《计算机辅助几何设计》作业

ID号: 46　　姓名: 刘紫檀

2021 年 10 月 17 日

1. 证明：以下曲线是平面曲线，

$$c(t) = (\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t})$$

只要计算密切平面的法向量即可。

$$\begin{aligned} c'(t) &= (1 - \frac{1}{t^2}, 1, -\frac{1}{t^2}) \\ c''(t) &= (\frac{2}{t^3}, 0, \frac{2}{t^3}) \end{aligned}$$

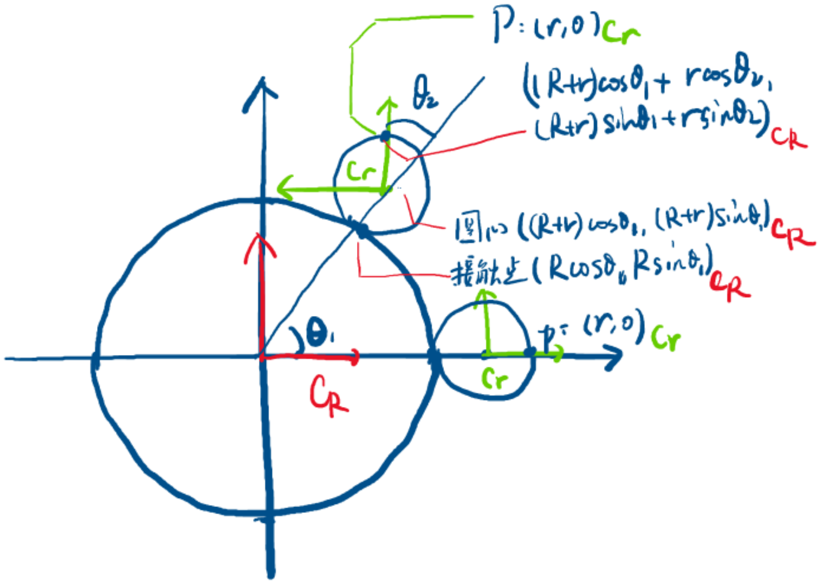
法向量为 $\alpha(t) = c'(t) \times c''(t)/(\|c'(t)\|\|c''(t)\|)$，我们有

$$\begin{aligned} \|c'(t)\|\|c''(t)\|\alpha(t) &= c'(t) \times c''(t) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-t^{-2} & 1 & -t^{-2} \\ 2t^{-3} & 0 & 2t^{-3} \end{vmatrix} \\ &= (2t^{-3}, -2t^{-3}, -2t^{-3}) \end{aligned}$$

容易看出，法向量是不随 t 的改变而改变的。所以，所有的 t 共享同一个密切平面，则曲线为平面曲线。

2. 当半径为 r 的“动圆”沿着半径为 R 的“定圆”的外侧无滑动地滚动时，动圆圆周上的一定点 p 所描绘的点的轨迹，叫做外摆线。计算外摆线的参数曲线，并画出当 $r=1, R=3$ 时的曲线形状。

首先建立两个参考系 C_R 和 C_r，如图所示

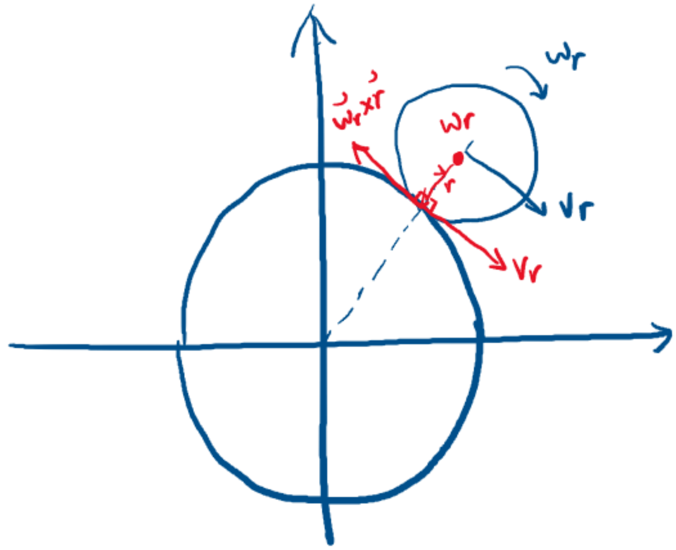


下面要找出 θ_1 和 θ_2 的关系。我们知道，所谓纯滚动，就是两圆的接触点在接触时没有相对运动。

为了方便，设小圆绕大圆滚动，则 C_r 相对 C_R 有 $\vec{w_r}$ 的转动，$\vec{v_r}$ 的平动。小圆与大圆的接触点相对 C_r 静止，其相对 C_R 的速度为 $\vec{w_r}$ 和 $\vec{v_r}$ 的合成，即 $\vec{w_r} \times \vec{r} + \vec{v_r}$，同时和其接触的大圆与小圆的接触点的速度在 C_R 中为 0，则有

