Análisis Matemático II

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Análisis Matemático II

LibreIM

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

libreim.github.io/apuntesDGIIM

Índice

Parte I.
Teoría

Introducción

1. Convergencia uniforme y puntual

De igual manera que tratamos con sucesiones de puntos de $\mathbb{R}^N$ podemos hacerlo con sucesiones de funciones. Dado $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, podemos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, y formar así una sucesión de funciones que notaremos $\{f_n\}$. El conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}^M$ lo denotaremos por $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^M)$. Durante este apartado la referencia básica es [1, Capítulo 5].

Definición 1.1 (Convergencia punto a punto). Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge puntualmente* a una función $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si $\forall x \in A,\ \{f_n(x)\} \to f(x)$. Esto es, si se verifica lo siguiente:

$$\forall x \in A\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

En ocasiones denotaremos la convergencia puntual como $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f$.

Definición 1.2 (Convergencia uniforme). Diremos que $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a una función $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si se verifica:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in A$$

En ocasiones denotaremos la convergencia uniforme como $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$.

Nota. Aunque ambas definiciones son muy parecidas, hay una diferencia clave. En la convergencia puntual, el valor de n_0 puede depender tanto de ϵ como de x. Sin embargo, en la convergencia uniforme, exigimos que n_0 sea válido para cualquier x.

Proposición 1.1. Si $\{f_n\} \to f$ uniformemente $\implies$ $\{f_n\} \to f$ puntualmente.

Nota. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, ambos conceptos son equivalentes si para cada $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ que forma la sucesión, el conjunto A es finito. En efecto, si A es finito, y $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)\ \forall x \in A$, entonces tomamos n_0 como el máximo de los $n_0(x)$ que nos da la convergencia puntual en cada $x \in A$, y $\{f_n\}$ converge uniformemente en A.

La necesidad del concepto de convergencia uniforme se aprecia bien en el siguiente teorema, junto con los ejemplos que aparecen a continuación. Normalmente, las funciones con las que trabajemos serán continuas. El conjunto de las funciones continuas entre un conjunto A y $\mathbb{R}^M$ se denota como $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Teorema 1.1. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$ y $f_n \in \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que:

$$\{f_n\} \to f \text{ uniformemente } \implies f \text{ es continua}$$

Demostración. Como $\{f_n\} \to f$ uniformemente, por definición podemos tomar un número $\epsilon > 0$ cualquiera de forma que:

$$\exists K > 0 : \; n \geq K \implies |f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} \; \forall y \in A$$

Es obvio entonces que si tomamos un punto $a \in A$, $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3}$. Por otro lado, dado que f_n es una función continua para cada $n \in \mathbb{N}$, por la definición de continuidad de una función podemos afirmar que:

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x - a| < \delta \text{ para } x \in A \text{ entonces } |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$$

De igual forma que con a, por la convergencia uniforme podemos afirmar que dado $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Llegados a este punto, si unimos las desigualdades obtenidas hasta ahora podemos afirmar que:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \epsilon$$

Por tanto, hemos probado que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Es decir, hemos probado que f es continua. $\square$

Veamos algunos ejemplos de sucesiones de funciones:

Ejemplo 1.1.

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = x^n$$

Ejemplo 1.3.

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}$$

Vamos a estudiar la convergencia puntual de la sucesión del ejemplo 1.1:

Primero, fijamos $x \in (0,1]$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq \frac{1}{n}$, luego $f_m(x) = 0$ para cada $m \geq n$. Por otra parte, $f_n(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos que

$$\{f_n\} \to f = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que la convergencia puntual no preserva la continuidad de las funciones. Esto implicaría que, con esta definición de convergencia, el espacio de funciones continuas en un conjunto no sería cerrado. Además, podemos comprobar que $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f, pues en caso de hacerlo f debería ser continua, por el *Teorema 1.1*.

Ahora estudiemos la convergencia uniforme del ejemplo 1.3:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists K > \frac{1}{\epsilon}: \ \ n \geq K \implies \frac{|sen(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \epsilon$$

Vemos que converge uniformemente a cero. Lo importante para esta demostración, y lo que lo será en la mayoría de los casos de convergencia uniforme, es que podemos encontrar un ϵ_n (en este caso $\frac{1}{n}$), que no dependa de x, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon_n$.

Proposición 1.2 (Criterio de Cauchy). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, y sean $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}^M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \ \ \forall x \in A$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \implies \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall x \in A$. Entonces, dados $m, n \geq n_0$ se tiene que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x \in A$ fijo. Entonces, es claro que $\{f_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}^M$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{R}^M$ es completo, tenemos que $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x) \ \forall x \in A$. Ahora, tomando límite cuando $m \to \infty$ en la expresión de la hipótesis, y teniendo en cuenta que el último $<$ se transforma en $\leq$:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \ \ \forall x \in A$$

Es decir, $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. □

El siguiente resultado, conocido como *Teorema de Dini*, muestra que bajo ciertas condiciones, el recíproco de la *Proposición 1.1* anterior sí es cierto.

Teorema 1.2 (de Dini). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, y funciones $f_k : A \to \mathbb{R}$ continuas, verificando:

(i) $f_k \geq 0$
(ii) $f_k \geq f_{k+1}$ (la sucesión $\{f_k\}$ es monótona decreciente).
(iii) $f_k \to 0 \ c.p.$

Entonces, $\{f_k\} \to 0$ uniformemente en A.

Demostración. Se puede consultar en el ejercicio 5.2. □

1.1. El espacio de funciones continuas

Ya sabemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, el espacio $(\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado, donde la norma del máximo o *norma uniforme* se define así:

$$\|f\|_\infty := \text{máx}\{|f(x)| : x \in A\} = \text{máx}_{x\in A}\ |f(x)|$$

Proposición 1.3. En el espacio $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, la convergencia de sucesiones equivale a la convergencia uniforme, esto es:

$$\{f_n\} \to f\ en\ \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración.
$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff \text{máx}_{x\in A}\ |f_n(x) - f(x)| \to 0 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \text{máx}_{x\in A}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \iff |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall x \in A \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f.$ □

Teorema 1.3 ($\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es completo). En el espacio $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, también ser sucesión de Cauchy equivale a la convergencia uniforme, esto es:

$$\{f_n\}\ es\ de\ Cauchy\ en\ \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración. El razonamiento es análogo al anterior, utilizando esta vez el criterio de Cauchy visto anteriormente. □

Es importante recalcar que estamos suponiendo que el subconjunto A es compacto. Podemos extender el resultado anterior, considerando el espacio $(\mathscr{C}_B(A, \mathbb{R}^M), \|\cdot\|_\infty)$, donde:

$$\mathscr{C}_B(A, \mathbb{R}^M) := \left\{f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M : f\ \text{ es continua y acotada}\right\},$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in A}\ |f(x)|.$$

Proposición 1.4. El espacio $\mathscr{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es un espacio de Banach, es decir, es un espacio normado y completo.

Demostración. Puede consultarse en el ejercicio 5.1. □

Nota. Si A es compacto, entonces $\mathscr{C}_B(A, \mathbb{R}^M) = \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Veamos ahora dos teoremas que relacionan el concepto de convergencia uniforme con los conceptos de derivación e integración.

Teorema 1.4. Sean $f, f_n \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ tales que $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. Entonces,

$$\left\{\int_a^b f_n\right\} \to \int_a^b f$$

Equivalentemente, podemos intercambiar la integral con el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}\ \forall x \in [a,b]$. Entonces,

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon$$

□

Teorema 1.5. Sea $f_n \in \mathscr{C}^1(a,b)\ \forall n \in \mathbb{N}$, y sean $f, g \in \mathscr{C}(a,b)$. Supongamos que $\{f_n\} \to f$ c.p., y supongamos también que $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en (a,b). Entonces, $f \in \mathscr{C}^1(a,b)$, y $f' = g$.

Demostración. Elegimos primero un $x_0 \in (a,b)$ fijo. Entonces, $\{f_n(x_0)\} \to f(x_0)$ por hipótesis. Como f_n' es continua, entonces, por el teorema fundamental del cálculo:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt$$

Ahora, como $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en el intervalo cerrado de extremos x_0 y x, por el *Teorema 1.4* tenemos que $\{f_n(x)\} \to G(x)\ \forall x \in (a,b)$, donde:

$$G(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

Es decir, $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente en (a,b) a $G(x)$. Ahora, G es de clase 1 por ser $g(t)$ continua, y además, tenemos que $G(x_0) = f(x_0)$. Por otro lado, es claro que $G' = g$.

Pero también $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)$ por hipótesis, por lo que necesariamente $\forall x \in$
(a,b)
$G(x) = f(x)$, esto es, $f \in \mathscr{C}^1(a,b)$ y $f' = G' = g$. □

Corolario 1.1. Sea $f_n \in \mathscr{C}^1(a,b)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\exists \alpha \in (a,b)$ tal que $\{f_n(\alpha)\}$ es convergente, y supongamos también que $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g \in \mathscr{C}((a,b))$ en (a,b). Entonces, $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\{f_n\} \to f$ uniformemente. Además, $f \in \mathscr{C}^1(a,b)$, y $f' = g$.

Demostración. Probaremos únicamente que $\{f_n\} \to f$ uniformemente. El resto de la tesis se sigue de aplicar el *Teorema 1.5*.

Sea $\epsilon > 0$. Por un lado, como $\{f_n'\}$ converge uniformemente, aplicamos el *Criterio de Cauchy* para obtener un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_1 \implies |f_p'(y) - f_q'(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

Del mismo modo, como $\{f_n(\alpha)\}$ es una sucesión de números reales convergente, es de Cauchy, y obtenemos un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_2 \implies |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora, definimos $K := \text{máx}\{k_1, k_2\}$, y teniendo en cuenta el *Teorema del Valor Medio*, se tiene que, dado $x \in (a, b)$ y $p, q \geq K$:

$$\begin{aligned}
|f_p(x) - f_q(x)| &= |f_p(x) - f_p(\alpha) + f_p(\alpha) - f_q(\alpha) + f_q(\alpha) - f_q(x)| \\
&\leq |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(\alpha) - f_q(\alpha))| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \\
&= |f_{pq}(x) - f_{pq}(\alpha)| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \overset{T.V.M}{=} |x - \alpha||f'_{pq}(z_x)| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \\
&= |x - \alpha| \left| f'_p(z_x) - f'_q(z_x) \right| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < (b - a) \cdot \frac{\epsilon}{2(b - a)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

donde z_x está en el intervalo abierto de extremos α y x, y $f_{pq}(x) := f_p(x) - f_q(x)$. Observemos que en este razonamiento, el valor de K **no depende de** x, sino exclusivamente de ϵ. Por tanto, por el *Criterio de Cauchy*, se tiene que $\{f_n\}$ converge uniformemente en (a, b). □

1.2. Conjuntos compactos de $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$

En este apartado, nuestro objetivo será caracterizar los conjuntos compactos de $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Para ello, necesitamos primero definir ciertos conceptos el espacio de funciones continuas. Salvo que se especifique lo contrario, A será un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ en todo el apartado.

Definición 1.3 (Conjunto acotado). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, $B \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Se dice que B es acotado (o equiacotado) si $\exists M > 0 : \; \|f\|_\infty \leq M \quad \forall f \in B$.

Nota. Teniendo en cuenta la definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$, el que B sea acotado es equivalente a decir que $|f(x)| \leq M, \; \forall x \in A, \; \forall f \in B$.

Definición 1.4 (Conjunto equicontinuo). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, $B \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Se dice que B es equicontinuo si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \left. \begin{array}{r} |x - y| < \delta \\ x, y \in A \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall f \in B$$

Nota. Este concepto es muy parecido al de función uniformemente continua. De hecho, como A es compacto y todas las f son continuas, sabemos por el *Teorema de Heine-Cantor* que todas ellas son uniformemente continuas. Sin embargo, para poder afirmar que B es equicontinuo, es necesario que el número δ sea válido independientemente f.

Proposición 1.5. Sea $B \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Si B es finito, entonces es equicontinuo.

Demostración. Sabemos que $\forall f \in B$, f es uniformemente continua. Como B es finito, tenemos un conjunto finito $\{\delta_i > 0 : f_i \text{ es uniformemente continua con } \delta_i\}$. Concluimos tomando $\delta := \min\limits_i \delta_i$. □

El interés en ver cuáles son los conjuntos compactos de $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$ proviene, entre otras cosas, del hecho de que hay conjuntos cerrados y acotados que no son compactos. El siguiente ejemplo lo pone de manifiesto.

Ejemplo 1.4. En $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$, ninguna bola cerrada es compacta.

Para verlo, sea $r > 0$, y consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas como $f_n(x) = rx^n \quad \forall x \in [0,1]$. Ya sabemos que la sucesión converge puntualmente a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ r & si\ x = 1 \end{cases}$$

Pero f no es continua, por lo que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0,1]$. De hecho, $\{f_n\}$ no puede tener ninguna sucesión parcial que converja uniformemente, pues en otro caso, el límite uniforme de la sucesión parcial sería f, que no es continua.

Por otro lado, $\|f_n\|_\infty = \max \{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} = r$, y entonces $f_n \in \overline{B}_\infty(0,r)$.

Recordemos que en este espacio, ser convergente era equivalente a la convergencia uniforme. Por tanto, combinando ambas informaciones, hemos encontrado una sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \overline{B}_\infty(0,r)$ tal que no es posible extraer una subsucesión convergente a un punto de $\overline{B}_\infty(0,r)$. Esto prueba que $\overline{B}_\infty(0,r)$ no es compacta.

Además, sabemos que existe un homeomorfismo entre las bolas cerradas y centradas en el origen, y las bolas cerradas centradas en un punto arbitrario de $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Como la compacidad es una propiedad topológica, concluimos que ninguna bola cerrada es compacta. Para una demostración más detallada de esta última afirmación, consultar el ejercicio 5.3.

Definición 1.5 (Sucesión acotada). Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es acotada si el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

Definición 1.6 (Sucesión equicontinua). Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es equicontinua si el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo.

Si recordamos la prueba en $\mathbb{R}^N$ de que los conjuntos compactos son los cerrados y acotados, el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* era una herramienta clave. Veamos ahora un resultado análogo en $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Lema 1.1. Todo subconjunto A (no tiene por qué ser compacto) de $\mathbb{R}^N$ tiene un subconjunto numerable denso en él. Esto es, $\exists C \subseteq A$ numerable cumpliendo $A \subseteq \overline{C}$.

Demostración. Para cualquier natural m, tomemos $\varepsilon = \frac{1}{m}$, usando que $\mathbb{Q}^N$ es numerable se tendrá una enumeración, de forma que $\mathbb{Q}^N = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ con $r_i \in \mathbb{Q}^N \quad \forall i \in \mathbb{N}$, y usando que $\mathbb{Q}^N$ es denso en $\mathbb{R}^N$

$$A \subseteq \mathbb{R}^N = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^N} B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(r_i, \varepsilon)$$

Notemos que esta familia numerable de bolas abiertas recubre a A, por lo que algunas de ellas tendrán intersección no vacía con A, es decir, existe $I \subseteq \mathbb{N}$ tal que $i \in I \implies B(r_i, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Entonces, el axioma de elección nos proporciona $c : I \to A$ de forma que $c_i := c(i) \in B(r_i, \epsilon) \cap A$ para cada $i \in I$.

Definimos el conjunto

$$C_m = \{c_i : i \in I\} = \{c_i \in A \cap B(r_i, \tfrac{1}{m}) \ : A \cap B(r_i, \tfrac{1}{m}) \neq \emptyset, \ i \in \mathbb{N}\}$$

Es importante el hecho de que sólo hemos tomado un “representante” c_i por cada bola que interseque con A, esto nos asegura que el conjunto C_m sea numerable.

Como podemos hacer esto para todo natural m, podemos definir el conjunto $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, que es unión numerable de conjuntos numerables, por tanto numerable. Falta probar $A \subseteq \overline{C}$.

Sea $x \in A$. $x \in \overline{C} \iff \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como sabíamos que $A \subseteq \mathbb{R}^N = \overline{\mathbb{Q}^N}$, existirá un $r_i \in \mathbb{Q}^N$ tal que $x \in B(r_i, \frac{1}{n})$. Por la discusión anterior, $\exists c_i \in C_n \subseteq C$ cumpliendo $c_i \in B(r_i, \frac{1}{n}) \cap A$, por lo que tenemos $|x - r_i| < \frac{1}{n}$ y $|c_i - r_i| < \frac{1}{n}$. Por la desigualdad triangular deducimos lo que queremos

$$|x - c_i| \leq |x - r_i| + |r_i - c_i| < \frac{2}{n} < \varepsilon \implies c_i \in B(x, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset \implies c_i \in B(x, \varepsilon) \cap C \implies x \in \overline{C}.$$

□

Teorema 1.6 (Arzelà-Ascoli). Toda sucesión de funciones de $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$ que sea equicontinua y acotada admite una sucesión parcial convergente.

Demostración. Dividiremos la demostración en varios pasos.

Paso 1: Probaremos el siguiente resultado técnico:
Dado $\delta > 0$, $\exists c_1, ..., c_k \in A$ tales que $\exists\ i = 1, \ldots, k : |x - c_i| < \delta \quad \forall x \in A$.

Por el lema, existe un conjunto $C \subseteq A$ numerable y denso en A. Luego tendremos el siguiente recubrimiento abierto de A:

$$A \subseteq \bigcup_{c \in C} B(c, \delta)$$

Como A es compacto, existe un subrecubrimiento finito, $\exists c_1, \dots, c_k$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(c_i, \delta)$$

Dado $x \in A$, $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in B(c_i, \delta)$. Por tanto, $|x - c_i| < \delta$.

Paso 2: Vamos a probar que $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$ puntualmente en C. Recordemos que, puesto que C es numerable: $\exists N \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\exists \phi : N \longrightarrow C$ biyectiva. Denotamos $c_k = \phi(k) \in C$ (enumeración de C). Por otra parte, observemos lo siguiente:

$$\{f_n\} \text{ equiacotada } \implies \exists M > 0 : |f_n(x)| \leq M, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, $\{f_n(c_1)\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^M$, y por tanto podemos aplicar el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* para ver que $\exists \sigma_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la subsucesión $\{f_{\sigma_1(n)}(c_1)\}$ de $\{f_n(c_1)\}$ es convergente hacia un vector de $\mathbb{R}^M$ que denotaremos como $f(c_1)$:

$$\{f_{\sigma_1(n)}(c_1)\} \longrightarrow f(c_1).$$

Como también tenemos la acotación de $\{f_{\sigma_1(n)}(c_2)\}$, deducimos de nuevo aplicando el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* que $\exists \sigma_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la subsucesión $\{f_{\sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(c_2)\}$ de $\{f_{\sigma_1(n)}(c_2)\}$ es convergente hacia un vector que denotaremos como $f(c_2)$:

$$\{f_{\sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(c_2)\} \longrightarrow f(c_2).$$

Por inducción, concluimos que $\forall k \in N$ $\exists \sigma_k : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tal que

$$\{f_{\sigma_k \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(c_k)\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow f(c_k).$$

Si definimos $\varphi_k := \sigma_k \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1$, podemos visualizar las sucesiones anteriores, cada una en una fila:

$$\begin{array}{cccccccc}
f_{\varphi_1(1)} & f_{\varphi_1(2)} & f_{\varphi_1(3)} & \cdots & f_{\varphi_1(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_1 \\
f_{\varphi_2(1)} & f_{\varphi_2(2)} & f_{\varphi_2(3)} & \cdots & f_{\varphi_2(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_2 \\
f_{\varphi_3(1)} & f_{\varphi_3(2)} & f_{\varphi_3(3)} & \cdots & f_{\varphi_3(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & & \vdots \\
f_{\varphi_k(1)} & f_{\varphi_k(2)} & f_{\varphi_k(3)} & \cdots & f_{\varphi_k(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots
\end{array}$$

Definimos $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mediante

$$\sigma(n) := \varphi_n(n) = \sigma_n \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)$$

Puesto que $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son estrictamente crecientes,

$$\begin{aligned}
\sigma(n) = \sigma_n(\sigma_{n-1} \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)) &\geq \sigma_{n-1} \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n) \\
&> \sigma_{n-1} \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n-1) = \sigma(n-1), \ \forall n \geq 2
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\sigma_k(n) \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$, y también que la composición de funciones estrictamente crecientes es estrictamente creciente. Por tanto, σ es estrictamente creciente; es decir, $\{f_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_n\}$. Aún más, es inmediato comprobar que

$$\{f_{\sigma(n)}\}_{n\geq k} \text{ es una subsucesión de } \{f_{\sigma_k\circ\ldots\sigma_2\circ\sigma_1(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Así, como la sucesión $\{f_{\sigma_k\circ\ldots\sigma_2\circ\sigma_1(n)}(c_k)\} \to f(c_k)$, tenemos que $\{f_{\sigma(n)}(c_k)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(c_k) \ \forall k \in N$, puesto que el comportamiento de un número finito de términos no afecta a la convergencia. Por último, como $\{c_k : k \in N\}$ era una enumeración de C, concluimos que:

$$\{f_{\sigma(n)}(c)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(c) \text{ puntualmente } \ \forall c \in C.$$

Notemos que en este paso no ha sido necesario utilizar la equicontinuidad.

