CAGD 作业 9

刘紫檀 SA21229063

问题一

将单位球面用一张双 2 次有理 Bezier 曲面来表示，并绘制出来。

分析

单位圆的方程 $x^2+y^2+z^2=1$，记 $r^2=x^2+y^2$ 我们有 $r^2+z^2=1$。利用单位圆的参数化我们可以得到

$$
\begin{cases}
r(u) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\
z(u) = \dfrac{2u}{1+u^2}
\end{cases}
$$

用有理二次样条的方式表达如下

同时，我们对 $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow (x/r)^2+(y/r)^2=1$ 参数化，得到

$$
\begin{cases}
x(v) = r\dfrac{1-v^2}{1+v^2} \\
y(v) = r\dfrac{2v}{1+v^2}
\end{cases}
$$

那么，我们可以得到参数表示

$$
\begin{cases}
x(u,v) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}\dfrac{1-v^2}{1+v^2} & = \dfrac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \\
y(u,v) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}\dfrac{2v}{1+v^2} & = \dfrac{2v(1-u^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \\
z(u,v) = \dfrac{2u}{1+u^2} & = \dfrac{2u(1+v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}
\end{cases}
$$

这里有两种做法，一种是用待定系数，因为双 2 次有理 Bezier 曲面 9 个的基函数可以写出来，然后线性组合去拼就可以；另一种办法是用旋转曲面的构造方法。

设方程为

$$
\vec{f}(u,v) = \sum_{i,j} \vec{p}_{ij} B_i(u) B_j(v)
$$

则待定系数解得的系数如下：

> 待定系数的计算参见 `calc_control_points` 函数。

$$
p_{00}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} p_{01}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} p_{02}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}
$$
$$
p_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} p_{11}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} p_{12}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\2\end{pmatrix}
$$
$$
p_{20}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix} p_{21}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix} p_{22}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\\4\end{pmatrix}
$$

对偶曲面

做换元

$$
t=\frac{t_{\text{new}}}{2t_{\text{new}}-1}
$$

这样一波操作下来，我们发现 t_{new} 从 $[0,1]$ 跑的时候，正好能跑到 t 取上面那两段。

观察到

$$
1-t=\frac{t_{\text{new}}-1}{2t_{\text{new}}-1}
$$
$$
B_0^{(2)}(t)=\left(\frac{t_{\text{new}}-1}{2t_{\text{new}}-1}\right)^2
$$
$$
B_1^{(2)}(t)=\frac{(2t_{\text{new}})(t_{\text{new}}-1)}{(2t_{\text{new}}-1)^2}
$$
$$
B_2^{(2)}(t)=\left(\frac{t_{\text{new}}}{2t_{\text{new}}-1}\right)^2
$$

所以下面的式子带入后的分母可以互相约去，而分子的效果就是让 $B_1^{(2)}(t)$ 的符号颠倒。

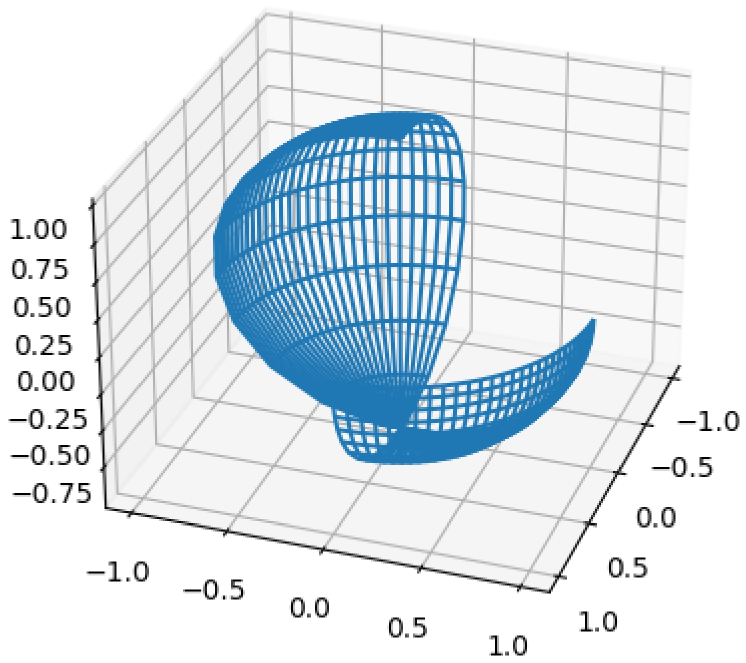
$$
\frac{\sum_{ij}\begin{pmatrix}p_{ij_x}\\p_{ij_y}\\p_{ij_z}\end{pmatrix}B_i^{(2)}(\frac{u}{2u-1})B_j^{(2)}(\frac{v}{2v-1})}{\sum_{ij}p_{ij_w}B_i^{(2)}(\frac{u}{2u-1})B_j^{(2)}(\frac{v}{2v-1})}
$$

