partial t}(\lambda t, \lambda x)d\lambda = \int_0^1 P(\lambda t, \lambda x)d\lambda + \left[\int_0^1 \lambda\left(t\frac{\partial P}{\partial t}(\lambda t, \lambda x)d\lambda + x\frac{\partial P}{\partial x}(\lambda t, \lambda x)d\lambda\right)\right] = P$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) == Q$$

□

A esta función F se la suele llamar una función potencial $\nabla F = (P, Q)$

Definición 3.2. Sean $P, Q \in \mathscr{C}^1(D)$ considero la ecuación $P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$. Se dice que es exacta si $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ en D.

Supongamos una ecuación como la de la proposición anterior, con $(t_0, x_0) \in D$ t.q. $Q(t_0, x_0) \neq 0$. Entonces $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B := B((t_0 x_0), \varepsilon) \subset D$ es un subconjunto estrellado $\implies$ $\exists F \in \mathscr{C}^2(B)$ t.q. $\frac{\partial F}{\partial t} = P$ y $\frac{\partial F}{\partial x} = Q$

Entonces considero $F(x,t) = F(x_0, t_0)$ que define $x = x(t)$ en un entorno I de t_0

Definición 3.3. Sean $P, Q \in \mathscr{C}^1(D)$ con $P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$ no exacta. Se dice que $\mu(t,x)$ es un factor integrante para la ecuación si:

1. $\mu(t,x) \neq 0$ $\forall (t,x) \in D$

2. $\mu \in \mathscr{C}^1(D)$
3. $\mu(t,x)P(t,x) + \mu(t,x)Q(t,x)x' = 0$ es una ecuación exacta.

Nota. Siempre existe un factor integrante.

4. La ecuación lineal de orden superior

Son ecuaciones de la forma:

$$x^{k)} + a_{k-1}(t)x^{k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{L}$$

$$x^{k)} + a_{k-1}(t)x^{k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{H}$$

Con I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $a_i \in \mathscr{C}(I),\ i = 0, \ldots, k-1$ y $b \in \mathscr{C}(I)$. Si $b = 0$, se dice que la ecuación es homogénea. En otro caso, es completa.

Teorema 4.1. Sean $a_i \in \mathscr{C}(I),\ i = 0, \ldots, k-1$ y $b \in \mathscr{C}(I)$. Dado $t_0 \in I$, y dados $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, k-1$, existe una única función $x \in \mathscr{C}^k(I)$ que verifica (L) y tal que $x^{i)}(t_0) = \alpha_i$.

Demostración. Este teorema se verá como un caso particular del teorema para sistemas de ecuaciones lineales. □

4.0.1. Independencia lineal de funciones

Si $f_0, \ldots, f_n \in \mathscr{C}^n(I)$, consideramos

$$\begin{cases} \alpha_0 f_0(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \alpha_0 f_0^{n)}(t) + \cdots + \alpha_n f_n^{n)}(t) & = & 0 \end{cases}$$

que para cada $t \in I$ da un sistema de ecuaciones lineal homogéneo con $n+1$ ecuaciones e incógnitas. Si para algún $t \in I$ la única solución es la trivial, la única solución válida para todo $t \in I$ será también la trivial.

Por tanto, una condición suficiente para la independencia lineal es

$$\mathscr{W}(f_0, \ldots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_0(t) & \cdots & f_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_0^{n)}(t) & \cdots & f_n^{n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ para algún } t \in I$$

A $\mathscr{W}(f_0, \ldots, f_n)$ se le llama *wronskiano* de $f_0, \ldots, f_n$. Cabe notar que esta no es condición necesaria.

4.0.2. Estructura del conjunto de soluciones

Observamos que

$$\{t, t^2, \ldots, t^n\} \text{ son l.i. } \ \forall n \in \mathbb{N}$$

luego $\dim \mathscr{C}^k(I) = \infty$.
Ahora, consideramos el operador lineal

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathscr{C}^k(I) & \to & \mathscr{C}(I) \\ & x & \mapsto & x^{k)} + a_{k-1}(t)x^{k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \end{array}$$

y vemos que el conjunto de soluciones de (H) es $\ker L$, y por tanto tiene estructura de subespacio vectorial. Por otro lado, consideramos el operador lineal

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{t_0}: & \ker L & \to & \mathbb{R}^k \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \vdots \\ x^{k-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{array}$$

que es:

- Inyectivo por la unicidad de soluciones dados t_0 y α_i, dada por 4.1.
- Sobreyectivo por la existencia dada por el mismo teorema.

Es decir, es un isomorfismo de espacios vectoriales y concluimos que $\dim \ker L = k$.

Definición 4.1 (Sistema fundamental de soluciones). Un *sistema fundamental de soluciones* de (H) es una base del espacio vectorial de soluciones de (H).

Nota. En ocasiones usaremos las siglas SFS.

Proposición 4.1. Sean I un intervalo y $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ soluciones de (H). Son equivalentes:

(i) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ son un SFS.
(ii) $\mathscr{W}(\varphi_0, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
(iii) $\exists t_0 \in I \quad \mathscr{W}(\varphi_0, \dots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$

Demostración. $ii) \implies iii)$ es trivial y $iii) \implies i)$ está probado en la sección anterior. Probemos $i) \implies ii)$.
Si $\sum_i \alpha_i \varphi_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ y tenemos

$$\begin{cases} \sum_i \alpha_i \varphi_i(t_0) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \sum_i \alpha_i \varphi_i^{n-1)}(t_0) & = & 0 \end{cases}$$

buscamos la solución que en $t_0 \in I$ verifica $x^{i)}(t_0) = 0 \ \forall i = 0, \dots, n-1$. La solución $x = 0$ lo verifica y es la única por 4.1. Entonces, $x = \sum_i \alpha_i \varphi_i = 0 \implies \alpha_i = 0$ y el sistema solo tiene la solución trivial para todo $t_0 \in I$. □

Proposición 4.2 (Fórmula de Liouville). Sean $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ soluciones de L$[x]$=0.

