CAGD 作业 1

刘紫檀 SA21229063

原理

记插值点为 $(p_0, q_0), (p_1, q_1), \cdots (p_{n-1}, q_{n-1})$ 。

使用多项式函数插值

设用于插值的多项式函数为 $f(x) = \sum_i a_i x^i$，则对于 n 个点的插值问题，一般情况下需要 $n-1$ 次多项式。

由此，我们得到如下的线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 p_0 + a_2 p_0^2 + \ldots + a_{n-1} p_0^{n-1} = q_0 \\ a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_1^2 + \ldots + a_{n-1} p_1^{n-1} = q_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-1}^2 + \ldots + a_{n-1} p_{n-1}^{n-1} = q_{n-1} \end{cases}$$

整理成矩阵形式并求解即可。

使用 RBF 函数插值

RBF 基函数即 $\phi(\|x - x_i\|)$ 形式的函数。此处，我们取

$$\phi(r) = \frac{1}{r^2 + d}$$

作为我们的 RBF 基函数。

由

$$f(p_i) = b_0 + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \times \frac{1}{\|p_i - p_j\|^2 + d} \qquad (i = 0, \ldots, n-1)$$

得到如下的线性方程组

$$\begin{cases} b_0 + \sum_i b_i \times \frac{1}{\|p_0 - p_i\|^2 + d} = q_0 \\ b_0 + \sum_i b_i \times \frac{1}{\|p_1 - p_i\|^2 + d} = q_1 \\ \vdots \\ b_0 + \sum_i b_i \times \frac{1}{\|p_{n-1} - p_i\|^2 + d} = q_{n-1} \end{cases}$$

我们提前取好 b_0 和 d 的值，即可求解各个插值系数 b_i。

优化多出来的系数

对于 RBF 方法， 其拟合中多出来一些自由的参数，可以供我们选择。我们有几种思路来考虑这个问题：

最小二乘确定 b_0 或低次多项式

因为 RBF 在远距离时影响衰减到 0，所以在较远的距离函数的值将完全由 b_0 或某个低次多项式决定。

这个时候，一个比较自然的想法就是，先使用最小二乘法确定 b_0 或某个低次多项式使得前面的项逼近原函数，再使用 RBF 的各项来确保插值点上的值准确。这样出来的函数在比较远的距离也有比较良好的性质，如果低次多项式的次数选择得当的话。

具体地说，我们记拟合函数的形式为

$$f(x) = P_m(x) + \sum_j b_j \phi(\|x - p_j\|)$$

且第一步时我们使用最小二乘法优化 $P(x)$。如果设

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

那么即为要求 $\sum \|P_m(p_i) - q_i\|^2$ 最小的 a_i。这只需要解方程

$$\mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{K}^T \mathbf{q}$$

即可，其中 K 为

$$\begin{pmatrix} 1 & p_0 & p_0^2 & \cdots & p_0^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & p_{n-1} & p_{n-1}^2 & \cdots & p_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

对于仅有 b_0 的情形，最小二乘问题的解即为将 b_0 设为 $\mathbf{q}$ 的均值。

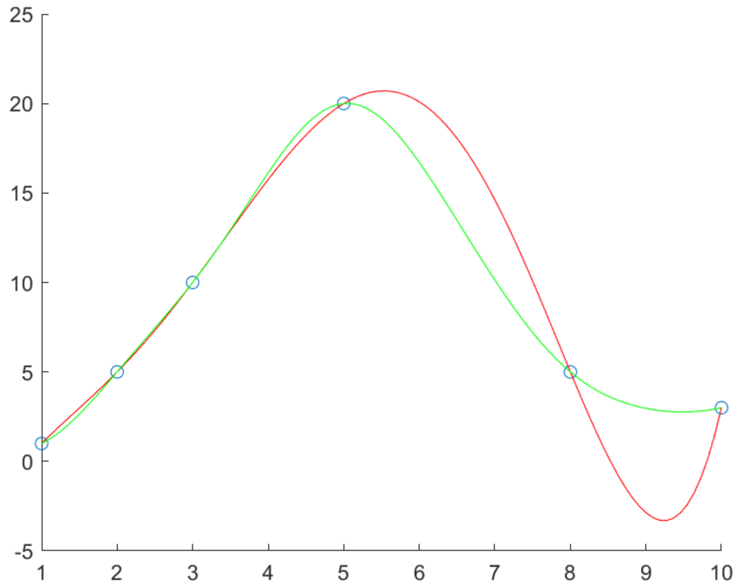
结果

两种方法的比较

首先是插值点如下表所示的插值（$d = 5, b_0 = 10$）

	(p_0, q_0)	(p_1, q_1)	(p_2, q_2)	(p_3, q_3)	(p_4, q_4)	(p_5, q_5)
p	1	2	3	5	8	10
q	1	5	10	20	5	3