Paso 3. Concluimos probando que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en A, donde $g_n := f_{\sigma(n)}$.

Sea $\epsilon > 0$ fijo. Por la equicontinuidad de f_n (y por tanto de g_n), $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in A \\ |x-y| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así pues, si para todo $x \in A$ consideramos el punto $c_i \in C$ ($i \in \{1,\ldots,k\}$) dado por el paso 1 aplicado a ese δ (se cumplirá $|x - c_i| < \delta$), tendremos

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(c_i)| + |g_n(c_i) - g_m(c_i)| + |g_m(c_i) - g_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |g_n(c_i) - g_m(c_i)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Ya que cada sucesión $\{g_n(c_i)\}$ es convergente a $f(c_i)$ para cualquier $i \in \{1,\ldots,k\}$, cada una de estas k sucesiones es de Cauchy. En consecuencia

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\} \quad \exists n_i \in \mathbb{N} : p,q \geq n_i \implies |g_p(c_i) - g_q(c_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Tomamos $n_0 = \text{máx}\{n_i : i = 1,\ldots,k\}$ (dependiente de los puntos c_i e independiente de x), se cumple que

$$p,q \geq n_0 \implies |g_p(c_i) - g_q(c_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i \in \{1,\ldots,k\}$$

y así

$$p,q \geq n_0 \implies |g_p(x) - g_q(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + |g_n(c_i) - g_m(c_i)| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Puesto que en $\mathscr{C}(A,\mathbb{R}^M)$ la convergencia equivale a la convergencia uniforme, se concluye aplicando el *Criterio de Cauchy* a la sucesión $\{g_n\} = \{f_{\sigma(n)}\}$. □

Como conclusión de este capítulo, presentamos el siguiente corolario, que nos sirve para caracterizar los conjuntos compactos.

Corolario 1.2 (Caracterización de compactos). Sea $B \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Entonces:

$$B \text{ es compacto} \iff B \text{ es cerrado, acotado y equicontinuo}$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Ya sabemos que un conjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado. Veamos que además es equicontinuo.

Sea $\epsilon > 0$ fijo. La familia $\{B(f, \varepsilon/3) : f \in B\}$ es un recubrimiento abierto de B puesto que

$$B \subseteq \bigcup_{f \in B} B(f, \varepsilon/3).$$

Luego, por la compacidad de B, $\exists f_1, \ldots, f_n \in$ B tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3).$$

Observemos que para cualquier $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$ se verifica que $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon/3, \ \ \forall x \in A$. Además, como A es compacto, cada una de las funciones continuas f_i $(i = 1, \ldots, n)$ será uniformemente continua. Por tanto, existirá para cada una de ellas un número $\delta_i > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x-y| < \delta_i \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$$

Por consiguiente, si tomamos $\delta = \min\{\delta_i : i = 1, \ldots, n\} > 0$, tendremos que cualquier $f \in B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3)$ debe pertenecer a una bola $B(f_i, \varepsilon/3)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, y así si se tiene

$$\left.\begin{array}{c} |x-y| < \delta \leq \delta_i \\ x, y \in A \end{array}\right\}$$

Entonces, es claro que $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$.

En resumen, hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x-y| < \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \ \forall f \in B$$

Es decir, B es equicontinuo y la prueba está terminada.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\{f_n\} \subseteq B$. Es claro que $\{f_n\}$ es acotada y equicontinua, y aplicando el *Teorema de Arzelà-Ascoli*, tenemos que $\exists \{f_{\sigma(n)}\} \to f \in \overline{B}$. Pero B es cerrado, por lo que $\overline{B} = B$. Obtenemos así que de cualquier sucesión de puntos de B es posible obtener una sucesión parcial convergente a un punto de B, por lo que B es compacto. $\square$

2. Series de funciones

De forma análoga a como se hizo en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$, pasamos ahora a estudiar series de funciones. La referencia básica sigue siendo [1, Capítulo 5].

Definición 2.1 (Sumas parciales). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto. Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$, se llama suma parcial S_k a la función definida en Ω mediante

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Definición 2.2 (Serie de funciones). Llamamos serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ al par formado por las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{S_n\}$. Llamaremos a f_n el término general de la serie de funciones $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

El carácter de la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales S_n. Por tanto, tenemos de nuevo dos tipos de convergencia.

Definición 2.3 (Convergencia de series de funciones). Si $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es una función y $A \subseteq \Omega$, diremos

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente puntualmente en } A \Leftrightarrow \{S_n\} \longrightarrow S \text{ c.p en A.}$$

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente uniformente en } A \Leftrightarrow \{S_n\} \longrightarrow S \text{ c.u. en } A.$$

Diremos que S es la suma de la serie de funciones:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ puntualmente (resp. uniformemente) en } A.$$

Proposición 2.1. Sea $\sum_{n\geq 0} f_n$ una serie de funciones definida en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dicha serie converge uniformemente en un subconjunto $B \subseteq A$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge a 0 uniformemente en B.

Demostración. Es claro que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = S_n - S_{n-1}$. Aplicando límites en la igualdad anterior, y sabiendo que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente en B, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty}\{S_n(x)\} - \lim_{n\to\infty}\{S_{n-1}(x)\} = S(x) - S(x) = 0 \quad \forall x \in B$$

□

Puesto que la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales, tenemos una relación directa de la convergencia de series con la continuidad, derivación e integración.

Teorema 2.1. Si una serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones continuas f_n es uniformemente convergente, entonces la función suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función continua.

Demostración. Como la serie es uniformemente convergente, tenemos que $\{S_n\} \to S$ uniformemente. Como las f_n eran continuas, las funciones S_n son continuas, por ser suma finita de funciones continuas. Por tanto, aplicando el teorema *Teorema 1.1* a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, tenemos que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua. □

Teorema 2.2. Si la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones continuas $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente convergente, entonces $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$

Demostración. Siguiendo la idea del teorema anterior, aplicamos el *Teorema 1.4* a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, y obtenemos que:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n \Rightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_a^b f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n$$

□

Teorema 2.3. Si para $f_n \in \mathscr{C}^1(a,b)$ la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ es c.p. en (a,b) y la serie $\sum_{n\geq 1} f_n'$ es c.u. en (a,b), entonces la suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función de $\mathscr{C}^1(a,b)$ con $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$

Demostración. Claramente $S_n \in \mathscr{C}^1(a,b)\ \forall n \in \mathbb{N}$, y además tenemos que $\{S_n\}$ $c.p.$ en (a,b), y $\{S_n'\}$ $c.u.$ en (a,b), pues la derivada de una suma finita es la suma de las derivadas. Bajo estas hipótesis, podemos aplicar a $\{S_n\}$ el *Teorema 1.5*, obteniendo que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathscr{C}^1(a,b)$, y además:

$$S' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty}\{S_n'\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

□

2.1. Criterios de convergencia para series de funciones

Teorema 2.4 (Criterio de Weierstrass). Si existen constantes M_n positivas tales que $|f_n(x)| \leq M_n \ \ \forall x \in A$ y la serie de números reales $\sum_{n\geq 1} M_n$ es convergente, entonces la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ es convergente uniformemente (y absolutamente) en A.

Demostración. Por el criterio de Cauchy para la convergencia de una serie de números positivos (las sumas parciales son de Cauchy), se tiene que:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ M_n + \cdots + M_{n+k} < \epsilon \ \ \forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Usando que $|f_n(x)| \leq M_n \ \forall x \in A$ y la desigualdad triangular obtenemos:

$$|f_n(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| \leq |f_n(x)| + \cdots + |f_{n+k}(x)| \leq M_n + \cdots + M_{n+k} < \epsilon \ \ \forall x \in A$$

Y por tanto:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \epsilon \ \ \forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in A$$

Como la sucesión de sumas parciales de la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente, queda probado que dicha serie converge uniformemente en A. □

Teorema 2.5 (Criterio de Abel). Sean $A \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ tales que $\{\phi_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones, es decir, $\phi_{n+1}(x) \leq \phi_n(x) \ \forall x \in A$. Supóngase que $\exists M$ tal que $|\phi_n(x)| \leq M \ \forall x \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ c.u. en A,} \implies \sum_{n\geq 1} \phi_n(x) f_n(x) \text{ c.u. en A.}$$

Teorema 2.6 (Criterio de Dirichlet). Sean $A \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ tales que $\{\phi_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones, que converge a 0 uniformemente, con $\phi_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\sum_{n\geq 1} f_n$ una serie de funciones, y supóngase que $\exists M$ tal que las sumas parciales de dicha serie están uniformemente acotadas, esto es,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M \ \ \forall x \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \phi_n(x) f_n(x)$ converge uniformemente en A.

Veamos un ejemplo de aplicación de estos criterios.

Ejemplo 2.1. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ converge uniformemente en $[0, \infty)$.

Sea $\phi_n(x) = e^{-nx}$. Para $x \geq 0$, ϕ_n es decreciente, y además $|\phi_n(x)| = |e^{-nx}| = |\frac{1}{e^{nx}}| \leq 1$. Por otro lado, sabemos que la serie alternada $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (y al no depender de x, vista como serie de funciones, lo hace uniformemente), por el *Criterio de Leibniz* para series de números reales. Por tanto, aplicando el *Criterio de Abel*, la serie de partida converge uniformemente para $x \geq 0$.

2.2. Series de potencias

Un caso interesante de series de funciones lo constituyen las series de potencias, esto es, aquellas series en las que las funciones son potenciales:

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, \quad a_n, a\in\mathbb{R} \;\; \forall n\in\mathbb{N}$$

Veamos una característica importante de las series de potencias, que nos ayuda a determinar su carácter de convergencia.

Definición 2.4 (Radio de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos su radio de convergencia $R\in[0,\infty]$ como:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Nota. En la definición anterior, permitimos que $R=\infty$, tomando como convenio que $\frac{1}{0}=\infty$ y $\frac{1}{\infty}=0$.

Definición 2.5 (Disco de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos el disco de convergencia $D(a,R) := \{x : |x-a| < R\}$.

Nota. Si $R=\infty$, entonces $D(a,R)=\mathbb{R}$.

El siguiente teorema da sentido a la nomenclatura seguida en las dos definiciones anteriores.

Teorema 2.7. La serie de potencias $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$

(i) converge uniformemente en $D(a,R')$ para cualquier $R'<R$ (en particular, converge absolutamente para todo $x\in D(a,R)$).

(ii) no converge si $x\notin\overline{D(a,R)}$.

Demostración.
(i) Sea $R'<R$. Como $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1/R'$, si elegimos $R''\in(R',R)$, deducimos que $\exists n_0\geq 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|}\leq 1/R''$, $\forall n\geq n_0$.

Esto implica que

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n|\cdot|x-a|^n \leq \left(\frac{R'}{R''}\right)^n, \quad \forall x\in D(a,R'),\ \forall n\geq n_0,$$

y el primer apartado se concluye aplicando el criterio de Weierstrass.

Para ver que la serie converge absolutamente en todo el disco, sea $x\in D(a,R)$. Entonces, siempre podemos encontrar un radio R' tal que $|x-a|<R'<R$. En consecuencia, $x\in D(a,R')$, y por lo que acabamos de probar, tenemos garantizada la convergencia (en valor absoluto) de la serie en el punto x.

(ii) Basta observar que si la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ es convergente en un punto $x \neq a$, entonces $\{a_n(x-a)^n\} \to 0$, y tomando $\epsilon = 1$ en la definición de convergencia tenemos que:

$$\exists n_0 > 0 : |a_n||x-a|^n \leq 1, \ \forall n \geq n_0$$

Y por tanto, $\sqrt[n]{|a_n| \cdot |x-a|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-a| \leq 1, \ \ \forall n \geq n_0$. Entonces:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-a| = \frac{|x-a|}{R} \leq 1 \implies |x-a| \leq R$$

Es decir, si la serie converge, necesariamente $x \in \overline{D(a,R)}$. □

Por último, veamos un teorema sobre derivación e integración de series de potencias. Para ello, notemos que si R es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, podemos definir la función S en $D(a,R)$ mediante:

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \ \ \forall x \in D(a,R)$$

Teorema 2.8. Sea $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

(i) La suma $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ es una función $\mathscr{C}^\infty$ en el disco de convergencia $D(a,R)$.

(ii) $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$, esto es,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-a)^n\right), \quad x \in D(a,R).$$

(iii) $\displaystyle\int_a^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, esto es,

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n\,dt, \quad x \in D(a,R).$$

Demostración.

(i) Veamos que $S(x)$ es continua en todo el disco de convergencia. Para ello, sea $x \in D(a,R)$, y tomo $R' < R$ de forma que se cumpla $x \in D(a,R')$. Entonces, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ converge uniformemente a $S(x)$ en $D(a,R')$, y concluimos que $S(x)$ es continua, por ser el límite uniforme de funciones continuas.

Ahora, demostraremos que la serie derivada tiene el mismo radio de convergencia, y podemos aplicar el mismo argumento para concluir que es continua. La prueba se completa por inducción, viendo que efectivamente la serie es $\mathscr{C}^\infty$ en el disco de convergencia.

En efecto, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{na_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\frac{1}{R}$, pero $\sqrt[n]{n} \to 1$, sin más que aplicar el criterio de la raíz.

(ii) Sea $x \in D(a,R)$. Entonces, teniendo en cuenta (i), y de igual forma que hicimos antes, obtenemos que $\sum_{n\geq 0} na_n(x-a)^{n-1}$ converge uniformemente en $D(a,R')$. Concluimos aplicando el *Teorema* 2.3 sobre derivación de una serie de funciones.

(iii) La prueba es análoga a (ii), aplicando en este caso el *Teorema* 2.2 sobre integración de series de funciones.

□

2.3. Funciones analíticas

Nos preguntamos ahora si cualquier función $\mathscr{C}^\infty$ se puede escribir como suma de una serie de potencias, es decir, si dada $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$ y $a \in I$, $\exists\{a_n\}$ tal que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Haciendo uso del teorema de Taylor, podemos ver la siguiente condición suficiente para que una función $f \in \mathscr{C}^\infty$ coincida con la suma de su serie de Taylor.

Teorema 2.9. Si una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en un intervalo I verifica

$$\exists M > 0 \;:\; |f^{n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in I.$$

Demostración. Fijamos $x \in I$, y observamos que las sumas parciales $S_k(x)$ de la serie son el polinomio de Taylor de orden k:

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

Usando el teorema del resto de Taylor, tendremos que $\exists c$ entre x y a tal que:

$$|f(x) - S_k(x)| = \left| \frac{f^{k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \right| \leq M\frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0$$

Es decir, la distancia entre f y S_n se hace tan pequeña como se quiera. Por tanto, hemos probado que $f(x) = \lim_{n\to\infty}\{S_n(x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in I.$ □

Como consecuencia de este teorema, podemos escribir algunas funciones elementales como la suma de su serie de Taylor, en el punto $a = 0$.

Ejemplo 2.2. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ejemplo 2.3. $senx = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$.

Ejemplo 2.4. $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Sin embargo, no todas las funciones $\mathscr{C}^\infty$ admiten una descomposición en sumas de funciones potenciales. Dada una serie de potencias, y usando el *Teorema 2.8*, notemos lo siguiente:

$S'(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (a-a)^{n-1} = a_1$; $S''(a) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (a-a)^{n-2} = 2a_2$; ...

En general, se demuestra por inducción que $S^{k)}(a) = k! \cdot a_k$. Es decir, fijado un a y conocida la función S, se tiene que necesariamente $a_k = \frac{S^{k)}(a)}{k!}$.

Recordemos que si una función $f \in \mathscr{C}^\infty$ cumple que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ $\forall x \in A$, dicha función es justamente lo que nos hemos referido como la suma de la serie, S. Pero acabamos de ver que, en ese caso, los a_n están perfectamente determinados, y resulta que f se escribiría como su suma de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Por tanto, la pregunta que nos hacíamos equivale a preguntarse si toda función $\mathscr{C}^\infty$ se puede escribir como su suma de Taylor. La respuesta es que, en general, esto no es posible (ya vimos en el *Teorema 2.9* que sí se cumple si todas las derivadas de f están acotadas).

Un contraejemplo sería la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es claro que $f \in \mathscr{C}^\infty$ y que $f \neq 0$. Además, se tiene que $f(0) = 0$, y $f^{k)}(0) = 0 \ \ \forall k \geq 1$.

Si f se escribiese como su suma de Taylor, tendríamos que, en el punto $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} \cdot x^n = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo cual es una contradicción, pues $f \neq 0$. Por tanto, f no se puede escribir como suma de una serie de potencias.

Las funciones que *sí* se pueden escribir como suma de una serie de potencias tienen propiedades muy interesantes. Tanto es así, que dichas funciones tienen un nombre propio.

Definición 2.6 (Función analítica). Decimos que una función $f \in \mathscr{C}^\infty(A)$ es analítica si se puede escribir como su suma de Taylor, es decir, si se cumple que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall x \in A$$

3. Integral asociada a una medida

Recordemos por un momento la definición de integral de Riemann-Darboux. Si tenemos una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathscr{P}[a,b]$, definimos la integral superior e inferior de una función f en $[a,b]$ como:

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_{P\in\mathscr{P}[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f$$

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_{P\in\mathscr{P}[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f$$

Entonces, el conjunto de funciones que son Riemann-integrables es:

$$\mathscr{R} = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ acotada} : \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \right\}$$

Si $f \in \mathscr{R}$, definimos su integral de Riemann como la correspondiente integral superior (o inferior). Sin embargo, hay ciertas funciones, principalmente aquellas que presentan muchas oscilaciones en el intervalo de integración, que no son integrables según Riemann. Un ejemplo es la **función de Dirichlet**,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & si\ x \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1] \end{cases}$$

donde es evidente (por la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) que $\overline{\int_a^b} f = 1 \neq 0 = \underline{\int_a^b} f$, y por tanto $f \notin \mathscr{R}$.

