CAGD 作业 6

刘紫檀 SA21229063

目标

进行 piecewise cubic 的 B 样条曲线交互式插值程序的编写。

原理

B 样条选用如下基函数：

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,k} = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1} + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}$$

此时，曲线可以表示成为如下形式

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) d_i \quad t \in \cap_i \operatorname{supp}\{N_{i,k}\}$$

其中 d_i 为第 i 个控制点（$i = 0, \ldots, n$）

de Boor 算法

展开上面的表达式，可以得到如下算法：

$$d_i^j = (1 - \alpha_i^j) d_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j d_i^{j-1}$$
$$\text{where } \alpha_i^j = \frac{t - t_i}{t_{i+k-j} - t_i} \text{ and } d_i^0 = d_i$$

用上面的递推式求得 d_r^{k-1} 即为 $x(t)$ 的值。

分片 C^2 连续插值

给定 $\{d_i\}_{i=0}^{n}$ ，我们需要获得如下问题的解：

$$x(s_i) = d_i \qquad i = 0, \ldots, n$$
$$x(s) \in C^2 \qquad s \in [s_0, s_n]$$

且我们希望我们的函数 $x(t)$ 为 B 样条。

由于 k 阶 B 样条为 C^{k-2} 阶连续，为了达到 C^2 连续，我们需要让 $k = 4$。

同时，我们希望 $x(s_0) = d_0$ 且 $x(s_n) = d_n$，但是我们知道对于一般的 B 样条来说，t 的定义域位于 $[t_k, t_{k+n}]$，这样我们取节点函数为 $(s_0, \ldots, s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots, s_n)$，其中 s_0 和 s_n 分别重复 k 次，这样就可以达到 $x(s_0) = d_0$ 和 $x(s_n) = d_n$ 且 $t \in [s_0, s_n]$ 都有 C^{k-2} 连续的效果了。

此时，我们对于 $k = 4$ 的问题，有如下方程成立：

$$\begin{cases} x(s_0) = d_0 \\ x(s_i) = N_{i,4}(s_i) d_i + N_{i+1,4}(s_i) d_{i+1} + N_{i+2,4}(s_i) d_{i+2} \\ x(s_n) = d_{n+2} \end{cases}$$

