Sistemas de Transmisión

Luis David Emiliani y Carlos Eduardo Peñuela

10 de junio de 2011

Índice general

1.1. Introducción

Los dispositivos empleados en la transferencia de información conforman lo que se denomina un Sistema de Comunicaciones. En su forma más simple, se compone de tres elementos: transmisor, canal de comunicaciones y receptor.

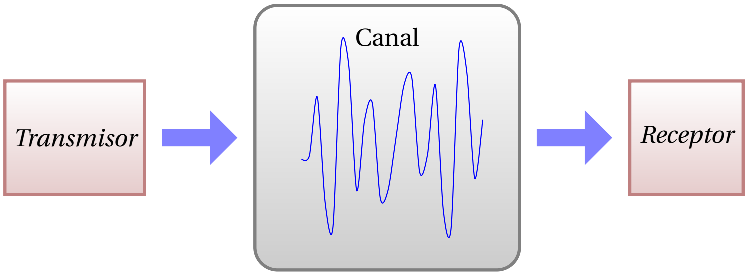

Figura 1.1: Sistema genérico de comunicaciones

El equipo transmisor transforma la información del emisor, de forma que pueda ser envíada por el canal de comunicaciones. Esta información puede ser análoga o digital. En el caso de sistémas analógicos (de información analógica) en el proceso de adaptación se emplea la señal de información para alterar las propiedades (amplitud, fase o frecuencia) de otra señal de mayor frecuencia, que será la que se transmitirá por el canal. Para el caso de sistemas digitales (de información digital) el proceso es idéntico, sin embargo, la modificación de la señal de alta frecuencia puede resultar en una señal de variación discontinua de alguna de sus propiedades. A este proceso de adaptación de la señal al canal se denomina **modulación**. Al proceso de recuperación se llama **demodulación**. El canal de comunicaciones es el medio a través del cual fluye la información. Los canales pueden clasificarse según su modo de operación

1. *SIMPLEX*: comunicación en una dirección usando una frecuencia
2. *HALF DUPLEX*: las terminales pueden transmitir o recibir pero no lo hacen de forma simultánea.
3. *FULL DUPLEX*: Se permite comunicación bidirecional, con una frecuencia independiente para cada terminal.

También es posible clasificar los canales según su constitución física, pueden ser cableados o inalámbricos (radio). Entre los canales cableados se tiene todas las líneas de transmisión (UTP, coaxial, fibra óptica, guía de ondas, etc...). El medio inalámbrico se modela dependiendo de la aplicación: móvil o fijo, terrestre o satelital, banda angosta o banda ancha, etc... El medio inalámbrico hace uso del espéctro radioeléctrico para la transmisión de información. Las frecuencias del espectro de radio están clasificadas así:

Rango de frecuencia	**Acrónimo**	**Significado**
$0-300Hz$	ELF	*Extremely low frecuency*
$300-3KHz$		Rango de voz
$3-30KHz$	VLF	*Very low frecuency*
$30-300KHz$	LF	*Low frecuency*
$300KHz-3MHz$	MF	*Medium frecuency*
$3-30MHz$	HF	*High frecuency*
$30-300MHz$	VHF	*Very high frecuency*
$300MHz-3GHz$	UHF	*Ultra high frecuency*
$3-30GHz$	SHF	*Super high frecuency*
$30-300GHz$	EHF	*Extra high frecuency*

El uso del espectro radioeléctrico está coordinado a nivel mundial por la Unión Internacional de Telecomunicaciones - sección radio (ITU-R). A nivel nacional usualmente son los ministerios. Existe un consenso mundial del uso que se dará a qué proporción del espectro. Corresponde a los organismos nacionales reglamentar el uso de esas frecuencias. Usualmente es necesario pagar por el uso del espectro. En Colombia. el Ministerio de Comunicaciones es el encargado de regular el uso del espectro y definir el monto de la contrapestación.

1.2. Sistema de unidades logarítmicas

Como ya se comentó de forma introductoria, un sistema de comunicaciones tiene varios elementos como antenas, amplificadores, cables, etc. Cada componente afecta a la señal introduciendo pérdidas o ganancias, que se pueden describir como la relación de la potencia de salida (*Output power*) y la potencia de entrada (*Input power*). Por ejemplo, en un sistema de cuatro etapas, la relación entre las potencia de salida y de entrada es

$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{P_{o,1}}{P_{i,1}} \frac{P_{o,2}}{P_{i,2}} \frac{P_{o,3}}{P_{i,3}} \frac{P_{o,4}}{P_{i,4}}$$

Para simplificar los cálculos y considerando que estas relaciones son entre valores muy grandes o valores muy pequeños, es costumbre utilizar logaritmos, así las multiplicaciones se convierten en sumas. Si el logaritmo empleado está en base 10, se dice que el resultado está expresado en Bel, tal como aparece en la ecuación (1.1)

$$N = \log_{10}\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right). \tag{1.1}$$

Es más común usar un submúltiplo del Bel, denominado deciBel y que se obserba en la ecuación (1.2)

$$N_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right). \tag{1.2}$$

El sistema logarítmico es muy útil porque permite manejar los números con mayor facilidad. Por ejemplo, es más fácil decir que una señal aumentó 50 dB a decir que es 100000 veces mayor. Cuando se habla del valor en dB de una señal. En realidad se está haciendo una comparación logarítmica entre una señal de entrada y otra de salida, donde la señal de entrada se considera la referencia. En algunos casos se usa una señal de referencia estándar en vez de la señal de entrada. El nivél más usado es $1mW$ y su abreviatura es dBm. Los dBm representan potencia mientras que los dB es una relación de entrada y salida. Una señal de $3dBm$ está $3dB$ por encima de una señal de $1mW$. Un nivel de $-3dBm$ está $3db$ por debajo de esa referencia. El valor de $0dBm$ indica que la potencia de salida es igual a la referencia de $1mW$.

Otras unidades de referencia comunes son:

- dBK, definida a partir de $10\log_{10}(T/1K)$, donde K es el *Kelvin*, la unidad de la temperatura absoluta. Se usa para caracterizar la temperatura de ruido de un equipo de amplificación.
- $dBHz$, definida a través de $10\log_{10}(f/1Hz)$. Se usa para indicar anchos de banda (BW).
- dBr, dB relativo a un valor de referencia. Ejemplo, si la referencia es $10dBm$ y se tiene una señal de $8{,}7dBm$; se puede afirmar que esta señal tiene una potencia $-1{,}3dBr$.
- dBc, dB *carrier*, relativo al valor de referencia de una portadora. Se utiliza en especificaciones de HPA. Refencia a una gráfica

Espacio para la gráfica de los dBc vistos en un analizador de espectros

No se debe sumar dos potencias expresadas en dB directamente. Por ejemplo, si $P_1 = 11{,}5dBW$ y $P_2 = 11{,}5dBW$, la suma $P_T = P_1 + P_2$ es $P_1 = 10^{11{,}5/10}W \cong 14{,}1254W$. Luego $P_T \cong 28{,}2508W$, es decir $P_T \cong 14{,}5103dBW$.

1.3. Otra introducción

poner referencia a la figura

Un sistema de comunicaciones tiene como función transportar información de forma confiable, desde el transmisor hasta el receptor, a través de un canal. El sistema de comunicaciones más básico lo constituye tres bloques: un transmisor, un canal y un receptor; tal como se muestra en la figura (1). Si bien existen diferencias entre los sistemas de comunicación analógico y digital, las funciones de cada bloque se pueden generalizar así:

- **Transmisor** Produce una señal de radio que se adapta; en frecuencia, ancho de banda y potencia, a las características del canal.
- **Receptor** Recibe la señal de radio y extrae la señal original con la información.
- **Canal** Sirve como medio de transmisión para la señal de radio.

Figura 1: Modelo simple de un sistema de comunicaciones. Se detallan un poco más los componentes de un transmisor analógico y otro digital.

