CAGD 作业 8

刘紫檀 SA21229063

问题一

编程计算并绘出中心为 x, 边长为 $2d$ 的立方体在 2 维平面上的透视投影，其中 x 点和 d 的大小由用户指定，对相机参数和方位进行合理假设。

分析

立方体的八个顶点为（$\vec{x}=0$ 时）

$$
(d,d,d)\ (d,d,-d)\ (d,-d,d)\ (d,-d,-d) \\
(-d,d,d)\ (-d,d,-d)\ (-d,-d,d)\ (-d,-d,-d)
$$

设相机位置 $(0,0,z_0)$，像平面位置 $z=\mathrm{nearZ}$，则点 (x,y,z) 在像平面上的位置为

$$
\begin{aligned}
x' &= \mathrm{nearZ} \times \frac{x}{z-z_0} \\
y' &= \mathrm{nearZ} \times \frac{y}{z-z_0}
\end{aligned}
$$

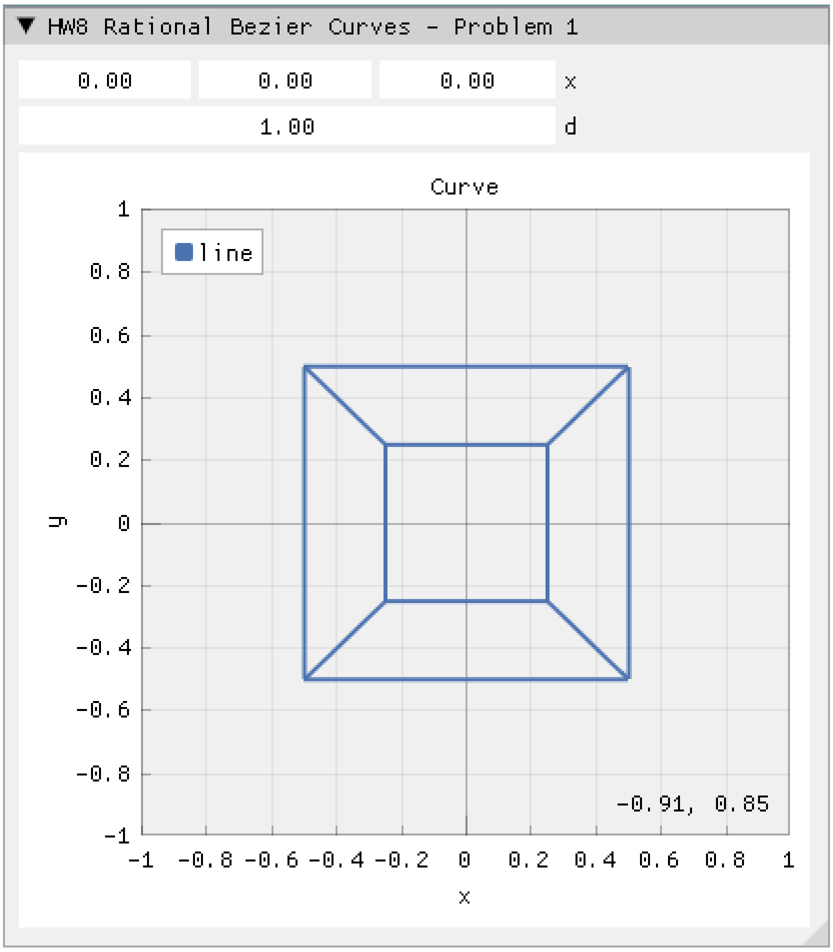
则可以认为每个点经过了这样的变换

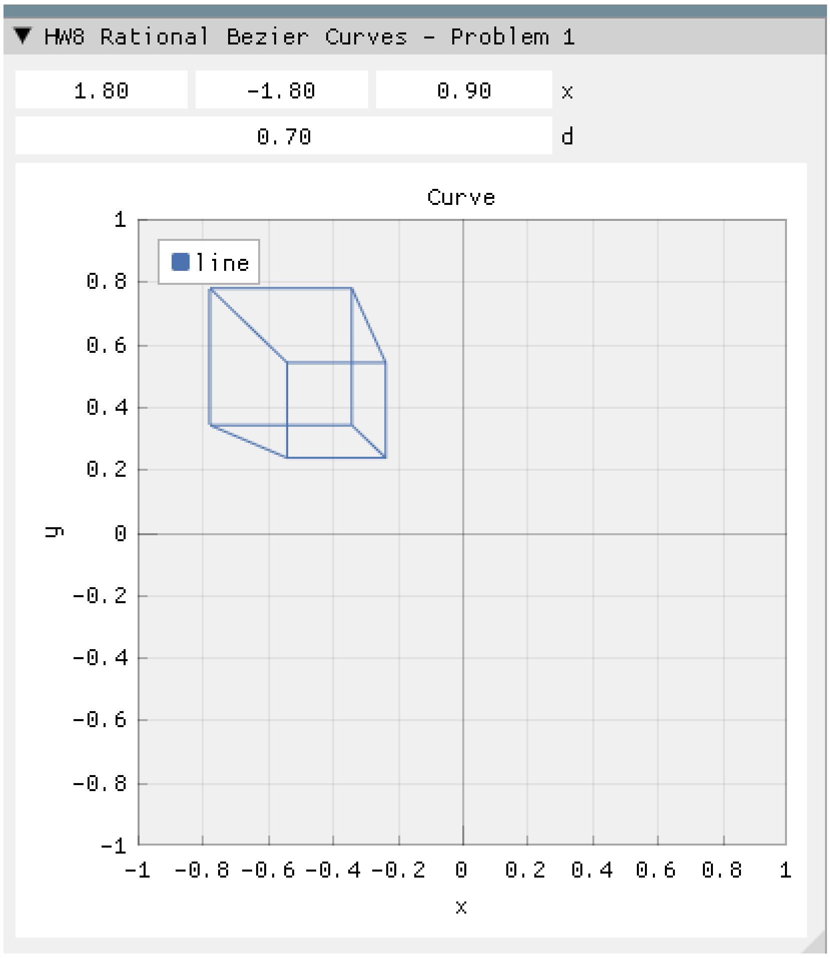
$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{nearZ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{nearZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{nearZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z-z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

> 如果想要相机背面的内容不显示出来，只要变换后 clip 掉存在某些 $w'<0$ 的顶点的这些图元就行，这里没实现

将齐次坐标 (x',y',z',w') 转换为 $(x'/w',y'/w',z'/w')$ 后， 将 $(x'/w',y'/w')$ 画出即可。

结果展示





问题二

用有理二次 Bezier 样条绘制椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

使得样条分段尽可能少。参数 a 和 b 由用户指定。

分析

椭圆

从参数表示出发

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

带入

$$\cos\varphi = \frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

则

$$f(t) = (\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2})$$

转换为齐次坐标

$$f(t) = (a(1-t^2), 2bt, 1+t^2)$$

设 $n=2$ 的二次 Bezier 曲线为

$$\vec{f}^{(hom)}(t) = \vec{p}_0 B_0^{(2)}(t) + \vec{p}_1 B_1^{(2)}(t) + \vec{p}_2 B_2^{(2)}(t)$$

比较系数得

