CAGD 作业 5

刘紫檀 SA21229063

题目

> 第二题要证明的结论似乎存在一些问题，所以没有做。

证明： 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 是任一被插值函数，$S(x)$ 是自然插值三次样条函数（端点条件为二阶导数为 0），则有

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \le \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

证明：因为

$$0 \le \int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx = \int_a^b f''(x)^2 dx - 2\int_a^b (f''(x) - S''(x))S''(x)dx - \int_a^b S''(x)^2 dx$$

中间这项其实可以分段拆出来（三次样条函数是分段 P^3 的，自然二阶导是线性函数，三阶导是常数）

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f''(x) - S''(x))S''(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f''(x) - S''(x))S''(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n [(f'(x) - S'(x))S''(x)]\Big|_{i-1}^{i} - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(x) - S'(x))S'''(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n [(f'(x) - S'(x))S''(x)]\Big|_{i-1}^{i} - \sum_{i=1}^n S_i''' \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(x) - S'(x))dx \\
&= \sum_{i=1}^n [(f'(x) - S'(x))S''(x)]\Big|_{i-1}^{i} - \sum_{i=1}^n S_i'''[f(x) - S(x)]\Big|_{i-1}^{i} \\
&= \sum_{i=1}^n [(f'(x) - S'(x))S''(x)]\Big|_{i-1}^{i} \quad (\because \forall i, f(x_i) = S(x_i)) \\
&= [(f'(x_n) - S'(x_n))S''(x_n)] - [(f'(x_0) - S'(x_0))S''(x_0)] \\
&= 0 \quad (\because \text{natural b.c.})
\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \le \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

成立。

实验

目标

构造交互式的 3 阶 Bezier 样条曲线绘制程序。

原理

3 阶 Bezier 样条曲线，即为一条参数曲线 $\mathbf{f}(t)$，其经过 $\mathbf{k_0}, \mathbf{k_1}, \ldots, \mathbf{k_n}$，且满足如下条件

- 任意的 $\mathbf{k_i}$ 到 $\mathbf{k_{i+1}}$ 间均为 3 阶 Bezier 曲线
- 曲线满足 C^2 连续性

我们设第 i $(i=0,\dots,n-1)$ 段 Bezier 曲线的控制点为 $\{p_j^{(i)}\}_{j=0}^3$（我们要求 C^0 连续，则 $p_3^{(i)}=p_0^{(i+1)}$），同时记第 i 段 Bezier 的局部参数化形式为 $\mathbf{y}_{(i)}(t)$，则有

$$f(t)=\mathbf{y}_{(i)}(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}) \quad t\in[t_i,t_{i+1}]$$

成立，其中我们约定 $\mathbf{x}(t_i)=\mathbf{k_i}$，$t_i<t_j$ 如果 $i<j$。

如此一来，我们一共有 $3n+1$ 个未知数，分别对应该样条曲线的所有控制点 $\{p_j^{(i)}\}_{j=0}^3$。

由 $\mathbf{x}(t_i)=\mathbf{k_i}$，我们有如下等式成立（共 $n+1$ 个）

$$\begin{aligned} p_0^{(i)}&=k_i \qquad i=0,\dots,n-1\\ p_3^{(n-1)}&=k_n \end{aligned}$$

由 C^1 连续，我们有如下等式成立（共 $n-1$ 个）

$$\frac{p_3^{(i-1)}-p_2^{(i-1)}}{t_i-t_{i-1}}=\frac{p_1^{(i)}-p_0^{(i)}}{t_{i+1}-t_i} \qquad i=1,\dots,n-1$$

由 C^2 连续，我们有如下等式成立（共 $n-1$ 个）

$$\frac{p_3^{(i-1)}-2p_2^{(i-1)}+p_1^{(i-1)}}{t_i-t_{i-1}}=\frac{p_2^{(i)}-2p_1^{(i)}+p_0^{(i)}}{t_{i+1}-t_i} \qquad i=1,\dots,n-1$$

然后再加上自然边界条件

$$\begin{aligned} x''(t_0)=0 &\iff p_2^{(0)}-2p_1^{(0)}+p_0^{(0)}=0\\ x''(t_n)=0 &\iff p_1^{(n-1)}-2p_2^{(n-1)}+p_3^{(n-1)}=0 \end{aligned}$$

就可以得到所有的控制点，进而画出曲线。控制点共有 $3n+1$ 个，需要 $(3n+1)\times\dim(\mathbf{k_i})$ 个方程。不过其实 p_x 和 p_y 所做变换完全相同，所以可以看成是对 $p=[p_x \quad p_y]$ 进行求解，然后再弄出来。

> 由于时间限制，只实现了自然边界条件和 Uniform 参数化。

框架介绍

本次实验我采用了 ImGui + glfw + ImPlot 来进行。代码采用 C++11 兼容的写法，使用 CMake 编译运行。

ImGui 是一个优秀的立即模式 GUI 库，配合 glfw 和 OpenGL backend 可以达到比较好的性能，也十分方便与已有的游戏引擎集成。

> 关于立即模式，可以搜索 immediate mode gui library vs retained mode gui library

如何编译运行

要求：

- CMake 3.5+
- Visual Studio 2019

CMake Configure & Build 即可。`hw-main` 为主程序。

结果

> 相比 HW3，增加了用 Ctrl 增加控制点的功能。

下面是一些展示：