1.3.1. Analógico vs digital

Tal y como sucede en otros campos, los sistemas de comunicaciones también se dividen en análogos y digitales. En particular los sistemas pueden ser de cuatro tipos:

- Señales de información y a transmitir, analógicas. Ejemplos: sistema de telefonía tradicional, radio AM/FM.
- Señal de información analógica y a trasmitir digital. Ejemplo: telefonía IP en una red local (señal de voz analógica, digitalizada y enviada usando códigos de línea sobre cableado UTP).
- Señal de información digital y a transmitir digital. Ejemplos: Una red local (LAN), información circulando por un *motherboard* operando a 1Ghz.
- Señal de información digital y transmisión analógica. Casos ilustrativos son: un sistema ADSL, enlaces de microondas terrestres SDH, una red de fibra óptica.

La estructura interna de una pareja transmisor/receptor cambia de acuerdo a si el sistema es analógico o digital. El principio de funcionamiento es el mismo: la señal se amplifica, se convierte en frecuencia, se modula, se vuelve a amplificar y se envía al transductor que la acopla al medio de transmisión.

qué significa "se convierte en frecuencia"

En el caso de los sistemas digitales, el código de fuentese encarga de mapear la señal de entrada a una señal digital y tiene como función reducir redundanciasen la señal a transmitir. Por ejemplo, el muestreo y cuantización de una señal de voz usando la ley de cuantización μ, busca mapear niveles de voltaje de la señal analógica de audio a un conjunto de bits. La codificación de canalpersigue un fin diferente: su principal misión es asegurar la transmisión confiable de la información en presencia de un canal con ruido. Se diseña con el fin de minimizar la probabilidad de entregar bits errados a la salida del sistema de recepción. Códigos como *Reed-Solomon*(usado para la protección de señales de audio en un CD y para transmisión de TV digital via satélite) o LDPCson ejemplos de códigos de canal eficientes en su propósito de reducir la probabilidad de recepción de errores en el receptor. En la figura (2)se ilustra la diferencia en potencia requerida para una tasa de error dada (BER, Bit Error Rate)en un caso codificado y uno sin codificar. Dado que la relación BER vs Potencia recibida es una curva característica de los receptores digitales.

qué es eso

qué es una redundancia

referencia a esa ley

qué es eso

referencias y/o definiciones

referencia

qué es y una referencia

poner referencia a la figura

qué es y una referencia

en la figura se hace referencia a unas gráficas de constelación, dónde están, se necesita una referencia, una definición. Adicionalmente se habla de un mapa de fase ?????????????... y una modulación QPSK ?????????????????

Figura 2: Sistema de comunicaciones digital inalámbrico. El sistema se afecta por las variaciones del canal aumentando el ruido en el receptor. Las gráficas de constelación muestran el impacto del ruido sobre el mapa de fase de una modulación QPSK

El sistema de comunicaciones ilustrado en la figura (1), muestra únicamente un trayecto: desde el transmisor hacia el receptor. Es claro que cuando el receptor necesita responder al mensaje enviado, los roles se invierten. Se dice que un sistema opera en un modo *simplex* si solamente es posible enviar señales desde un extremo del sistema al otro, en una dirección a la vez. Un ejemplo es un sistema de radio VHF en el cual es necesario pulsar un botón para hablar con el interlocutor. De otro lado, un teléfono es un sistema *duplex*, dado que es posible que ambos extremos intercambien información simultáneamente. Desde el punto de vista práctico un sistema *duplex* requiere de dos caminos de transmisión (dos frecuencias diferentes, dos cables).

poner la referencia correcta

1.3.2. Medios de transmisión

definición y/o referencia

Las características de modulación y codificación dependen de las características del medio de transmisión tales como el ancho de banda disponible, las frecuencias máxima y mínima utilizables, la potencia máxima permitida, el nivel de interferencia presente, los límites de linearidad de la respuesta del canal, etc.

dónde se definen esas características del medio y poner una referencia

Entre los medios de comunicación más comunes están:

No es mejor hablar de canales alambrados e inalábricos. Poner como ejemplos de los primeros el canal telefónico, el cable coaxial, la fibra óptica; y de los segundos el canal satelital punto a punto, el móvil.

- El canal telefónico, diseñado originalmente para transmisión de señales de voz en su banda base ($0 \sim 3{,}4$Khz), incluye una gran variedad de medios de transmisión y sistemas de conmutación.
- El cable coaxial: es un arreglo de dos conductores cilíndricos concéntricos, separados por un material dieléctrico. Este arreglo lo hace robusto ante la interferencia externa. Sin embargo, no es la mejor opción para transmisión a larga distancia.
- La fibra óptica: conformada por dos materiales dieléctricos de diferente índice de refracción, recubiertos por un material oscuro protector. Los dieléctricos se diseñan de forma que se garantice reflexión total interna en el cilindro interior (núcleo). Proveen muy baja atenuación y elevado ancho de banda, por lo que son la alternativa ideal para redes de transmisión troncalesterrestres y submarinas.
- Canal inalámbrico: Se emiten ondas electromagnéticas que se propagan entre el transmisor y el receptor sin utilizar una guía. Al igual que los medios guiados, idealmente de garantizarse transmisión libre de distorsión (magnitud de la respuesta en frecuencia constante y variación lineal de la respuesta de fase [FON08]).

definición de una red troncal y referencia

ese FON es alguna norma ITU o algo similar. Es necesaria una referencia. Definición de libre de distorsión

Los canales inalámbricos se clasifican dependiendo del entorno y dependiendo de la aplicación. Por ejemplo: canal satelital, canal satelital móvil, canal satelital punto a punto, etc. Estos canales son altamente variables debido a cambios atmosféricos y obstáculos en interferencias. En la figura (2), en el lado del receptor, mediante la gráfica de la constelación de una modulación multifase (cuatro fases)se muestra la variabilidad de las características del canal. Los puntos claros muestran las variaciones en el símbolo recibido, debidas a ruido en el canal. En este caso las variaciones afectan la fase de los símbolos recibidos. Dado que la modulación usa la fase para transportar información, esos cambios resultarán en errores a la salida del receptor.

hacer la referencia correcta

hay que explicar o dar referencias o definiciones

La figura (3)ilustra las diferencias en el comportamiento de amplitud de varios tipos de canales guiados y no guiados. En este caso nos enfocamos en mostrar principalmente la atenuación -en unidades logarítmicas (dB)- experimentada por una señal

revisar consistencia entre lo que se dice y lo que aparece graficado

poner la referencia correcta

enviada por varios medios de transmisión, respecto de la distancia recorrida. La selección de un medio respecto a otro no se debe realizar únicamente con base en su atenuación por unidad de longitud. Si bien es un componente importante, también es necesario considerar la respuesta de fase del canal y su impacto en la distorsión de la señal transmitida, el impacto de la interferencia, las características de la señal a transmitir y, claro está, el costo asociado a la instalación y operación del canal.

Figura 3 Atenuación versus distancia para varios tipos de medios de transmisión. Se usa una señal de referencia de 1.2Ghz. Las atenuaciones por unidad de longitud en cada medio son: coaxial 13$dB/100mt$, fibra óptica G625 0,2dB/Km. Para los modelos de tierra plana y Okumura-Hata se usó una altura de móvil de 1.6 metros y una altura de radiobase de 30 metros.

