CAGD 作业 7

刘紫檀 SA21229063

第一题

给定以下三次多项式曲线

$$P(u) = -\begin{pmatrix}7/8\\5/8\end{pmatrix}u^3 + \begin{pmatrix}9\\15/4\end{pmatrix}u^2 - \begin{pmatrix}57/2\\9/2\end{pmatrix}u + \begin{pmatrix}30\\-1\end{pmatrix}$$

1. 计算 P(u) 的极形式及其在区间 [2, 4] 内的 Bezier 控制多边形的顶点 P_0, P_1, P_2, P_3，并大致勾勒出该控制多边形
2. 用 de Casteljau 算法计算在采样点 $u = \{5/2, 3, 7/2\}$ 处的多项式曲线 $P(u)$，并在 (1) 的图中画出
3. 用 (2) 中结果将曲线在 $u = 3$ 处细分，再将右边部分曲线在中点 $u = 7/2$ 处细分。将控制多边形在 (1) 图中画出，并且画出 $P(u)$ 表示的曲线

1

对于 $P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$ 我们有极形式

$$P(t_1, t_2, t_3) = at_1t_2t_3 + \frac{1}{3}bt_1t_2 + \frac{1}{3}bt_1t_3 + \frac{1}{3}bt_2t_3 + \frac{1}{3}ct_1 + \frac{1}{3}ct_2 + \frac{1}{3}ct_3 + d$$

那么我们的极形式计算如下：

$$\begin{aligned} P(t_1, t_2, t_3) &= -\begin{pmatrix}7/8\\5/8\end{pmatrix}(t_1t_2t_3) + \begin{pmatrix}9\\15/4\end{pmatrix}(\frac{t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3}{3}) - \begin{pmatrix}57/2\\9/2\end{pmatrix}(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}) + \begin{pmatrix}30\\-1\end{pmatrix} \\ &= \text{懒得展开了，用处不大} \end{aligned}$$

在 [2, 4] 内的控制多边形的顶点计算如下：

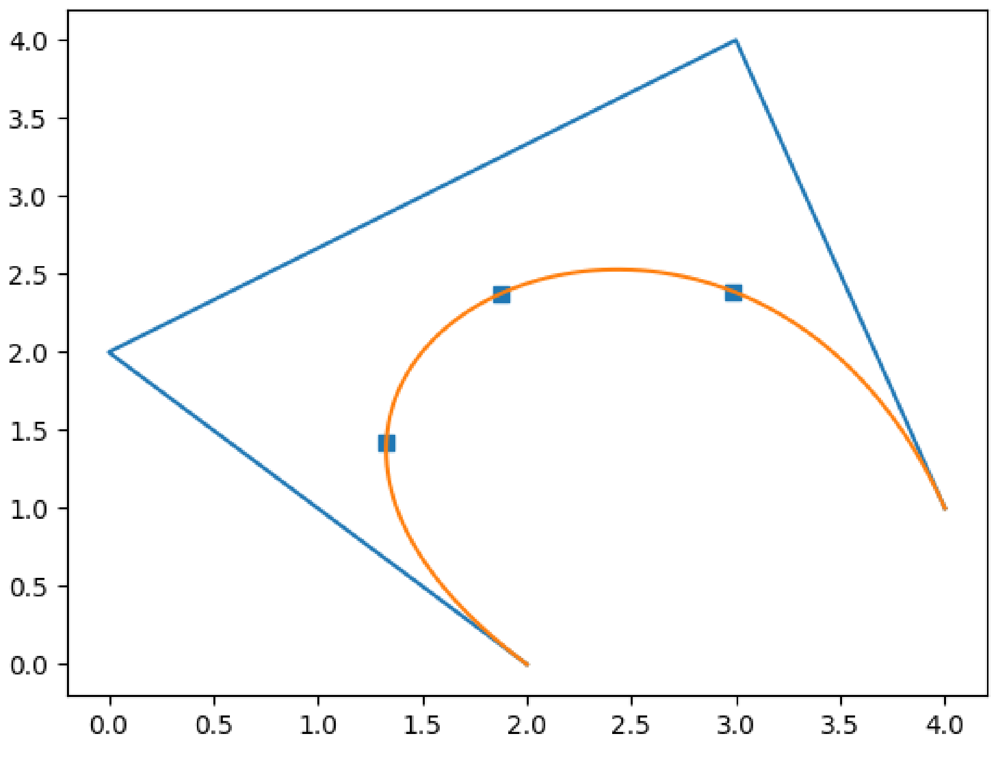
$$\begin{aligned} P(2, 2, 2) &= \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \\ P(2, 2, 4) &= \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \\ P(2, 4, 4) &= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \\ P(4, 4, 4) &= \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