$$\begin{cases} a(1-t^2) = p_{0x}B_0^{(2)} + p_{1x}B_1^{(2)} + p_{2x}B_2^{(2)} \\ 2bt = p_{0y}B_0^{(2)} + p_{1y}B_1^{(2)} + p_{2y}B_2^{(2)} \\ 1+t^2 = p_{0z}B_0^{(2)} + p_{1z}B_1^{(2)} + p_{2z}B_2^{(2)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} [\vec{p}_0 \quad \vec{p}_1 \quad \vec{p}_2] &= \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & 2b \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

双曲线

从参数表示出发

$$\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\tan t \end{cases}$$

带入

$$\sec\varphi = \frac{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}, \quad \tan\varphi = \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

则

$$f(t) = (\frac{a(1+t^2)}{1-t^2}, \frac{2bt}{1-t^2})$$

转换为齐次坐标

$$f(t) = (a(1+t^2), 2bt, 1-t^2)$$

设 $n=2$ 的二次 Bezier 曲线为

$$\vec{f}^{(hom)}(t) = \vec{p}_0 B_0^{(2)}(t) + \vec{p}_1 B_1^{(2)}(t) + \vec{p}_2 B_2^{(2)}(t)$$

比较系数得

$$\begin{cases} a(1+t^2) = p_{0x}B_0^{(2)} + p_{1x}B_1^{(2)} + p_{2x}B_2^{(2)} \\ 2bt = p_{0y}B_0^{(2)} + p_{1y}B_1^{(2)} + p_{2y}B_2^{(2)} \\ 1-t^2 = p_{0z}B_0^{(2)} + p_{1z}B_1^{(2)} + p_{2z}B_2^{(2)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} [\vec{p}_0 \quad \vec{p}_1 \quad \vec{p}_2] &= \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 2b & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 2b & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & a & 2a \\ 0 & b & 2b \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对偶圆锥曲线