En este libro nos dedicaremos al análisis de varios medios de transmisión, sin profundizarpero sin olvidar los bloques funcionales transmisor/receptor. qué se evitará

1.3.3. Espectro radioeléctrico

Las comunicaciones realizadas de forma inalámbrica (radiocomunicaciones), se soportan en el uso de frecuencias del espectro electromagnético, que es una herramienta conceptual utilizada para analizar el comportamiento de las ondas electromagnéticas, desde la muy baja frecuancia hasta el rango visible. Dentro del espectro electromagnético se encuentra el espectro radioeléctrico, que parte de frecuencias en el rango audible hasta 3000GHz. El espectro de radio se subdivide a su vez en nueve bandas [RR2008]. es una norma???... referencia

Tabla 1: Espectro radioeléctrico con bandas, símbolos, límites y denominación

Según la banda se recomienda usar múltiplos de un *Hertz* para cada frecuencia, de forma que se simplifique su descripción: Kilohertz (KHz), frecuencias hasta 3000KHz; Megahertz (MHz), desde 3MHz hasta 3000 MHz y Gigahertz (GHz), desde 3GHz hasta 3000GHz.

1.3.4. Servicios, atribuciones, adjudicaciones y asignaciones

Las comunicaciones radioeléctricas se pueden clasificar según el tipo de comunicaciones a establecer así:

- Servicio fijo: entre dos estaciones cuya posición permanece fija de forma permanente.
- Servicio móvil: entre una estación y otra (o varias) en movimiento.
- Servicio de radiodifusión: entre una estación fija y múltiples estaciones fijas simultaneamente

cuando uno escucha la radio en su carro???... no es este un servicio de este tipo

Estos servicios pueden prestarse mediante estaciones terrestres o espaciales, dando origen al servicio fijo terrestre o satelital, servicio móvil terrestre o satelital, etc.

En adición a estos servicios, existen otros igual de importantes que no necesariamente comunican dos puntos. Ejemplos: los servicios de radionavegación y radioastronomía. El Reglamento de Radio publicado por la Unión Internacional de Telecomunicaciones, contiene la tabla mundial de atribuciones de frecuencias. En él se encuentran varios límites aplicables a transmisiones terrestres y espaciales, establecidos para mantener la interferencia en un nivel tolerable.

falta referencia

1.3.5. Gestión del espectro

Hoy en día hay gran variedad de aplicaciones y servicios inalámbricos: radiodifusión, televisión terrestre, televisión satelital, telefonía móvil, sistemas troncalizados, enlaces fijos de microondas, servicio de radioaficionado, etc... Cada una de estas aplicaciones utiliza una porción del espectro radioeléctrico. De no realizarse una adecuada asignación de frecuencias, las interferencias de un servicio sobre otro o de una red sobra otra, dentro de un mismo servicio; aumentarían de forma descontrolada. ¿Por qué? Considérese que en una conversación de voz entre dos personas aumenta el ruido en la zona de la persona que habla. Usualmente la persona que escucha pedirá que le hablen más duro. En esencia le está pidiendo al transmisor que aumente la potencia. Si el ruido viene de otro par de personas que están comunicándose, éstos harán algo similar hasta el punto de que físicamente no pueden gritarse más. Seguramente habrán mejores formas de controlar la interferencia causada, pero a menos de que las cuatro personas se conozcan y acuerden moverse un poco más lejos para no molestar la conversación del vecino, la comunicación sería en extremo difícil de realizar. Imagínese un escenario con miles de parejas transmisor-receptor, o desde el punto de vista de redes, varios operadores compartiendo una misma zona de covertura. Es obvio que se necesita un ente de control que sirva de actor imparcial para garantizar igualdad de condiciones para todos los operadores.

Adicionalmente, este escenario se repite de país en país, y visto que las ondas electromagnéticas no pueden limitarse a las fronteras de una región, es necesario involucrar a los países vecinos en este proceso de regulación y control. La Union Internacional de Telecomunicaciones (ITU, *International Telecommunications Union*) tiene la competencia de armonizar el uso del espectro radioeléctrico a nivel internacional, asignando bandas de frecuencia para cada uno de los servicios. La distribución del espectro se hace con base en regiones, siendo las américas parte de la región 2. Periódicamente, la ITU realiza conferencias mundiales de radiocomunicaciones (WARC, *World Administrative Radio Conference*) en las cuales se estudian y proponen cambios a las atribuciones de frecuencia para cada tipo de servicio. Internacionalmente la ITU discute la atribución de un rango de frecuencias para uno o más servicios determinados. Cuando hay varios servicios compartiendo una atribución, uno de ellos debe ser el principal y otro el secundario. Estaciones que usen el servicio principal usualmente tienen protección contra interferencias causadas por los servicios secundarios. Al realizar una atribución de un rango de frecuencias a un servicio, se realizan adjudicaciones dentro de la banda (canalizaciones). Las adjudicaciones competen a uno o más países, mientras las atribuciones se realizan a nivel regional o a nivel global. Cada país es libre de adoptar o no las atribuciones acordadas en el marco de las conferencias de radio. Sin embargo, de no hacerlo, corre el riesgo de no encontrar equipos compatibles y de causar o sufrir interferencias elevadas por parte de redes vecinas.

qué significa ser principal y secundario

Una vez transpuestas las atribuciones al plan nacional de frecuencias o, como se llama en Colombia, Cuadro Nacional de Atribución de Bandas de Frecuencias, cada ente nacional responsable por la regulación del espectro (Ministerio de Comunicaciones en Colombia) se encarga de asignar frecuencias específicas (o canales) dentro de cada banda.

La figura (4)se muestra la transposición colombiana en el rango 14.15.35Ghz y las atribuciones internacionales según la ITU. En el caso mostrado no hay diferencias, sin embargo, esto no significa que en el caso colombiano no haya pequeñas diferencias con las atribuciones mundiales en algunos servicios específicos.

corregir la referencia

Figura 4: Ejemplo de transposición de las atribuciones globales en comparación con Colombia. Rango 14-15.35GHz. Servicios de microondas. La distribución colombiana es un extracto del Cuadro Nacional de Atribución de Bandas de Frecuencia.

Es importante tener en cuenta que el espectro radioeléctrico es un recurso único y no renovable.

2 Modelo circuital de parámetros distribuidos

Los canales alambrados fueron los primeros en emplearse para las comunicaciones eléctricas a mediado del siglo XIX, específicamente para servicios de telegrafía. En este caso, el canal consiste en varios cables que conectan el transmisor con el receptor. El transmisor crea un voltaje en función de la información que se va a transmitir y lo acopla al canal. Es necesario que exista un circuito (un camino eléctricamente cerrado) que guíe el flujo de corriente. En el caso de comunicaciones a través de un solo cable, el camino de retorno era la tierra. Como su conductividad es bastante variable, las comunicaciones que usan la tierra como retorno no pueden ser de larga distancia por la distorsión del pulso transmitido.

Es por esto que la mayoría de los canales cableados consisten en parejas de conductores, sobre los cuales el transmisor envía la señal. La configuración de este par de conductores afecta la transmisión de la señal, dado que la forma y las propiedades de los materiales pueden alterar las características del circuito.

Aunque existen varias configuraciones físicas para el par de conductores. todas pueden modelarse de forma global con un conjunto de ecuaciones básicas. Para efectos del análisis, se trabajará con una línea genérica que incorporará la mayoría de las características de una línea real.

Esta línea genérica consiste en dos conductores, con una diferencia de potencial $V(x)$ y una corriente $I(x)$ que viaja por uno de los cables y retorna por el otro. En la teoría de circuitos de baja frecuencia, normalmente se considera que los efectos de la línea de trasmisión son nulos. Es decir, que la diferencia de potencial y corriente acoplada a la línea son las mismas que llegan a la carga. En alta frecuencia esta aproximación no es cierta ya que el voltaje y la corriente se modelan como una onda.

se genera un espacio acá que quiero disminuir

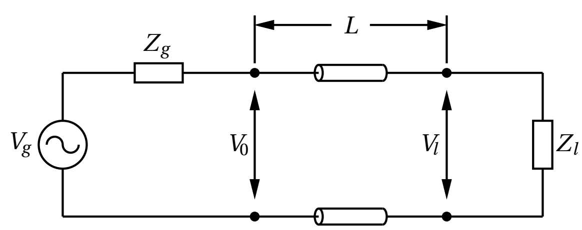

Figura 2.1: Circuito acoplado a una línea de transmisión de longitud L que alimenta una carga Z_l. Si la longitud del cable es despreciable con respecto a la longitud de onda de la onda guiada por el canal ($L << \lambda$), entonces $V_0 = V_l$. Si la longitud de la línea de transmisión es comparable con λ, V_0 es en general diferente de V_l.

