CAGD 作业 3

刘紫檀 SA21229063

原理

使用 Bernstein 基函数计算 Bezier Curve 上任意一点的坐标。

算法输入

给定控制点集合 P_i $(i=0,\ldots,n)$，我们想求曲线上 t 处的值 $\mathbf{c}(t)$，则我们使用

$$\mathbf{c}(t)=\sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t)\mathbf{P}_i,\quad 0\le t\le 1$$
$$b_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i},\quad i=0,\ldots,n$$

实现说明

$$C_n^i=\frac{n!}{(n-i)!i!}$$

计算组合数 C_n^i 时候用一个预制的阶乘查找表（来偷懒）。

框架介绍

本次实验我采用了 ImGui + glfw + ImPlot 来进行。代码采用 C++11 兼容的写法，使用 CMake 编译运行。

ImGui 是一个优秀的立即模式 GUI 库，配合 glfw 和 OpenGL backend 可以达到比较好的性能，也十分方便与已有的游戏引擎集成。

> 关于立即模式，可以搜索 immediate mode gui library vs retained mode gui library

如何编译运行

要求：

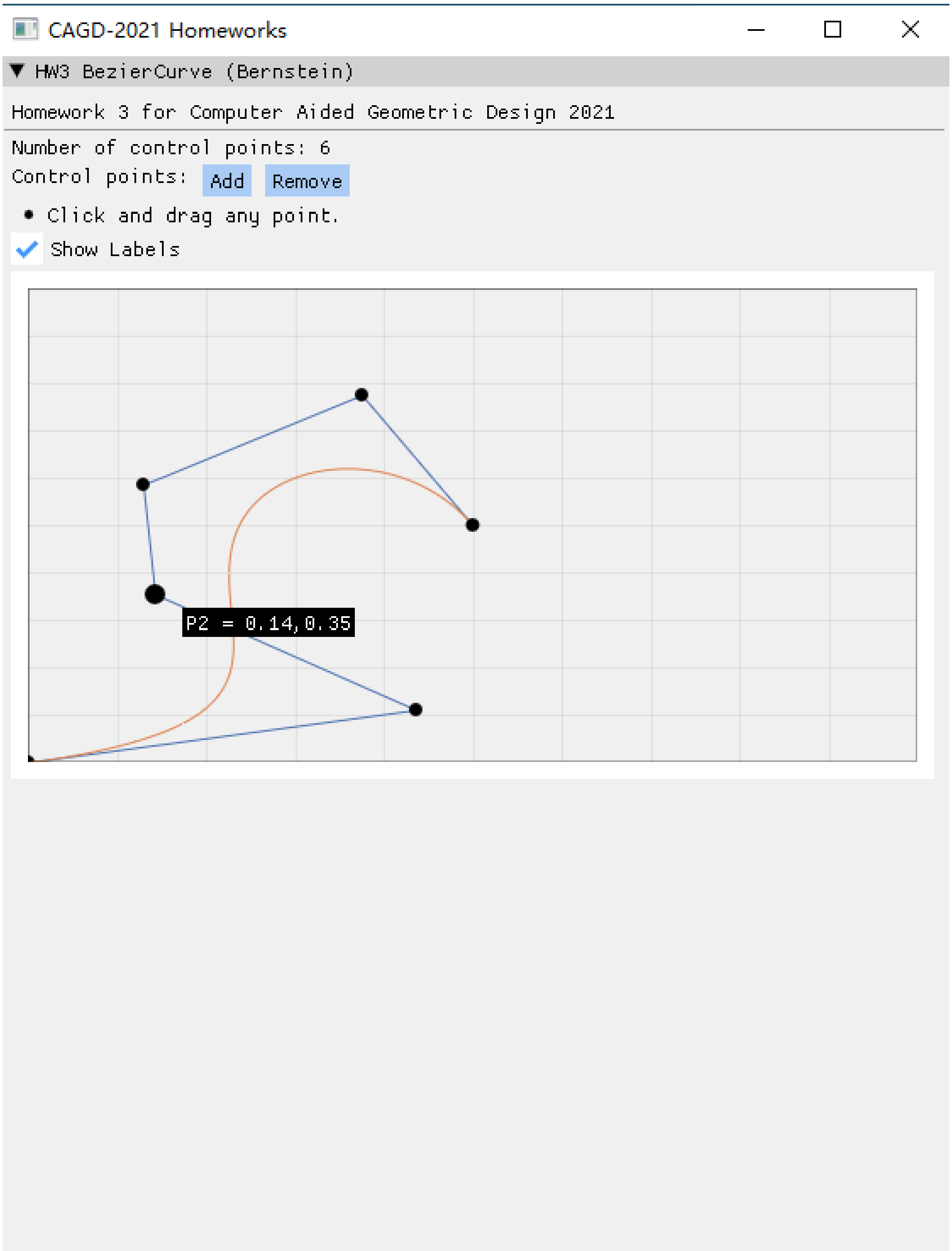
- CMake 3.5+
- Visual Studio 2019

CMake Configure & Build 即可。`hw-main` 为主程序。

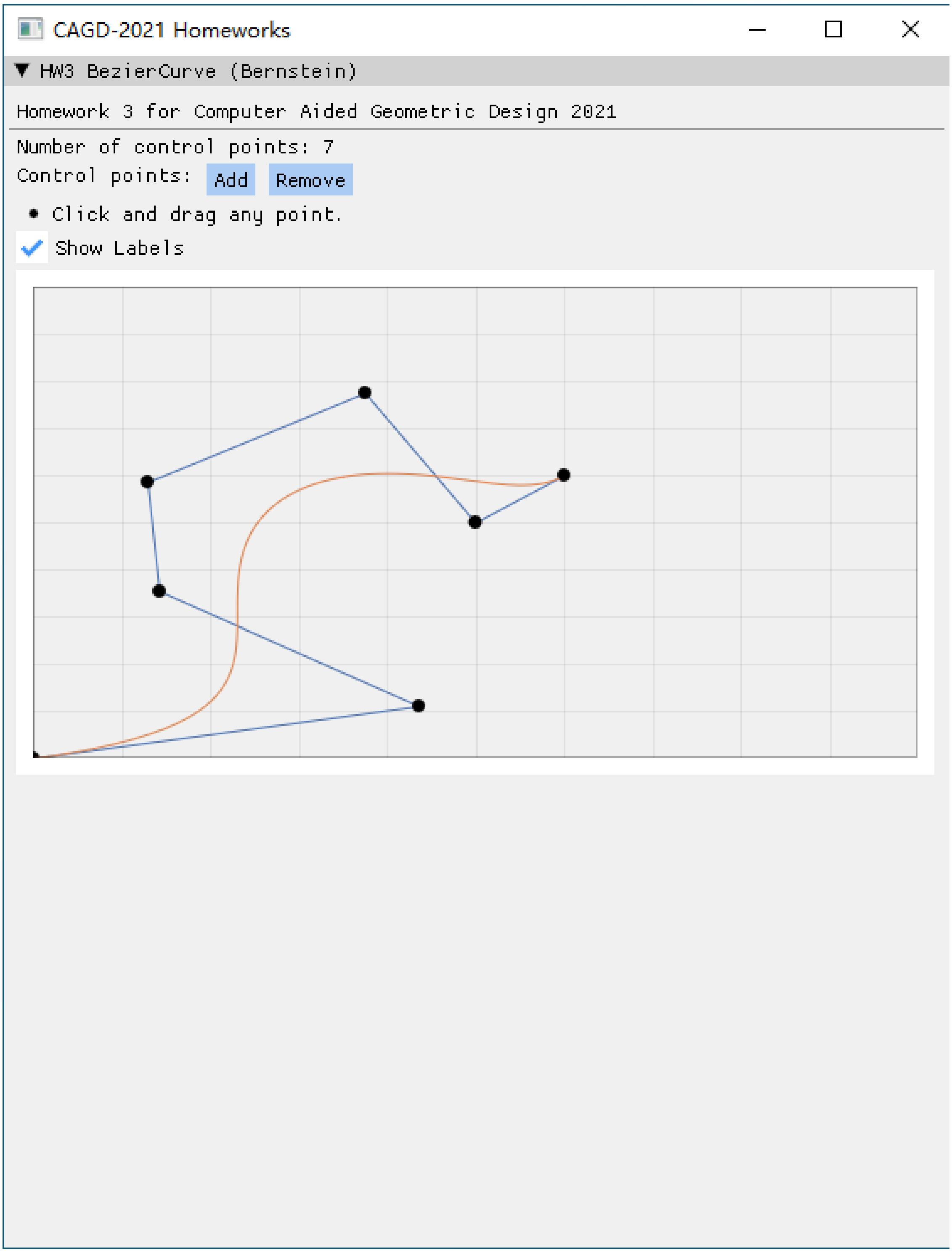
结果

下面是一些展示：

交互式拖动中


CAGD-2021 Homeworks
HW3 BezierCurve (Bernstein)
Homework 3 for Computer Aided Geometric Design 2021
Number of control points: 6
Control points: Add Remove
Click and drag any point.
Show Labels
P2 = 0.14,0.35

添加更多的控制点



问题

一条 Bézier 曲线的弧长不大于其控制多边形的周长