观察到不管是椭圆的参数表示

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

还是双曲线的参数表示

$$\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\tan t \end{cases}$$

如果带入半角公式的时候（$t=\tan(\varphi/2)$）的换元中的 φ 能跑遍的话，那么参数表示也可以完整表示全部的曲线。一般的有理 Bezier 是定义在 $[0,1]$ 上的，现在我们想得到 $(1,\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 的曲线，最简单的方法是做换元

$$t = \frac{t_{\text{new}}}{2t_{\text{new}}-1}$$

这样一波操作下来，我们发现 t_{new} 从 $[0,1]$ 跑的时候，正好能跑到 t 取上面那两段。

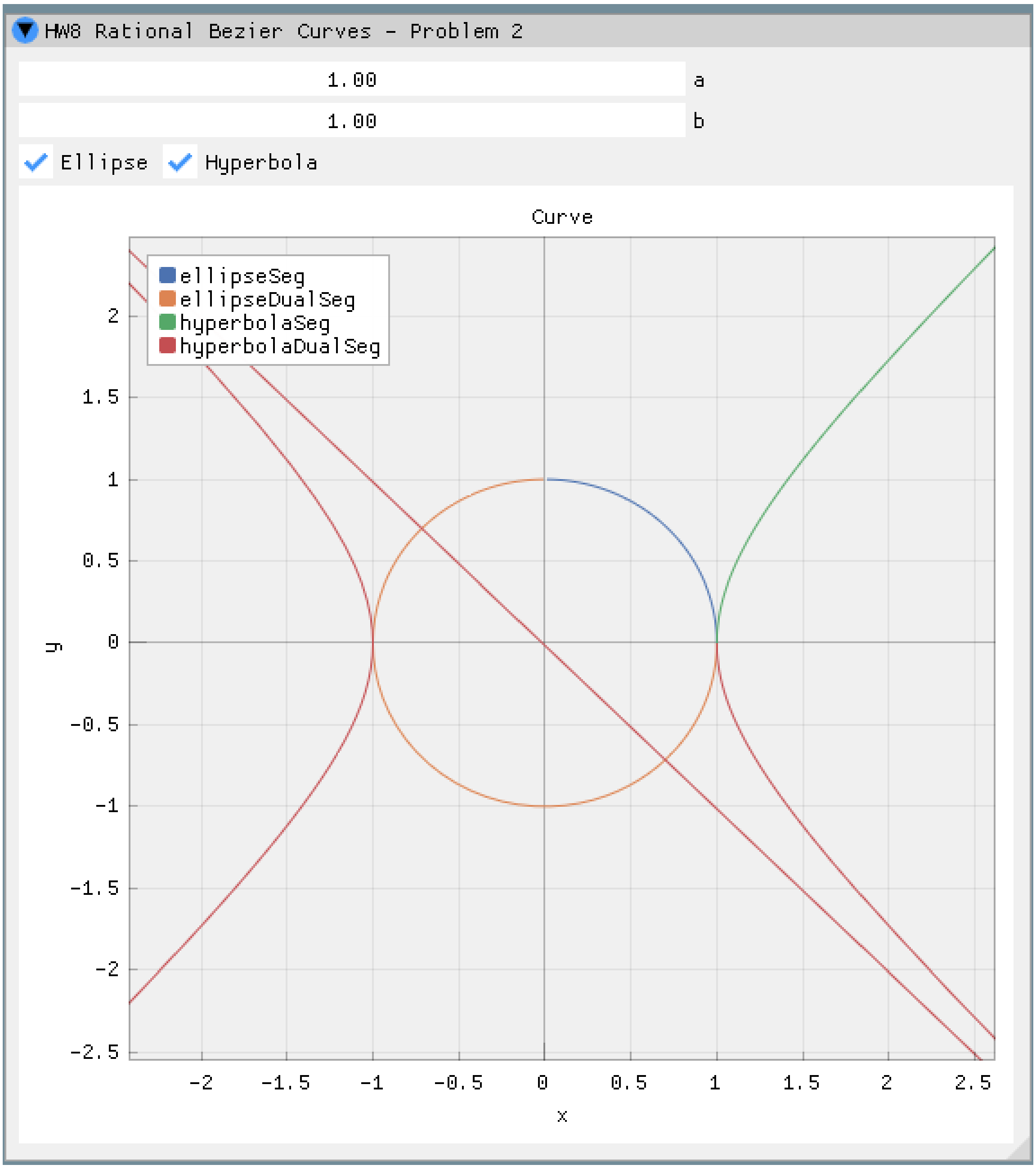
带入换元，我们发现只要把 $\vec{p}_1$ 的分量加个负号，就还能用有理 Bezier 的方法来画整根曲线。