> 因为 $N_{i-1}(s_i)d_i=0$，所以只有三项

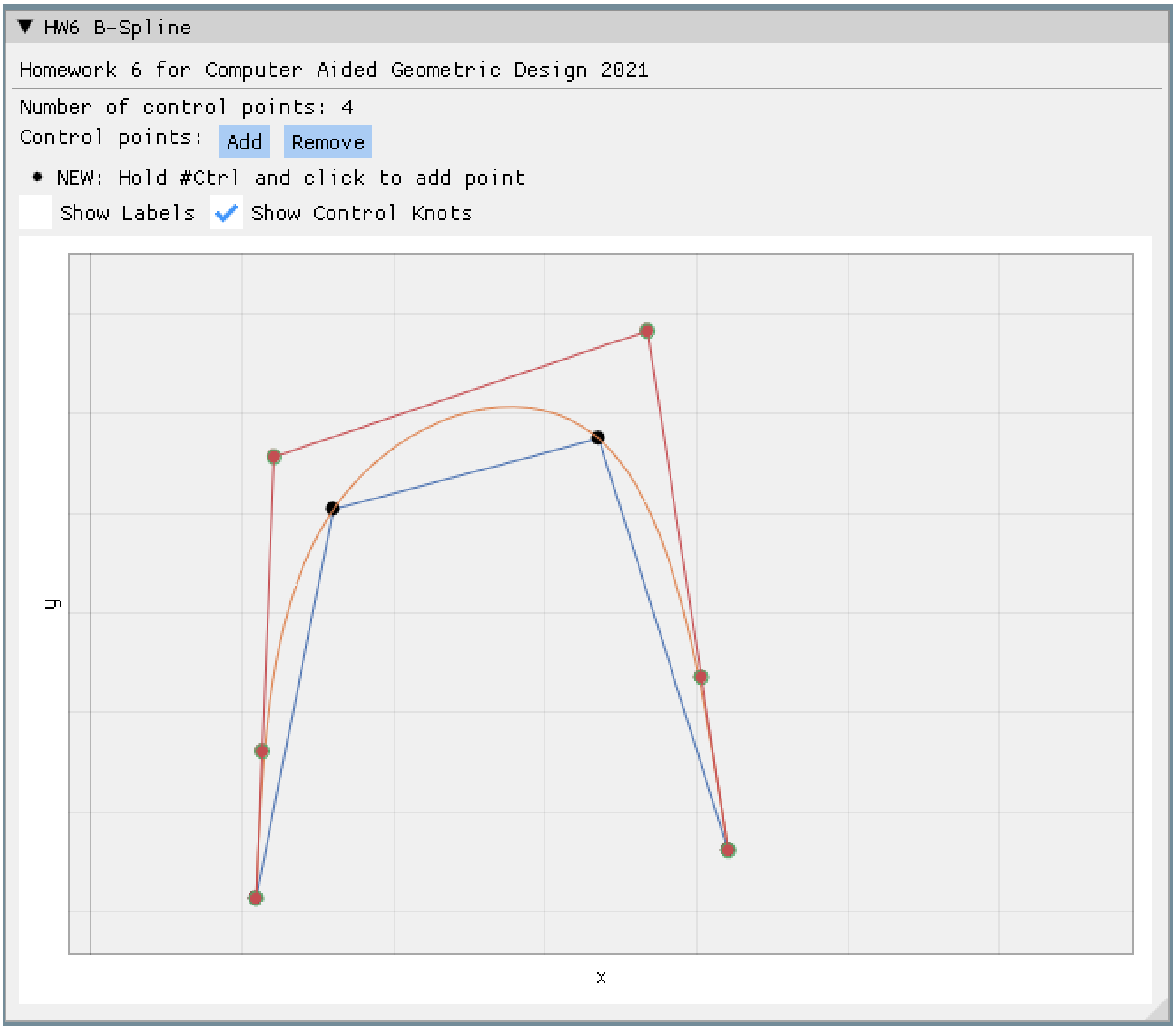
解此方程即可。

$N_{i,4}$ 计算如下：

$$
\begin{aligned}
N_{i,2} &= \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}N_{i,1}+\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}N_{i+1,1} \\
&= \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}N_{i,1}+\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}N_{i+1,1} \\
&= \begin{cases}
\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} & t\in[t_i,t_{i+1}] \\
\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}} & t\in[t_{i+1},t_{i+2}] \\
0 & \text{otherwise}
\end{cases} \\
N_{i,3} &= \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}N_{i,2}+\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}N_{i+1,2} \\
&= \begin{cases}
\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} & t\in[t_i,t_{i+1}] \\
\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}+\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} & t\in[t_{i+1},t_{i+2}] \\
\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}} & t\in[t_{i+2},t_{i+3}] \\
0 & \text{otherwise}
\end{cases} \\
N_{i,4} &= \frac{t-t_i}{t_{i+3}-t_i}N_{i,3}+\frac{t_{i+4}-t}{t_{i+4}-t_{i+1}}N_{i+1,3} \\
&= \text{太长了，就不写了吧}
\end{aligned}
$$