Entonces, dado $t_0 \in I$ se cumple

$$\mathscr{W}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) = \mathscr{W}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\,\mathrm{d}s} \qquad \forall t \in I$$

4.0.3. Encontrar un SFS

- Caso 1: Coeficientes constantes
  Sabemos que $L\left[e^{rt}\right] = \left(r^k + a_{k-1}r^{k-1} + \cdots + a_1 r + a_0\right) e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$ y el polinomio característico asociado a H es $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Utilizando ambas cosas enunciaremos una serie de proposiciones que nos permitirán hallar un SFS de una ecuación homogénea.

  Proposición 4.3. Si r es raíz de $p(\lambda) = 0$, entonces e^{rt} es solución de $L[x] = 0$.

  Demostración. Si $p(r) = 0$, entonces $L\left[e^{rt}\right] = 0$ y, por tanto, $e^{rt} \in kerL$. □

  Nota. Si las raíces son simples, entonces $\{e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_k t}\}$ es un SFS.

  Proposición 4.4. Si r es raíz de $p(\lambda)$ de multiplicidad m, entonces $\{e^{rt}, te^{rt}, \ldots, t^{m-1}e^{rt}\} \subseteq kerL$.

  Corolario 4.1. Si $p(\lambda)$ tiene k raíces reales, donde s de ellas son distintas, entonces un SFS es

  $$\left\{e^{r_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_s t}, \ldots, t^{m_s-1}e^{r_s t}\right\}$$

  Si las raíces son complejas, $r = a + ib$ ($a - ib$ también es raíz), entonces $L\left[e^{(a+ib)t}\right] = 0$. Sabemos que $e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$ y por la linealidad de L tenemos: $L\left[e^{(a+ib)t}\right] = L\left[e^{at}\cos(bt)\right] + iL\left[e^{at}\sin(bt)\right] = 0$. $e^{at}\cos(bt)$ y $e^{at}\sin(bt)$ son soluciones de H y además son linealmente independientes.

  Corolario 4.2. Si $p(\lambda)$ tiene k raíces complejas de multiplicidad m_i, un SFS es:

  $$\left\{e^{a_1 t}\cos(b_1 t), e^{a_1 t}\sin(b_1 t), te^{a_1 t}\cos(b_1 t), te^{a_1 t}\sin(b_1 t), \ldots, t^{m_1-1}e^{a_1 t}\cos(b_1 t), t^{m-1}e^{a_1 t}\sin(b_1 t), e^{a_1}\right.$$

- Caso 2: Ecuaciones de orden k donde conocemos $k-1$ soluciones
  Si conocemos $k-1$ soluciones, para encontrar la solución que nos falta para tener un SFS utilizaremos el método de **rebajamiento de orden**. Si $\varphi \in \mathscr{C}^k(I)$ es solución, el cambio $x = u\varphi$ transforma H en otra ecuación homogénea de orden $k-1$.

4.0.4. La ecuación de Euler

Un caso particular de ecuación homogénea que también podemos resolver es la siguiente ecuación:

$$t^k x^{k)} + a_{k-1} t^{k-1} x^{k-1)} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = 0$$

Para resolver esta ecuación realizaremos el cambio de variable:

$$\begin{cases} t = e^s, & t > 0 \\ t = -e^s, & t < 0 \end{cases}$$

Con este cambio llevamos la ecuación de partida a otra donde los coeficientes son constantes. Por ejemplo, en el caso $k = 2$:

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0 \rightsquigarrow y'' + (a-1)y' + by = 0$$

4.0.5. La ecuación completa

Ahora, vamos a estudiar el conjunto de soluciones de la ecuación completa (L). Llamamos

$$Z_b = \{\text{soluciones de (L)}\} = L^{-1}(b) = x_p + \ker L$$

Por lo que Z_b tiene estructura de subespacio afín.

Proposición 4.5 (Principio de superposición). Si x_i es solución de $\mathrm{L}[x] = b_i$, $i = 1, \dots, n$ entonces $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ es una solución de $\mathrm{L}[\mathrm{x}] = b$ con $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$.

Para hallar la solución particular x_p, usamos el **método de variación de las constantes**.

Conociendo un SFS de la ecuación homogénea asociada hallaremos x_p. Sea $x_p(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)\varphi_i(t)$, con $c_i \in \mathscr{C}(I)$. Buscamos c_i tales que $x_p(t) \in Z_b$. Veremos que es suficiente con que verifiquen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k c_i'(t)\varphi_i(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^k c_i'(t)\varphi_i'(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k c_i'(t)\varphi_i^{k-2)}(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^k c_i'(t)\varphi_i^{k-1)}(t) = b(t) \end{cases} \tag{C}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
x_p'(t) &= \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{k} c_i'(t)\varphi_i(t)} + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)\varphi_i'(t) \\
x_p''(t) &= \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{k} c_i'(t)\varphi_i'(t)} + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)\varphi_i''(t) \\
&\vdots \\
x_p^{k)}(t) &= b(t) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)\varphi_i^{k)}(t)
\end{aligned}
$$

Las condiciones dadas en (C), para cada $t \in I$, forman un sistema compatible determinado, por ser $\mathscr{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) \neq 0 \ \forall t \in I$. Por la regla de Cramer:

$$
c_i'(t) = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{\varphi_1^{k-1)}(t)} & & {\scriptstyle i)} & & \phantom{\varphi_k^{k-1)}(t)} \end{array} \\ \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & 0 & \dots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1' & \dots & 0 & \dots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{k-1)}(t) & \dots & b(t) & \dots & \varphi_k^{k-1)}(t) \end{vmatrix} \end{array}}{\mathscr{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t)} \in \mathscr{C}(I)
$$

y por ser c_i' las soluciones a este sistema, se tiene que x_p es, efectivamente, solución de (L), como queríamos:

$$
\begin{aligned}
&x_p^{k)} + a_{k-1}(t)x_p^{k-1)} + \dots + a_1(t)x_p' + a_0(t)x_p = \\
b(t) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)\varphi_i^{k)}(t) + a_{k-1}(t)\sum_{i=1}^{k} c_i(t)\varphi_i^{k-1)}(t) + \dots + a_0(t)\sum_{i=1}^{k} c_i(t)\varphi_i(t) &= \\
b(t) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t) \underbrace{\left(\varphi_i^{k)} + \sum_{j=1}^{k-1} a_j\varphi_i^{j)} + a_0\varphi_i\right)}_{=0 \ (\varphi_i \text{ solución de (H)})}&
\end{aligned}
$$

El método de variación de las constantes es universal, se aplica a cualquier función continua $b(t)$, sin embargo, los cálculos pueden ser muy largos. Existe un segundo método, **coeficientes indeterminados** que nos permite encontrar una solución particular para la ecuación de coeficientes constantes. En este método, cuando $b(t) = p(t)e^{at}\cos(bt) + q(t)e^{at}\sin(bt)$, donde p y q son polinomios en t de grado n (n es el mayor de los dos grados), si el polinomio característico no tiene raíces complejas, buscamos una solución particular que sea de la misma forma, su estructura será: $x_p = p_1(t)e^{at}\cos(bt) + q_1(t)e^{at}\sin(bt)$. Derivando x_p y sustituyendo en (L) podemos despejar p_1 y q_1. Si tenemos una raíz compleja de multiplicidad m, la solución particular será de la forma $x_p = (p_1(t)e^{at}\cos(bt) + q_1(t)e^{at}\sin(bt))\,t^m$.

5. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Vamos a estudiar la ecuación diferencial

$$x' = Ax + b \tag{S}$$

con $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_N(\mathbb{R}))$ y $b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^N)$, de la que buscaremos soluciones $x \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^N)$.

Nota. Sabemos del álgebra lineal que:

1. $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$
2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$

Y que en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se puede definir una norma mediante

$$||M|| = \max ||Mx|| : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1$$

Propiedades:

- $||I_n|| = 1$
- $||Mx|| \leq ||M|||x|$
- $||MA|| \leq ||M||||A||$

Definición 5.1. Una solución de la ecuación es una función $x \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)\ \forall t \in I$$

Definición 5.2. Sea $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$, con componentes integrables. Definimos

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_i(t)dt\right)_{i=1..n}$$

Proposición 5.1. En las condiciones de la definición anterior,

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b ||f(t)||dt$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| &= \left\|\lim_n \sum_{k=1}^{n} f(t_{n,k})(t_{n,k}-t_{n,k-1})\right\| \\ &= \lim_n \left\|\sum_{k=1}^{n} f(t_{n,k})(t_{n,k}-t_{n,k-1})\right\| \\ &\leq \lim_n \sum_{k=1}^{n} \left\|f(t_{n,k})\right\| (t_{n,k}-t_{n,k-1}) \\ &= \int_a^b \|f(t)\| dt\end{aligned}$$

□

Teorema 5.1. Dado $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists! x$ solución de $x' = A(t)x + b(t)$ que cumple $x(t_0) = x_0$

Demostración. Supongamos $x \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $x' = A(t)x + b(t) \forall t \in I$ y $x(t_0) = x_0$.

$$\int_{t_0}^{t} x'(s) = \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + b(s)) \implies x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + b(s)) \ \forall t \in I(1) \tag{1}$$

Hemos visto que toda solución del sistema cumple (1).

$$\left.\begin{array}{r}\text{Supongamos ahora } x \in C(I, \mathbb{R}^n)\text{que cumple (1).} \\ A(s)x(s) + b(s) \in C(I, \mathbb{R}^n)\end{array}\right\}$$

$\overset{\text{T.F.C}}{\Longrightarrow}$ $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n),\ x'(t) = A(t)x(t) + b(t)\ \forall t \in I,\ x(t_0)x_0$ Ahora tenemos que si una función cumple (1) entonces es solución.

□

Ahora nuestro problema se reduce a buscar una función $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ que cumpla (1) y $x(t_0) = x_0$. Para ello defininimos:

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x_k(s) + b(s) ds \ \forall t \in I$$

Esto recibe el nombre de iteraciones de Picard o aproximaciones sucesivas.

Sea $J \subset I$ con $t_0 \in J$ compacto. Entonces la sucesión x_k converge uniformemente en J y $x(t) = x_0 + \int A(s)x(s) + b(s)de$

Demostración. Fijo J compacto tal que $t_0 \in J$.

$$\left.\begin{array}{r} J\text{compacto} \\ A \in C(I, M_n(\mathbb{R}))\end{array}\right\}$$

$\implies \max_{t\in J} ||A(t)|| = A_J, \ \ max_{t\in J} |b(t)| = b_J$

Tenemos que $x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1}(x_{j+1} - x_j)$

Sabemos que x_k converge $\iff$ $\sum_{j=0}^{\infty}(x_{j+1} - x_j)$ converge. Para ver que la serie converge vamos a utilizar el criterio de Weierstrass. Para ello vamos a acotar $|x_{j+1} - x_j|$. Se puede probar por inducción que:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq (A_J|x_0| + b_J)(A_J)^k \frac{|t-t_0|^{k-1}}{(k+1)!} \ t \in J \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1}(t) - x_k(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty}(A_J|x_0| + b_J)A_J^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} = (A_J$$

Como la serie converge, x_k converge uniformemente en J.

Veamos ahora la unicidad de la solución.

Supongamos $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$ solución de (1). Sea $\tilde{I} = \{t \in I \ : x(t) = y(t)\}$. El procedimiento va a ser, utilizar que I es conexo y que $\tilde{I}$ es abierto y cerrado para ver que $I = \tilde{I}$. $\widetilde{I}$ es cerrado trivialmente, veamos que es abierto:

Sea $t_1 \in \tilde{I}, \{t_0, t\} \in \mathring{J}$, $\delta > 0$ tal que $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subset J$ y $\delta A_J < 1$.
Sea $t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ $x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} A(s)x(s) + b(s)ds$

$$|x(t) - y(t)| = |\inf_{t_1}^{t} A(s)(x(s) - y(s))ds| \leq |\int_{t_1}^{t} A_J(x(s) - y(s))ds| \leq A_J\delta \max_{[t_1-\delta, t_1+\delta]} |x(t) - y(t)|$$

Sea t^* el valor donde se alcanza el máximo anterior, si $t = t^* \implies x(t^*) = y(^*)$

$\square$

Parte II.
Ejercicios

6. Desintegración radioactiva

Ejercicio 6.1. Un reactor transforma plutonio 239 en uranio 238 que es relativamente estable para uso industrial. Después de 15 años se determina que 0.0043 por ciento de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determina la semivida (tiempo necesario para que la cantidad inicial de los átomos se reduzca a la mitad) de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