2.1. Ecuaciones del telegrafista

Supóngase una línea de transmisión de dos cables paralelos considerando que $L >> \lambda$, tal como se muestra en el gráfico (2.1). Cuando la fuente coloca una diferencia de potencial en los terminales del par, comienza a propagarse una onda electromagnética guíada por los conductores. Como la onda tiene una velocidad finita, al final de la línea no se acoplan los mismos voltaje y corriente que se excitaron en la entrada.

El análisis no se puede realizar desde la teoría de circuitos de baja frecuencia, ya que esta teoría considera que las ondas se propagan en los circuitos a velocidad infinita. Por ello se utilizan las ecuaciones del telegrafista, que representan la evolución ondulatoria del voltaje y la corriente en una línea de transmisión genérica; considerando que la resistencia, la inductancia y la capacitancia, son parámetros distribuidos. El modelo de la línea de transmisión, basado en las ecuaciones de Maxwell, representa una línea como una serie infinita de circuitos de dos puertos (ver gráfico (2.3)), en donde cada circuito mostrado en la figura (2.2) representa un tramo diferencial de la línea.

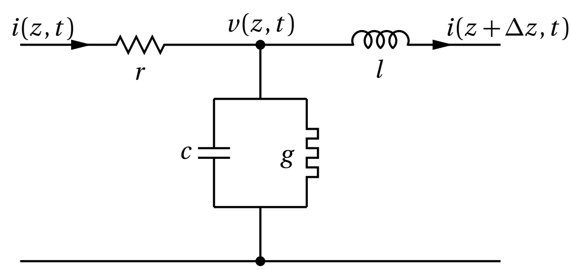

Figura 2.2: Celda diferencial de una línea de transmisión.

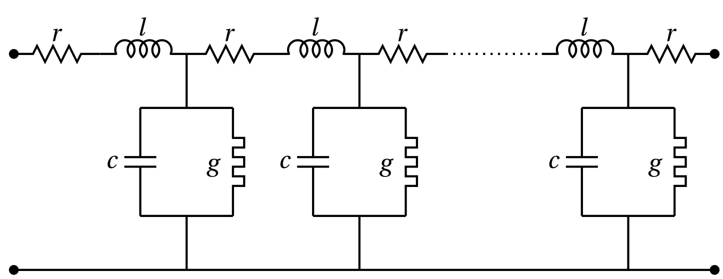

Figura 2.3: Modelo circuital de una línea de transmisión.

Cada celda es una **T** que consta de una resistencia $R = r\Delta x$, una inductuncia $L = l\Delta x$, una capacitancia $C = c\Delta x$ y una conductancia $G = g\Delta x$. Las variables en minúsculas representan el dispositivo asociado de dos terminales por unidad de longitud. Es decir, r es la resistencia por unidad de longitud que presenta el cable y cuantifica las pérdidas por calor producidas al guiar la onda a través del canal. La inductancia por unidad de longitud l es una medida de la inductancia externa que se asocia al par de cables cuando se cierra el circuito y se enlaza un flujo magnético. La conductancia por unidad de longitud g, cuantifica las pérdidas debido a la imperfección del dieléctrico que separa el par de cables, ya que tiene una conductividad baja pero no nula. Por último está c, la capacitancia por unidad de longitud, es la variable que da cuenta del almacenamiento de energía en forma de campo eléctrico entre los cables.

En un punto arbitrario x de la línea de transmisión aparecen entrando a la celda una corriente $i(x,t)$ y saliendo, $i(x+\Delta x,t)$. En la cresta de la **T** se define el potencial $v(x,t)$ asociado a la celda y medido con respecto a la base de la **T**. Si se utilizan las leyes de Kirchoff en el circuito, se obtienen las ecuaciones (2.1).

$$\begin{aligned} i(x,t)-i(x+\Delta x,t) &= \left[c\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+g\,v(x,t)\right]\Delta x,\\ v(x,t)-v(x+\Delta x,t) &= \left[r\,i(x+\Delta x,t)+l\,\frac{\partial i(x+\Delta x,t)}{\partial t}\right]\Delta x. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Al dividir por Δx y tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$, se consiguen las denominadas ecuaciones del telegrafista (2.2).

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= c\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+g\,v(x,t),\\ -\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= l\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+r\,i(x,t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Derivando con respecto a la posición y respecto al tiempo, las ecuaciones en (2.2), se pueden desacoplar y llevarlas a su forma ondulatoria, tal como aparecen en (2.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} &= l\,c\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}+(rc+l\,g)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+r\,g\,v(x,t),\\ \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} &= l\,c\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}+(rc+l\,g)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+r\,g\,i(x,t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como es común en circuitos eléctricos, se puede simplificar el análisis de las ecuaciones del telegrafista, suponiendo voltajes y corrientes fasoriales. Se definen:

$$v(z,t)=\mathbb{R}\left[V(x)e^{j\omega t}\right] \qquad \text{e} \qquad i(x,t)=\mathbb{R}\left[I(x)e^{j\omega t}\right],$$

donde $\mathbb{R}$ denota la parte real de un número complejo, $V(x)$ es el fasor de voltaje, $I(x)$ el fasor de corriente y $j^2=-1$. Las ecuaciones reescritas para el voltaje y la corriente complejas $V_c(x,t)=V(x)e^{j\omega t}$ e $I_c(x,t)=I(x)e^{j\omega t}$, quedan reducidas a (2.4) luego de eliminar la dependencia del tiempo.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} &= (r+j\omega l)(g+j\omega c)V(x),\\ \frac{d^2 I(x)}{dx^2} &= (r+j\omega l)(g+j\omega c)I(x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Considerando que $\gamma^2 = (r + j\omega l)(g + j\omega c)$, la ecuación para el potencial en (2.4) tiene por solución:

$$V(x) = V_+(0)e^{-\gamma x} + V_-(0)e^{\gamma x}, \tag{2.5}$$

poner una referencia a la explicación más detallada de la parte real e imaginaria de la constante de propagación

donde los subíndices $+$ y $-$ se refieren a la componente propagada en x y en $-x$, respectivamente.[1] La variable γ recibe el nombre de constante de propagación y en general es un número complejo $\gamma = \alpha + j\beta$. Los significados particulares de α y β se verán con detalle en ().

Si se considera la versión fasorial de la segunda ecuación en (2.2), se puede escribir la corriente $I(x)$ en función del fasor de potencial $V(x)$:

$$I(x) = -\frac{1}{r + j\omega l}\frac{dV(x)}{dz} = \frac{1}{Z_c}(V_+(0)e^{-\gamma x} - V_-(0)e^{\gamma x}),$$

donde se define la impedancia característica como el cociente del potencial incidente y la corriente incidente[2]:

$$Z_c = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}. \tag{2.6}$$

En general Z_c es un cantidad compleja y representa la impedancia que vería la fuente del cable si solo se propagase la onda incidente[3]. La solución obtenida para el fasor de voltaje tiene su correspondiente voltaje en el tiempo realizando la siguiente operación

$$v(x,t) = \mathbb{R}\left[V(x)e^{j\omega t}\right] = |V_+(0)|\, e^{-\alpha x}\cos(\beta x - \omega t + \varphi_+) + |V_-(0)|\, e^{\alpha x}\cos(\beta x + \omega t + \varphi_-),$$

donde φ_+ y φ_- son las fases de los números complejos $V_+(0)$ y V_- respectivamente. Obsérvese que las ondas incidente y reflejada, *decrecen* exponencialmente a medida que se propagan. La segunda componente viaja en $-x$ y por ello la exponencial $e^{\alpha x}$ va atenuando la amplitud de la señal.