En este apartado, nuestro objetivo será construir una integral que abarque un conjunto más amplio de funciones que las funciones Riemann-integrables. Esta será la **integral de Lebesgue**, que intenta establecer una relación entre el intervalo de integración y la función a integrar, principalmente al considerar una manera de *medir* conjuntos.

Necesitaremos primero algunas nociones sobre teoría de la medida para comenzar a presentar la integral de Lebesgue. La referencia principal es esta vez [2, Capítulo 1].

3.1. Nociones generales

Definición 3.1 (σ-álgebra). Una familia $\mathscr{A}$ no vacía de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si verifica:

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) $\Omega \backslash A \in \mathscr{A}, \quad \forall A \in \mathscr{A}$

(iii) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}, \quad \forall \{A_n\} \subset \mathscr{A}$

Proposición 3.1. Si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre un conjunto Ω, se verifican las siguientes propiedades:

(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$

(ii) $\{A_i : i = 1, \ldots, n\} \subseteq \mathscr{A} \implies \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$

(iii) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}, \quad \forall \{A_n\} \subset \mathscr{A}$

(iv) $\{A_i : i = 1, \ldots, n\} \subseteq \mathscr{A} \implies \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$

(v) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \backslash B \in \mathscr{A}$

Demostración. La propiedad (i) es trivial, notando que $\emptyset = \Omega^c$. Para comprobar (ii), formamos la sucesión $\{A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \ldots\} \subseteq \mathscr{A}$, y aplicamos la definición de σ-álgebra.

La propiedad (iii) se demuestra usando las leyes de De Morgan:

$$\Omega - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)$$

y usando el mismo argumento que en (ii), vemos fácilmente que se verifica (iv).

Por último, (v) se deriva del hecho de que $A - B = (\Omega - B) \cap A$. □

Definición 3.2 (Espacio medible). Diremos que la pareja $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio medible si $\Omega \neq \emptyset$ es un conjunto, y $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre Ω. A los elementos A de $\mathscr{A}$ los llamaremos conjuntos medibles.

Nota. Un ejemplo sencillo de $\sigma-$álgebra es la familia formada por todos los subconjuntos de Ω. La denotamos como $P(\Omega) \equiv 2^{\Omega}$.

Definición 3.3 (Función medible). Si $(\Omega, \mathscr{A})$ y $(X, \mathscr{B})$ son espacios medibles y $f : \Omega \to X$ es una función, diremos que f es medible si:

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{A}, \ \forall B \in \mathscr{B}$$

Es decir, si la imagen inversa de un conjunto medible es otro conjunto medible.

Proposición 3.2. La composición de funciones medibles es medible. Es decir, si $f:(X,\mathscr{A})\longrightarrow(Y,\mathscr{B})$, $g:(Y,\mathscr{B})\longrightarrow(Z,\mathscr{C})$ son medibles, entonces $g\circ f$ es medible.

Demostración. Evidente, pues $(g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}(g^{-1}(C))\in\mathscr{A}$, por ser f y g medibles. □

Definición 3.4 (σ-álgebra de Borel). Si Ω es un espacio topológico, se llama σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\Omega)$ a la σ—álgebra engendrada por la topología τ de Ω. Además, $\mathscr{B}(\Omega)$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a τ.

Formalmente, si $\Lambda=\{\mathscr{A}:\mathscr{A}$ es σ-álgebra y $\tau\subseteq\mathscr{A}\}$, definimos

$$\mathscr{B}(\Omega):=\bigcap_{\mathscr{A}\in\Lambda}\mathscr{A}$$

Para ver que $\mathscr{B}(\Omega)$ es una σ-álgebra, basta observar que, dada una sucesión $\{A_n\}\subseteq\mathscr{B}(\Omega)$, tenemos que $A_n\in\mathscr{A}\quad\forall\mathscr{A}\in\Lambda$. Como cada $\mathscr{A}\in\Lambda$ es una σ-álgebra, se tiene que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A},\quad\forall\mathscr{A}\in\Lambda\implies\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{B}(\Omega)$$

El resto de propiedades se comprueban de forma análoga.

Proposición 3.3. Si $(\Omega,\mathscr{A})$ es un espacio medible, X un espacio topológico con $\mathscr{B}$ su σ—álgebra de Borel, entonces:

$$f:\Omega\to X\text{ es medible}\iff f^{-1}(G)\in\mathscr{A},\quad\forall G\in\tau$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Como f es medible, se tiene que $f^{-1}(B)\in\mathscr{A}\ \forall B\in\mathscr{B}$, y como $\tau\subseteq\mathscr{B}$, se verifica automáticamente que la preimagen de cualquier abierto de X es medible.

$\boxed{\Leftarrow}$ Definimos $\mathscr{M}:=\{E\subseteq X:f^{-1}(E)\in\mathscr{A}\}$, y afirmo que $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra sobre X. En efecto, utilizando que $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre Ω, y las propiedades de la imagen inversa de conjuntos por una función:

- $X\in\mathscr{M}$, porque $f^{-1}(X)=\Omega\in\mathscr{A}$.
- Si $E\in\mathscr{M}$, se tiene que $X-E\in\mathscr{M}$, porque $f^{-1}(X-E)=f^{-1}(X)-f^{-1}(E)=\Omega-f^{-1}(E)\in\mathscr{A}$.
- Si $\{A_n\}\subseteq\mathscr{M}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}$, pues $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)\in\mathscr{A}$, porque cada $f^{-1}(A_n)\in\mathscr{A}$.

Por otro lado, tenemos que, por hipótesis, $\tau\subseteq\mathscr{M}$. Como $\mathscr{B}$ es la más pequeña σ-álgebra sobre X que contiene a τ, necesariamente $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{M}$. Pero entonces se cumple que $f^{-1}(B)\in\mathscr{A}\ \forall B\in\mathscr{B}$, concluyendo la prueba. □

En general, cuando consideremos un espacio X sin decir explícitamente cuál es la σ—álgebra asociada, daremos por hecho que se trata de la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(X)$ asociada a la topología usual de X.

Proposición 3.4. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos, y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Entonces, f es medible.

Demostración. Basta observar que dado $O \in \tau_Y \implies f^{-1}(O) \in \tau_X \subseteq \mathscr{B}(X)$, por la continuidad de f. $\square$

3.1.1. Aritmética de $[0, \infty]$

Antes de continuar con el estudio de las funciones medibles, presentamos un espacio topológico en el que trabajaremos frecuentemente: la **recta real extendida**, que notaremos como $[-\infty, +\infty]$ ó $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. En general, cuando hablemos de la recta real extendida, entenderemos que está dotada de la siguiente topología:

Definición 3.5 (Topología de la recta real extendida). La dada por la base $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$.

Puesto que de ahora en adelante trabajaremos habitualmente en el espacio topológico $[0, \infty] \subseteq [-\infty, \infty]$, necesitamos definir ciertas operaciones y relaciones:

(i) $a < \infty, \quad \forall a \in [0, \infty)$
(ii) $\infty + a = \infty, \quad \forall a \in [0, \infty]$
(iii) $\infty \cdot a = \infty, \quad \forall a \in (0, \infty]$
(iv) $\infty \cdot 0 = 0$

El hecho de trabajar en este espacio nos proporciona ciertas ventajas, principalmente en cuanto a notación y distinción de casos. Por ejemplo, en $[0, \infty]$, *toda sucesión monótona creciente es convergente*, si bien el límite puede ser ∞. También podemos decir que existe siempre la suma de una serie, o que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones convergentes a x e y respectivamente, entonces $\{x_n y_n\} \to xy$.

3.2. Funciones medibles positivas

Una familia muy importante de funciones medibles son aquellas que toman únicamente valores positivos (en la recta real extendida). Tanto es así, que si conocemos el comportamiento de estas funciones, las definiciones y propiedades que derivemos sobre ellas se extenderán fácilmente a funciones medibles cualesquiera en $[-\infty, +\infty]$.

Definición 3.6 (Funciones medibles positivas). Una función $f : \Omega \to X = [0, \infty]$ medible se llama función medible positiva.

Lema 3.1. Sea $O \subseteq [0,+\infty]$ abierto. Entonces O es unión numerable de abiertos básicos.

Demostración. Si $x \in O$, entonces existe un intervalo $I \subseteq O$ (que es un abierto básico, véase 3.5) con $x \in I$. El axioma de elección nos proporciona, para cada $x \in O$, I_x en estas condiciones. Por el lema 1.1, $O \cap \mathbb{R}$ tiene un conjunto numerable C denso en él. Entonces, es claro que

$$O \cap \mathbb{R} = \bigcup_{c \in C} I_c.$$

Si $+\infty \in O$, existe una familia de abiertos básicos $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de tales que $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, luego existe $\lambda \in \Lambda$ con $+\infty \in B_\lambda$. Definiendo $I_{+\infty} := B_\lambda$, $O = (O \cap \mathbb{R}) \cup I_{+\infty}$. □

Proposición 3.5 (Caracterización de funciones medibles positivas). Sea $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio de medida y $f : \Omega \to [0,\infty]$. Entonces:

$$\begin{aligned} f \text{ es medible} &\iff \{w \in \Omega : f(w) < \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0 \\ &\iff \{w \in \Omega : f(w) \leq \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0 \\ &\iff \{w \in \Omega : f(w) > \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0 \\ &\iff \{w \in \Omega : f(w) \geq \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

Demostración. Se hará para el primer caso únicamente. El resto son análogos. Observemos que:

$$\begin{aligned} &(a,b) = [0,b) - [0,a) \quad \text{y} \\ &(a,+\infty] = [0,+\infty] - \left(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,a+\frac{1}{n})\right). \end{aligned}$$

Luego, $f^{-1}(a,b) = f^{-1}[0,b) \backslash f^{-1}[0,a)$, $f^{-1}(a,+\infty] = \Omega - \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}[0,a+\frac{1}{n})\right)$, medibles. Ahora, por ser las preimágenes por f de los abiertos básicos medibles, y por ser cada abierto unión numerable de abiertos básicos (lema 3.1), es claro que f es medible. □

Proposición 3.6. Sea $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas en Ω, entonces también son medibles las funciones definidas por:

$$g_1(\omega) = \sup\{f_n(\omega) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$g_2(\omega) = \inf\{f_n(\omega) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$g_3(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \ f_n(\omega)$$

$$g_4(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \ f_n(\omega)$$

En particular, si $\{f_n\} \xrightarrow{c.p.} f$ en Ω, entonces f es medible.

Demostración. Para ver que $g_1(w)$ es medible, basta comprobar que $g_1^{-1}[0,\gamma)$ es medible para todo $\gamma \geq 0$, en virtud de la proposición 3.5. En efecto:

$$g^{-1}[0,\gamma) = \{\omega \in \Omega : \sup\{f_n(w) : n \in \mathbb{N}\} \in [0,\gamma)\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : f_n(w) \in [0, \gamma) \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}[0, \gamma),$$

donde $f_n^{-1}[0,\gamma)$ es medible para cada n, por ser cada una de las f_n medibles. Concluimos observando que la intersección numerable de medibles es medible, pues $\mathscr{A}$ una $\sigma-$álgebra.

La demostración para $g_2(\omega)$ es análoga. La medibilidad de $g_3(\omega)$ se deriva del hecho de que

$$g_3(\omega) = \limsup f_n(\omega) = \inf_{n\geq 1} \left\{ \sup_{k\geq n} f_k(\omega) \right\}$$

Así, podemos ver la función como $g_3(\omega) = \inf\{h_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$, donde $h_n(\omega) := \sup\{f_k(\omega) : k \geq n\}$. Combinando lo demostrado anteriormente, concluimos que $g_3(\omega)$ es medible. De nuevo, la prueba para $g_4(\omega)$ es análoga.

La última afirmación proviene de que si $\{f_n\} \to f$, entonces $\limsup f_n = \liminf f_n = \lim f_n$. $\square$

3.2.1. Funciones simples

Centraremos ahora nuestra atención en estudiar funciones sencillas o *simples*, que nos servirán más adelante como base para construir una integral.

Definición 3.7 (Funciones simples positivas). Diremos que una función medible $s : \Omega \to [0, \infty)$ es simple positiva si $s(\Omega)$ es un conjunto finito.

Una característica importante de las funciones simples es que siempre se pueden escribir como una suma finita de funciones. Antes de verlo, necesitamos definir la función característica de un conjunto A, que denotaremos χ_A y viene dada por:

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$$

Proposición 3.7. La función característica χ_A es medible si y solo si A es medible.

Demostración. Evidente, notando que $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$, $\chi_A^{-1}(\{0\}) = \Omega - A$, y que la imagen de χ_A es el espacio $\{0, 1\}$ con la topología discreta. $\square$

Proposición 3.8 (Descomposición canónica). Si $s : \Omega \to [0, \infty)$ es simple con $s(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, entonces los conjuntos medibles $A_k := \{w \in \Omega : s(\omega) = \alpha_k\}$ son una partición de Ω, y además:

$$s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$$

Siendo esta la descomposición canónica de s, que es única si $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$.

Demostración. En primer lugar, los conjuntos A_k son medibles, pues se pueden escribir como diferencia de medibles: $A_k = s^{-1}[0, \alpha_k] \setminus s^{-1}[0, \alpha_k)$. Además, como $s(\Omega)$ es finito, trivialmente se verifica que

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \quad ; \quad A_j \cap A_k = \emptyset \text{ para } j \neq k$$

Por tanto, dado $\omega \in \Omega$, $\exists!\ k_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\omega \in A_{k_0}$, de donde se deduce la descomposición canónica de s. □

En general, reservaremos las letras α_k y A_k para denotar las constantes y los conjuntos que intervienen en la descomposición canónica de una función simple.

Proposición 3.9 (Aritmética de funciones simples). Si s y t son funciones simples positivas y $\alpha \in [0, \infty)$, entonces $s + t,\ \alpha s,\ st$ son también simples positivas.

Demostración. Como $s, t : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ son simples positivas $\implies s(\Omega),\ t(\Omega)$ son conjuntos finitos. Supongamos que $s(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $t(\Omega) = \{b_1, \dots, b_m\}$
.

La imagen por $s + t$ sería

$$(s + t)(\Omega) \subseteq \{a_i + b_j\ :\ i = 1, \dots, n\ ;\ j = 1, \dots, m\}$$

que es un conjunto finito, probando que la función suma $s + t$ es simple.

Similarmente,

$$(st)(\Omega) \subseteq \{a_i \cdot b_j\ :\ i = 1, \dots, n\ ;\ j = 1, \dots, m\}$$

que también es un conjunto finito, probando que la función producto st es simple.

Finalmente, como $\alpha < \infty$, la función $\alpha s : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$. Además,

$$(\alpha s)(\Omega) = \{\alpha a_i\ :\ i = 1, \dots, n\},$$

que es un conjunto finito, probando que αs es simple. □

Proposición 3.10. Si $B_1, B_2, \dots, B_m \subseteq \Omega$ son conjuntos medibles, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in [0, \infty)$, entonces

$$t := \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{B_k} \text{ es simple positiva.}$$

Demostración. Empezamos observando que las funciones χ_{B_k} son simples positivas para $k = 1, \dots, m$. Esto es así porque son medibles (ver *Proposición 3.7*), y su imagen es evidentemente un conjunto finito. Concluimos viendo que t es suma y producto por escalares de funciones simples positivas, y en virtud de la *Proposición 3.9*, es simple positiva. □

Nota. La expresión de la función t de la proposición anterior no es su descomposición canónica, pues podría darse el caso de que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ para algún $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, y ya no podrían formar una partición de Ω.

Teorema 3.1 (de aproximación de Lebesgue). Si Ω es un espacio medible y $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) f es medible

(ii) $\exists s_n : \Omega \to [0, \infty)$ simples positivas tales que $\{s_n\}$ es monótona creciente y convergente a f puntualmente en Ω.

Además, si f es medible y

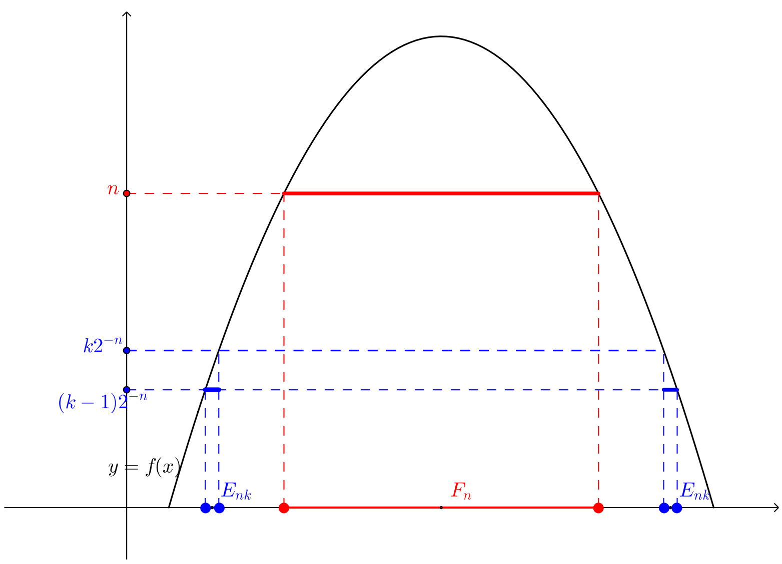
$$f(\omega) \leq M < \infty, \quad \forall \omega \in \Omega$$

Entonces puede conseguirse que $\{s_n\} \xrightarrow{c.u.} f$ en Ω.

Demostración.
$\boxed{ii) \implies i)}$ Es consecuencia directa de la proposición 3.6, al ser f límite de funciones medibles.
$\boxed{i) \implies ii)}$ La idea principal se basa en dividir el dominio de f. Fijado un $n \in \mathbb{N}$, consideramos los conjuntos:

- $F_n := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq n\}$
- $E_{n,k} := \left\{\omega \in \Omega : \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \dfrac{k}{2^n}\right\}$, para $1 \leq k \leq n2^n$

Veamos gráficamente ambos conjuntos, para un $n \in \mathbb{N}$ fijo:



Así, tenemos que:

$$\Omega = F_n \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n2^n} E_{n,k} \right)$$

y podemos definir las funciones

$$s_n := n\chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \chi_{E_{n,k}}$$

Además, como f es medible, entonces F_n y $E_{n,k}$ son conjuntos medibles, al ser preimágenes de medibles. También tenemos que s_n es medible para cada $n \in \mathbb{N}$ (por serlo f y la función característica de un conjunto), y $s_n(\Omega)$ es finito, por lo que s_n es simple $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora, s_n es monótona creciente, pues:

$$\begin{aligned}
s_{n+1} - s_n = & \sum_{k=1}^{(n+1)2^{n+1}} \frac{k-1}{2^{n+1}} \chi_{E_{n+1,k}} - \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} \\
& + (n+1)\chi_{F_{n+1}} - n\chi_{F_n} \\
= & \sum_{k=1}^{(n+1)2^n} \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}} \chi_{E_{n+1,2k}} + \frac{(2k-1)-1}{2^{n+1}} \chi_{E_{n+1,2k-1}} \right] \\
& - \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + (n+1)\chi_{F_{n+1}} - n\chi_{F_n} \\
\geq & \sum_{k=1}^{(n+1)2^n} \frac{k-1}{2^n} \left[\chi_{E_{n+1,2k}} + \chi_{E_{n+1,2k-1}} \right] - \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} \\
& + (n+1)\chi_{F_{n+1}} - n\chi_{F_n} \\
= & \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \left[\chi_{E_{n+1,2k}} + \chi_{E_{n+1,2k-1}} \right] - \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} \\
& + \sum_{k=1+n2^n}^{(n+1)2^n} \frac{k-1}{2^n} \left[\chi_{E_{n+1,2k}} + \chi_{E_{n+1,2k-1}} \right] + (n+1)\chi_{F_{n+1}} - n\chi_{F_n} \\
= & \sum_{k=1+n2^n}^{(n+1)2^n} \frac{k-1}{2^n} \left[\chi_{E_{n+1,2k}} + \chi_{E_{n+1,2k-1}} \right] + (n+1)\chi_{F_{n+1}} - n\chi_{F_n}
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se obtiene usando que $E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k-1} = E_{n,k}$, y que $E_{n+1,2k} \cap E_{n+1,2k-1} = \emptyset$. Ahora, usando que $(k-1)2^{-n} \geq n$ para $k = 1 + n2^n, 2 + n2^n, \ldots n2^{n+1}$ y que

$$\begin{aligned}
& \left(E_{n+1,2(1+n2^n)-1} \cup E_{n+1,2(1+n2^n)}\right) \bigcup \left(E_{n+1,2(2+n2^n)-1} \cup E_{n+1,2(2+n2^n)}\right) \bigcup \ldots \\
& \qquad \ldots \bigcup \left(E_{n+1,(1+n)2^{n+1}-1} \cup E_{n+1,(1+n)2^{n+1}}\right) = F_n \setminus F_{n+1},
\end{aligned}$$

tenemos que $s_{n+1} - s_n \geq n\chi_{F_n \setminus F_{n+1}} + (n+1)\chi_{F_{n+1}} - n\chi_{F_n} \geq 0$.