Solución. Se toma como ecuación diferencial para la desintegración radioactiva la $m'(t) = -\lambda \cdot m(t)$, siendo $m(t)$ la masa en cada instante t.
Sabemos que después de 15 años hay $0.9957 \cdot A_0$ de masa, siendo A_0 la masa que había inicialmente.
Integrando la ecuación diferencial dada obtenemos que $m(t) = c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Con esto procedemos a obtener la constante λ.
$m(15) = 0.9957 \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 15}$ con lo que $0.9957 = e^{-\lambda \cdot 15}$ de donde sacamos $ln(0.9957) = -15 \cdot \lambda$ y, por lo tanto, obtenemos como constante $\lambda = \frac{ln(0.9957)}{-15}$.
Para calcular el tiempo de semivida tenemos ahora que ver en qué instante t obtenemos la mitad de la cantidad inicial, usando la constante que hemos despejado.
$\frac{1}{2} \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{\frac{ln(0.9957)}{15} \cdot t} \rightarrow \frac{ln(\frac{1}{2})}{\frac{ln(0.9957)}{15}} = t \rightarrow t = \frac{15 \cdot ln(\frac{1}{2})}{ln(0.9957)} = 2412.753$ años.
La solución es que el tiempo de semivida es de 2412.753 años.

7. Poblaciones

Ejercicio 7.1. La población de Malthusilandia (país cuyo crecimiento sigue la ley de Malthus) era de 20 millones en 1980 y se había duplicado en 1990. ¿Qué población tendrá en el año 2000?

Solución. Para este tipo de problemas usamos la ecuación diferencial $m'(t) = \lambda \cdot m(t)$ de donde obtenemos integrando $m(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$.
Sabemos que en el instante $t = 0$ la población es de 20 millones, por lo tanto $20M = c \cdot e^{\lambda \cdot 0} = c$. Por lo tanto c=20M.

Sabemos que la población 10 años después es de 40 millones, por lo tanto, $m(10) = 40M \Rightarrow 40M = 20M \cdot e^{\lambda \cdot 10} \Rightarrow 2 = e^{\lambda \cdot 10} \Rightarrow \lambda = \frac{ln(2)}{10}$.
Si queremos saber que población habrá en el 2000, es decir, en t = 20 sólo tenemos que sustituir en la fórmula.

$$m(20) = 20M \cdot e^{\frac{ln(2)}{10} \cdot 20} = 80M$$

. La población en el año 2000 será de 80 millones.

8. Ecuaciones de Bernoulli

Ejercicio 8.1. Resuelve la siguiente ecuación de Bernoulli: $(t^2 \cdot x^2 - 1) \cdot x' + 2 \cdot t \cdot x^3 = 0$ haciendo $x = z^\alpha$

Solución. Las ecuaciones de bernoulli son de la forma $x' = a(t) \cdot x^q + b(t) \cdot x$ y debemos aplicar el siguiente cambio de variable para resolverlas: $\begin{cases} s = t \\ y = x^{1-q} \end{cases}$
Ponemos la ecuación dada en forma normal: $x' = \frac{-2 \cdot t \cdot x^3}{t^2 \cdot x^2 - 1} = \frac{-2 \cdot t \cdot z^{3 \cdot \alpha}}{t^2 \cdot z^{2 \cdot \alpha} - 1} = -2 + z^{3 \cdot \alpha} \cdot (\frac{1}{t^2} \cdot z^{-2 \cdot \alpha} - 1) = -2 \cdot \frac{1}{t} \cdot z^\alpha - 2 \cdot t \cdot z^{3 \cdot \alpha} = \frac{-2}{t} \cdot x - 2 \cdot t \cdot x^3$ Después del cambio sugerido por el enunciado hemos obtenido una ecuación de Bernoulli. Después de este cambio para resolver la ecuación tenemos que hacer el cambio de variable propuesto inicialmente: $\begin{cases} s = t \\ y = x^{-2} \end{cases}$ De donde obtenemos $y' = -2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot x' = \frac{4}{x^2} \cdot (\frac{1}{t} - t \cdot x^2) = \frac{4}{t} \cdot y - 4 \cdot t$ Con lo que hemos obtenido una ecuación lineal.

9. Curva ortogonal

Ejercicio 9.1. Obtén la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas: $y^2 = 2 \cdot x^2 \cdot (1 - c \cdot x)$ con $c \in \mathbb{R}$

Solución. En primer lugar obtenemos la expresión de c: $y^2 = 2 \cdot x^2 \cdot (1 - c \cdot x) \Rightarrow \frac{y^2}{2 \cdot x^2} = 1 - c \cdot x \Rightarrow c \cdot x = 1 - \frac{y^2}{2 \cdot x^2} \Rightarrow c = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{2 \cdot x^3}$ Obtenemos ahora la expresión de y' y sustituimos la expresión de c obtenida: $2 \cdot y \cdot y' = 4 \cdot x - c \cdot 6 \cdot x^2$ $y' = \frac{4 \cdot x}{2 \cdot y} - \frac{c \cdot 6 \cdot x^2}{2 \cdot y} = 2 \cdot \frac{x}{y} - c \cdot 3 \cdot \frac{x^2}{y} = 2 \cdot \frac{x}{y} - (\frac{1}{x} - \frac{y^2}{2 \cdot x^3}) \cdot 3 \cdot \frac{x^2}{y} = 2 \cdot \frac{x}{y} - 3 \cdot \frac{x}{y} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ Para obtener la familia ortogonal tenemos que cambiarle el signo y hacer el inverso: $y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ Esta ecuación es una de tipo homogénea por lo que hacemos el cambio $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$ e igualamos las expresiones de y' obtenidas: $\frac{-2}{3 \cdot u} + u = u + x \cdot u' \Rightarrow u' = \frac{-2}{3 \cdot u \cdot x} = \frac{-2}{3 \cdot u} \cdot \frac{1}{x}$ Nos ha salido una ecuación de variables separadas que resolvemos: $\frac{du}{dx} = \frac{-2}{3 \cdot u} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{-3}{2} \cdot \int u \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$ $-\frac{3}{2} \cdot \frac{u^2}{2} = ln|x| + c \Rightarrow u = \sqrt{-\frac{4}{3} \cdot (ln|x| + c)}$ Deshaciendo el cambio de variable: $y = \sqrt{-\frac{4}{3} \cdot (ln|x| + c)} \cdot x$