La velocidad de propagación de la onda coincide en este caso, con la velocidad de fase, que es la velocidad a la cual se propaga un punto de la onda con fase constante. La onda incidente tiene una velocidad de propagación:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{ya que} \quad \frac{d\phi_+}{dt} = 0 \quad \text{en} \quad \phi_+ = \beta x - \omega t + \varphi_+.$$

Por supuesto el cálculo para la fase ϕ_- arroja una velocidad negativa $v_{ph} = -\dfrac{\omega}{\beta}$.

[1] A la solución fasorial $V_+(0)e^{-\gamma x}$ le corresponde un voltaje complejo $V_+(0)e^{-\gamma x}e^{j\omega t}$, que se puede simplificar como $V_+(0)e^{-\mathbb{R}(\gamma)x}e^{-j\left(\mathbb{I}(\gamma)x - \omega t\right)}$, con una parte ondulatoria que tiene una velocidad de propagación positiva en x.

[2] Un cálculo equivalente se obtiene si se realiza la división entre el potencial reflejado y la corriente reflejada.

[3] $Z(x)\big|_{x=0} = \dfrac{V_+(x)}{I_+(x)} = \dfrac{V_+(0)e^{-\gamma x}}{I_+(0)e^{-\gamma x}} = \sqrt{\dfrac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}$.

2.2. Línea de transmisión cargada

Considérese una línea de transmisión que guía la potencia a una carga, proveniente de una fuente, tal como se muestra en la figura [2.4].

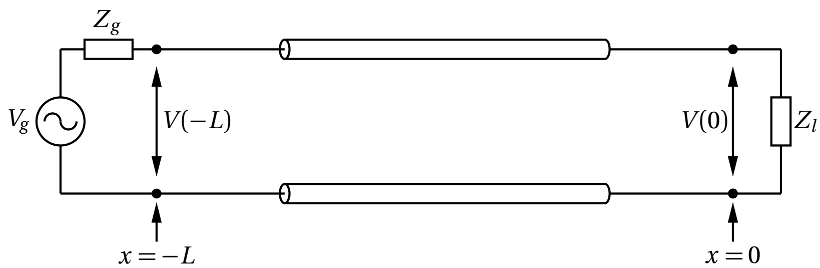

Figura 2.4: Línea de transmisión cargada con una impedancia Z_l. Se considera que el origen $x = 0$ está en la carga y el generador está en $x = -L$.

Evaluando las ecuaciones (2.5) y (2.1) en la carga:

$$V(0) = V_+(0) + V_-(0) \quad \text{y} \quad I(0) = \frac{1}{Z_c}(V_+(0) - V_-(0)), \tag{2.7}$$

y dividiendo el potencial en la carga $V(0)$ por la corriente en la carga $I(0)$, se obtiene:

$$Z_l = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_c \frac{V_+(0) + V_-(0)}{V_+(0) - V_-(0)}. \tag{2.8}$$

Definir el coeficiente de transmisión y escribir la relación que hay entre Γ y T

Se define el coeficiente de reflexión como el cociente entre el voltaje reflejado y el voltaje incidente, tal como se observa en (2.9).

$$\Gamma(x) \equiv \frac{V_-(x)}{V_+(x)} = \frac{V_-(0)e^{\gamma x}}{V_+(0)e^{-\gamma x}}. \tag{2.9}$$

Al dividir por el voltaje reflejado en el numerador y denominador de (2.8) y despejar para Γ se obtiene (2.10).

$$\Gamma(0) = \frac{V_-(0)}{V_+(0)} = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} \quad \text{y} \quad \Gamma(x) = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} e^{2\gamma x}. \tag{2.10}$$

Para independizar los valores de los fasores $V(x)$ e $I(x)$, de sus valores en la carga; se utiliza un nuevo sistema de coordenadas con el origen en la carga y creciente en la dirección hacia el generador. Es decir $q = -x$. El voltaje y la corriente se transforman en

$$\begin{aligned} V(q) &= V_+(q) + V_-(q) = V_+(0)e^{\gamma q} + V_-(0)e^{-\gamma q}, \\ I(q) &= I_+(q) + I_-(q) = \frac{1}{Z_c}(V_+(0)e^{\gamma q} - V_-(0)e^{-\gamma q}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si se conocen el voltaje y la corriente en la carga, se puede calcular el voltaje incidente y el voltaje reflejado a partir de la ecuación (2.7).

$$V_{+}(0)=\frac{1}{2}\left[V(0)+Z_c I(0)\right] \quad \text{y} \quad V_{-}(0)=\frac{1}{2}\left[V(0)-Z_c I(0)\right]. \tag{2.12}$$

Reemplazando estos valores en (2.11), el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea se expresan así:

$$V(q)=\frac{Z_l+Z_c}{2}I_l e^{\gamma q}+\frac{Z_l-Z_c}{2}I_l e^{-\gamma q} \quad \text{e} \quad I(q)=\frac{Z_l+Z_c}{2Z_c}I_l e^{\gamma q}-\frac{Z_l-Z_c}{2Z_c}I_l e^{-\gamma q}. \tag{2.13}$$

Se puede calcular de (2.13) la impedancia que se "ve" desde cualquier punto de la línea, haciendo el cociente de funciones hiperbólicas entre el potencial y la corriente

$$\begin{gathered} V(q)=V_l\cosh\gamma q+Z_c I_l \operatorname{senh}\gamma q \quad , \quad I(q)=\frac{V_l}{Z_c}\operatorname{senh}\gamma q+I_l\cosh\gamma q, \\ Z(q)=Z_c\frac{Z_l+Z_c\tanh\gamma q}{Z_l\tanh\gamma q+Z_c}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

De nuevo; cuando la línea es infinita, la impedancia reflejada en el generador es la impedancia característica. Verbigracia, si $q\to\infty$ entonces $Z(q)\to Z_c$. Un resultado que ya se había obtenido en el pie de página (3).

2.3. Potencia guiada en una línea

Poner una referencia de la convención utilizada en circuitos eléctricos para dispositivos pasivos y activos.

La potencia eléctrica suministrada por una fuente se define como el producto de la diferencia de potencial entre sus terminales y la corriente saliente, según la convención de los dispositivos activos. Usualmente se utiliza el promedio en el tiempo de esta potencia cuando se hace un análisis fasorial. Para su representación se procede escribiendo el potencial $v(t)$ y la corriente $i(t)$ en función de sus correspondientes valores complejos, tal como se muestra en (2.15).

$$\begin{aligned} P_i(t)\equiv v(t)i(t) &= \left(\frac{1}{2}\left[Ve^{j\omega t}+V^*e^{-j\omega t}\right]\right)\left(\frac{1}{2}\left[Ie^{j\omega t}+I^*e^{-j\omega t}\right]\right), \\ &=\frac{1}{4}\left(VIe^{2j\omega t}+V^*I^*e^{-2j\omega t}+VI^*+V^*I\right)=\frac{1}{2}\left[\mathbb{R}(VIe^{2j\omega t})+\mathbb{R}(VI^*)\right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Al realizar el promedio en un periodo se obtiene la expresión típica de los circuitos eléctricos

$$P\equiv\langle P_i(t)\rangle=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}P_i(t)dt=\frac{1}{2}\left[\mathbb{R}(VI\langle e^{2j\omega t}\rangle)+\mathbb{R}(VI^*)\right]=\frac{1}{2}\mathbb{R}(VI^*). \tag{2.16}$$

Se define la potencia compleja como el semiproducto del fasor de potencial V y el fasor conjugado de corriente I^*,

$$P_c\equiv\frac{1}{2}VI^*.$$

La interpretación de esta variable es la habitual: $P \equiv \mathbb{R}\left[P_c\right]$ es el promedio en el tiempo de la potencia activa suministrada a la carga (potencia que se disipa en forma de calor) y $\mathbb{I}\left[P_c\right]$ es el promedio en el tiempo de la potencia reactiva entregada (potencia que se devuelve a la fuente).