Probamos para acabar que $\{s_n(\omega)\} \to f(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$. En efecto, sea $\omega \in \Omega$ fijo.

- Si $f(\omega) = \infty \implies \omega \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\implies s_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(\omega) + n \cdot 1 \geq n \longrightarrow \infty.$$

- Si $f(\omega) < \infty \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(\omega) < n_0$ y $\omega \notin F_n$ $\forall n \geq n_0$.

$$\implies \forall n \geq n_0 \quad \exists!\ k = 1, 2, \ldots, n2^n : \frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n}$$
$$\implies s_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{E(2^n f(\omega)+1)-1}{2^n} \longrightarrow f(\omega),$$

porque, notando por $E(x)$ a la parte entera de x,

$$0 \leq f(\omega) - s_n(\omega) = f(\omega) - \frac{E(2^n f(\omega)+1)-1}{2^n} \overset{x-1 \leq E(x)}{\leq} f(\omega) - \frac{2^n f(\omega)-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0.$$

Además, hay convergencia uniforme en el caso $f(\omega) \leq M < \infty$: sea $n_0 = E(M) + 1$, entonces, la desigualdad anterior se da para cada $n \geq n_0$ y cada $\omega \in \Omega$. □

Corolario 3.1 (Aritmética de funciones medibles positivas). Sea Ω un espacio medible, $\alpha \in [0, \infty]$, y $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles. Entonces, $f + g$, fg, αf son funciones medibles.

Demostración. Por el teorema de aproximación de Lebesgue (3.1) sabemos que existe una sucesión $\{s_n\}$ y otra $\{t_n\}$ de funciones simples positivas que convergen de forma creciente a f y g, respectivamente. Además, por la proposición 3.9 sabemos que podemos generar una sucesión $\{s_n + t_n\} \to f + g$ de funciones simples positivas, y por tanto $f + g$ es medible, al ser el límite puntual de funciones medibles (proposición 3.6).

La demostración para αf y fg es análoga. □

3.3. Integral de funciones medibles positivas

Abordamos ahora el problema de definir una integral asociada a funciones medibles positivas. Para ello, formalizaremos el concepto de *medida*, que nos permitirá asignar a cada conjunto medible un número $m \in [0, \infty]$, que entenderemos como la *medida* de ese conjunto.

Definición 3.8 (Medida). Si $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio medible, una medida (positiva) es una función $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ que verifica:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (σ-aditividad o aditividad numerable). $\forall \{A_k\} \subseteq \mathscr{A}$ con $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$, se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

La terna $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ se llama **espacio de medida**.

Proposición 3.11 (Propiedades de una medida). Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida, se verifican las siguientes propiedades:

(i) (Monotonía). Si $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) (σ-subaditividad). $\forall \{A_k\} \subseteq \mathscr{A}$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(iii) (Continuidad desde abajo) $\forall \{A_k\} \subseteq \mathscr{A}$ tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots$, se tiene:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

(iv) (Continuidad desde arriba) $\forall \{A_k\} \subseteq \mathscr{A}$ tal que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots$, si $\mu(A_1) < \infty$ se tiene:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

Demostración.

(i) Escribimos convenientemente el conjunto B, y aplicamos la definición de medida:

$$B = (B \setminus A) \cup A \Longrightarrow \mu(B) = \mu((B \setminus A) + \mu(A)) \geq \mu(A)$$

(ii) Sabemos que si los conjuntos A_k son disjuntos se da la igualdad. Si no lo son, podemos considerar los conjuntos:

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus B_1, B_3 = A_3 \setminus (B_1 \cup B_2), \ldots, B_n = A_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}), \ldots$$

Entonces, $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, con B_k disjuntos dos a dos. Por la propiedad (i), $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$, y tenemos

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(iii) Pongamos $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, con B_k disjuntos dos a dos, y también $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Por tanto:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

□

Ejemplo 3.1. Medida contadora.

$$\mu : 2^{\Omega} \longrightarrow [0, \infty],\ \mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A, & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty, & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Es claro que $\mu(\emptyset) = |\emptyset| = 0$, y si $A_k \cap A_j = 0$, se tiene que $\mu(A_k \cup A_j) = |A_k| + |A_j| = \mu(A_k) + \mu(A_j)$. Si alguno de ellos no es finito, la suma será ∞ por la aritmética definida en $[0, \infty]$.

Ejemplo 3.2. Medida de Dirac. Sea $(\Omega, \mathscr{A} = 2^\Omega)$ un espacio medible. Para $\omega \in \Omega$, la medida de Dirac o masa puntual es la medida $\delta_\omega : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty]$ dada por

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A, \\ 0, & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Fijemos $\omega \in \Omega$. Claramente $\delta_\omega(\emptyset) = 0$, porque el conjunto vacío no contiene ningún punto. Ahora, si $A_k \cap A_j = \emptyset$, pueden darse dos casos:

- $\omega \in A_k \cup A_j \implies \omega \in A_k$ o bien $\omega \in A_j$. Supongamos $\omega \in A_k$. Entonces, $\delta_\omega(A_k \cup A_j) = 1 = 1 + 0 = \delta_\omega(A_k) + \delta_\omega(A_j)$.
- $\omega \notin A_k \cup A_j \implies \omega \notin A_k$ y $\omega \notin A_j$. Entonces, $\delta_\omega(A_k \cup A_j) = 0 = 0 + 0 = \delta_\omega(A_k) + \delta_\omega(A_j)$.

Ejemplo 3.3. Medida de Lebesgue. Si $(\Omega = \mathbb{R}^N, \mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^N))$ espacio medible, la medida de Lebesgue es $\lambda : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_N, b_N]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_N - a_N)$$

Estamos ya en disposición de definir lo que entenderemos por integral de una función medible positiva, en el marco de un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Como ya dijimos, el problema se reducirá a estudiar integrales asociadas a funciones simples, las cuales definimos a continuación.

Definición 3.9 (Integral de función simple positiva). Si $E \in \mathscr{A}$ y $s : \Omega \to [0, \infty)$ es simple, i.e, $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$, entonces definimos la integral de s en E como:

$$\int_E s \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E \cap A_k).$$

Comprobemos ahora que la definición es consistente, es decir, que el valor de la integral no depende de la representación de s. Sea $s = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$ con $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ medibles y disjuntos, y $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \subseteq [0, \infty)$. Sabemos por la proposición 3.10 que s es simple. Además, supongamos que $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ es su descomposición canónica.

Observemos que puede ocurrir que $\beta_i = \beta_j$ para algún $i \neq j$. Teniendo esto en cuenta, definimos $I_k := \{j \in \{1, \ldots, m\} : \beta_j = \alpha_k\}$, y entonces

$$A_k = \bigcup_{j \in I_k} B_j$$

Realizando transformaciones algebraicas, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(E\cap B_j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in I_k}\beta_j\mu(E\cap B_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sum_{j\in I_k}\mu(E\cap B_j)\overset{(*)}{=}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu\left(\bigcup_{j\in I_k}E\cap B_j\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu\left(E\cap\bigcup_{j\in I_k}B_j\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E\cap A_k)$$

donde la igualdad $(*)$ se da por la *aditividad* de μ, teniendo en cuenta que los conjuntos $\{B_j\cap E\}_{j=1}^{m}$ son disjuntos dos a dos, por serlo $\{B_j\}_{j=1}^{m}$.

Por tanto, queda probado que

$$\int_E s\,d\mu=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(E\cap B_j)$$

.

Proposición 3.12 (Propiedades integral funciones simples). Sea s una función simple. Entonces, se verifica lo siguiente:

(*i*) $\displaystyle\int_E \alpha s\,d\mu=\alpha\int_E s\,d\mu,\quad\forall\alpha\in[0,\infty]$

(*ii*) Si A,B son dos conjuntos medibles y disjuntos, entonces

$$\int_{A\cup B}s\,d\mu=\int_A s\,d\mu+\int_B s\,d\mu$$

(*iii*) Si t es simple y $s(\omega)\le t(\omega)\ \forall\omega\in\Omega$, entonces $\displaystyle\int_E s\,d\mu\le\int_E t\,d\mu$

Demostración. Supongamos que $s=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k}$ (descomposición canónica).

(*i*) Sabemos que αs es una función simple, por ser producto de una simple y un escalar. De hecho, $\alpha s=\sum_{k=1}^{n}\alpha\alpha_k\chi_{A_k}$. Entonces, se tiene que:

$$\int_E\alpha s\,d\mu=\sum_{k=1}^{n}\alpha\alpha_k\mu(E\cap A_k)=\alpha\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E\cap A_k)=\alpha\int_E s\,d\mu$$

(*ii*) Basta observar lo siguiente:

$$\int_{A\cup B}s\,d\mu=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mu((A\cup B)\cap A_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mu((A\cap A_k)\cup(B\cap A_k))\overset{(*)}{=}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\mu(A\cap A_k)+\mu(B\cap A_k)\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(A\cap A_k)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(B\cap A_k)=$$

$$= \int_A s\,d\mu + \int_B s\,d\mu,$$

donde $(*)$ es consecuencia de la *aditividad* de μ, teniendo en cuenta que $(A \cap A_k)$ y $(B \cap A_k)$ son disjuntos, por serlo A y B.

□

Definición 3.10 (Integral de función medible positiva). Si $E \in \mathscr{A}$ y $f : \Omega \to [0, \infty]$ es medible, entonces definimos la integral de f en E como:

$$\int_E f\,d\mu := \sup \left\{ \int_E s\,d\mu : \ s \text{ es simple positiva, } s \leq f \right\}.$$

Veamos ahora un teorema importante que, dada una sucesión de funciones convergente, nos permite bajo ciertas condiciones "intercambiar la integral con el límite". Antes, necesitaremos el siguiente

Lema 3.2. Sea $s : \Omega \to [0, \infty)$ simple. Entonces, $\varphi : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ dada por

$$\varphi(E) = \int_E s\,d\mu, \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

es una medida.

Demostración. En primer lugar, es claro que $\varphi(\emptyset) = \displaystyle\int_{\emptyset} s\,d\mu = 0$, pues μ es una medida, y $\mu(\emptyset) = 0$. Por otro lado, dada una sucesión $\{E_k\}$ de conjuntos medibles y disjuntos, se tiene que

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} s\,d\mu \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} s\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_k),$$

donde $(*)$ es consecuencia de la proposición 3.12 *ii*. Por tanto, φ es σ-aditiva, luego es una medida. □

Teorema 3.2 (Teorema de la convergencia monótona). Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $E \in \mathscr{A}$ y $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ medibles. Supongamos que $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega) \ \forall \omega \in \Omega$. Entonces:

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu$$

Demostración. Empezamos observando que $f(\omega) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$ es medible por la proposición 3.6, teniendo en cuenta que $\{f_n(\omega)\}$ es monótona creciente, y por tanto convergente. Veamos ahora las dos desigualdades.

$\boxed{\geq}$ Como $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ por hipótesis, tenemos que:

$$\left\{ s : \begin{array}{r} s \text{ simple positiva} \\ s \leq f_n \end{array} \right\} \subseteq \left\{ s : \begin{array}{r} s \text{ es simple positiva} \\ s \leq f_{n+1} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ s : \begin{array}{r} s \text{ es simple positiva} \\ s \leq f \end{array} \right\}$$

Tomando supremos de las respectivas integrales, esto implica que:

$$\int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f_{n+1} \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu \implies \exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$$

$\boxed{\leq}$ Como

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : \begin{array}{r} s \text{ es simple positiva} \\ s \leq f \end{array} \right\}$$

basta ver que

$$\left. \begin{array}{r} s \text{ es simple positiva} \\ s \leq f \end{array} \right\} \implies \int_E s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu,$$

pues al tomar el supremo de la primera integral, se mantiene el orden y tendríamos lo buscado. Vamos a probar este hecho. Sea $s : \Omega \to [0, \infty)$ simple positiva tal que $s \leq f$. Fijamos $\rho \in (0,1)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_n := \{\omega \in E : \rho s(\omega) \leq f_n(\omega)\}$$

Tenemos que los conjuntos E_n son medibles, puesto que la función $h := f_n - \rho s$ es medible, y por tanto $E_n = h^{-1}([0,\infty))$ es medible para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, claramente $E_n \subseteq E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pues $\{f_n\}$ es creciente, y se verifica que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Para verlo, sea $\omega \in E$. Si $f(\omega) = 0 \implies s(\omega) = 0 \implies \omega \in E_1$. En otro caso, $\rho s(\omega) < f(\omega)$, pues $\rho < 1$. Entonces, $\exists n \in \mathbb{N} : \omega \in E_n$. Ahora, se tiene lo siguiente, donde φ es la medida definida en el *Lema 3.2*:

$$\rho\varphi(E_n) = \rho \int_{E_n} s \, d\mu = \int_{E_n} \rho s \, d\mu \overset{\text{def. } E_n}{\leq} \int_{E_n} f_n \, d\mu \leq \int_E f_n \, d\mu \tag{1}$$

La última desigualdad es así porque para toda función simple $s \leq f_n$ se tiene que $\int_{E_n} s \, d\mu \leq \int_E s \, d\mu$, como consecuencia de que $E_n \cap A_k \subseteq E \cap A_k$ y la monotonía de μ.

Ahora, como φ es una medida, si $n \to \infty$ en (1), entonces:

$$\rho\varphi(E) = \rho \int_E s \, d\mu \implies \rho \int_E s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

Donde hemos usado que $\varphi(E_n) \to \varphi(E)$ cuando $n \to \infty$, porque $\{E_n\}$ es una sucesión encajada de conjuntos medibles, y φ es una medida (*Proposición 3.11 iii*). Por último, hacemos tender $\rho \to 1$, y concluimos la prueba:

$$\int_E s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

□

Una vez que conocemos el *teorema de la convergencia monótona*, podemos deducir una serie de propiedades útiles sobre la integral de funciones medibles positivas. Por comodidad, abreviaremos dicho teorema como $T.C.M$.

Proposición 3.13 (Propiedades integral funciones medibles positivas). Sean $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles positivas, $\alpha \in \mathbb{R}, E \in \mathscr{A}$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades.

(*i*) Linealidad de la integral

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$$

$$\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu$$

(*ii*) Monotonía

$$g(\omega) \leq f(\omega)\ \forall \omega \in \Omega \implies \int_E g\, d\mu \leq \int_E f\, d\mu$$

(*iii*) Integración en un conjunto más grande

$$\int_E f\, d\mu = \int_\Omega f \chi_E\, d\mu$$

(*iv*) Condiciones suficientes para que la integral sea nula

$$\mu(E) = 0 \implies \int_E f\, d\mu = 0$$

$$f(\omega) = 0\ \ \forall \omega \in \Omega \implies \int_E f\, d\mu = 0$$

Demostración.

(*i*) Ya sabemos por el *Corolario* 3.1 que $f+g$, fg y αf son medibles.

...

Recordemos que tomamos el convenio $\alpha \cdot \infty = \infty,\ \alpha \cdot 0 = 0$.

(*ii*)

(*iii*)

(*iv*) Veamos la primera implicación. Empezamos notando que si $\mu(E) = 0$, entonces $\int_E s\, d\mu = 0$ para toda función simple s. En efecto, si $s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ es su forma canónica, entonces:

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot 0 = 0,$$

donde hemos usado que $\mu(E \cap A_k) = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$ por la monotonía de μ, notando que $E \cap A_k \subseteq E$.
Por tanto, $\sup \left\{ \int_E s \, d\mu : s \text{ es simple positiva}, s \leq f \right\} = 0$, y hemos acabado.
Para la segunda implicación, observemos que $f = 0$ es simple, pues el único valor que toma es el 0. Por tanto:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \mu(E) = 0$$

□

Proposición 3.14. Sea $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Entonces, $\varphi : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ dada por

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu, \quad \forall E \in \mathscr{A}$$

es una medida. Además, se verifica lo siguiente:

(i) $E \in \mathscr{A}, \ \mu(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$

(ii) $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible $\implies \int_E g \, d\varphi = \int_E gf \, d\mu$

Para finalizar este apartado, veamos dos teoremas importantes, ambos consecuencia directa del *teorema de la convergencia monótona*.

Teorema 3.3 (Teorema de Levi). Sean $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ medibles. Entonces

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

Demostración.
Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ son medibles y $\sum_{n \geq 1} f_n$ una serie de funciones, definimos las sumas parciales como

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} f_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Tenemos que $S_1 \leq \cdots \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \cdots$, es decir, S_k es monótona creciente. Además, las funciones S_k son medibles para cada $k \in \mathbb{N}$, por ser suma de funciones medibles. Aplicando el *T.C.M*, tenemos que:

$$\lim_{k \to \infty} \int_E S_k \, d\mu = \int_E \lim_{k \to \infty} S_k \, d\mu \implies \lim_{k \to \infty} \int_E \sum_{n=1}^{k} f_n \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{Proposición 3.13 } i}{\implies}$$

$$\implies \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

□

Lema 3.3 (Lema de Fatou). Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida, $E \in \mathscr{A}$ y tenemos funciones $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ medibles, entonces:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

Demostración. Definimos $g_k(\omega) := \inf_{n\geq k} f_n(\omega)$. Sabemos que $\{g_k\}$ es monótona creciente por definición, y además es una sucesión de funciones medibles por la *Proposición 3.6*. Entonces, tenemos que:

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = \sup_{k\geq 1} \left\{\inf_{n\geq k} f_n(\omega)\right\} = \sup_{k\geq 1} g_k(\omega) = \lim_{k\to\infty} g_k(\omega)$$

Ahora, aplicando el *T.C.M*, se tiene que:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k d\mu$$

Por último, sabemos que $g_k(\omega) \leq f_k(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$ (por definición de ínfimo). Además, se tiene que $g_k \leq \inf_{n\geq k} f_k$. Aplicamos la monotonía de la integral:

$$\int_E g_k \, d\mu \leq \inf_{n\geq k} \int_E f_n \, d\mu \overset{k\to\infty}{\Longrightarrow} \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu$$

□

3.4. Integral de funciones medibles

<u>Aviso:</u> falta contenido al principio de esta sección. Además, a partir de aquí no están revisados los apuntes.