2

> 代码参考 problems_1.py，下面为部分代码

```python
def de_casteljau(t, u, v):

    n = len(t)
    for i in range(0, n):
        if t[i] != u and t[i] != v:
            left_t = t.copy()
            right_t = t.copy()
```

```
            left_t[i] = u
            right_t[i] = v
            left_res = de_casteljau(left_t, u, v)
            right_res = de_casteljau(right_t, u, v)

            res = right_res * (t[i]- u) / (v - u) + left_res * (v-t[i]) / (v
- u)
            if de_casteljau_verbose:
                print(f"b({t[0]},{t[1]},{t[2]}) = {(t[i]- u)/(v - u)} *
b({left_t[0]},{left_t[1]},{left_t[2]}) + {(v-t[i])/ (v - u)} *
b({right_t[0]},{right_t[1]},{right_t[2]}) = {res}")
            return res

    control_points = {
        (2, 2, 2): np.asarray((2, 0)),
        (2, 2, 4): np.asarray((0, 2)),
        (2, 4, 4): np.asarray((3, 4)),
        (4, 4, 4): np.asarray((4, 1))
    }

    # Symmetry!
    t_sorted = np.sort(t)
    for k, v in control_points.items():

        np_k = np.asarray(k)
        #print(np_k)
        if np.allclose(np_k, t_sorted):
            return v

    assert(False)
```



利用 de Casteljau 得到三个点的坐标分别为

- $(1.328125, 1.421875)$
- $(1.875, 2.375)$
- $(2.984375, 2.390625)$

3

现在曲线按参数分成了三段：$\mathrm{I} := [2,3]$，$\mathrm{II} := [3,3.5]$, $\mathrm{III} := [3.5,4]$

I 段如下

$$P(2,2,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$P(2,2,3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$P(2,3,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$P(3,3,3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

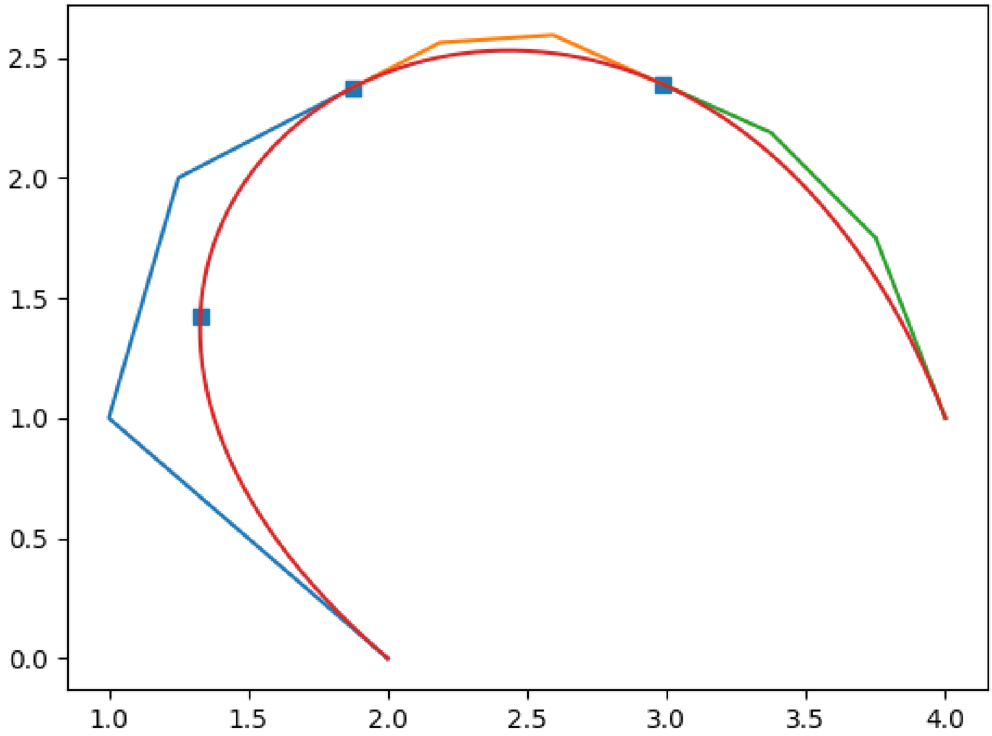
II 段如下

$$P(3,3,3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$P(3,3,\frac{7}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$P(3,\frac{7}{2},\frac{7}{2}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$P(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{7}{2}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

III 段如下

$$P(\frac{7}{2},\frac{7}{2},\frac{7}{2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$P(\frac{7}{2},\frac{7}{2},4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$P(\frac{7}{2},4,4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$P(4,4,4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得到控制多边形和 (2) 中的点的图的叠加如下：



第二题

给定以下三次多项式曲线，及参数区间 [0,1]

$$F(u) = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix} u^3 + \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix} u^2 - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} u$$

1. 计算 F 的一阶和二阶导数
2. 计算 F 的极形式 $f(u_1, u_2, u_3)$ 及导数 F' 和 F'' 的极形式，证明他们分别等于 $3f(u_1, u_2, \hat{1})$ 和 $ 6f(u_1, \hat 1, \hat 1) $