$$\vec{w_r} \times \vec{r} + \vec{v_r} = 0$$

成立。我们知道，滚动时，v_r 一定平行于大圆的切线，否则之后两圆将分离或相交。这样，情形就只有下图所示的一种了：



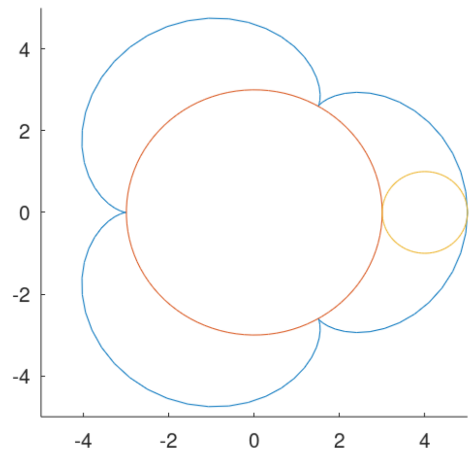
那么，我们就可以得到 $w_r r = v_r$（此处不带矢量符号表示模长），也就是说

$$\begin{aligned}(R+r)\frac{\partial\theta_1}{\partial t} &= r\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\\ \theta_1 &= \theta_2\frac{r}{R+r} \quad \text{(两边积分)}\end{aligned}$$

设 $\theta = \theta_1$，得到参数曲线如下：

$$\begin{cases} x(\theta) = (R+r)\cos\theta + r\cos(R\theta/r+\theta) \\ y(\theta) = (R+r)\sin\theta + r\sin(R\theta/r+\theta) \end{cases}$$

$R = 3, r = 1$ 时曲线形状如下（蓝色为曲线，红色和黄色分别为大圆和小圆）：



3. 渐屈线是曲线上密切圆圆心的轨迹。特别的，Frenet 标架为 $\{e_1(t), e_2(t)\}$ 的平面 Frenet 曲线 $c : D \to \mathbb{R}^2$ 的渐屈线可由以下参数曲线 $\eta : D \to \mathbb{R}^2$ 表示，

$$\eta(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} e_2(t)$$

编写程序画出椭圆的渐屈线及下图中标记点的密切圆（图略）。

首先由椭圆的参数方程计算椭圆的 Frenet 标架表示：

$$e_1(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = (-\frac{a \sin t}{\|c'(t)\|}, \frac{b \cos t}{\|c'(t)\|})$$

$$e_2(t) = R^{90\,\deg} e_1(t) = (-\frac{b \cos t}{\|c'(t)\|}, -\frac{a \sin t}{\|c'(t)\|})$$

计算曲率

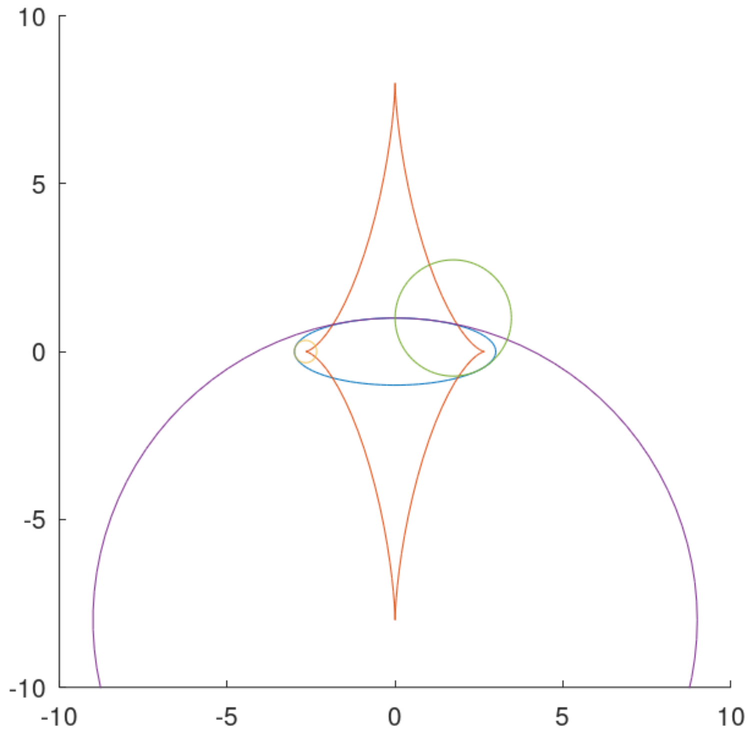
$$\kappa(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t)\|^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3}$$

则有

$$\eta(t) = (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} (-b \cos t, -a \sin t)$$

那么在 $c(t)$ 处的密切圆的圆心为 $\eta(t)$，半径为 $1/\kappa(t)$ 。

下面的图展示了 $a = 3, b = 1$ 的椭圆，其渐屈线和 t 在 $\pi/2, \pi, 11\pi/6$ 时的密切圆。


10
5
0
-5
-10
-10
-5
0
5
10