而这个符号的变化我们可以放到控制点中去。

但是，对偶不是这么简单的。这个曲面其实是 X-Z 中的 1/4 弧和 X-Y 中的 1/4 弧张成的，我们其实想要的是 1/2 弧和 X-Y 中的 3/4 弧。

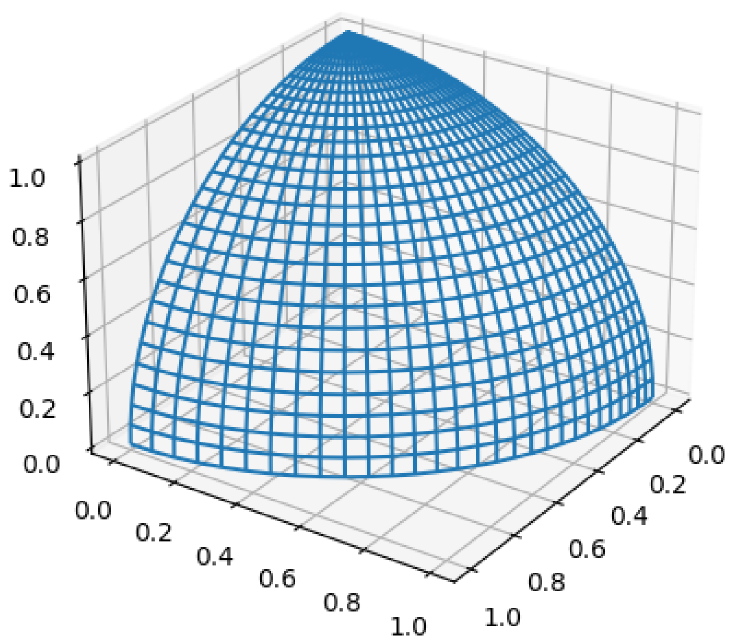
这个就要弄回原来的参数域想一个新的映射了，很可能没有这种系数直接颠倒就会成的好事。

> 展示一个颠倒 $p_{1j},\forall j$ 的全部系数的图



结果展示

程序是用 Python 3.8 + numpy + matplotlib 写的。待定系数计算控制点的程序也在其中。



> 构造 8 个 patch 就可以覆盖全部，或者用他和上面展示的 patch 作为一组 patch，共两组的话可以覆盖全部。

问题二

将椭球面 $3x^2+2y^2+z^2=1$ 用一张双 3 次有理 Bezier 曲面表示，并绘制出来。

分析

从椭球面的参数表示出发

$$\vec{f}(u,v)=(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2u(1-u^2)}{(1+u^2)(1+v^2)},\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4uv}{(1+u^2)(1+v^2)},\frac{(1+u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)})$$

考虑开花形式

$$F(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3)$$

> 找到开花形式的替换公式，带入就可以得到 $F(0,0,0;0,0,0)$ 到 $F(1,1,1;1,1,1)$ 的各个控制点。u,v 组内可以轮换（是对称的），但是组间显然不可以。

> TODO

问题三

某二次 Bezier 三角形有顶点参数坐标 $a=(0,0),b=(1,0),c=(0.5,1)$ 和以下控制点

$$F(a,a)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} F(a,b)=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} F(a,c)=\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$$
$$F(b,b)=\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix} F(b,c)=\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix} F(c,c)=\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$$

问 $p_1=(0.25,0.5),p_2=(0.3,0.75),p_3=(0.5,0.5)$ 中，哪个参数在三角形外？对于在三角形内的参数，用 de Casteljau 算法计算曲面 F(p, p) 在该参数处的坐标。

分析求解

容易知道 p_1 在三角形的边上， p_2 在三角形外，p_3 在三角形内。

首先计算 p_3 的重心坐标。列方程解后易得

$$p_3=0.25a+0.25b+0.5c$$

所以，

$$\begin{aligned}
F(a,p_3) &= 0.25F(a,a) + 0.25F(a,b) + 0.5F(a,c) \\
&= 0.25\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2.5\\-0.5\\4\end{pmatrix} \\
F(b,p_3) &= 0.25F(b,a) + 0.25F(b,b) + 0.5F(b,c) \\
&= 0.25\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}6\\-0.5\\4\end{pmatrix} \\
F(c,p_3) &= 0.25F(c,a) + 0.25F(c,b) + 0.5F(c,c) \\
&= 0.25\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}5\\1.5\\2.5\end{pmatrix} \\
F(p_3,p_3) &= F(0.25a + 0.25b + 0.5c, 0.25a + 0.25b + 0.5c) \\
&= 0.25F(a,p_3) + 0.25F(b,p_3) + 0.5F(c,p_3) \\
&= \begin{pmatrix}4.625\\0.5\\3.25\end{pmatrix}
\end{aligned}$$