Lema 3.4. Sea $(\Omega, \mathscr{A})$ espacio medible, X, Y espacios topológicos.

(i) $f : \Omega \to X$ medible y $g : X \to Y$ continua. Entonces gof es medible.
(ii) $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ y $f : \Omega \to \mathscr{R}^2$ tal que $f(\omega) = (u(\omega), v(\omega))$. Entonces $f medible \leftrightarrow u, v$ medibles.

Proposición 3.15. Sea $(\Omega, \mathscr{A})$ espacio medible

(i) $f : \omega \to \mathbb{C}$ medible entonces $\text{Re} f, \text{Im} f$, $|p|^p (p > 0), \lambda f (\lambda \in \mathbb{C}$ son medibles.
(ii) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medible entonces $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$, $f^- = \min\{f, 0\}$ son medibles.
(iii) $f, g : \Omega \to \mathscr{K}$ medibles. Entonces $f + g, f g, \lambda f$ son medibles $(\lambda \in \mathscr{K})$.
(iv) $f : \Omega \to \mathscr{K} \Rightarrow \exists \alpha : \omega \to \mathscr{K}$ medible tal que $f(\omega) = \alpha(\omega)|f(\omega)|$ y $|\alpha(\omega)| = 1 \forall \omega \in \Omega$.
(v) $f_n : \Omega \to \mathscr{K}$ medible y $f_n(\omega) \to f(\omega) \forall \omega \in \Omega$. Entonces f es medible.

Definición 3.11. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medible, entonces $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu$. Supuesto que al menos una de estas integrales es finita. Si ambas integrales son finitas se dirá que f es integrable.

Proposición 3.16. f integrable si, y solo si, $|f|$ integrable.

Proposición 3.17. Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ espacio de medida, $g, f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles, $E \in \mathscr{A}$

(*i*) Si f acotada en E y $\mu(E < \infty$ Entonces f integrable en E y $\inf_E f \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq \sup_E f \mu(E)$.

(*ii*) f, g integrables en E y $f(\omega) \leq g(\omega) \forall \omega \in E$ entonces $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

(*iii*) f, g integravles en E, $\alpha \in \mathbb{R}$ Entonces $f + g, \alpha f$ integrbales en E con $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ y $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$.

(*iv*) f integrable en E si y solo si $|f|$ integrable en E con $|\int_E f \, d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$.

(*v*) f integrable en $E, F \subset E, F \in \mathscr{A}$ Entonces f es integrable en F y $\int_F |f| d\mu \leq \int_E |f| d\mu$.

(*vi*) $\mu(E) = 0$ Entonces f es integrable en E y $\int_E f \, d\mu = 0$.

(*vii*) f integrable en E y $f = g$ a.e. en E. Entonces g integrable em E y $\int_E f \, d\mu) \int_E g \, d\mu$.

(*viii*) f integrable en Ω Entonces $\phi : \mathscr{A} \to K$ con $\phi(E) = \int_E f \, d\mu$ es medida compleja.

Teorema 3.4 (Convergencia dominada de Lebesgue). Sean $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $E \in \mathscr{A}$. Además, supongamos que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ c.p. con $\omega \in E$. Finalmente, supongamos que $\exists g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrable tal que $|f_n(\omega)| \leq g(\omega) \ \forall \omega \in E$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\mu$$

Nota. Como para cada n, $|f_n| \leq g$ y g es integrable, $|f_n|$ también es integrable, luego cada f_n es integrable.

Nota. Como $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ con cada f_n una función medible $\Rightarrow f$ es medible en Ω.

Demostración. Definimos $g_n(\omega) := 2g(\omega)\chi_E(\omega) - |f_n(\omega) - f(\omega)|\chi_E(\omega)$, que es integrable. Es claro que $\{g_n(\omega)\} \to 2g(\omega)\chi_E(\omega)$, ya que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ y χ_E es acotada.

Vamos a ver además que $g_n \geq 0$ y es medible en Ω porque

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g\chi_E(\omega)$$

Por el *Lema de Fatou*,

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega g_n d\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n d\mu = 2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\int_\Omega 2g(\omega)\chi_E(\omega)d\mu - \int_\Omega |f_n(\omega)-f(\omega)|\chi_E(\omega)d\mu\right] \geq 2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu$$

Como recordatorio,

$$\text{si } \exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ entonces } \liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$$

Además,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$$

Luego entonces

$$2\int_\Omega g(\omega)\chi_E(\omega)d\mu + \liminf_{n\to\infty}\left[-\int_\Omega |f_n-f|\chi_E(\omega)d\mu\right]$$

$$= 2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|\chi_E(\omega)d\mu$$

En resumen,

$$2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|\chi_E(\omega)d\mu \geq 2\int_\Omega g\chi_E d\mu$$

$$\int_\Omega g\chi_E d\mu = \int_\Omega g d\mu < \infty \Rightarrow \limsup_{n\ to\infty}\int_\Omega |f_n-f|\chi_E d\mu \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|\chi_E d\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|\chi_E d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n-f|\chi_E d\mu = 0$$

Sustituyendo Ω por E hemos probado entonces que

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n-f|d\mu = 0$$

$$-\int_E |f_n-f|d\mu \leq \int_E (f_n-f)d\mu \leq \int_E |f_n-f|d\mu$$

Sumando entonces $\displaystyle\int_E f\,d\mu$ a cada término tenemos

$$-\int_E |f_n-f|d\mu + \int_E f\,d\mu \leq \int_E f_n d\mu \leq \int_E |f_n-f|d\mu + \int_E f\,d\mu$$

Y si finalmente, tomando $\lim_{n\to\infty}$ tenemos que

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f\, d\mu$$

□

Una vez que tenemos estos resultados, vamos a trabajar un poco con ellos para acuñarlos. Comenzaremos con el *Lema de Fatou*.

Proposición 3.18 (Lema de Fatou para funciones medibles). Sean $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles. Supongamos que $\exists h : \Omega \to \mathbb{R}$ con $-\infty < \int_\Omega h d\mu := \int_\Omega h^+ \, d\mu - \int_\Omega (-h^-) \, d\mu$ tal que $f_n(\omega) \geq h(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$.
Entonces:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\mu$$

Demostración. Llamamos $h_n := f_n - h \geq 0$, que es medible por ser diferencia de funciones medibles. Ahora, usamos el lema de Fatou para funciones medibles positivas y así tenemos que:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n - h) \, d\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} (f_n - h) \, d\mu$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu - \int_\Omega h \, d\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu - \int_\Omega h \, d\mu$$

Y podemos suprimir los miembros iguales para concluir la prueba. □

Teorema 3.5 (Teorema de la convergencia monótona para funciones integrables). Sean $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $f_n(\omega) \leq f_{n+1} \quad \forall \omega \in \Omega$. Supongamos también que $\{\int_\Omega f_n d\mu\}$ es una sucesión acotada superiormente. Entonces:

$$\begin{cases} f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ es integrable} \\ \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \end{cases}$$

Demostración. Sabemos que $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$. Como queremos que sean positivas, definimos $h_n := f_n - f_1$, que es medible por diferencia de medibles y monótona creciente. Así, tenemos las condiciones para aplicar el teorema de la convergencia monótona para funciones medibles positivas y ver que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n d\mu$$

Y como la sucesión de las integrales está acotada superiormente, tenemos que:

$$+\infty > \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f \, d\mu \geq \int_\Omega f_1 d\mu > -\infty$$

□

Nota. Estos dos teoremas, los podemos realizar en un E un subconjunto del espacio medible Ω

Proposición 3.19. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Si f es medible y $f(\omega) = g(\omega)$ a. e. $\forall \omega \in \Omega$, entonces g es medible. Además, si f es integrable, g es integrable y $\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$.

Proposición 3.20. Sea $f : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ medible. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

$$(i) \quad \int_\Omega f\, d\mu < \infty \implies \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\}) = 0$$

$$(ii) \quad \int_\Omega f\, d\mu = 0 \iff \mu(\{\omega \in \Omega : f(w) > 0\}) = 0$$

Demostración.

(i) Llamemos $E := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\} \subseteq \Omega$. Se tiene que E es medible, pues es diferencia de conjuntos medibles: $E = f^{-1}[0, \infty] \setminus f^{-1}[0, \infty)$. Veamos el contrarrecíproco:

$$\int_\Omega f\, d\mu \geq \int_E f\, d\mu \geq \int_E n\chi_E\, d\mu = n\mu(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $n\mu(E) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tenemos lo buscado.

(ii) Veamos las dos equivalencias:

$\boxed{\Rightarrow}$ Empezamos probando que si s es una función simple positiva con integral $\int_\Omega s\, d\mu = 0$, entonces $\mu(\{\omega \in \Omega : s(\omega) > 0\}) = 0$. En efecto, si

$$s(\omega) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m > 0)$$

entonces $A := \{\omega \in \Omega : s(\omega) > 0\} = \bigcup_{i=1}^m A_i$, y $\int_\Omega s\, d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = 0 \implies \mu(A_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, m$, por lo que $\mu(A) = 0$.

Ahora, por el *Teorema de aproximación de Lebesgue* existe una sucesión de funciones simples positivas $\{s_n(\omega)\} \nearrow f(\omega)$. Por el *Teorema de convergencia monótona*:

$$0 \leq \int_\Omega s_n\, d\mu \nearrow \int_\Omega f\, d\mu = 0,$$

es decir, $\int_\Omega s_n\, d\mu = 0$, y por lo acabado de probar, $\mu(\{\omega \in \Omega : s_n(\omega) > 0\}) = 0 \ \forall n$.

Claramente, $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > 0\} \subseteq \{\omega \in \Omega : s_n(\omega) > 0\}$ y, por tanto,

$$0 \leq \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > 0\}) \leq \mu(\{\omega \in \Omega : s_n(\omega) > 0\}) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial, pues $f = 0$ $a.e.$ $\omega \in \Omega \implies \int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega 0\, d\mu = 0$.

$\square$

4. Espacios $L^p(\Omega)$

Vamos a intentar dar ahora una definición de distancia en el espacio medible. Dado un espacio medible $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y dos funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ integrables en Ω. Intentamos definir una primera distancia como:

$$d_p(f,g) = \left(\int_\Omega |f(\omega) - g(\omega)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sin embargo, esta definición no nos da una distancia ya que no sólo necesitamos que f, g sean integrables, también que $|f(\omega) - g(\omega)|^p$ sean integrables.

Vamos a dar algunas definiciones:

- $\mathscr{L}^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ medibles } : |f|^p \text{ es integrable } \} \quad \forall p \in [1, \infty)$.
- $\mathscr{L}^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : |f| \text{ es acotada } \}$.

Proposición 4.1 (Lema). Dadas $f \in L^p(\Omega), g L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración. Para probarlo, tenemos que demostrar que

$$\int_\Omega \frac{|f|}{\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} d\mu \leq 1$$

Aplicamos Young

$$\int_\Omega \frac{|f|}{\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} d\mu \leq$$

Se da la igualdad cuando $\dfrac{|f|^p}{\int_\Omega |f|^p d\mu} = \dfrac{|g|^q}{\int_\Omega |g|^q d\mu}$ □

Definición 4.1. Se define $L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega)/\sim \; = \{ [f] : f \in \mathscr{L}^p(\Omega)\}$ siendo $\sim$ la relación de equivalencia:

$$f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega), \quad f \sim g \iff f(\omega) = g(\omega) \quad a.e. \omega \in \Omega$$

Ejercicio:

Proposición 4.2. Si $0 < \mu(\Omega) < \infty$, y $1 \leq r < s < \infty$, entonces $L^s(\Omega) \subset L^r(\Omega)$

Nota. Para la prueba, usar la desigualdad de Holder.

Definición 4.2 (Supremo esencial). Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, entonces:

$$ess\ sup\ A = mín\{\ M : a \leq M \ \ a.e.\ \ A\ \}$$

Teorema 4.1 (Teorema de Riesz-Fisher). $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach $\forall p \in [1, \infty]$.

Demostración. Ya hemos probado que el espacio es normado. Probemos ahora que es completo.

Sea $\{F_n\} \subset L^p(\Omega)$ una sucesión de Cauchy: $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \implies \|F_n - F_m\|_p < \epsilon$. Tomo entonces $\epsilon = \frac{1}{2}$. Entonces, por la definición $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1 \implies \|F_n - F_m\|_p < \epsilon$. Si tomo $\epsilon = \frac{1}{2^2}$, $\exists n_2 > n_1 \ : \ n, m \geq n_2 \implies \|F_n - F_m\|_p < \epsilon$.
Sucesivamente, podemos definir $\epsilon = \frac{1}{2^k}$ y entonces $\exists n_k : \ n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1 : m, n \geq n_k \implies \|F_n - F_m\|_p < \epsilon$

Así, podemos definir una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que lleva $k \mapsto n_k 0 \sigma(k)$ estrictamente creciente ($\sigma(k) > \sigma(k-1)$) y podemos tomar $\{F_{\sigma(k)}\}$ como una subsucesión y teniendo que: $\|F_{\sigma(k+1)} - F_{\sigma(k)}\|_p < \frac{1}{2^k}$.

Teniendo esta subsucesión, vamos a probar que es convergente. Para facilitar la tarea, vamos a tomar esta subsucesión como una sucesión, sin tener en cuenta la sucesión inicial durante un tiempo.

Definimos entonces:

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} |f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}|$$

Esta función es convergente , medible y positiva $\forall n$ y:

$$g_n(\omega) \to \sum_{k=1}^{\infty} |f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega)| \ \ \in [0, \infty]$$

Entonces, por el Teorema de la convergencia monótona:

$$\int_\Omega |g_n|^p d\mu \to \int_\Omega |g|^p d\mu \implies (\int_\Omega |g_n|^p d\mu)^{1/p} \to (\int_\Omega |g|^p d\mu)^{1/p}$$

$$\implies \|g_n\|_p \to \|g\|_p$$

Y por el teorema de la convergencia monótona:

$$\|g\|_p = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p \leq 1$$

Esto indica que:

$$\int_\Omega |g|^p d\mu \leq 1 \implies g \in \mathscr{L}^p(\Omega) \implies \mu(\{\omega \in \Omega : g(\omega) = \infty\}) = 0$$

Consideramos el conjunto:

$$E = \{\omega \in \Omega : g(\omega) < \infty\}$$

Podemos considerar ahora :

$$f_{\sigma(k)} = f_{\sigma(k)}\mathscr{X}_E \implies F_{\sigma(k)} = [f_{\sigma(k)}] = f_{\sigma(k)}\mathscr{X}_E$$

Nota. La diferencia entre $f_{\sigma(k)}$ y $f_{\sigma(k)}\mathscr{X}_E$ es que la que está multiplicada por la función característica nunca puede tomar valores en infinito.

Si $G = [g] = [g\mathscr{X}_E]$, podemos afirmar sin pérdida de generalidad que $g(\omega) < \infty \quad \forall \omega \in \Omega$ donde g es un representante de la clase $[g]$.
Sabiendo que:

$$\sum_{k\geq 1} |f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega)| \text{ es convergente}$$

pues lo habíamos dicho antes, entonces:

$$\sum_{k\geq 1} f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega) \text{ es absolutamente convergente}$$

lo que implica que es convergente y por tanto:

$$\exists h(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} (f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega))$$

medible por ser límite puntual de medibles y

$$h(\omega) = \lim_{k\to\infty} [f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(1)}(\omega)]$$

Y por tanto:

$$f_{\sigma(k+1)}(\omega) \to h(\omega) + f_{\sigma(1)}(\omega)$$

Falta añadir por qué $g(\omega) + f_{\sigma(1)} \in \mathscr{L}^p(\Omega)$
Y entonces, $\exists \{F_{\sigma(n)}\}$ convergente en $L^p(\Omega)$ y , como $\{F_n\}$ es de Cauchy, entonces $\{F_n\}$ es convergente en $L^p(\Omega)$. □

Corolario 4.1. $\{F_n\} \subset L^p(\Omega)$ convergente en $L^P(\Omega)$ hacia $F \in L^p(\Omega)$ entonces:

$$\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente} : \{F_{\sigma(n)}(\omega)\} \to F(\omega) \text{ a.e. } \omega \in \Omega$$

y

$$\exists \bar{g} \in \mathscr{L}^p(\Omega) : \quad |f_{\sigma(n)}(\omega)| \leq \bar{g}(\omega) \quad \text{a.e.} \omega \in \Omega$$

Corolario 4.2. Si $1 \leq p < \infty \Rightarrow < \{\chi_E :$ E es medible y $\mu E < \infty$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Dada $f \in L^p$ de la forma $f : \Omega \to \mathbb{K}$ $f = (Ref)^+ - [-(Ref)^-] + [(inff)^+ - [-(inf)^-]]$

Entonces $(Ref)^+ : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva, $-(Ref)^- : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva, $(Imf)^+ : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva y $-(Imf)^- : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva.

Basta ver que $\forall$ función $g : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva de $L^p(\Omega)$ se verifica que $\forall \varepsilon > 0 \exists E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathscr{A}, \mu(E_i) < \infty \forall i = 1,\ldots,n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0,\infty)$ tal que $\|g - \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}\| < \varepsilon$.

En efecto g es medible positiva y por el Teorema de Lebesgue, $\exists s_k$ simples positivas de forma que $s_k(\omega)$ es monótona creciente y converge a $g(\omega) \forall \omega \in \Omega$. Entonces $\exists E_1^k, \ldots, E_{n_k}^k \in \mathscr{A}$ y $\exists \alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n_k}^k \in [0,\infty)$ tal que $s_k = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k \chi_{E_i}^k$.

Por el teorema de la convergencia dominada,

$|g(\omega) - s_k(\omega)|^p = (g(\omega) - s_k(\omega))^p \le g(\omega)^p := h(\omega) \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ ya que $g \in \mathscr{L}^p/\Omega$. Luego $\int_\Omega |g(\omega) - s_k(\omega)|^p d\mu \to 0$

La medida de los E_i es finita porque $\sum_{i=1}^{n_k} (\alpha_i^k)^p \mu(E_i) = \int_\Omega s_k^p d\mu \le \int_\Omega g^p d\mu < \infty \Rightarrow \mu(E_i) < \infty \forall i, \ldots, n$.

Por tanto, $\|g - s_k\| \to 0 \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0 \exists k_0 : k \ge k_0 \Rightarrow \|g - s_k\|_p < \varepsilon$. Eligiendo $k = k_0$ tenemos que $\|g - \sum_{i=1}^{n_{k_0}} \alpha_i^{k_0} \chi_{E_i} k_0\|_p < \varepsilon$ ☐

Dadas $f_n, f : \Omega \to \mathbb{K}$ medibles. Si $f_n(\omega) \to f(\omega)$ converge uniformemente dado $\omega \in \Omega$ entonces sabemos que también converge puntualmente y converge a $f(\omega)$ casi por doquier.

Por el teorema de la convergencia monótona, dada $f_n(\omega)$ monótona que converge a $f(\omega)$ casi por doquier para $\omega \in \Omega$ entonces $\int_\Omega f_n^p d\mu \to \int_\Omega f^p d\mu$ y $\|f - f_n\|_p = \left(\int_\Omega |f(\omega) - f_n(\omega)|^p d\mu\right)^{1/p} \to 0$.