运行 `testInterpolate.m` 可以得到如下结果

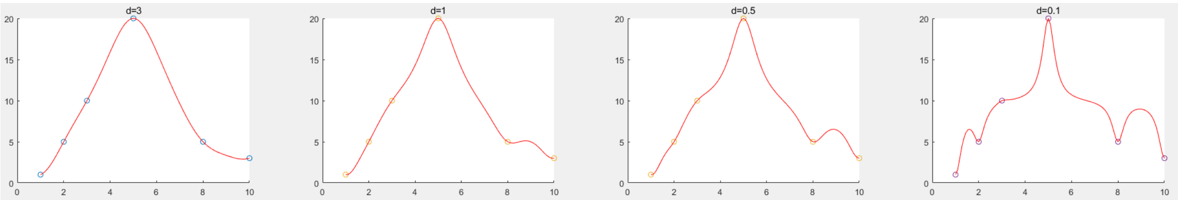


其中绿色为 RBF 插值，红色为多项式插值。

在这个例子里面，RBF 倾向于比较“平滑”的结果，其振荡较小。

RBF 基函数中 d 的影响

使用和前面的实验中同样的插值点，我们进行如下实验（$b_0 = 10$）



实验代码可以参见 `testRBFInterpolate.m`。我们可以看出，d 变小，插值函数 “衰减” 到 b_0 的趋势就越明显。