> 写完才意识到其实这个可以在程序里面动态求，没必要全展开再编程，也未必快

结果展示



PITFALL

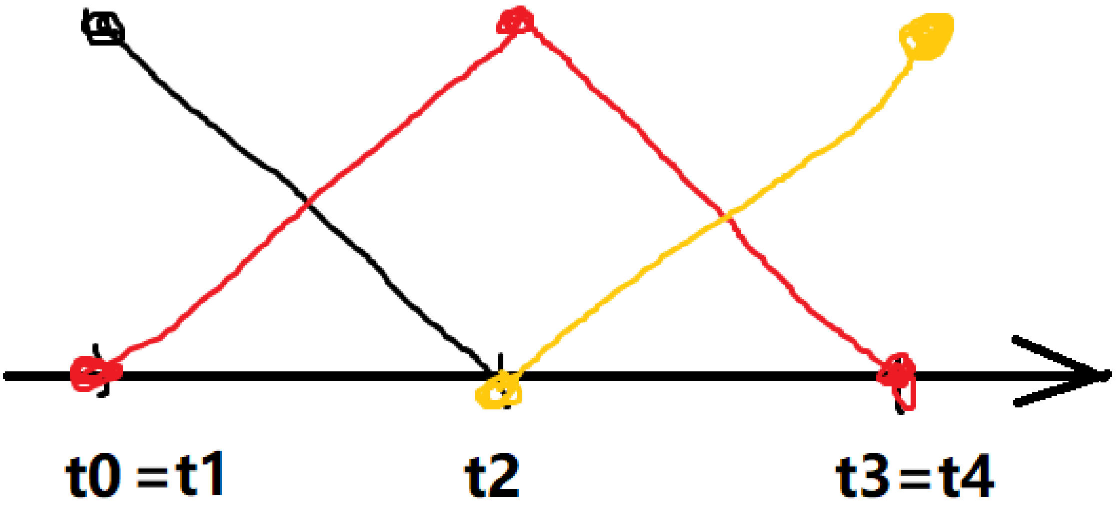
实现的时候一个坑是这样：

```
double computeN(const Eigen::VectorXd& tKnots, double t, int i, int k) {
  if (k == 1) {
    if (tKnots(i) <= t && tKnots(i+1) > t) {
      return 1.0;
    } else {
      return 0.0;
    }
  } else {
    double left = 0.0;
    left = tKnots(i + k - 1) - tKnots(i) == 0.0 ? 0.0 : (t - tKnots(i)) /
(tKnots(i + k - 1) - tKnots(i)) * computeN(tKnots, t, i, k - 1);

    double right = 0.0;
    right = tKnots(i + k) - tKnots(i + 1) == 0.0 ? 0.0 : (tKnots(i + k) - t) /
(tKnots(i + k) - tKnots(i + 1)) * computeN(tKnots, t, i + 1, k - 1);

    return left + right;
  }
}
```

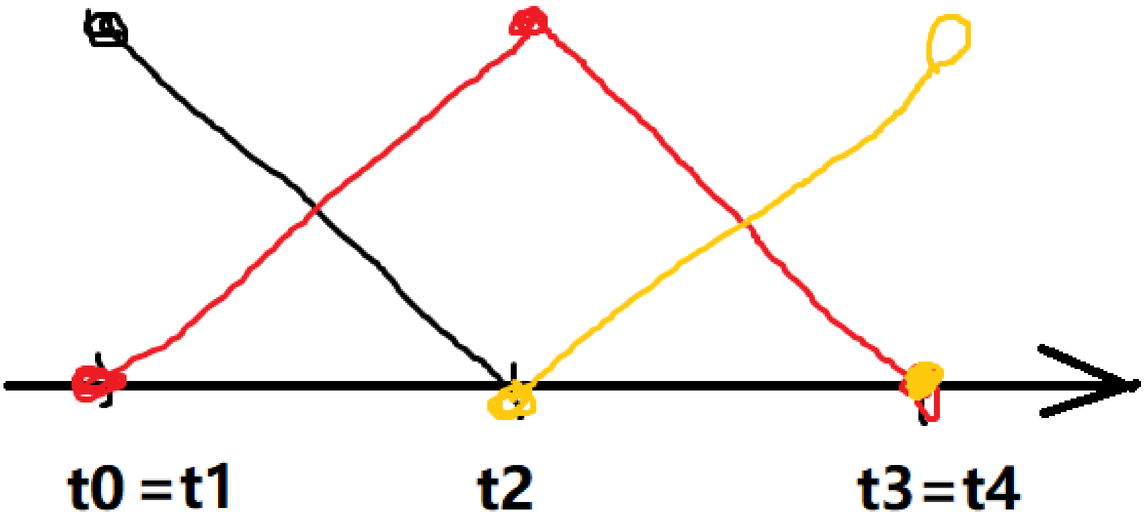
这个方案在多重边界节点的情况下是有问题的。

先考虑一个基础问题，$N_{i,1}$ 的区间问题，如果取 $[t_i, t_{i+1}]$ 为 1 的话，$N_{i,2}$ 在 $t = t_{i+1}$ 的时候的值会有一个跳变（如果是均匀网格且 $h = 1$ 的话，那就是 2，而左右的极限都是 1），所以 $[t_i, t_{i+1}]$ 不是很合适。不过，可以考虑用 $[t_i, t_{i+1})$，如上面的做法。