$f_n \to f$ en $\mathscr{L}^p(\Omega) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_p \to 0 \Leftrightarrow \|[f_n] - [f]\|_p \to 0 \Leftrightarrow [f_n] \to [f]]$ $L^p(\Omega)$ es lo que llamamos *convergencia p-media*.

El corolario 4.1 es una "vuelta"de la última implicación de convergencia. Pero solo lo podemos afinar por una sucesión parcial.

Teorema 4.2 (Egorov). Una sucesión f_n y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles $\mu(\Omega) < \infty$ $f_n(\omega) \to f(\omega)$ a.e. $\omega \in \Omega$ $\forall \varepsilon > 0$. Entonces $\exists F \in \Omega$ medible tal que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ convergente uniformemente dado $\omega \in F$ y $\mu(\Omega\ F) < \varepsilon$

Demostración. $E_{n,k} = \bigcup_{m>n} \omega \in \Omega / |f_m(\omega) - f(\omega)| \ge 1/k$ medibles porque f_n, f son medibles.

$E_{n+1,k} = \bigcup_{m \ge n+1} \omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f(\omega)| \ge 1/k$

Si k es fijo y $\omega \in \Omega$ tal que $f_n(\omega) \to f(\omega) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \omega \notin E_{n,k} \Rightarrow \omega \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k}$.

Esto significa que $\bigcap_{n \in \mathbb{K}} E_{n,k} \subset \omega \in \Omega : f_n(\omega)$no converge a $f(\omega)$ que es de medida cero.

Ya que Dados $\Omega \supset E_{1,k} \supset E_{2,k} \supset \ldots \supset E_{n,k} \supset E_{n+1,k} \supset \ldots$ entonces si $\mu(\Omega) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,k}) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k})$. entonces $\exists n_k : \mu(E_{n_k,k}) < \varepsilon/2^k$.

Llamando $E := \bigcup_{k=1}^\infty E_{n_n,k} \mu(E) = \mu(\bigcup_{k=1}^\infty E_{n_k,k}) \le \sum_{k=1}^\infty \mu(E_{n_k,k}) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} =$

ε

Llamamos ahora $F := \Omega\ E$ medible $E = \Omega\ F$. ¿$f_n(\omega) \to f(\omega)$ c.u. en F?

Dado $\omega \in F = \Omega\, E \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k,k} \Rightarrow \omega \notin E_{n_k,k} = \bigcup_{m\geq n_k} \omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}$

Entonces $\omega \notin E_{n,k} = \bigcup_{m\geq n} \omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f(\omega) \geq \frac{1}{k} \forall n \geq n_k$, luego $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{k} \forall n \geq n_k$.

Dado $k \in \mathbb{N} \exists n_k$ independiente de $\omega \in F$ tal que $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{k} \forall n \geq n_k$

Por tanto, queda probado que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ c.u. $\omega \in F$.

$\square$

Ejemplo 4.1. Dado $\Omega = \mathbb{R}$ tal que $\mu(\Omega) = \infty$. Tomando $A_n = [n, \infty)$ tal que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$. Si $\mu(A_n) = \infty$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ y $\mu(\emptyset) = 0$. $\infty = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Teorema 4.3 (Vitali). Sea $\{f_n\} \subset L^p(\Omega), f \in L^p(\Omega)$ y que $\{f_n(\omega)\} \to f(\omega)$ a.e. $\omega \in \Omega$ $\{f_n\} \to f$ en $L^p(\Omega) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ independiente de n, tal que si $E \in \mathscr{A}, \mu(E) < \delta$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\{f_n\} \to f$ en $L^p(\Omega)$ i.e. $\lim_{h\to\infty}(\infty_\Omega |f_n - f|^p d\mu) = 0$.

$f \in L^(\Omega) \iff |f|^p \in L^1(\Omega)$. Ahora, por la propiedad absoluta de la integral, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $E \in \mathscr{A}$ y $\mu(E) < \delta$ entonces $\displaystyle\int_E |f|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{2^p}$.

Como $\{f_n\} \to f$ con $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\|f_n - f\|_{\mathscr{L}^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$

$$\left(\int_E |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n\|_{L^p(E)} \leq \|f_n - f\|_{L^(E)} + \|f\|_{L^p(E)} \leq \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(E)} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

Hasta ahora hemos probado que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $E \in \mathscr{A}, \mu(E) < \delta$ y $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\int_E |f_n|^p d\mu\right) < \varepsilon$.

Para cada $f_i, i = 1, \ldots, n_{0-1}$ uso que $|f_i|^p \in L^1(\Omega)$ y por la continuidad absoluta de la integral, $\exists \delta_i > 0$ tal que si $E \in A$ y $\mu(E) < \delta$ entonces $\int_E |f_i|^p d\mu < \varepsilon \forall i = 1, \ldots, n_{0-1}$.

Si elijo $\delta_0 = min\{\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{n_0-1}\} > 0$ entonces si $E \in \mathscr{A}$, $\mu(E) < \delta_0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$

$\square$

Vamos a ver ahora el Teorema de Fubini y Tonelli, que nos permite reducir la integración en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ a calcular N integrales en subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Vamos a ver antes una definición.

Definición 4.3. Una propiedad P se verifica para $a.e.\ x \in \Omega$ si y solo si $\{x \in \Omega : P \text{ no se verifica}\}$ tiene medida 0.

Teorema 4.4 (Fubini y Torelli). Supongamos $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ y suponemos que $f \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$. Entonces,

1. Para a.e. $y \in \mathbb{R}^M$ la función $\underbrace{f^y(x) := f(x,y)}_{f^y:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}}$ es integrable en $\mathbb{R}^N$. Entonces $\varphi(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f^y dm_N$. Llamando $A = \left\{y \in \mathbb{R}^M : f^y \text{ no es integrable en } \mathbb{R}^N\right\}$ esto quiere decir que $m_N(A) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^M \setminus A,\ m_N(A) = 0\ \ f^y$ es integrable.
   Vemos que φ está definida $\forall y \in \mathbb{R}^M \setminus A$. Esta función φ es integrable en $\mathbb{R}^M$, luego $\exists \int_{\mathbb{R}^M} \varphi\ dm_M$.
2. Para a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ la función $f_x(y) := f(x,y)$ es integrable. Esto quiere decir que $\psi(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^M} f_x\ dm_M$ es integrable en $\mathbb{R}^N$, lo que implica que $\exists \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \psi\ dm_N$.
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^M} \varphi\ dm_M = \int_{\mathbb{R}^M} \psi\ dm_N = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f\ dm_{M+N}$.

Ejemplo 4.2. Tomamos el conjunto $A = (a,b) \times (c,d)$. Así, $N = 1 = M$. Por tanto, $\displaystyle\int_A 1\ dm_2 = \int_{R^2} \chi_A(x,y)\ dm_2 = m_2(A)$.

Es claro que $f(x,y) := \chi_A(x,y)$ es integrable. Vamos a ver ahora qué ocurre cuando fijamos un punto y. Dado $y \in \mathbb{R}$,

$$\underset{x \mapsto f^y(x) := f(x,y) = \chi_A(x,y)}{f^y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}}$$

Analicemos ahora la función χ_A

$$\begin{cases} \chi_{(a,b)}(x) & \text{si } y \in (c,d) \\ 0 & \text{si } y \notin (c,d) \end{cases}$$

Ahora, $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\int_R f^y\ dm_1 = \begin{cases} m_1((a,b)) = b - a & y \in (c,d) \\ 0 & y \notin (c,d) \end{cases}$$

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} f^y\ dm_1 = \begin{cases} b - a & y \in (c,d) \\ 0 & y \notin (c,d) \end{cases} = (b-a)\chi_{(c,d)}(y)$$

Nota. La medida de un intervalo es la longitud del intervalo. Esto lo demostraremos cuando construyamos la medida de Lebesgue.

Proposición 4.3 (Integral iterada).

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_M)\,dx_1\ldots dx_N,dy_1,\ldots dy_M$$

$$= \int_{\mathbb{R}^M}\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_M)dx_1,dx_2,\ldots,dx_N\right]dy_1dy_2\ldots dy_M$$

Ejemplo 4.3. Área de una elipse. La ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Si llamamos A a uno de los cuadrantes de la elipse, el área total será $4A$. La ecuación de A será $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\psi(x)$. Por tanto:

$$4A = 4\int_A 1\,dxdy = 4\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 1\,dy\right)dx = 4\int_0^a [y]^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

El “truco” para resolver esta integral es utilizar:

$$\int\sqrt{a^2-x^2} = a\int\sqrt{1-\frac{x}{a}^2}\,dx \overset{\frac{x}{a}=sent}{=} a\int\sqrt{1-sen^2t}\,dx = a\int cos\ t\ dx$$

$$(dx\ =\ a\ cos\ t\ dt) = a^2\int cos^2\ t\ dt$$

Ejemplo 4.4. Cálculo del volumen de un sólido de revolución. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable que cumple $f\geq 0$. Definimos el conjunto $\mathscr{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\leq x\leq b, y^2+z^2\leq f(x)^2\}$. Vamos a demostrar que el volumen de S es $\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$.

El volumen es un conjunto de $\mathbb{R}^3$. El volumen de S es:

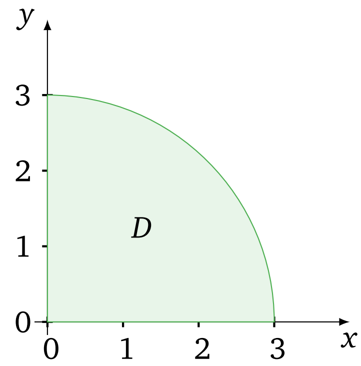
$$\lambda(S) = \int_S 1\,dxdydz = \int_a^b\left(\int_{S(x)} 1\,dydz\right)dx = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx = \pi\int_a^b f(x)^2dx$$

Siendo $\forall x\in[a,b]$, $S(x)=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)\in S\}=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{y^2+z^2}\geq f(x)\}$, es decir, el círculo de centro $(0,0)$ y radio $f(x)$.

Ejemplo 4.5.

Supongamos que queremos calcular el área de un círculo C de radio R. Para ello llamamos D a un cuadrante del círculo y diremos que el área de C es $4D$. Definimos D como $\{(x,y)\in[0,R]\times[0,R] : x^2+y^2\leq R^2\}$. El área de D es:

$$\text{área} = \int_D 1\,dxdy$$



$\{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le R^2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} = [0,R] \times [0,\frac{\pi}{2}]$. Definimos una aplicación:

$$D \xrightarrow{\varphi} \phi(D) \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (\rho,\theta) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctg\ \frac{x}{y}\right)$$

Teorema 4.5 (Cambio de variable). Sean $U,V \subset R^N$ conjuntos abiertos y $E \subset V$ un conjunto medible. Sea $\varphi : U \to R^N, \varphi(U) = V$ un difemormismo ($\varphi \in \mathscr{C}^1(U) \exists \varphi^{-1} \in \mathscr{C}^1(V)$. Además, $det(J\varphi(x)) \neq 0 \forall x \in U$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces:

$$f \in L^1(E) \longleftrightarrow (f \circ \varphi)|det(J\varphi)| \in L^1(\varphi^{-1}(E))$$

y en este caso,

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(E)`} f(\varphi(y))|detJ\varphi(y)|\, dy$$

Nota. Veamos que realmente el Teorema de Cambio de variable en integrales de una variable produce el mismo resultado que la definición que conocíamos anteriormente. Recordemos qué dice:

Sea $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ una función integrable y $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ una aplicación biyectiva y estrictamente monótona tal que $\varphi'(x) \neq 0 \forall x \in [a,b]$. Entonces,

$$\int_c^d f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy$$

Veamos entonces qué posibilidades tenemos para φ:

$$\varphi \text{ es } \begin{cases} \text{creciente} \begin{cases} \varphi'(x) > 0 \forall x \in (a,b) \\ \varphi(a) = c, \varphi(b) = d \end{cases} & \to \int_c^d f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(y))|\varphi'(y) \\ \text{decreciente} \begin{cases} \varphi'(x) < 0 \forall x \in (a,b) \\ \varphi(a) = d, \varphi(b) = c \end{cases} & \to \end{cases}$$

Ejemplo 4.6. Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x = r\ cos\theta \\ y = r\ sen\theta \\ z = z \end{cases}$$

Definimos ahora ϕ:

$$\phi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x \le 0, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\phi(r,\theta,z) = (r\ cos\theta, r\ sen\theta, z)$$

$$det(J\phi(r,\theta,z)) = det\begin{pmatrix} cos\ \theta & -rsen\ \theta & 0 \\ sen\ \theta & r\ cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r > 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\ dxdydz = \int_0^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} rf(r\ cos\theta, r\ sen\theta, z)\ dz\right)d\theta\right]dr$$

Ejemplo 4.7. Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$. Definimos ψ

$$\psi : (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$$
$$\psi(r,\theta,\varphi) = (r\ cos\theta cos\varphi, r\ sen\theta cos\varphi, r\ sen\varphi)$$

$$det(J\psi(r,\theta,\varphi)) = det\begin{pmatrix} cos\ \theta\ cos\ \varphi & -r\ sen\ \theta\ cos\ \varphi & -r\ cos\ \theta\ sen\ \varphi \\ sen\ \theta\ cos\ \varphi & r\ cos\ \theta\ cos\ \varphi & -r\ sen\ \theta\ sen\ \varphi \\ sen\ \varphi & 0 & r\ cos\ \varphi \end{pmatrix}$$
$$con\ \ r^2\ cos\varphi > 0\ \forall r \in (0,\infty)\ \forall \varphi \in \left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

4.1. Caracterización de las funciones Riemann-integrables

Definición 4.4 (Función *Riemann-integrable*). Sea $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f se dice *Riemann-integrable* si $\underline{\int} f = \overline{\int} f$, donde:

$$\underline{\int} f = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) : P = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}\right\}$$

$$\overline{\int} f = inf\left\{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) : P = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}\right\}$$

con $m_i = inf\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}$ y $M_i = sup\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}$.

Definición 4.5 (Integral de Riemann). En el caso anterior, se llama *integral de Riemann* de f en $[a,b]$ a

$$\mathscr{R}\int_a^b f = \underline{\int} f = \overline{\int} f$$

Vamos a utilizar la siguiente notación de ahora en adelante. Llamaremos $\mathscr{R}(I)$ al conjunto de funciones *Riemann-integrables* en el intervalo I, y $\mathscr{L}(I)$ al conjunto de funciones *Lebesgue-integrables* en el intervalo I. Formalmente,

$$\mathscr{R}(I) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ acotada } : f \text{ es } \textit{Riemann-integrable}\}$$

$$\mathscr{L}(I) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ medible } : f \text{ es } \textit{Lebesgue-integrable}\}$$

Teorema 4.6. Sea $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces,

$$f \in \mathscr{R}(I) \Leftrightarrow f \text{ es continua a.e. en } [a,b]$$

Además, $\mathscr{R}(I) \subset \mathscr{L}(I)$ con

$$\mathscr{R}\int_a^b f = \int_{(a,b)} f\ dx$$

Demostración. Usando que $f = f^+ + f^-$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f \geq 0$. Definimos $P_n = \{x_i^n := a + i\frac{b-a}{2^n}, i = 0, 1, \ldots 2^n\}$ partición de $[a,b]$. Definimos también $m_i^n := inf\{f(x) : x_{i-1}^n \leq x \leq x_i^n\}$, $M_i^n := sup\{f(x) : x_{i-1}^n \leq x \leq x_i^n\}$.

Nota. Los nodos de la partición P_n lo son también de las particiones siguientes.

Consideramos también $A_i^n := (x_{i-1}^n, x_i^n)$, $s_n := \sum_{i=1}^{2^n} m_i^n \chi_{A_i}$, $t_n := \sum_{i=1}^{2^n} M_i^n \chi_{A_i}$.

Nota. s_n y t_n son funciones simples positivas ($f \geq 0$) con

$$\begin{aligned}(b-a)\inf_{[a,b]} f &\leq s_1(x) \leq \ldots \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq \ldots \leq f(x) \\ &\leq \ldots \leq t_{n+1}(x) \leq t_n(x) \leq \ldots \leq t_1(x) \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f\end{aligned}$$

$$\int_{(a,b)} s_n\ dx = \sum_{i=1}^{n} m_i^n(x_i^n - x_{i-1}^n) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \sum_{i=1}^{n} M_i^n(x_i^n - x_{i-1}^n) = \int_{(a,b)} t_n\ dx$$

$$\left.\begin{aligned}\{s_n\} \nearrow \Rightarrow \{s_n\} \to s = \text{ función medible} \\ \{t_n\} \searrow \Rightarrow \{t_n\} \to t = \text{ función medible}\end{aligned}\right\} \text{con } s \leq f \leq t$$

□

Definición 4.6. Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{aligned} a \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq b \\ \sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

Proposición 4.4. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es monótona, entonces f es continua *a.e.* en $[a,b]$.

Demostración. Esto es así porque si f es monótona, $\exists \lim_{y\to x^-} f(y) \leq f(x) \leq \exists \lim_{y\to x^+} f(y)$. Entonces f es continua en $x \iff \lim_{y\to x^-} f(y) = \lim_{y\to x^+} f(y)$ y f no es continua en $x \iff \lim_{y\to x^-} f(y) < lim_{y\to x^+} f(y)$.

Veamos qué puntos forman este último conjunto, que llamaremos A:

$$A=\{x\in[a,b]: f \text{ no es continua en } x\} = \{x\in[a,b]: f(x-) = \lim_{y\to x^-} < \lim_{y\to x^+} f(y) = f(x+)\}$$

$\forall x\in A \exists r_x \in \mathbb{Q}\cup(f(x-),f(x+))$ tal que

$$\begin{aligned} r: A &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longrightarrow r_x \end{aligned}$$

Es una aplicación monótona y estrictamente creciente porque f es monótona creciente.

□

Lema 4.1. Dada una función $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ y el conjunto $P=\{x_0=c<x_1<x_2<\ldots<x_n=d\}\in\mathscr{P}([c,d])$ y $\emptyset\neq S\subset\{1,2,\ldots,n\}$,$A>0$. Si g verifica cualquiera de estas dos propiedades

- $g(c)\leq g(d)$ y $\dfrac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} < -A \quad \forall k\in S$
- $g(c)\geq g(d)$ y $\dfrac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} > A \quad \forall k\in S$

Entonces, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |g(x_k)-g(x_{k-1})| > |g(d)-g(c)| + A\sum_{k\in S}(x_k-x_{k-1})$

Teorema 4.7. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función monótona creciente. Entonces,

$$\exists \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\in[0,+\infty] \; a.e. \; x\in[a,b]$$

Demostración. Por la proposición 4.4, f es continua *a.e.* $x\in[a,b]$. Entonces,

$$\overline{D}f(x) := \lim_{y\to x} sup\frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \underline{D}f(x) := \lim_{y\to x} inf\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Necesitamos demostrar que el siguiente conjunto tiene medida cero:

$$\begin{aligned} \left\{x\in[a,b]: \nexists f'(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\in[0,+\infty]\right\} &= \{x\in[a,b]: \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\} \\ &\subseteq \{x\in[a,b]: f \text{ es continua en } x \text{ y } \underline{D}f(x)<\overline{D}f(x)\} \\ &\cup \{x\in[a,b]: f \text{ no es continua en } x\} \end{aligned}$$

Por la proposición 4.4 sabemos que el conjunto $\{x\in[a,b]: f \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida cero. ¿La tiene el otro conjunto?