如果想要比较平滑的结果，那么 d 就需要取的和 $p_{i+1} - p_i$ 在一个数量级才行。

图形化选点

利用 `implot` 函数，我们可以进行交互式的插值点选择，详见代码 `testInterpolateGui.m`。

下面是一些展示：

展示一

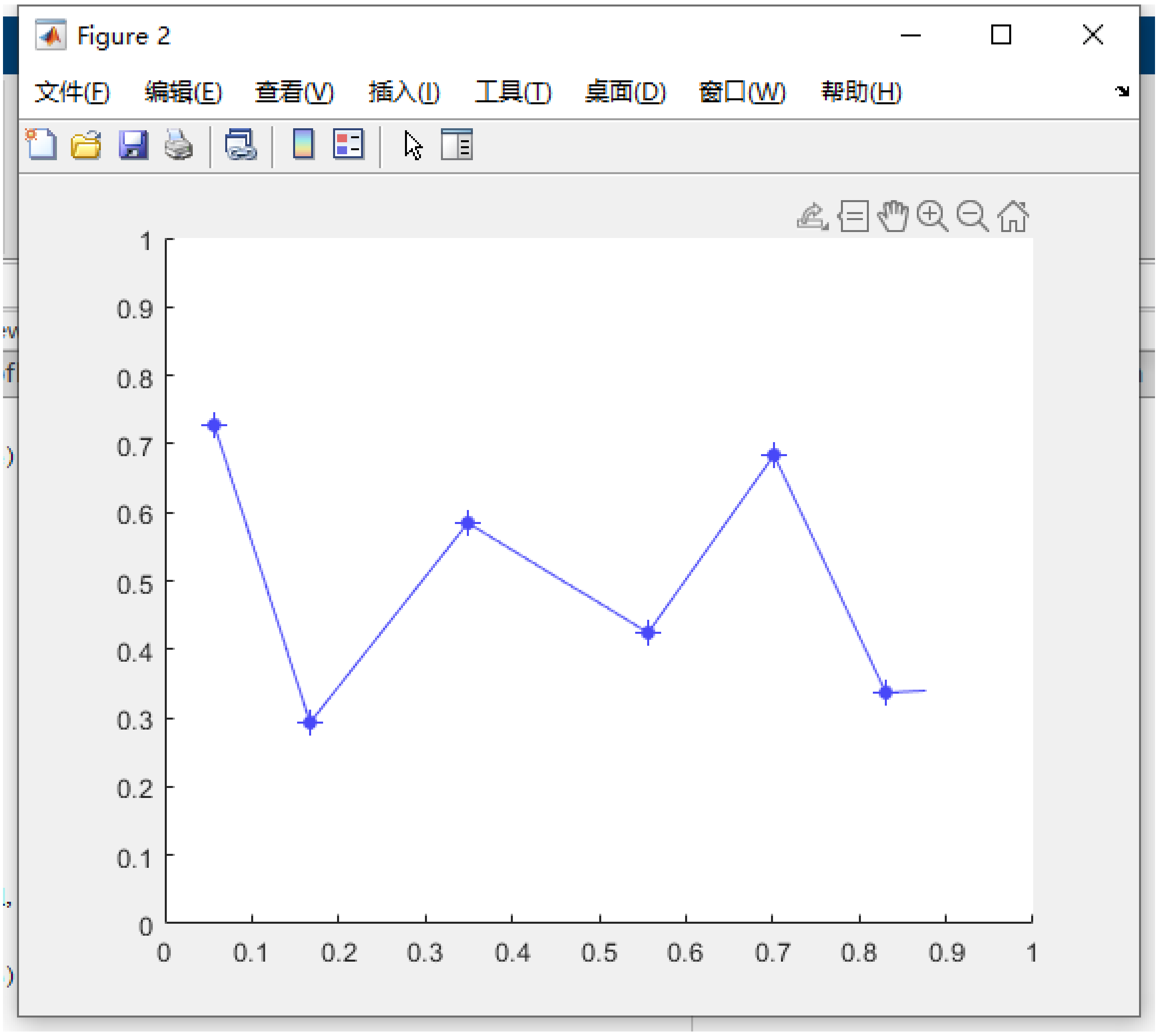


Figure 2