但是，这个做法又有什么问题呢？如果现在是 $k = 2, n = 2$ 的一个多重节点方案的话，那就是有 $t_0 = t_1 < t_2 < t_3 = t_4$，此时我们希望基函数是如下所示



而不是



（这俩的区别在于黄色的基函数在 t_3 的值为 1 还是为 0）

显然，后者是没法正确采样到 $t = t_3$ 处的节点的值的。$t_3 \to t_4$ 的时候 $N_{2,2}$ 的第二项被粗暴的处理成了 0（如上面代码），在这里就会出现问题。那么，应该怎么办才好呢？

一个启发是，我们挑一个 C^0 连续的 N 当起点往上定义，因为 C^0，如果我们有一半区间（如 $[t_0, t_1]$）被挤到了测度为 0 的一个点的话，我们可以用另一半来"恢复"这一点的值。这样就可以得到处处有良好定义的 C^0 的 B 样条基函数了。也就是这样：

```
inline double computeN(
  const Eigen::VectorXd& tKnots,
  double t,
  int i,
  int k
```

```
  ) {
    double res;
    if (k == 2) {
      if (tKnots(i) <= t && tKnots(i+1) >= t && tKnots(i) != tKnots(i+1)) {
        res = (t - tKnots(i)) / (tKnots(i+1) - tKnots(i));
      } else if (tKnots(i+1) <= t && tKnots(i+2) >= t && tKnots(i+1) !=
tKnots(i+2)) {
        res = (tKnots(i+2) - t) / (tKnots(i+2) - tKnots(i+1));
      } else {
        res = 0;
      }
      return res;
    }

    double leftTerm = 0;
    {
      assert(i + k - 1 < tKnots.size());
      double dividend = tKnots(i+k-1) - tKnots(i);
      if (dividend == 0) {
        leftTerm = 0;
      } else {
        double Nres = computeN(tKnots, t, i, k-1);
        leftTerm = (Nres == 0) ? 0 : (t - tKnots(i)) / dividend * Nres;
      }
    }

    double rightTerm = 0;
    {
      assert(i + k < tKnots.size());
      double dividend = tKnots(i+k) - tKnots(i+1);
      if (dividend == 0) {
        rightTerm = 0;
      } else {
        double Nres = computeN(tKnots, t, i+1, k-1);
        rightTerm = (Nres == 0) ? 0 : (tKnots(i+k) - t) / dividend * Nres;
      }
    }

    return leftTerm + rightTerm;
  }
```

那么我们用这个 Scheme 就可以修好 $N_{i,2}$ 的情况，但是可以证明对于 $N_{i,4}$ 的情况也好用。原因如下：

考虑一个最简单的 $k=4$ 的多重边界点的情况，即 $t_0=t_1=t_2=t_3<t_4<t_5=t_6=t_7=t_8$，此时当然会遇到比如计算 $N_{0,2}$ 的情况，但是这个值不重要，因为比如求取 $N_{1,4}$ 的时候需要 $N_{1,3}$ 需要 $N_{1,2}$，但是此时 $N_{1,2}$ 前面的系数是 $C/0$ 形式，会被赋值为 0，所以有影响的是诸如 $N_{2,3}$，最后是从 $N_{2,2}$ 来的值，这样根据 C^0 补出来的那个点 t_3 的函数值就是正确的，所以这个求取 N 的方法没问题。

鉴别这种问题的最好方法就是调一个很低的采样数，然后观察恰好等于端点的值是否能正确求解。