Para demostrarlo, consideramos el conjunto

$$\{x \in [a,b] : \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\} = \cup\{x \in [a,b] : f \text{ es continua en } x \text{ y } \underline{D}f(x) < r < s < \overline{D}f(x)\}$$

Si este conjunto tiene medida cero $\forall r,s \in \mathbb{Q}, r < s$ entonces lo habremos probado.

Definimos las funciones

$$g(x) = f(x) - \frac{r+s}{2}x \quad y \quad f(x) = g(x) + \frac{r+s}{2}x$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \underline{D}f(x) = \underline{D}g(x) + \frac{r+s}{2} < r < s < \overline{D}f(x) = \overline{D}g(x) + \frac{r+s}{2} &\Leftrightarrow \underline{D}g(x) < r - \frac{r+s}{2} < s - \frac{r+s}{2} < \overline{D}g(x) \\ &\Leftrightarrow \underline{D}g(x) < -\frac{s-r}{2} < \frac{s-r}{2} < \overline{D}g(x) \end{aligned}$$

Tomando $g(x) := f(x) - \frac{r+s}{2}x$ tenemos $E_{r,s} = \{x \in [a,b] : g \text{ es continua en } x \text{ y } \underline{D}g(x) < -A < A < \overline{D}g(x)\}, A = \frac{s-r}{2} > 0$

Para probar que $\forall A > 0, E_{r,s}$ tiene medida cero, haremos reducción al absurdo. Supongamos que la medida de este conjunto sea mayor que 0.

$(A = \frac{s-r}{2}, B = \frac{r+s}{2})$ Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\} \in \mathscr{P}([a,b])$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - \frac{r+s}{2}x_k - \left(f(x_{k-1}) - \frac{r+s}{2}x_{k-1} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |B|(b-a) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) + |B|(b-a) \\ &= f(b) - f(a) + |B|(b-a) \end{aligned}$$

Esto nos permite decir que

$$\begin{aligned} &\exists T := sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| : P = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathscr{P}([a,b]) \right\} \\ &\qquad \leq (f(b) - f(a)) + |B|(b-a) \end{aligned}$$

Por definición de supremo y **usando que** $\mu(E) > 0$, podemos definir:

$$\begin{aligned} \exists P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\} \in \mathscr{P}([a,b]) \; t.q. \; T &\geq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &> T - \frac{A\mu(E)}{4} \end{aligned}$$

$$E \backslash P = \cup_{k=1}^{n} E \cap (x_{k-1}) = \left\{ x \in (x_{k-1}, x_k) : g \text{ es continua en } x \; y \; \underline{D}g(x) < -A < A < \overline{D}g(x) \right\}$$

$$\liminf_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}=\underline{D}g(x)<-A\Rightarrow\exists y\in(x_{k-1},x_k),y\neq x\quad t.q.\quad\frac{g(y)-g(x)}{y-x}<-A$$

Posibilidad 1.
Usando que g es continua en x,

$$\begin{aligned}\lim_{z\nearrow x}g(z)=g(x)\Rightarrow\lim_{n\nearrow x}\frac{g(y)-g(z)}{y-z}&=\frac{g(y)-g(x)}{y-x}<-A\\ \Rightarrow\exists z\in(x_{k-1},x):\frac{g(y)-g(z)}{y-z}&<-A\end{aligned}$$

Posibilidad 2.
Usando que g es continua en x,

$$\begin{aligned}\lim_{z\searrow x}g(z)=g(x)\Rightarrow\lim_{n\searrow x}\frac{g(y)-g(z)}{y-z}&=\frac{g(y)-g(x)}{y-x}<-A\\ \Rightarrow\exists z\in(x,x_k):\frac{g(y)-g(z)}{y-z}&<-A\end{aligned}$$

Hemos probado que $\exists[\bar{a}_x,\bar{b}_x]:x_{k-1}<\bar{a}_x<x<\bar{b}_x<x_k\ \frac{g(\bar{b}_x)-g(\bar{a}_x)}{\bar{b}_x-\bar{a}_x}<-A$.
$\exists[\tilde{a}_x,\tilde{b}_x]:x_{k-1}<\tilde{a}_x<x<\tilde{b}_x<x_k\ \frac{g(\tilde{b}_x)-g(\tilde{a}_x)}{\tilde{b}_x-\tilde{a}_x}>A$.
Volviendo a lo anterior, para cada $k=1,2,\ldots,n$. Puede ocurrir que:

$$\begin{gathered}g(x_k)\geq g(x_{k-1})\to(a_x,b_x):=(\bar{a}_x,\bar{b}_x)\forall x\in E\cap(x_{k-1},x_k)\\ \frac{g(b_x)-g(a_x)}{b_x-a_x}<-A\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}g(x_k)\geq g(x_{k-1})\to(a_x,b_x):=(\tilde{a}_x,\tilde{b}_x)\forall x\in E\cap(x_{k-1},x_k)\\ \frac{g(b_x)-g(a_x)}{b_x-a_x}>A\end{gathered}$$

□

Teorema 4.8. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función monótona. Entonces, f es derivable *a.e.* en $[a,b]$.

Demostración. □

Referencias

[1] Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman. *Análisis Clásico Elemental*. Addison Wesley, 2ª edición, 1998.

[2] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3ª edición, 1987.

Parte II.
Ejercicios

5. Sucesiones y series de funciones

Ejercicio 5.1. Probar que el espacio $\mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M)$ es un espacio de Banach, esto es, un espacio normado y completo.

Solución. Empezamos probando que $(\mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado:

- Positividad. En primer lugar puesto que la norma se ha definido como supremo de un conjunto de numeros positivos, tendremos que $\|f\|_\infty \geq 0$ para toda $f \in (\mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M)$. Además, $\|f\|_\infty = 0 \iff sup_{x\in A}|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0,\ \forall x \in A \iff f$ es la función 0.
- Homogeneidad. Si $k \in \mathbb{R}$, entonces

  $$\|kf\|_\infty = |k|\|f\|_\infty \iff sup_{x\in A}|kf(x)| = sup_{x\in A}|k||f(x)| = |k|sup_{x\in A}|f(x)| = |k|\|f\|_\infty.$$

- Desigualdad triangular.

  $$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \iff sup_{x\in A}|f(x)+g(x)| \leq sup_{x\in A}|f(x)| + sup_{x\in A}|g(x)|.$$

  Es decir, es una consecuencia de la desigualdad triangular de la norma en $\mathbb{R}^M$.

Para demostrar que $f_n \to f$ c.u. en A $\iff f_n \to f\ en\ \mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M)$, solo tenemos que observar que $f_n \to f$ c.u. en A significa que:

$$\forall \epsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall x \in A,$$

lo cual equivale a decir

$$\forall \epsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = sup_{x\in A}|f_n - f| \leq \epsilon,\ \forall x \in A,$$

es decir, $f_n \to f\ en\ \mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M)$.

Por último, $\mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M)$ es de Banach si es completo, es decir si toda sucesión $\{f_n\}$ (de funciones en $\mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M)$) de Cauchy converge. La prueba es análoga a la que se hizo para ver que $\mathscr{C}(A,\mathbb{R}^M)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, era completo. La única diferencia será que tras probar la convergencia uniforme de f_n a una función f, deberemos probar que $f \in \mathscr{C}_B(A,\mathbb{R}^M)$, es decir que el límite uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas y acotadas es una función continua y acotada. Veámoslo.

Recordemos que ya sabemos por teoría que f es continua. Para la acotación, tomando $\epsilon = 1$ en la definición de convergencia uniforme, obtenemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1 \ \forall x \in A.$$

Por otro lado, como f_{n_0} es acotada, existe un $M > 0$ tal que $|f_{n_0}(x)| \leq M \ \forall x \in A$. Entonces, se tiene que:

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + M, \quad \forall x \in A$$

Por tanto, f está acotada.

Ejercicio 5.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, y funciones $f_k : A \to \mathbb{R}$ continuas, verificando:

(i) $f_k \geq 0$
(ii) $f_k \geq f_{k+1}$ (la sucesión $\{f_k\}$ es monótona decreciente).
(iii) $f_k \to 0$ $c.p.$

Entonces, $\{f_k\} \to 0$ uniformemente en A.

Solución. Como $f_k(x) \to 0 \ \ \forall x \in A$, entonces:

$$\forall \ x \in A, \ \forall \epsilon > 0 \ \exists k_x \in \mathbb{N} : \ k \geq k_x \implies |f_k(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por otro lado, como f_{k_x} es continua en A, en particular f_{k_x} es continua en x. Por tanto, $\exists U_x$ entorno abierto de x en A tal que

$$|f_{k_x}(y) - f_{k_x}(x)| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall y \in U_x$$

Observamos que $\forall x \in A, \ x \in U_x$. Por tanto $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \implies \{U_x : x \in A\}$ es un recubrimiento por abiertos de A. Entonces, como A es compacto, $\exists x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Sea ahora $k_0 = \max\{k_{x_1}, \ldots, k_{x_n}\}$, y es claro que $k \geq k_0 \implies k \geq k_{x_i} \ \forall i$.

Entonces, dado $k \geq k_0$ se tiene que $|f_k(x_i)| < \epsilon/2 \ \ \forall i = 1, \ldots, n$. También se verifica, puesto que $f_{k_{x_i}}$ es continua, que $|f_{k_{x_i}}(y) - f_{k_{x_i}}(x_i)| < \epsilon/2 \ \ \forall y \in U_{x_i}, \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Sea $y \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \implies \exists i \in \{1, \ldots, n\} : y \in U_{x_i} \implies |f_{k_{x_i}}(y) - f_{k_{x_i}}(x_i)| < \epsilon/2$, y también $|f_{k_{x_i}}(x_i)| < \epsilon/2$. Sumando ambas expresiones, y utilizando la monotonía y la positividad de $\{f_k\}$, tenemos que:

$$|f_k(y)| \leq |f_{k_{x_i}}(y)| \leq |f_{k_{x_i}}(x_i)| + |f_{k_{x_i}}(y) - f_{k_{x_i}}(x_i)| < \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$$

En resumen, hemos probado que $\forall \epsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ (depediente de ϵ y $x_1, \ldots, x_n$) tal que $k \geq k_0 \implies |f_k(y)| = f_k(y) < \epsilon \ \ \forall y \in A$.

Ejercicio 5.3. Probar que en el espacio $\mathscr{C}(A,\mathbb{R}^M)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, cualquier bola cerrada y centrada en el origen es homeomorfa a una bola cerrada y centrada en un punto arbitrario.

Solución. Sea $\epsilon > 0$, y $\tilde{f} \in \mathscr{C}(A,\mathbb{R}^M)$. Consideremos la aplicación $\varphi : \overline{B}_\infty(0,\epsilon) \to \overline{B}_\infty(\tilde{f},\epsilon)$ dada por $\varphi(f) = f + \tilde{f}$. Por un lado, φ está bien definida, pues:

$$\|\tilde{f} - \varphi(f)\|_\infty = \|\tilde{f} - f - \tilde{f}\|_\infty = \|f\|_\infty \leq \epsilon \Rightarrow \varphi(f) \in \overline{B}_\infty(\tilde{f},\epsilon)$$

φ es continua por ser una isometría:

$$\|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)\|_\infty = \|f_1 + f - f_2 - f\|_\infty = \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Además, la inversa de φ existe: $\varphi^-1(g) = g - \tilde{f} \quad \forall g \in \overline{B}_\infty(\tilde{f},\epsilon)$. Es continua por el mismo motivo que φ.

Por tanto, φ es un homeomorfismo.

Ejercicio 5.4. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales uniformemente continuas en todo $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función real f. ¿Puede concluirse que la función f es necesariamente uniformemente continua?

Solución. La respuesta es afirmativa. Veamos la prueba.

Dado $\epsilon > 0$, como $f_n \to f$ converge uniformemente, $\exists k > 0$ tal que

$$n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3, \quad \forall x \in A.$$

Por otro lado, por ser f_k uniformemente continua en A, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } |x - y| < \delta, \text{se tiene } |f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon/3$$

Juntando ambas informaciones:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \epsilon$$

Es decir, hemos probado que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } |x - y| < \delta \text{ se verifica } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Por tanto, f es uniformemente continua. □

Ejercicio 5.5. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0,1]$ mediante $f_n(x) = x - x^n$ para todo $x \in [0,1]$.

Solución. Sabemos que para $0 \leq x < 1$, $f_n(x) = x - x^n \to x$, y para $x = 1$, tenemos que $f_n(x) = 1 - 1^n = 0 \to 0$. Por tanto, el límite puntual es:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Como cada f_n es continua y f no es continua, no hay convergencia uniforme.

Ejercicio 5.6. Estudiad la convergencia uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0,99999]$ mediante $f_n(x) = x^n$ para todo $x \in [0,99999]$.

Solución. En efecto, la sucesión de funciones converge uniformemente. En primer lugar, $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f = 0$ por ser potencia de base menor que 1. Además, por ser una función potencial, el valor máximo que toma es 0.99999^n. Por tanto: $|x^n| \leq 0.99999^n \to 0$, luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f = 0$.

Ejercicio 5.7. Estudiad la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0,1]$ mediante $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ para todo $x \in [0,1]$.

Solución. Sabemos que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, por lo que podemos afirmar que $\{f_n(x)\} \to x^2$ puntualmente en $[0,1]$. Veamos que también hay convergencia uniforme:

$$|f_n(x) - x^2| = \left| -\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0, \ \forall x \in [0,1].$$

Ejercicio 5.8. Estudiar el carácter de la siguientes series de funciones.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{sen^k(nx)}{n^2}, \quad k > 0$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$

e) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} k!x^k$

Solución (a). Notemos lo siguiente: $|sen(nx)| \leq 1 \implies \left|\dfrac{sen^k(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Además, ya sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es convergente. Por tanto, aplicando el *Criterio de Weierstrass*, tenemos que:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{sen^k(nx)}{n^2} \text{ converge uniformemente (y absolutamente).}$$

Solución (b1). Podemos reescribir la serie tal que así: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Entonces, dado

$M > 0$, se tiene que, si $|x| \leq M$:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^{2n}}{(n!)^2} \leq \dfrac{M^{2n}}{(n!)^2} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M^{2n}}{(n!)^2} \; converge\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Criterio Weierstrass}} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 \text{ es c.u en } [-M, M]$$

Donde la convergencia de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M^{2n}}{(n!)^2}$ viene dada por el *Criterio del cociente:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{M^{2(n+1)}}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{M^{2n}}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{M^2}{(n+1)^2} = 0 < 1.$$

Como M era una constante arbitraria, concluimos que la serie converge uniformemente en cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

Solución (b2). Podemos ver la serie como una serie de potencias $\displaystyle\sum_{k\geq 1} a_k x^k$, donde:

$$a_k = \begin{cases} 0 & si\ k\ impar \\ \dfrac{1}{(n!)^2} & si\ k\ par \end{cases}$$

Podemos aplicar el *Criterio del cociente*, de forma muy similar al caso anterior, para ver que el radio de convergencia de la serie es $R = \infty$. Por tanto, $D(0, R) = \mathbb{R}$, y se tiene que $\forall M \in \mathbb{R}^+$ la serie converge uniformemente en $[-M, M]$.

Solución (c). Nos basta la simple observación de que podemos acotar el término general de la serie (es siempre positivo) por una constante M_n, de tal suerte que $\sum_{n\geq 1} M_n$ es convergente, y aplicar el *Criterio de comparación*. Así:

$$0 \leq \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \;\forall x \in \mathbb{R} \implies \sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2} \text{ converge uniformemente en } \mathbb{R}.$$

Solución (d). Como es una serie de potencias, calculamos su radio de convergencia:

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(k+1)^2}}{\dfrac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = 1 \implies R = 1$$

Por tanto, ya sabemos que la serie converge uniformemente cuando $|x| < 1$, y no converge cuando $|x| > 1$. Solo nos falta por estudiar el caso $|x| = 1$:

$$|x| = 1 \implies \left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \frac{|x|^k}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Sabemos que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ es convergente, por lo que, en virtud del *Criterio de Weierstrass*, la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$ converge uniformemente cuando $|x| = 1$.

Solución (e). Se trata de una serie de potencias, donde $a_k = k!$. Calculamos su radio de convergencia:

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} k+1 = \infty \implies R = 0$$

Por tanto, la serie no converge si $|x| > R = 0$ (es decir, si $x \neq 0$). Si $|x| = 0$, tenemos que:

$$\sum_{k\geq 1} k! \cdot 0^k = \sum_{k\geq 1} 0 = 0 \text{ (convergente)}$$

En general, **una serie de potencias siempre es convergente en su centro**.

Ejercicio 5.9. Probar que $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad \forall x \in (-1,1)$

Solución. Para probarlo, se podría estudiar la convergencia de la serie de potencias, o también desarrollar el término de la izquierda como su suma de Taylor, y ver que coinciden. Sin embargo, procederemos de otro modo.

En primer lugar, notemos que $kx^{k-1} = \frac{d}{dx}(x^k)$. Por tanto, estudiemos el carácter de la serie $\sum_{k\geq 0} x^k$. Como es una serie de potencias, calculamos su radio de convergencia, y tenemos que $R = 1$, pues $a_k = 1 \ \forall k \geq 0$.

Por otro lado, consideramos la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Sin mucho esfuerzo, podemos probar por inducción que $f^{k)}(0) = k! \ \ \forall k \geq 0$. Tenemos entonces que, tomando $a = 0$ en el *Teorema de Taylor* aplicado a $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \forall x \in (-1,1),$$

pues, en este caso, el resto de Taylor tiende a 0 dentro del disco de convergencia. Sabemos también que la serie es derivable, y dentro del disco de convergencia, se da la siguiente igualdad, derivando en ambos miembros:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Ejercicio 5.10. Encontrar un ejemplo de una sucesión de funciones $f_k : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla:

(i) $\{f_k\} \to 0$ c.u.

(ii) $\displaystyle\int_A f_k \not\to \int_A 0 = 0$

Solución. Sea $A = [0, +\infty)$, y tomo f_k tales que $0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k}$, y que además su integral se mantenga constante y distinta de 0. Un ejemplo de una tal función es:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1/k & si \;\; 0 \leq x \leq k \\ 0 & si \;\; x \geq k \end{cases}$$

Entonces, tenemos que $\displaystyle\int_0^\infty f_k(x)\, dx = \int_0^k \frac{1}{k}\, dx = 1 \to 1 \neq 0.$

Ejercicio 5.11. Sean $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $|f_n(x)| \leq T$ para un $T \in \mathbb{R}$ fijo, cumpliéndose $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in [0,1]$. Supongamos que las derivadas $\{f_n'\}$ existen y están uniformemente acotadas en]0,1[. Demostrar que f_n tiene una subsucesión convergente.

Nota: $\{f_n'\}$ uniformemente acotada en]0,1[$\iff \exists M > 0 : |f_n'(x)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in]0,1[$.

Solución. Demostraremos el ejercicio utilizando el Teorema de Arzelà-Ascoli. Para ello tenemos que comprobar las hipótesis de que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado y equicontinuo. Que el conjunto está acotado es inmediato, ya que $\|f_n\|_\infty = sup_{0<x<1}|f_n(x)| \leq T$. Veamos que es equicontinuo.

En primer lugar, como f_n es continua y las derivadas f_n' están uniformemente acotadas, podemos aplicar la desigualdad del valor medio para el caso escalar, obteniendo así:

$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y|$ para algún $M > 0$ fijo y $\forall x, y \in]0,1[$.