10. Ecuaciones lineales

Ejercicio 10.1. Resuelve la siguiente ecuación lineal: $x' - t \cdot x = 3 \cdot t$

Solución. Ponemos la ecuación en forma normal $x' = t \cdot x + 3 \cdot t$ y realizamos el cambio de variable correspondiente para resolver las ecuaciones lineales. $\begin{cases} s = t \\ y = l(t) \cdot x \end{cases}$ Derivamos el cambio de variable haciendo la derivada de y con respecto a s. $\frac{dy}{ds} = l'(s) \cdot x(s) + l(s) \cdot x(s)' = l'(s) \cdot x(s) + l(s) \cdot (s \cdot x + 3 \cdot s) = x \cdot [l'(s) + l(s) \cdot s] + l(s) \cdot 3 \cdot s$ Imponemos que $l'(s) + s \cdot l(s) = 0 \Rightarrow l'(s) = -s \cdot l(s)$ y resolvemos esta ecuación diferencial para obtener l(s) como una ecuación de variables separadas. $l(s) = e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}$ Con esto ya lo podemos sustituir en la ecuación de y(s) dada inicialmente y resolver el problema. $y(s) = \int_{s_0}^{s} l(u) \cdot 3 \cdot u \cdot du = \int_{s_0}^{s} e^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} \cdot 3 \cdot u \cdot du = -3 \cdot \int_{s_0}^{s} e^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} \cdot (-u) \cdot du = -3 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot u^2} \Big|_{s_0}^{s} + c$ Deshacemos el cambio de variable que hicimos al principio: $\begin{cases} t = s \\ x = \frac{y}{l(t)} \end{cases}$

Obtenemos la x: $x = \frac{y(t)}{l(t)} = e^{\frac{1}{2} \cdot t^2} \cdot (-3 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} \Big|_{t_0}^{t} + c)$ Con lo que habríamos obtenido la solución del problema.

11. Ecuaciones exactas

Ejercicio 11.1. Resuelve la ecuación diferencial $sen(t \cdot x) + t \cdot x \cdot cos(t \cdot x) + t^2 \cdot cos(t \cdot x) \cdot x'$

Solución. Este tipo de ecuaciones tienen la forma $P(t,x) + Q(t,x) \cdot x' = 0$. Debemos comprobar que se da la condición de exactitud, es decir: $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$ Si esta condición se cumple y estamos en un dominio estrellado como es nuestro caso, entonces sabemos que existe la función solución U(t,x). $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = cos(t \cdot x) \cdot$

$t+t\cdot cos(t\cdot x)-t^2\cdot x\cdot sen(t\cdot x)$ $\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = 2\cdot t\cdot cos(t\cdot x)-t^2\cdot x\cdot sen(t\cdot x)$ Como podemos comprobar en este caso se cumple la condición de exactitud y estamos en un dominio estrellado por lo que sabemos que $\exists U(t,x)$ tal que $\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$ y $\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} = Q(t,x)$ Para obtener la función U(t,x) vamos a integrar la función P(t,x) con respecto a t. $\int P(t,x)\cdot dt = \int sen(t\cdot x)+t\cdot x\cdot cos(t\cdot x)\cdot dt = \int sen(t\cdot x)\cdot dt + x\cdot \int t\cdot cos(t\cdot x)\cdot dt$ La primera integral la resolvemos de manera inmediata: $\int sen(t\cdot x)\cdot dt = \frac{-cos(t\cdot x)}{x}+c$ La segunda la tenemos que resolver por partes:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = cos(t\cdot x) \end{cases} \qquad \begin{cases} du = 1 \\ v = \frac{sen(t\cdot x)}{x} \end{cases}$$

Resolviendo con la fórmula de integración por partes: $\int t\cdot cos(t\cdot x)\cdot dt = \frac{t\cdot sen(t\cdot x)}{x} - \int \frac{sen(t\cdot x)}{x}\cdot dt$ $\int \frac{sen(t\cdot x)}{x}\cdot dt = \frac{-cos(t\cdot x)}{x^2}$ $x\cdot \int t\cdot cos(t\cdot x)\cdot dt = t\cdot sen(t\cdot x)+\frac{cos(t\cdot x)}{x}$ Con lo que: $\int P(t,x)\cdot dt = -\frac{cos(t\cdot x)}{x}+t\cdot sen(t\cdot x)+\frac{cos(t\cdot x)}{x}+c = t\cdot sen(t\cdot x)+c$ De donde obtenemos que $U(t,x) = t\cdot sen(t\cdot x)+c+\phi(x)$ Para obtener este factor en función de x que nos queda tenemos que derivar con respecto a x e igualarlo con Q(t,x) para sacarlo. $\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} = t^2\cdot cos(t\cdot x)+\phi'(x)$ De donde sacamos que $\phi'(x) = 0$ y por lo tanto es una constante que podemos agrupar con la constante de integración. $U(t,x) = t\cdot sen(t\cdot x)+c$

12. Factores integrantes

> **Ejercicio 12.1.** Resuelve la ecuación diferencial $(3\cdot x\cdot y^2-4\cdot y)+(3\cdot x-4\cdot x^2\cdot y)\cdot y' = 0$ buscando un factor integrante del tipo $\mu(x,y) = \mu(x^n\cdot y^m)$