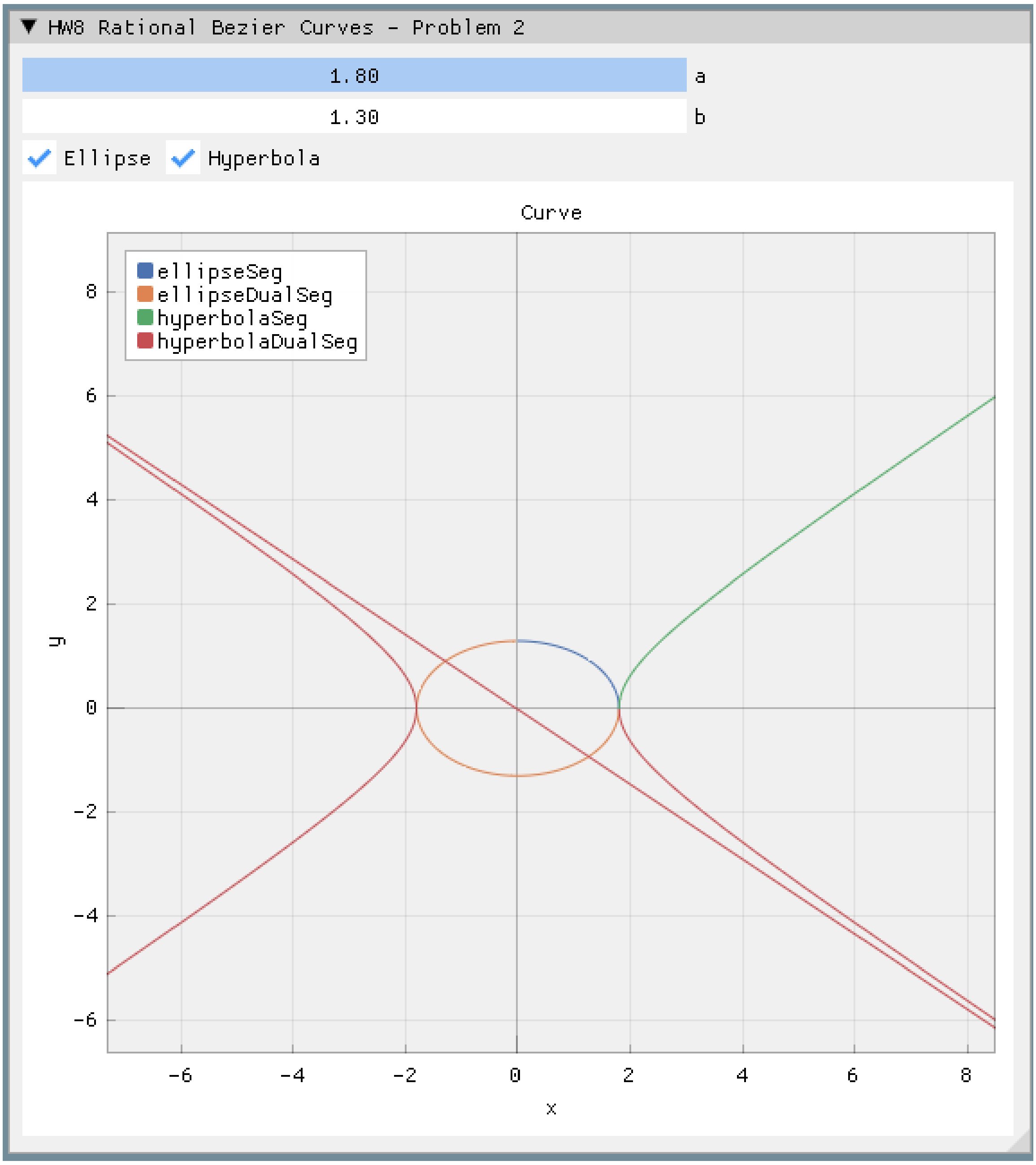
绘制

按定义，用如下公式绘制即可

$$f^{(eucl)}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_i^{(d)}(t) \begin{pmatrix} p_i^{(1)} \\ \dots \\ p_i^{(n)} \end{pmatrix}}{\sum_{i=0}^{n} B_i^{(d)}(t) p_i^{(n+1)}}$$

结果展示





问题三

在 3D 空间中绘制前一题中用齐次坐标表示的 Bezier 曲线（即做投影变换之前的三维曲线）。

> TODO: 其实很好画，但是 ImGui 要写单独的 Renderer 来渲染才行..
>
> 写了仨小时没写完，从零搓果然还是太费时间了