Dado un $\epsilon > 0$, definimos δ como $\delta = M/\epsilon > 0$. Tomamos $x, y \in]0,1[$ tal que $|x-y| < \delta$. Finalmente buscamos la desigualdad necesaria para probar la equicontinuidad. De la desigualdad del valor medio anterior y la última desigualdad mostrada, tenemos lo siguiente:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y| < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Hemos llegado a que $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$, probando así la equicontinuidad.

Por el Teorema de Arzelà-Ascoli existe una subsucesión $\{f_{\sigma(n)}\}$ convergente, como queríamos probar.

Ejercicio 5.12. Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente acotadas y continuas. Definimos $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$$

Probar que $\exists\{F_{n_k}\}$ subsucesión (sucesión parcial) de F_n convergente uniformemente en $[a,b]$.

Solución. La idea es de nuevo aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli. Comprobamos las hipótesis necesarias. Para probar la equicontinuidad, aprovechamos también que las funciones están uniformemente acotadas, deduciendo esta expresión:

$$|F_n(x){-}F_n(y)| = \left|\int_x^y f_n(t)dt\right| \leq \left|\int_x^y M dt\right| = M|x{-}y| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x,y \in [a,b]$$

Donde $M > 0$ es la cota de las funciones f_n. Dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta = \epsilon/M > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|F_n(x) - F_n(y)| \leq M|x-y| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x,y \in [a,b]$.

Así, queda probada la equicontinuidad del conjunto $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vamos a probar que está acotado. Para ello basta utilizar que las f_n están acotadas, en la expresión de la integral que define a F_n.

$$|F_n(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)dt\right| \leq M|a-x| \leq M(b-a) \quad \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que

$$||F_n(x)||_\infty \leq M(b-a)$$

por lo que el conjunto $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado en $C([a,b],\mathbb{R})$. El Teorema de Arzelà-Ascoli nos proporciona la existencia de la subsucesión $\{F_{n_k}\}$ convergente uniformemente que buscábamos.

6. Integral asociada a una medida

Ejercicio 6.1. Sean $B_1, B_2, \cdots, B_m \subseteq \Omega$ medibles y $\beta_1, \cdots, \beta_m \in [0, \infty)$. Entonces, la función

$$t := \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{B_k}$$

es simple positiva.

Ejercicio 6.2. Dado $p \in (1, +\infty)$ y sea $q = \frac{p}{p-1} \in (1, +\infty)$. Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ejercicio 6.3. Con p, q definidos como en el ejercicio anterior:

1. $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ $\forall a, b \geq 0$ (Desigualdad de Young).
2. Si $ab = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \Longleftrightarrow a^p = b^q$.

Ejercicio 6.4.
1. $\mathscr{L}^1(\Omega)$ es un espacio vectorial.
2. $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial.
3. $\mathscr{L}^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Solución. 3. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$. Entonces $|\alpha f|^p = |\alpha|^p \cdot |f|^p$. Como $f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega) \Rightarrow f + g \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ y $\left[\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu = \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f+g| d\mu \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f| d\mu + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g| d\mu$$

Utilizando la desigualdad de Young:

$$\leq \left[\int_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\right)^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\right)^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |g|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_\Omega |g|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$= \left[\int_\Omega [|f|+|g|]^p\, d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\leq 2^{p-1} \int_\Omega (|f|^p + |g|^p) d\mu)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Ejercicio 6.5. Dada $g : \Omega \to \mathbb{R}$ medible positiva. Entonces:

$$\int_\Omega g d\mu = 0 \Longleftrightarrow g = 0 \text{ a. e. } x \in \Omega$$

Ejercicio 6.6. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ cont. $\Rightarrow$ g es integrable. Si además $\int_\mathbb{R} |g| d\mu = 0 \Rightarrow g(\omega) = 0\ \forall \omega \in \Omega$.

Ejercicio 6.7. Dados $\Omega \supset E_{1,k} \supset E_{2,k} \supset \dots \supset E_{n,k} \supset E_{n+1,k} \supset \dots$ entonces si $\mu(\Omega) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,k}) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{n,k})$.

Ejercicio 6.8. Definimos un espacio métrico con $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mu =$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (sabiendo que $\mu(\mathbb{R}) = \infty$).

Si definimos la función $f_n(\omega) = \chi_{[n,n+1]}(\omega) \to 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$, probar que f_n no converge uniformemente a 0 en un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \mu(\mathbb{R} \setminus F) < \varepsilon < \infty$.

Pista: Utilizar que $\mu(\mathbb{R} \setminus F) < \infty \Rightarrow \mu(F) = \infty$ (es decir, es posible tomar puntos tan separados como se quieran)

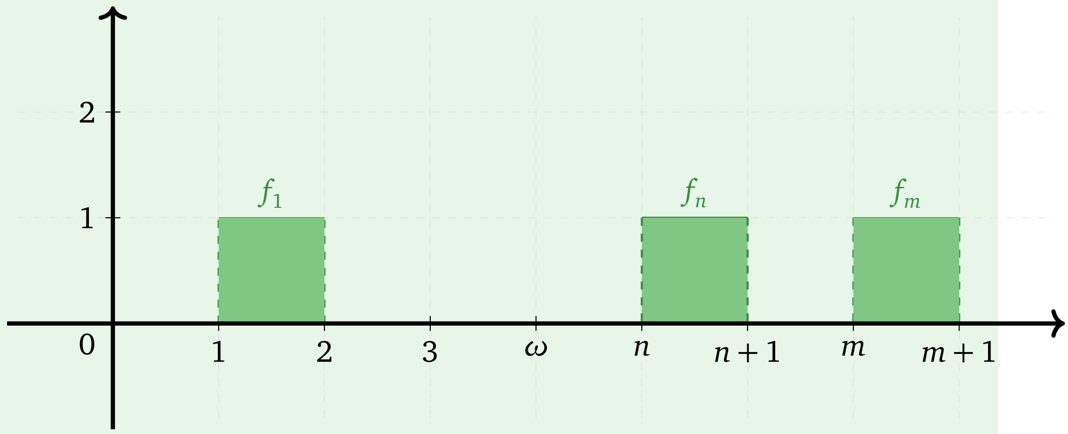


Figura 1: Representación gráfica de la función $f_n(\omega)$

Ejercicio 6.9. (Continuidad absoluta de la integral). Dado $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ con $f \in \mathscr{L}^1(\Omega)$. Demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $E \in \mathscr{A}$ y $\mu(E) < \delta$ entonces $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$

Solución. Veamos una primera demostración.

Sea ε un número positivo cualquiera. Como $|f|$ es integrable, $\int_\Omega |f| d\mu = \sup \{\int_\Omega s d\mu$: s simple positiva y $S \leq |f|\}$. Entonces $\exists s : \Omega \to [\Omega, \infty)$ simple tal que

$$0 \leq \int_\Omega (|f| - s) d\mu < \varepsilon$$

Así, tenemos que $\forall E \in \mathscr{A}$

$$\int_E |f| d\mu = \int_E (|f| - s) d\mu + \int_E s d\mu \leq \int_\Omega (|f| - s) d\mu + \int_E s d\mu < \varepsilon + \int_E s d\mu$$

Si elijo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|}$, como $|f| = s$ es simple y $\mu(E) < \delta$ entonces

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) \leq \left[\sum_{i=1}^n |\alpha_i|\right] \mu(E) \leq \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|}{1 + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|} \varepsilon < \varepsilon$$

Por tanto, $\mu(E) < \delta$ y $E \in \mathscr{A} \Rightarrow \int_E |f| d\mu < \varepsilon + \int_e s d\mu < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Nota. Si desde un principio tomamos $\frac{\varepsilon}{2}$ en lugar de simplemente ε nos quedará ε al final y no 2ε.

Ejercicio 6.10. Dada una función $f : k \to \mathbb{R}$ continua y $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto, entonces $f \in \mathscr{L}^1(K)$.

Solución. Para obtener la solución vamos a usar que $f \in L^1(K) \Longleftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(K)$.

f es medible.

Como f es continua, $f^{-1}((-\infty, \gamma)) = \{x \in K : f(x) < \gamma\}$ abierto en $\mathbb{R}^N \forall \gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}((-\infty, \gamma)) \in \mathscr{B} \subset$ medibles de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Como f es continua, $|f|$ también lo es, con lo que $|f|$ es medible positiva.

Dado K un compacto y $|f|$ una función continua, por el Teorema de Weierstrass $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in K$.

$|f| \leq M = M\chi_k$ luego

$$\int_K M d\mu = M\mu(K) \leq M\mu(B) < \infty$$

$$\int_K |f| d\mu \leq \int_K M d\mu \leq M\mu(B) < \infty \Rightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(K).$$

Ejercicio 6.11. Dada una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ medible, $\Omega \in \mathbb{R}^N$ medible, con $\mu(\Omega) < \infty$. Entonces, $g \in L^1(\Omega)$. Prueba además que $\exists M, m \in \mathbb{R} : m \leq g(x) \leq M \forall x \in \Omega$.

Ejercicio 6.12. Si $\{f_n\} \subset \mathscr{C}(k, \mathbb{R}), k \in \mathbb{R}^N$ compacto y $\{f_n(x)\} \to f(x) \forall x \in K$, prueba que $\{f_n\} \to f$ c.u. en $K \iff \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equiacotada y equicontinua.

Ejercicio 6.13 (Aplicación Th. Fubini). Sean $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\varphi(x) \leq \psi(x), x \in [a, b]$. Definamos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(y)\}$. Definimos $f : A \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que

$$\int_A f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Solución.

Ejercicio 6.14. Calcula la integral $\displaystyle\int_A sen^2 x\ sen^2 y\ dxdy$ en el conjunto $A = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución.

$$\int_A sen^2\, x sen^2\, y\ dxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi sen^2\, x\ sen^2\, y\ dy \right) dx$$

Nota. Si $A = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\int_A f\ dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f\ dy \right) dx$$

Ejercicio 6.15. Sean $\phi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuas tales que $\phi(y) \leq \psi(y) \forall y \in [c, d]$. Dado el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ c \leq y \leq d,\ \ \phi(y) \leq \psi(y)\}$. Sabiendo que $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, demuestra que su integral es:

$$\int_A = f\ dxdy = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Puedes probar a desmotrarlo con el Teorema de Fubini general.

Ejercicio 6.16. $\int_A x\ \ dxdy,\ A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\} = f^{-1}((-\infty, 0]))\quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ es continua y medible.

Solución. Primero intentamos dibujar el conjunto A. Podemos imaginarnos también el conjunto A en coordenadas polares. Así, $x = \rho\ cos\theta$ y $y = \rho\ sen\theta$ con $\rho \in [0, +\infty)$ y $\theta \in (-\pi, \pi)$. Por tanto, el conjunto $A' = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times (-\pi, \pi) : \rho \leq 2\rho/cos\theta\}$.

Así,

$$\int_A x\ d(x,y) = \int_A x\ dxdy = \int_{A'} \rho\ \cos\theta\ \rho d\rho d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left[\int_0^{2cos\theta} \rho^2\ cos\theta\ d\rho \right] d\theta \right.$$

Ahora, por el Teorema de Fubini:

$$\int_0^{2cos\theta} \rho^2 cos\theta\ d\rho = \left[\frac{\rho^3 cos\theta}{3} \right]^{\rho=2cos\theta} = \frac{8cos^4\theta}{3}$$

$$\int cos^4\theta\ d\theta = \int cos^2\theta cos^2\theta\ d\theta = \int \frac{1+cos(2\theta)}{2}\frac{1+cos(2\theta)}{2}/d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int [1 + 2cos(2\theta) + cos^2(2\theta)]\ d\theta = \ldots + \frac{1}{4}\int cos^2(2\theta)\ d\theta$$

Ejercicio 6.17. Calcula el volumen de $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 2(x^2+y^2) \leq 1, z \geq 0\}$.

Solución. Decimos entonces que

$$VolA = \int_A 1\ dxdydz = \int_{\mathbb{R}^3} \Xi_A(x,y,z)\ dxdydz = \text{medida}(A)$$

Vamos a utilizar coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\ cos\theta \\ y = \rho\ sen\theta \\ z = z \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Definimos el conjunto $A' = \{(\rho, \theta, z) : 1 \leq \rho^2 \leq 2, z\rho^2 \leq 1, z \geq 0\} = \{(\rho, \theta, z) \in [0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} : 1 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq z \leq \frac{1}{\rho^2}\}$. Intentamos dibujar el conjunto:

Ahora vamos a calcular la integral del conjunto A'.

$$\int_A 1\ dxdydz \underset{\text{cambiamos a cilíndricas}}{=} \int_{A'} 1\ \rho d\rho d\theta dz \underset{Fubini/Tonelli}{=} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int 1\ d\rho dz \right) d\rho$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\rho^2}} 1\ dz \right) d\rho\ d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\rho} d\ \rho \right) d\theta$$
$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho}\ d\theta d\rho = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho} d\rho$$
$$= 2\pi[ln\sqrt{2} - ln1]$$

Ejercicio 6.18 (Fórmula de Liouville). Calcula la siguiente integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Ejercicio 6.19. Calcula la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{sen\ x}{x}\, dx$$

Solución. Dado un $R > 0$, definimos la función $F(x,y) = e^{-xy}\ sen(x)$ tal que $F : [0,R] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Nótese que es una función de dos variables.

$$\begin{aligned}
\int e^{-xy}\ senx\ dx \left(\begin{cases} h = sen\ x \\ dv = e^{-xy}\ dx \\ v = \frac{e^{-xy}}{-y} \end{cases} \right) &= -\frac{e^{-xy}\ senx}{y} + \frac{1}{y}\int e^{-xy}\ cosx\ dx \\
&= -\frac{e^{xy}\ senx}{y} + \frac{1}{y}\left(-\frac{e^{xy}\ cosx}{y} - \int \frac{e^{-xy}}{y}(senx)\ dx \right) \\
&= -\frac{e^{-xy}\ senx}{y} - \frac{e^{-xy}\ cosx}{y^2} - \frac{1}{y^2}\int e^{-xy}\ senx\ dx
\end{aligned}$$

$$\int e^{-xy}\ senx\ dx = -e^{-xy}\left[\frac{senx}{y} + \frac{cosx}{y^2}\right] \cdot \frac{y^2}{1+y^2} = -e^{-xy}\frac{y\ senx + cosx}{1+y^2}$$

$$\int_0^R e^{-xy}\ senx\ dx = -e^{Ry}\frac{y\ senR + cosR}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{1 - e^{Ry}[y\ senR + cosR]}{1+y^2}$$

$$\begin{aligned}
\int_{[0,R]\times[0,\infty)} F(x,y)\ dxdy &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^R e^{-xy}\ senx\ dx\right) dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\left[1 - e^{-Ry}(y\ senR + cosR)\right] dy
\end{aligned}$$

Para simplificar la notación a continuación, llamamos

$$g(y,R) = \frac{1}{1+y^2}\left[1 - e^{-Ry}(y\ senR + cosR)\right]$$

Para acabar nos queda calcular el valor del límite:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\infty} g(y,R)\ dy = \int_0^{\infty} \lim_{R\to\infty} g(y,R)\ dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\ dy = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} g(y,R_n)\,dy \underset{th.\ conv.\ dominada}{=} \int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty} g(y,R_n) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 6.20 (Principio de Cavalieri). Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible. Dado el subconjunto

$$\left\{x\in\mathbb{R} : \emptyset \neq E(x) = \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)\in E\right\}\right\} = [a,b]$$

su medida $m_3(E) = \int_a^b m_2(E(x))\,dx$.

Solución. Por ejemplo, para el conjunto $E = [a,b]\times B_{\mathbb{R}^2}(0,r)$ tenemos que

$$\forall x\in[a,b]\ \ E(x) = \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)\in E\right\} = B_{\mathbb{R}^2}(0,r)$$

$$m_3(E) = \int_a^b m_2(B_{\mathbb{R}^2}(0,r))\,dx = m_2(B_{\mathbb{R}^2}(0,r))\cdot(b-a) = \pi\cdot r^2\cdot(b-a)$$

Probemos ahora la proposición.

$$m_3(E) = \int_{\mathbb{R}^3}\chi_E(x,y,z)\,dxdydz = \int_E 1\,dxdydz = \int_a^b\left(\int_{E(x)} dydz\right)dx$$
$$= \int_a^b m_2(E(x))\,dx$$

Ejercicio 6.21. $\int(x^2+y^2)\,dxdxy$, $\overline{B}_{\mathbb{R}^3}(1,0,1)$. $f(x,y) := x^2+y^2$ es ”Radial” ya que su valor sólo depende de $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución.

$$\int(x^2+y^2)\,dxdxy = \int_0^1\left(\int_{\pi}^{\pi} r^2\cdot r\,d\theta\right)dr = \int_0^1 r^3\cdot 2\pi\,dr$$
$$= 2\pi\frac{r^4}{4}\Big]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{2}$$

Para la radial hacemos un cambio a coordenadas polares:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\ cos\theta\\ y &= r\ sen\theta\end{aligned}\right\}$$

Describamos ahora el conjunto $\overline{B}(1,0,1)$

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)+y^2\leq 1\right\} = \left\{(r,\theta)\in[0,\infty)\times[-\pi,\pi] : (r\ cos\theta-1)^2+(r\ sen\theta)^2\leq 1\right\}$$
$$A = \left\{(r,\theta)\in[0,\infty)\times[-\pi,\pi] : r^2-2r\ cos\theta\leq 0\right\}$$

Si tomamos

$$\left.\begin{array}{r} x = 1 + r\ cos\theta \\ y = 0 + r\ sen\theta \end{array}\right\}$$

tendremos al final un rectángulo, por lo que calcular el área es muy sencillo con Fubini.

$$(x, y) = (1, 0) + (rcos\theta, r\ sen\theta)$$

$$\overline{B}((1,0),1) = (1,0) + \overline{B}((0,0),1) \to B = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1; -\pi < \theta \le \pi\} = [0,1] \times (-\pi, \pi]$$

$$\int_{\overline{B}((1,0),1)} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_B \Big((1 + rcos^2\ \theta)^2 + r^2\ sen^2\ \theta\Big) r\ drd\theta$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (r^3 + 2r^2\ cos\theta + r)\ d\theta dr$$

Ejercicio 6.22. Calcula $\int_A (x^2 + y^2)\ dxdy$ con

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2y, x^2 + y^2 \le 1, x > 0\right\}$$

Solución. Vemos que $A = B_{\mathbb{R}^2}(0,1),1) \cup B_{\mathbb{R}^2}((0,0),1) \cup$[Primer y cuarto cuadrante].

Hacemos el cambio de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{r} x = r\ cos\ \theta \\ y = r\ sin\ \theta \end{array}\right\}$$

Llamamos B al conjunto anterior con las nuevas coordenadas:

$$B = \left\{(r,\theta) \in (0,1) \times (0, \frac{\pi}{2}) : r \le 2\ sen\theta\right\}$$

$$\int_A (x^2 + y^2)\ dxdy = \int_B r^3\ drd\theta = \int_0^1 \left(\int_{arcsen(\frac{r}{2})}^{\frac{\pi}{2}} r^3\ d\theta\right) dr$$

alternativamente,

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3\ dr\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{2sen\ \theta} r^3\ dr\right) d\theta$$

De forma cartesiana:

Calculamos la intersección de los conjuntos:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^2 = 1 - y^2 \\ x^2 = 1 - (y-1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$1 = 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La integral es entonces

$$\int_A (x^2 + y^2)\, dx dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dx \right) dy$$
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \ldots$$