Solución. En este caso tenemos que: $P(x,y) = 3\cdot x\cdot y^2-4\cdot y$ $Q(x,y) = 3\cdot x-4\cdot x^2\cdot y$ Con estas dos ecuaciones tenemos que no se cumple la condición de exactitud. Si multiplicamos por el factor integrante ambas funciones obtenemos la nueva ecuación diferencial sobre la que obtendremos condiciones para el factor integrante. $\tilde{P}(x,y) = \mu(x^n\cdot y^m)\cdot(3\cdot x\cdot y^2-4\cdot y)$ $\tilde{Q}(x,y) = \mu(x^n\cdot y^m)\cdot(3\cdot x-4\cdot x^2\cdot y)$ Obtenemos la condición de exactitud para $\tilde{P}(x,y)$ y $\tilde{Q}(x,y)$ para obtener las condiciones necesarias para el factor integrante. $\frac{\partial \tilde{P}(x,y)}{\partial y} = m\cdot y^{m-1}\cdot x^n\cdot \mu'(x^n\cdot y^m)\cdot(3\cdot x\cdot y^2-4\cdot y)+\mu(x^n\cdot y^m)\cdot(6\cdot x\cdot y-4)$ $\frac{\partial \tilde{Q}(x,y)}{\partial x} = n\cdot x^{n-1}\cdot y^m\cdot \mu'(x^n\cdot y^m)\cdot(3\cdot x-4\cdot x^2\cdot y)+\mu(x^n\cdot y^m)\cdot(3-8\cdot x\cdot y)$ Igualamos ambas para obtener condiciones sobre $\mu(x^n\cdot y^m)$ $\mu'(x^n\cdot y^m)\cdot(m\cdot y^{m-1}\cdot x^n\cdot(3\cdot x\cdot y^2-4\cdot y)-n\cdot x^{n-1}\cdot y^m\cdot(3\cdot x-4\cdot x^2\cdot y)) = \mu(x^n\cdot y^m)\cdot(7-14\cdot x\cdot y)$ $\frac{\mu'(x^n\cdot y^m)}{\mu(x^n\cdot y^m)} = \frac{7-14\cdot x\cdot y}{y^m\cdot x^n\cdot((3\cdot m+4\cdot n)\cdot x\cdot y-4\cdot m-3\cdot n)}$ Igualamos lo del paréntesis con el numerador para que sean iguales y los podamos eliminar:

$$\begin{cases} 3\cdot m+4\cdot n=-14 \\ -4\cdot m-3\cdot n=7 \end{cases} \quad \begin{cases} 12\cdot m+16\cdot n=-56 \\ -12\cdot m-9\cdot n=21 \end{cases} \quad \begin{cases} 7\cdot n=-35 \\ -4\cdot m+15=7 \end{cases}$$

De donde obtenemos que $n=-5$ y $m=2$. Por lo tanto nos queda: $\frac{\mu'(x^n\cdot y^m)}{\mu(x^n\cdot y^m)} = \frac{1}{x^{-5}\cdot y^2}$ Resolvemos como una ecuación de variables separadas llamando $u=x^{-5}\cdot y^2$ $\frac{d\mu}{du}=\frac{1}{u}\cdot\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{u}\cdot du$ Integrando obtenemos que $\mu=u$ y por tanto el factor integrante obtenido es: $\mu(x,y)=x^{-5}\cdot y^2$

13. Ecuaciones homogéneas

Ejercicio 13.1. Resuelve la siguiente ecuación diferencial: $x+(x-t)\cdot x'=0$

Solución. Ponemos la ecuación diferencial en forma normal. $x'=\frac{-x}{x-t}=\frac{-\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}-1}$ De esta forma ya la tenemos como una ecuación diferencial homogénea, es decir, en función de $\frac{x}{t}$. Hacemos el cambio de variable $u=\frac{x}{t}$ de donde obtenemos que $x=u\cdot t \Rightarrow x'=u+t\cdot u'$. Igualando las dos expresiones que tenemos de x': $\frac{-u}{u-1}=u+t\cdot u' \Rightarrow u'=(\frac{-u}{u-1}-u)\cdot\frac{1}{t}$. De donde hemos obtenido una ecuación resoluble por variables separadas.

$$u'=\left(\frac{-u-u(u-1)}{u-1}\right)\frac{1}{t}=\left(\frac{-u^2}{u-1}\right)\frac{1}{t}$$

$$\int\frac{u-1}{-u^2}du=\int\frac{1}{t}dt$$

$$\int-\frac{u}{u^2}du+\int\frac{1}{u^2}du=-\log|u|-\frac{1}{u}+C=\log|t|$$

14. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Ejercicio 14.1. Resolver las siguientes ecuaciones: - $y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}$ - $y'=\frac{2\cdot x-y+2}{4\cdot x-2\cdot y+3}$

Solución. - En el primero de los casos comenzamos obteniendo el punto de corte de las rectas: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$

De donde obtenemos sumando las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\cdot x-2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que los puntos de corte son $x=1$ e $y=2$. Hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{cases} x=u+1 \\ y=v+2 \end{cases}$$

Sustituyendo este cambio de variable en la ecuación original: $\frac{dv}{du}=\frac{u+1-v-2+1}{u+1+v+2-3}=\frac{u-v}{u+v}$ Con lo que hemos convertido la ecuación inicial en una homogénea.

- Intentamos hallar el punto de corte de las dos rectas dadas pero vemos que son paralelas. Si nos fijamos vemos que $2\cdot x-y$ es factor común de ambas rectas y con ello vamos a hacer el cambio de variable. $v=2\cdot x-y \Rightarrow dv=2\cdot dx-dy \Rightarrow dy=2\cdot dx-dv$ $(2\cdot dx-dv)\cdot(2\cdot v+3)=v+2\cdot dx$ $4\cdot v\cdot dx-2\cdot v\cdot dv+6\cdot dx-\cdot dv=v\cdot dx+2\cdot dx$ $3\cdot v\cdot dx-2\cdot v\cdot dv+4\cdot dx-3\cdot dv=0\Rightarrow(3\cdot v+4)\cdot dx=(2\cdot v+3)\cdot dv$ $dx=\frac{2\cdot v+3}{3\cdot v+4}\cdot dv$

15. Ecuaciones de Riccati

Ejercicio 15.1. Resolver la ecuación diferencial $y'=y^2-x\cdot y+1$ con $y_p(x)=x$

Solución. Hacemos el cambio de variable $w=\frac{1}{y-x}$ $w'=\frac{-y'+1}{(y-x)^2}=\frac{x\cdot y-y^2}{(y-x)^2}=\frac{y\cdot(x-y)}{(y-x)^2}=\frac{y}{x-y}=-y\cdot w$ Integrando la ecuación que hemos obtenido para w obtenemos que $w=e^{-y\cdot x}$ Deshaciendo el cambio de variable de antes $w\cdot(y-x)=1\Rightarrow w\cdot y-w\cdot x=1\Rightarrow y=\frac{1+x\cdot w}{w}$ Con lo que obtenemos la solución $y=\frac{1+e^{-y\cdot x}\cdot x}{e^{-y\cdot x}}=e^{y\cdot x}+x$ La solución general de la ecuación de riccati se obtiene sumando la particular dada por el enunciado más la que hemos obtenido en la resolución. $y(t)=e^{y\cdot x}+x+x=e^{y\cdot x}+2x$