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

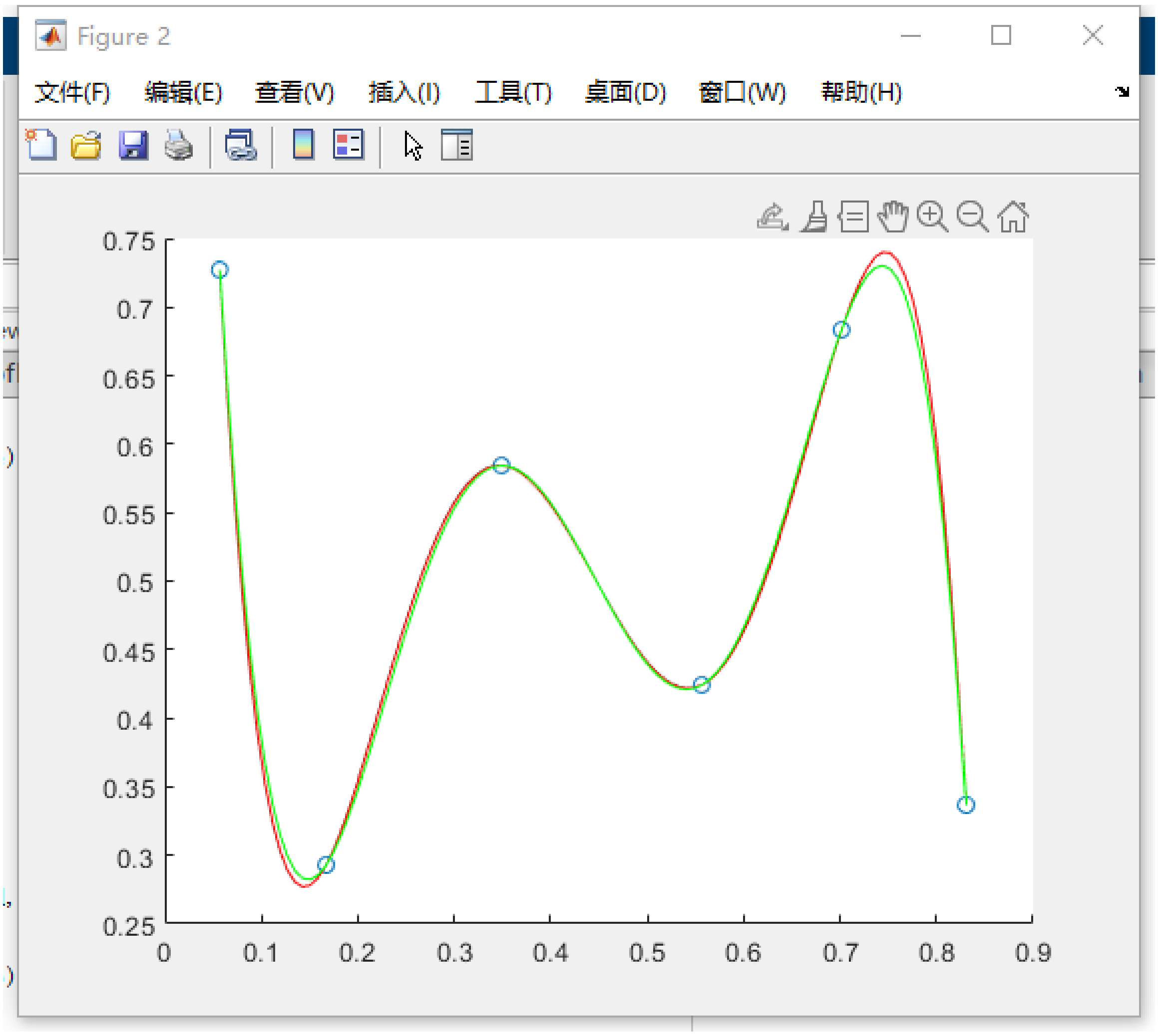


Figure 2
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9

展示二

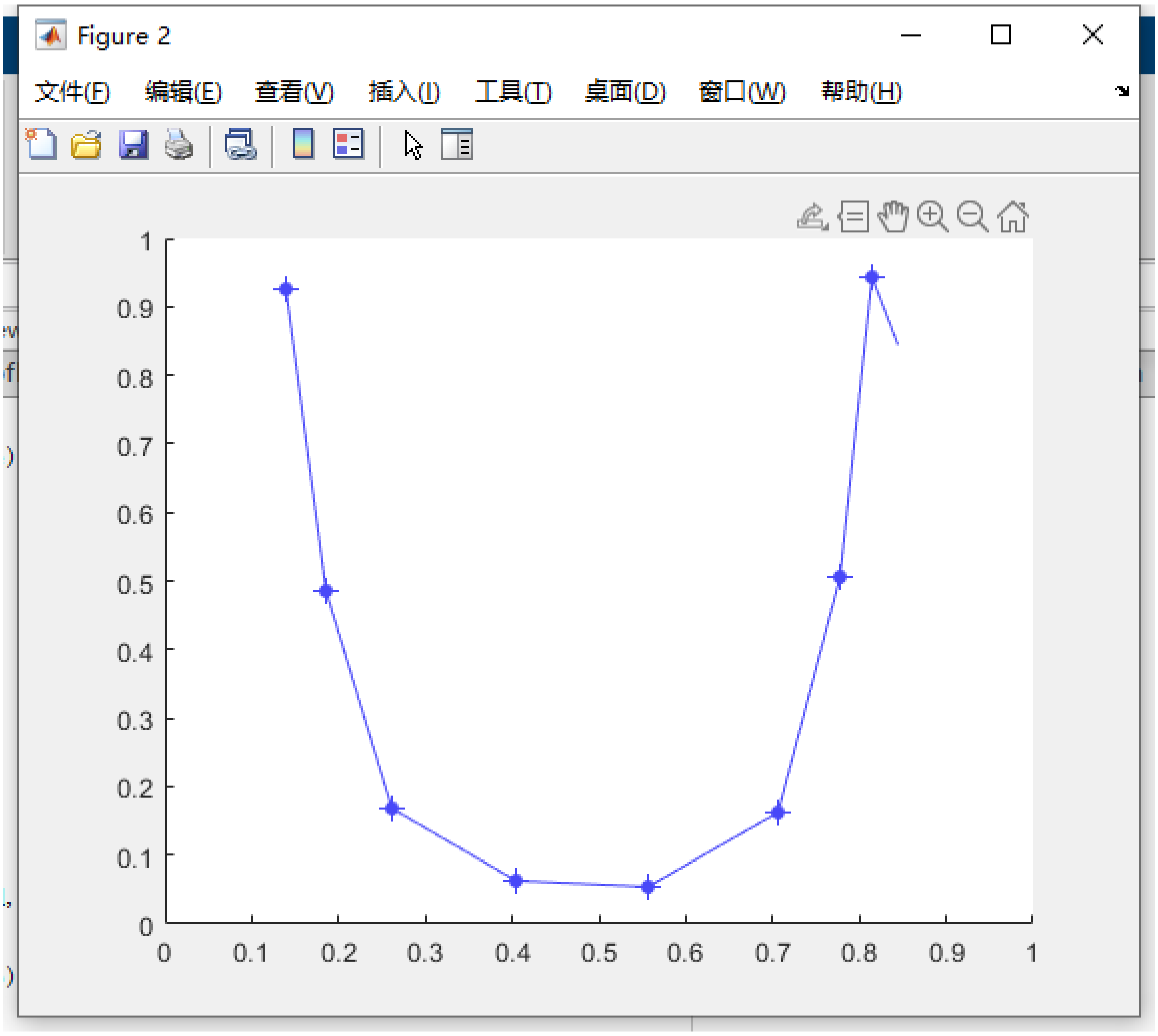
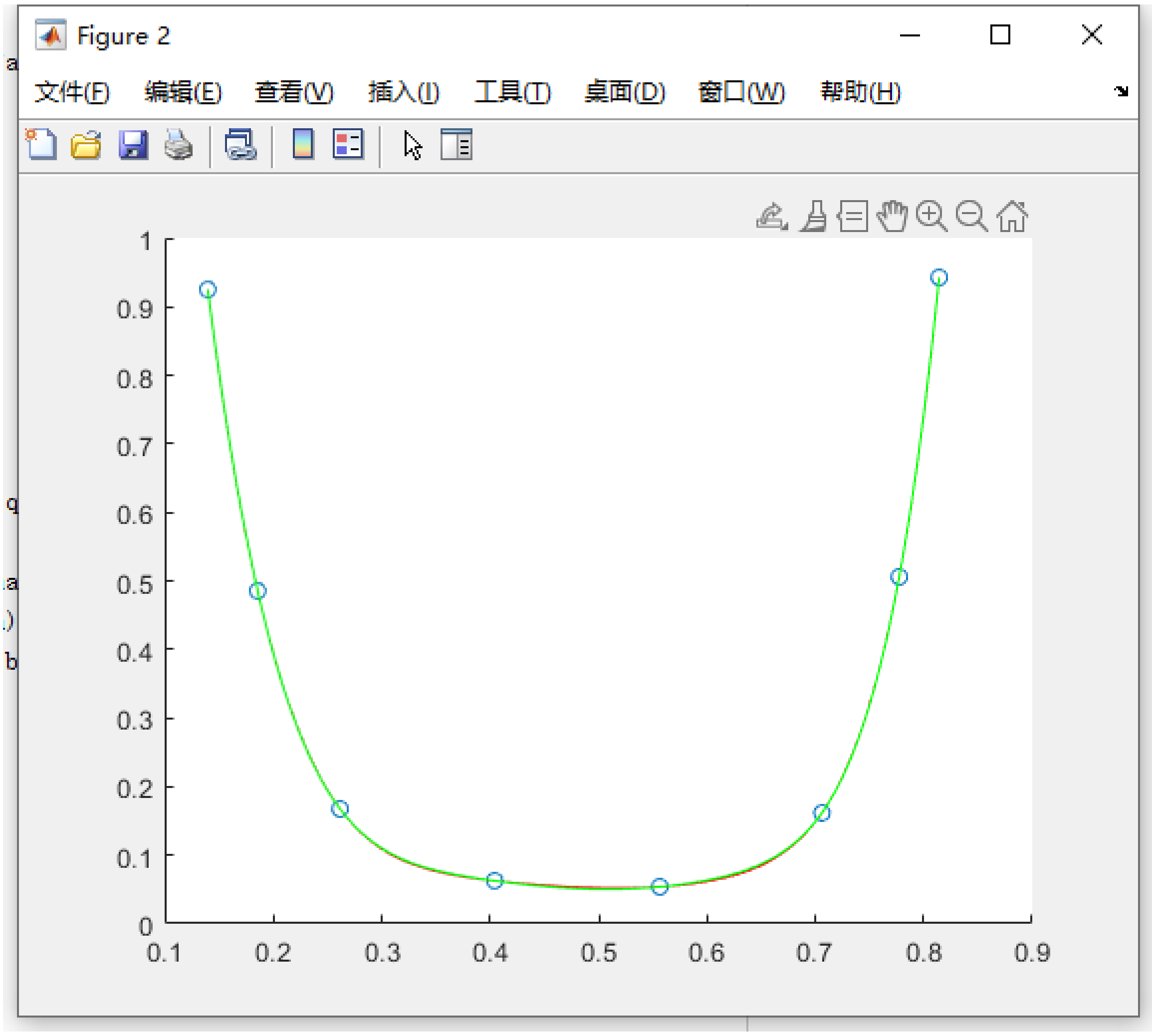


Figure 2
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1



思考

- 变量比方程多，如何增加约束条件？
  - 要根据我们对待插值函数本身性质的认识来增加。比如在 RBF 中 d 的选取，我们就要根据我们对函数局部的振荡性质的认识，来选择比较贴合函数本身的 d。
- 常数项为低次多项式时，如何确定约束条件？
  - 可以用前述的最小二乘方法来确定约束条件。