Para el caso de las líneas de transmisión, la potencia compleja depende de la posición en la línea, debido a que tanto el voltaje como la corriente varían con q. Es decir:

$$P_c(q) \equiv \frac{1}{2}\left[V(q)I^*(q)\right]. \tag{2.17}$$

P_c se puede escribir como función del voltaje incidente, con ayuda del coeficiente de reflexión

$$\begin{aligned}
P_c(q) &= \frac{1}{2}Y_c^*(q)\left[V_+(q)+V_-(q)\right]\left[V_+^*(q)-V_-^*(q)\right],\\
&= \frac{Y_c^*}{2}\left(V_+(q)\left[1+\frac{V_-(q)}{V_+(q)}\right]\right)\left(V_+^*(q)\left[1-\frac{V_-^*(q)}{V_+^*(q)}\right]\right),\\
&= \frac{Y_c^*\left|V_+(q)\right|^2}{2}\left[1+\Gamma(q)\right]\left[1-\Gamma^*(q)\right].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

En (2.18) se observa fácilmente que aunque el voltaje incidente sea no nulo, la potencia compleja puede ser nula. Solo debe cumplirse que $\Gamma(q) = -1$ o $\Gamma^*(q) = 1$. Es decir: $\left|\Gamma(q)\right| = 1$; lo que implica o que el voltaje incidente es igual al voltaje reflejado *en todo punto* o es su inverso $V_+(q) = -V_-(q)$. Estas dos circunstancias se pueden presentar y significan dos situaciones diferentes para la línea. Si los voltajes incidente y reflejado se igualan, el voltaje total se duplica en todo punto. Esta situación puede ser perjudicial para el aislante del cable o para los circuitos que están acoplados a la línea. De otro lado; cuando el voltaje incidente y el voltaje reflejado se contrarestan, no hay potencia guiada en la línea ni mucho menos potencia entregada a la carga. Estos comportamientos se estudiarán con mayor detalle en ().

referencia a cuando la carga sea un corto o un circuito abierto

Para terminar con esta presentación general falta considerar la relación de las potencias incidente y reflejada, teniendo en cuenta que el coeficiente de reflexión de voltaje es el negativo del coeficiente de reflexión de corriente[4]

$$\begin{aligned}
P_-(q) &= \frac{1}{2}\mathbb{R}\left[-V_-(q)I_-^*(q)\right] \quad \text{y} \quad P_+(q) = \frac{1}{2}\mathbb{R}\left[V_+(q)I_+^*(q)\right],\\
\frac{P_-(q)}{P_+(q)} &= \mathbb{R}\left[\frac{V_-(q)}{V_+(q)}\left(-\frac{I_-(q)}{I_+(q)}\right)^*\right] = \mathbb{R}\left|\Gamma(q)\right|^2,
\end{aligned}$$

Es decir

$$\frac{P_-(q)}{P_+(q)} = \left|\Gamma(q)\right|^2. \tag{2.19}$$

Nótese que cuando el valor absoluto del coeficiente de reflexión de tensión es uno, la potencia incidente es igual a la potencia reflejada y la potencia total *es nula*.

---

[4] Siguiendo la ecuación (2.13), se observa que $I_+(q) = \frac{V_+(q)}{Z_c}$ e $I_-(q) = -\frac{V_-(q)}{Z_c}$. Luego $\Gamma(q) = -\frac{I_-(q)}{I_+(q)}$.

3 Línea de transmisión sin pérdidas

En el capítulo anterior se presentó la aproximación circuital de parámetros distribuidos de una línea de transmisión constituida por un par de cables. En este capítulo se hará el estudio de un caso particular relevante: la línea de transmisión sin pérdidas. Es decir, la línea donde no se pierde potencia por calentamiento.

Se mostrará que la impedancia característica en este caso es puramente real. Adicionalmente se acoplará la línea a diferentes cargas para analizar su comportamiento: un circuito abierto, un corto circuito, una resistencia y por último una impedancia genérica.

3.1. Ecuación genérica: caso no armónico

En (2.4) se estudió el comportamiento de una línea en el caso sencillo de una excitación armónica y en ausencia de transitorios. La línea sin pérdidas ofrece la oportunidad de estudiar el fenómeno atendiendo a los transitorios, sin entrar en muchas complicaciones matemáticas. Retomando la ecuación del telegrafista (2.3) cuando la resistencia y la conductancia distribuidas son nulas ($r=0$ y $g=0$), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} &= l\,c\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2},\\ \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} &= l\,c\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Obsérvese que son un par de ecuaciones de onda donde la velocidad de fase es $v_{ph}=(l\,c)^{-1/2}$. Existen múltiples maneras de encontrar la solución a este tipo de ecuaciones[1].

Sin importar el método utilizado, la solución es una combinación lineal de una onda que se propaga en la dirección x (onda incidente) y otra onda que se propaga en la dirección contraria (onda reflejada)

$$v(x,t)=v_+(x-\frac{t}{\sqrt{l\,c}})+v_-(x+\frac{t}{\sqrt{l\,c}}). \tag{3.2}$$

[1]Una forma directa consiste en aplicar la transformación siguiente, que tiene la particularidad de que deja invariante a las ecuaciones (3.1).

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}$$

Si se denota la segunda derivada del potencial con respecto a la posición como v_{xx}, ésta en términos de las derivadas con respecto a η y ξ es $v_{xx}=v_{\eta\eta}+2v_{\eta\xi}+v_{\xi\xi}$. Lo propio se puede hacer con la segunda derivada del potencial con respecto al tiempo: $v_{tt}=a^2(v_{\eta\eta}-2v_{\eta\xi}+v_{\xi\xi})$. Al elegir $a=1/\sqrt{l\,c}$ y reemplazar en la ecuación de onda, se obtiene la ecuación simplificada para η y ξ: $4v_{\eta\xi}=0$.

Su solución es simplemente $v(\eta,\xi)=F(\eta)+G(\xi)$, donde F es una función exclusivamente de η y G lo es de ξ. En términos de las variables iniciales, la solución es la típica combinación de una onda incidente v_+ y una onda reflejada v_- Ec. (3.2).

En la solución para la corriente se usan las ecuaciones (2.2), teniendo en cuenta que v e i son funciones de la posición y del tiempo.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= c\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= l\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La derivada del voltaje incidente contra la corriente incidente se puede escribir con ayuda de la regla de la cadena y la primera ecuación en (3.3), como aparece en las ecuaciones intermedias de (3.4).

$$\frac{\partial v_+}{\partial i_+} = \frac{\partial v_+}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial i_+} = -l\,\frac{\partial i_+}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial i_+} = l\,\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{l}{\sqrt{lc}} = \sqrt{\frac{l}{c}}. \tag{3.4}$$

Interpretando la derivada de la posición contra el tiempo como la velocidad de propagación y utilizando la regla cíclica[2], se pueden explicar las dos últimas igualdades en (3.4). Adicionalmente, como la inductancia y la capacitancia por unidad de longitud son constantes; la integración parcial de (3.4) entrega una corriente incidente en función del voltaje incidente, la impedancia característica y una constante que consuetudinariamente se considera nula (3.5). Esto último debido a que el interés central en este capítulo está en el estudio de líneas sin ningún tipo de excitación previa al “encendido”.

$$i_+(x,t) = \frac{v_+(x,t)}{Z_0} + i_0 \quad \text{donde} \quad Z_0 \equiv \sqrt{\frac{l}{c}} \quad \text{e} \quad i_0 \equiv 0. \tag{3.5}$$

Con un razonamiento similar se obtiene

$$i_-(x,t) = -\frac{v_-(x,t)}{Z_0}. \tag{3.6}$$

Finalmente, la corriente en cualquier punto en función de los voltajes incidente y reflejado y la impedancia característica es

$$i(x,t) = \frac{1}{Z_0}\left[v_+(x,t) - v_-(x,t)\right]. \tag{3.7}$$

3.2. Impedancia característica de una línea sin pérdidas

Si un línea de transmisión sin pérdidas de longitud infinita se excita con una fuente, no habrán ni voltaje ni corriente reflejados, debido a que nunca la onda incidente

[2] Como $i_+ = f(x,t)$, necesariamente $\frac{\partial x}{\partial i_+}\frac{\partial i_+}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial t}$.