16. Variables separadas

Ejercicio 16.1. Resuelve la siguiente ecuación diferencial: $x' = e^t - \frac{2\cdot t}{t^2-1}$

Solución.

$$x' = f(t)\cdot g(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(t)\cdot g(x) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)\cdot dt$$

Al hacer esto sólo tenemos que integrar en ambos lados para obtener la ecuación diferencial que queremos.

$$\int dx = \int e^t - \frac{2\cdot t}{t^2-1}\cdot dt = \int e^t - \int \frac{2\cdot t}{t^2-1} = e^t - ln|t^2-1| + c$$

Por lo tanto hemos obtenido nuestra solución:

$$x(t) = e^t - ln|t^2-1| + c$$

17. Rebajamiento de orden

Ejercicio 17.1. Resuelve la siguiente ecuación diferencial previo rebajamiento de orden: $t^2\cdot x'' + t\cdot(t-4)\cdot x' + 2\cdot(3-t)\cdot x = 2\cdot t\cdot e^t$ con $x_1(t) = t^2$

Solución. Hacemos el cambio de variable $x = u\cdot t^2$ $x' = u'\cdot t^2 + u\cdot 2\cdot t$ $x'' = 2\cdot u + 4\cdot u'\cdot t + u''\cdot t^2$ Sustituimos en la ecuación diferencial del principio obteniendo: $u' + u'' = 2\cdot e^t$ Hacemos el cmabio de variable $u' = v$ que nos lleva a la ecuación $v + v' = 2\cdot e^t$ $v' = 2\cdot e^t - v$ que es una ecuación lineal. Como solución nos queda $x = t^2\cdot e^t - t^2\cdot e^{-t}\cdot c + t^2\cdot k$ De esta forma obtenemos las soluciones de la ecuación que nos dan como SFS $-t^2\cdot e^{-t}$, t^2 y como solución particular de la completa $t^2\cdot e^t$.

18. Ecuaciones de segundo orden con coeficientes indeterminados

Ejercicio 18.1. A continuación se describe el modelo de resolución de estos ejercicios.

Solución. Cuando tenemos una ecuación diferencial de orden superior completa tenemos que es de la forma $a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) = r(x)$ Para este método necesitamos que $r(x)$ sea un polinomio, seno, coseno, exponencial o una mezcla de estas. Podemos distinguir dos casos: - Caso 1: No hay relación entre las soluciones de la homogénea y r(x) En este caso vamos a proponer como son el tipo de soluciones particulares de la homogénea que debemos encontrar. Para ello vamos a usar la ecuación diferencial de orden superior homogénea $y''-5 \cdot y'+6 \cdot y = 0$ que tiene como soluciones $y_h = c_1 \cdot e^{3 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2 \cdot x}$

1. $y''-5 \cdot y'+6 \cdot y = x^3+x$ En este caso se propone como solución particular de la homogénea un polinomio general del mismo grado que $r(x)$, es decir, $y_p = A+B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3$ 2. $y''-5 \cdot y'+6 \cdot y = 20 \cdot sen(8 \cdot x)$ en este caso debemos proponer una solución del tipo $y_p = A \cdot sen(8 \cdot x) + B \cdot cos(8 \cdot x)$. Esto se tiene en consideración siempre que aparezca una función seno o coseno. 3. $y''-5 \cdot y'+6 \cdot y = 12 \cdot e^{5 \cdot x}$. Para el caso de las exponenciales debemos proponer como solución $y_p = A \cdot e^{5 \cdot x}$

Para resolver los coeficientes que nos quedan debemos aplicar la ecuación diferencial a la solución particular obtenida e igualar los coeficientes. 1. $y_p = A+B \cdot x+C \cdot x^2+D \cdot x^3$ $y_p' = B+2 \cdot C \cdot x+3 \cdot D \cdot x^2$ $y_p'' = 2 \cdot C+6 \cdot D \cdot x$ Sustituyendo en la ecuación diferencial original: $2 \cdot C + 6 \cdot D \cdot x - 5 \cdot D - 10 \cdot C \cdot x - 15 \cdot D \cdot x^2 + 6 \cdot A + 6 \cdot B \cdot x + 6 \cdot X \cdot x^2 + 6 \cdot D \cdot x^3 =$
$= x^3 \cdot 6 \cdot D + x^2 \cdot (6 \cdot C - 15 \cdot D) + x \cdot (6 \cdot D - 10 \cdot C + 6 \cdot B) + 2 \cdot C - 5 \cdot B + 6 \cdot A$
Igualamos los coeficientes:

$$\begin{cases} 1 = 6D \\ 0 = 6 \cdot C - 15 \cdot D \\ 1 = 6 \cdot D - 10 \cdot C + 6 \cdot B \\ 0 = 2 \cdot C - 5 \cdot B + 6 \cdot A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{1}{6} \\ C = \frac{5}{12} \\ B = \frac{19}{36} \\ A = \frac{69}{216} \end{cases}$$

Con lo que obtenemos la solución particular $y_p = \frac{69}{216} + \frac{19}{36} \cdot x + \frac{5}{12} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3$

2. $y_p = A \cdot sen(8 \cdot x) + B \cdot cos(8 \cdot x)$ $y_p' = 8 \cdot A \cdot cos(8 \cdot x) - 8 \cdot B \cdot sen(8 \cdot x)$ $y_p'' = -16 \cdot A \cdot sen(8 \cdot x) - 16 \cdot B \cdot cos(8 \cdot x)$ Sustituyendo de nuevo en la ecuación diferencial: $sen(8 \cdot x) \cdot (-16 \cdot A + 40 \cdot B + 6 \cdot A) + cos(8 \cdot x) \cdot (-16 \cdot B + 40 \cdot A + 6 \cdot B)$

$$\begin{cases} 40 \cdot B - 10 \cdot A = 20 \\ 40 \cdot A - 10 \cdot B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40 \cdot B - 10 \cdot A = 20 \\ 160 \cdot A - 40 \cdot B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{15} \\ B = -\frac{8}{15} \end{cases}$$

Con lo que obtenemos la solución particular $y_p = \frac{2}{15} \cdot sen(8 \cdot x) - \frac{8}{15} \cdot cos(8 \cdot x)$