> 注：$ f(u_1, u_2, \hat 1) = f(u_1, u_2, 1) - f(u_1, u_2, 0) $

1

$$F'(u) = \begin{pmatrix} 45 \\ -18 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 54 \\ 20 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$F''(u) = \begin{pmatrix} 90 \\ -36 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 54 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2

$$f(t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix} (t_1 t_2 t_3) + \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix} (\frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3}{3}) - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} (\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3})$$

F' 和 F'' 的极形式分别记为 $f_1(t_1, t_2)$ 和 $f_2(t_1)$，则

$$
\begin{aligned}
f_1(t_1,t_2) &= \begin{pmatrix}45\\-18\end{pmatrix}t_1t_2 + \begin{pmatrix}54\\20\end{pmatrix}(\frac{t_1+t_2}{2}) - \begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}\\
f_2(t_1) &= \begin{pmatrix}90\\-36\end{pmatrix}t_1 + \begin{pmatrix}54\\20\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3f(t_1,t_2,\hat{1}) &= 3[f(t_1,t_2,1) - f(t_1,t_2,0)]\\
&= 3[\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}(t_1t_2) + \begin{pmatrix}27\\10\end{pmatrix}(\frac{t_1t_2+t_2+t_1}{3}) - \begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}(\frac{t_1+t_2+1}{3}) -\\
&\quad \begin{pmatrix}27\\10\end{pmatrix}(\frac{t_1t_2}{3}) + \begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}(\frac{t_1+t_2}{3})]\\
&= 3[\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}(t_1t_2) + \begin{pmatrix}27\\10\end{pmatrix}(\frac{t_2+t_1}{3}) - \begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}\frac{1}{3}]\\
&= f_1(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6f(t_1,\hat{1},\hat{1}) &= 6[f(t_1,\hat{1},1) - f(t_1,\hat{1},0)]\\
&= 6\{[(f(t_1,1,1) - f(t_1,0,1)] - [(f(t_1,1,0) - f(t_1,0,0)]\}\\
&= f_2(t_1) \qquad \text{(懒得打公式了..)}
\end{aligned}
$$

第三题

给定由以下四点及结点向量 $[0,1,2,3,4,5]$ 定义的均匀 B 样条

$$
P_0 = \begin{pmatrix}-2\\-10\end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}
$$

1. 用 de Boor 算法计算曲线在 $t=2.5$ 处的位置。勾勒出控制多边形和此算法构造出的相关点。
2. 对于 (1) 中的 B 样条，计算能表示同一曲线的相应 Bezier 控制顶点。在 (1) 图中画出控制顶点和 Bezier 曲线。

1

> 在此我把题目理解为这四个点是四个 de Boor 点，然后这个曲线是 $k=4$ 的一个 B 样条曲线，在 $t\in[2,3]$ 有满足 C^3 光滑的一段，也就是我们关心的一段。

已知

$$
\begin{aligned}
f(0,1,2) = P_0 &= \begin{pmatrix}-2\\-10\end{pmatrix},\\
f(1,2,3) = P_1 &= \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix},\\
f(2,3,4) = P_2 &= \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix},\\
f(3,4,5) = P_3 &= \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

则可计算如下

$$f(1,2,2.5)=\frac{3-2.5}{3-0}f(0,1,2)+\frac{2.5-0}{3-0}f(1,2,3)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\-10\end{pmatrix}+\frac{5}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/3\\0\end{pmatrix}$$
$$f(2,3,2.5)=\frac{4-2.5}{4-1}f(1,2,3)+\frac{2.5-1}{4-1}f(2,3,4)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7/2\end{pmatrix}$$
$$f(3,4,2.5)=\frac{5-2.5}{5-2}f(2,3,4)+\frac{2.5-2}{5-2}f(3,4,5)=\frac{5}{6}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17/3\\3\end{pmatrix}$$
$$f(2,2.5,2.5)=\frac{3-2.5}{3-1}f(1,2,2.5)+\frac{2.5-1}{3-1}f(2,3,2.5)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-11/3\\0\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\7/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/6\\21/8\end{pmatrix}$$
$$f(3,2.5,2.5)=\frac{4-2.5}{4-2}f(2,3,2.5)+\frac{2.5-2}{4-2}f(3,4,2.5)=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\7/2\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}17/3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13/6\\27/8\end{pmatrix}$$
$$f(2.5,2.5,2.5)=\frac{3-2.5}{3-2}f(2,2.5,2.5)+\frac{2.5-2}{3-2}f(3,2.5,2.5)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1/6\\21/8\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}13/6\\27/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

故最后的点为 $(1,3)$。

> 画图有点 bug ..

2

只要算下 $f(2,2,2)$，$f(2,2,3)$，$f(2,3,3)$，$f(3,3,3)$ 就可以了。

> TODO