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{(\mathbf{c}_x'(t))^2+(\mathbf{c}_y'(t))^2}dt &= \int_0^1 ||(\sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i}\mathbf{P}_i)'||_2 dt \\
&= \int_0^1 ||(\sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i}\mathbf{P}_i)'||_2 dt \\
&= \int_0^1 ||\sum_{i=0}^n C_n^i t^{i-1} (1-t)^{n-i-1}(i-tn)\mathbf{P}_i||_2 dt \\
&= \int_0^1 ||\sum_{i=0}^n nC_{n-1}^{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - nC_{n-1}^{i} t^{i}(1-t)^{n-i-1}\mathbf{P}_i||_2 dt \\
&= \int_0^1 ||\sum_{i=0}^n nB_{i-1}^{(n-1)}(t) - nB_i^{(n-1)}(t)\mathbf{P}_i||_2 dt \\
&= \int_0^1 ||\sum_{i=0}^{n-1} nB_i^{(n-1)}(t)(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2 dt \quad (\text{上面左边换下标，然后整理项}) \\
&\le \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} ||nB_i^{(n-1)}(t)(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2 dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} nB_i^{(n-1)}(t)||(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2 dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ||(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2 \int_0^1 nB_i^{(n-1)}(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ||(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2 \int_0^1 nB_i^{(n-1)}(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ||(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2 nC_{n-1}^i \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ||(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2 nC_{n-1}^i \frac{i!(n-i-1)!}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ||(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)||_2
\end{aligned}
$$

证明完毕。

圆弧不能用 Bézier 曲线精确表示

比较显然。考虑圆（或者圆弧）的参数方程（$t \in [\theta_0, \theta_1]$）

$$
\begin{cases} x(t) = r\cos t + x_0 \\ y(t) = r\sin t + y_0 \end{cases}
$$

如果该圆弧可以被 Bezier 曲线表示，则有

$$
\begin{cases} r\cos t + x_0 = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t)\mathbf{P}_{ix} \\ r\sin t + y_0 = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t)\mathbf{P}_{iy} \end{cases}
$$

右边是关于 t 的有限次多项式，而左边由三角函数的泰勒展开，我们知道三角函数不能被有限项多项式表示（否则到某项之后就为 0 了），所以圆弧不能用 Bezier 曲线精确表示。

平面 n 次 Bézier 曲线及其控制顶点首末顶点与原点所围成的区域的面积

用格林公式转换为线积分然后算就行，TODO