Si tenemos una suma de funciones de este tipo la solución particular se da sumando las soluciones particulares correspondientes a cada una de las funciones. En el caso del producto se multiplican las soluciones particulares: - $y''-5 \cdot y'+6 \cdot y = x^2 \cdot e^{6 \cdot x}$ $y_p = (A+B \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^{6 \cdot x}$ - $y''-5 \cdot y'+6 \cdot y = x^3 \cdot sen(3 \cdot x)$ $y_p = (A+B \cdot x+C \cdot x^2+D \cdot x^3) \cdot sen(3 \cdot x) + (E+F \cdot x+G \cdot x^2+H \cdot x^3) \cdot cos(3 \cdot x)$ - $y''-5 \cdot y'+6 \cdot y = sen(5 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x}$ $y_p = (A \cdot sen(5 \cdot x) + B \cdot cos(5 \cdot x)) \cdot e^{-2 \cdot x}$

- Caso 2: r(x) tiene funciones en común con las soluciones de la homogénea. En este caso debemos exponer la solución que daríamos en el caso 1 y multiplicar por x hasta que no encontremos funciones en común. $y''+6\cdot y'+13\cdot y = e^{-3\cdot x}\cdot cos(2\cdot x)$ tiene como soluciones de la homogénea $y_h = e^{-3\cdot x}\cdot(c_1\cdot cos(2\cdot x)+c_2\cdot sen(2\cdot x))$ Proponemos la solución como si estuviéramos en el caso 1: $y_p = (A\cdot sen(2\cdot x)+B\cdot cos(2\cdot x))\cdot e^{-3\cdot x}$ Esta solución claramente comparte funciones con las soluciones de la homogénea, multiplicamos por x: $y_p = x\cdot(A\cdot sen(2\cdot x)+B\cdot cos(2\cdot x))\cdot e^{-3\cdot x}$ Esta ya no tiene funciones en común y nos vale como solución particular.

19. Ecuaciones de segundo orden homogéneas

Ejercicio 19.1. A continuación se describe el modelo de resolución.

Solución. En primer lugar tenemos que resolver la ecuación homogénea que se nos plantee, por ejemplo: $y'' - 5\cdot y' + 6\cdot y = 0$ Para ello encontramos las raíces del polinomio asociado: $\lambda^2 - 5\cdot\lambda + 6 = 0$ que en este caso son $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$ Por ello el sistema fundamental de soluciones es $y_h = c_1\cdot e^{3\cdot x} + c_2\cdot e^{2\cdot x}$ Este es el caso si tenemos raíces reales diferentes, en caso de tener raíces repetidas, por ejemplo $\lambda = 1$ raíz doble el sistema fundamental de soluciones sería $c_1\cdot e^x + c_2\cdot x\cdot e^x$. Si tenemos raíces complejas $\lambda = \alpha \pm \beta\cdot i$ entonces el sistema fundamental de soluciones sería $c_1\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot sen(\beta\cdot x) + c_2\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot cos(\beta\cdot x)$

20. Ecuaciones de segundo orden con variación de las constantes

Ejercicio 20.1. A continuación se describe el modelo de resolución.

Solución. En el método de variación de las constantes vamos a proponer como soluciones para la particular de la homogénea soluciones del tipo $x(t) = c_1(t)\cdot\phi_1(t) + c_2(t)\cdot\phi_2(t)$ Esto se hace para ecuaciones con la forma $x'' + a_1(t)\cdot x' + a_0(t)\cdot x = b(t)$ Se imponen las ligaduras siguientes para obtener condiciones sobre c_1 y c_2:

$$\begin{cases} c_1'\cdot\phi_1 + c_2'\cdot\phi_2 = 0 \\ c_1'\cdot\phi_1' + c_2'\cdot\phi_2' = b \end{cases}$$

En el caso de las ecuaciones de tercer grado tenemos las ligaduras:

$$\begin{cases} c_1' \cdot \phi_1 + c_2' \cdot \phi_2 + c_3' \cdot \phi_3 = 0 \\ c_1' \cdot \phi_1' + c_2' \cdot \phi_2' + c_3' \cdot \phi_3' = b \end{cases}$$

Con esto obtenemos expresiones de la derivada de c_i y obtenemos cada constante integrando.

21. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejercicio 21.1. A continuación se describe el modelo de resolución.

Solución. Tenemos una ecuación de la forma $x' = A \cdot x + b$ con A una matriz. Lo primero que debemos hacer es obtener los valores propios de la matriz para obtener una forma de Jordan a la que sea semejante. Esta forma de Jordan nos va a facilitar obtener $e^{A \cdot t}$. Cuando obtenemos los valores propios podemos proponer cuáles son las posibles formas de Jordan y estudiando el rango de $A - \lambda \cdot I$ para cada valor propio distinguimos la forma de Jordan. Después de esto proponemos que como $A \cdot P = P \cdot J$ con una $P = (v1|v2|v3)$ genérica y obtenemos condiciones de ellos del tipo $A \cdot v_i = a_1 \cdot v1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3$ A partir de estas condiciones obtenemos si están o no en el núcleo y calculando el núcleo de cada matriz que nos quede obtenemos los vectores v_1, v_2, v_3. A partir de la matriz de Jordan obtenemos que $e^{A \cdot t} = P \cdot e^{t \cdot J} \cdot P^{-1}$ teniendo en consideración que: - Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces la matriz $e^{t \cdot A}$ es:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda \cdot t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda \cdot t} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda \cdot t} \end{pmatrix}$$

- Si

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces la matriz $e^{t \cdot A}$ es:

$$e^{\lambda \cdot t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que $e^{A \cdot t}$ es:

$$e^{a \cdot t} \begin{pmatrix} cos(b \cdot t) & sen(b \cdot t) \\ -sen(b \cdot t) & cos(b \cdot t) \end{pmatrix}$$

Esta matriz obtenida es la matriz fundamental principal en 0 y por tanto podemos expresar todas las soluciones como esta matriz por un vector de constantes. Para obtener la solución del sistema de ecuaciones completo tenemos que: $x_p(t) = \Phi(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \cdot b(s) \cdot ds$ Las soluciones del sistema completo son las soluciones de la homogénea mas la solución particular obtenida de la completa.