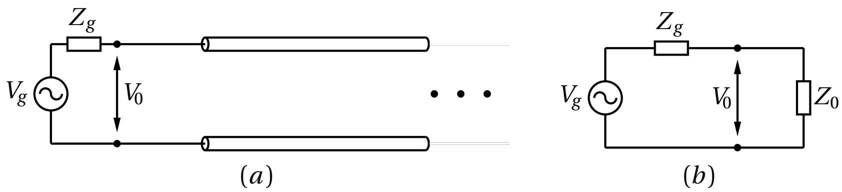

Figura 3.1: Línea de transmisión infinita sin pérdidas en (a) y su circuito equivalente en (b)

encuentra la carga que genera la reflexión. Ver figura [3.1]. En este caso la impedancia que "ve" la fuente es la impedancia característica. De (3.5) se observa que la impedancia reflejada en la fuente

$$Z(x,t)\Big|_{x=-\infty} = \frac{v_+(x,t)}{i_+(x,t)}\Big|_{x=-\infty} = Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}. \tag{3.8}$$

De hecho, esa impedancia es la misma que se mediría en cualquier punto de la línea.

Req:transitorio con corriente continua. Solución: ver sección 3.3. Realizado: 11/12/2010

3.3. Transitorio en una línea de transmisión sin pérdidas

Considérese una línea cargada con una resistencia genérica R_l, que está excitada con una fuente que suministra una diferencia de potencial constante V_0. La fuente se acopla al circuito cuando el interruptor se cierra en $t=0$.

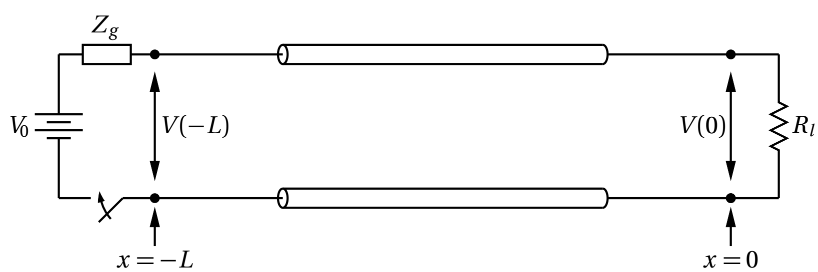

Figura 3.2: Fuente de corriente directa que alimenta una línea de transmisión sin pérdidas, que acopla una carga netamente resistiva R_l.

Cuando el interruptor se cierra, una onda de voltaje se propaga en la línea asi

$$V_{+1} = V_0 U\left(x - \frac{t}{\sqrt{l\,c}}\right),$$

¿Sí se puede utilizar el coeficiente de reflexión de tensión en este régimen?

donde U es la función paso unitario[3] y V_{+1} denota la primera onda incidente guiada por la línea. Esta onda alcanza la carga y genera un voltaje reflejado V_{-1} que se suma a la onda incidente. Haciendo uso de coeficiente de reflexión de tensión, según la ecuación (2.10), se sabe que

$$V_{-1} = \Gamma(0) V_{+1} = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} V_{+1},$$

esta onda se propaga desde la carga hacia el generador y cuando lo encuentre producirá una onda "reflejada" que viajará de nuevo hacia la carga y su magnitud será

$$V_{+2} = \Gamma(-L) V_{-1} = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0}\frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} V_{+1}.$$

Para cuando V_{+2} haya ido hasta la carga y se haya reflejado de nuevo en la fuente, se habrá producido otro voltaje incidente

$$V_{+3} = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0}\frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0}\frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0}\frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} V_{+1} = \Gamma_g^2 \Gamma_l^2 V_{+1},$$

donde se ha utilizado la convención de que el coeficiente de reflexión de tensión en la carga es $\Gamma(0) = \Gamma_l$ y $\Gamma(+L) = \Gamma_g$. El voltaje reflejado producido por $= V_{+3}$ será

$$V_{-3} = \Gamma_g^2 \Gamma_l^3 V_{+1}.$$

El voltaje en la línea cuando se esté propagando la enésima onda incidente será la suma de los voltajes incidentes y los voltajes reflejados, es decir

$$\begin{aligned}
V_n &= V_{+1}\left[1 + \Gamma_g\Gamma_l + \Gamma_g^2\Gamma_l^2 + \cdots + \Gamma_g^{n-1}\Gamma_l^{n-1}\right] + V_{+1}\left[\Gamma_l + \Gamma_g\Gamma_l^2 + \cdots + \Gamma_g^{n-1}\Gamma_l^n\right],\\
&= V_{+1}\left[1 + \Gamma_l + \Gamma_g\Gamma_l + \Gamma_g\Gamma_l^2 + \Gamma_g^2\Gamma_l^2 + \cdots + \Gamma_g^{n-1}\Gamma_l^{n-1} + \Gamma_g^{n-1}\Gamma_l^n\right],\\
&= V_{+1}(1 + \Gamma_l)\left[1 + \Gamma_g\Gamma_l + \Gamma_g^2\Gamma_l^2 + \cdots + \Gamma_g^{n-1}\Gamma_l^{n-1}\right],\\
&= V_{+1}(1 + \Gamma_l)\sum_{i=0}^{n-1}\Gamma_g^i\Gamma_l^i.
\end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$, la suma converge aprovechando que $\left|\Gamma_g\Gamma_l\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Gamma_g\Gamma_l\right)^i = \frac{1}{1 - \Gamma_g\Gamma_l} \quad\Rightarrow\quad V_\infty = V_{+1}\left(\frac{1 + \Gamma_l}{1 - \Gamma_g\Gamma_l}\right),$$

[3] $f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0\,. \end{cases}$

Finalmente se expresan los coeficientes de reflexión en función de R_l, R_g y Z_0 y se obtiene

$$\frac{1+\Gamma_l}{1-\Gamma_g\Gamma_l} = \frac{R_l(Z_0+R_g)}{Z_0(R_g+R_l)} \quad \text{y} \quad V_{1+} = V_0\frac{Z_0}{R_g+Z_0},$$

$$V_\infty = V_0\frac{Z_0}{R_g+Z_0}\frac{R_l(Z_0+R_g)}{Z_0(R_g+R_l)} = V_0\frac{R_l}{R_g+R_l}.$$

El resultado en cierto sentido es el esperado: el voltaje en la línea no depende de los parámetros de ella ($\partial V/\partial Z_0 = 0$), en consecuencia el voltaje reflejado en la carga es el mismo que impone la fuente. ¡Un divisor de tensión! En otras palabras: una vez el transitorio ha pasado, el sistema se comporta como una fuente real que alimenta una resistencia; tal como lo haría un circuito de baja frecuencia.

¿Proponer un problema? Calcular i_∞ a partir de i_{+1}

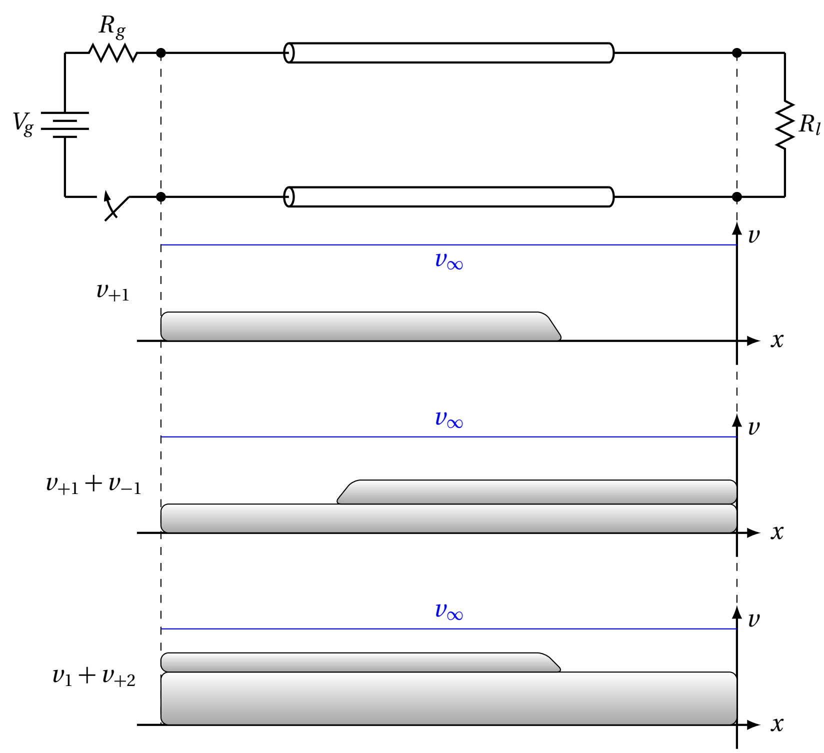

Figura 3.3: Una resistencia de carga R_l acoplada a una línea de transmisión sin pérdidas conectada a una fuente de CC. Los gráficos debajo del circuito muestran la evolución del transitorio: la primera onda incidente v_{+1}, la primera reflexión en la carga v_{-1} y la segunda onda incidente v_{+2}. Se supone que $Rg > Z_0$ y $R_l > Z_0$.

3.4. Línea sin pérdidas: el caso armónico

En esta sección se simplifica, de nuevo, el comportamiento de la línea. Primero, se considera que no hay disipación de potencia en forma de calor ($r = g = 0$). Segundo, se evita el estudio del transitorio suponiendo que el circuito excitado ya alcanzó su estado estacionario. En este contexto, se utilizan como punto de partida los resultados encontrados en las secciones 2.2 y 2.3.

3.4.1. Onda estacionaria en la línea

referencia a cuando se quiere eliminar la onda reflejada acoplando la carga a la línea.

Al excitar el sistema con una fuente de voltaje armónica de una única frecuencia: $v(x,t) = \mathbb{R}\left(V(x)e^{j\omega t}\right)$, en la línea aparece una onda estacionaria fruto de la combinación de ondas incidentes y reflejadas. Es importante examinar cómo es este comportamiento ya que más adelante se buscará eliminarlo ()

La constante de propagación será

$$\gamma^2 = (r + j\omega l)(g + j\omega c)\Big|_{r=0 \text{ y } g=0} = -\omega^2 l c \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{lc} = j\beta.$$

Se había dicho que el fasor de voltaje en cualquier punto de la línea es (ver ecuación (2.11))

$$V(q) = V_+(q) + V_-(q) = V_+(q)\left[1 + \Gamma(q)\right].$$

La magnitud del número complejo $V(q)$ da el valor pico del potencial en q.

$$|V(q)| = |V_+(q)||1 + \Gamma(q)|,$$

Pero $|V_+(q)|$ es independiente de q, según eq (2.13).

$$|V_+(q)| = |V_+| = \left|\frac{Z_l + Z_0}{2} I_l e^{j\beta q}\right| = \frac{|Z_l + Z_0|}{2}|I_l|.$$

Luego las variaciones del valor pico del voltaje con q, se deben exclusivamente a $|1 + \Gamma(q)|$. Reemplazando apropiadamente en (2.10), el coeficiente de reflexión de tensión es

$$\Gamma(q) = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} e^{-2j\beta q} \Rightarrow \Gamma(q) = |\Gamma(q)|e^{j(\varphi - 2\beta q)},$$

donde se considera que φ es la fase del número complejo $\dfrac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$. Los puntos críticos de $|1 + \Gamma(q)|$ se calculan fácilmente, así

$$1 + \Gamma(q) = 1 + |\Gamma(q)|\cos\Psi + j|\Gamma(q)|\operatorname{sen}\Psi, \quad \text{donde} \quad \Psi = \varphi - 2\beta q,$$
$$|1 + \Gamma(q)| = \left(1 + 2|\Gamma(q)|\cos\Psi + |\Gamma(q)|^2\right)^{1/2}.$$

Se observa claramente que el valor máximo de $|1 + \Gamma(q)|$ se da cuando el coseno es máximo, es decir: $\Psi = 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. De forma similar, el valor mínimo se consigue cuando $\Psi = (2n+1)\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Si por ejemplo se elije $n=1$, habrá un máximo con la restricción $\Psi_1 = 2\pi = \varphi - 2\beta q_1$ y otro en $n=2$ con $\Psi_2 = 4\pi = \varphi - 2\beta q_2$. La distancia entre estos dos máximos consecutivos es $q_1 - q_2$ y se calcula así

$$\Psi_1 - \Psi_2 = -2\pi = \varphi - 2\beta q_1 - \varphi + 2\beta q_2 = -2\beta(q_1 - q_2) \Rightarrow q_1 - q_2 = \frac{\pi}{\beta}.$$

Pero $\beta = \omega\sqrt{lc} = \dfrac{2\pi f}{v_{ph}}$, luego $\dfrac{\pi}{\beta} = \dfrac{v_{ph}}{2f}$. Finalmente $q_1 - q_2 = \dfrac{\lambda}{2}$.

Con un procedimiento completamente análogo, se obtiene que la distancia entre dos mínimos de voltaje en la línea es, de nuevo, la mitad de la longitud de onda de la señal. Para usar en futuras referencias se define la distancia entre máximos consecutivos como q_{max} y entre mínimos consecutivos, q_{min}; de forma que

$$q_{max} = q_{min} = \frac{\lambda}{2}. \tag{3.9}$$

Conocidas las distancias que existen entre mínimos (o máximos) del fasor de potencial en la línea, solo basta conocer cuánto valen ese mínimo y ese máximo para determinar completamente el comportamiento del voltaje a lo largo de la línea.

Cuando hay un máximo

$$1 + \Gamma(q)\Big|_{\Psi=2n\pi} = 1 + |\Gamma(q)|,$$

y en un mínimo

$$1 + \Gamma(q)\Big|_{\Psi=(2n+1)\pi} = 1 - |\Gamma(q)|.$$

La magnitud máxima del fasor de potencial es

$$|V(q)|_{max} = |V|_{max} = |V_+||1+\Gamma(q)||\Big|_{\Psi=2n\pi} = |V_+|\left[1+|\Gamma(q)|\right] = |V_+| + |V_-|. \tag{3.10}$$

El correspondiente valor mínimo es

$$|V(q)|_{min} = |V|_{min} = |V_+||1+\Gamma(q)||\Big|_{\Psi=(2n+1)\pi} = |V_+|\left[1-|\Gamma(q)|\right] = |V_+| - |V_-|. \tag{3.11}$$

Nótese que los valores máximo y mínimo de las ecuaciones (3.10) y (3.11) son independientes de q, debido a que la magnitud de los fasores de voltaje incidente y reflejado también lo son.

Con un procedimiento completamente análogo se encuentra que la magnitud del fasor de corriente oscila entre un valor mínimo $|I|_{min}$ y un valor máximo $|I|_{max}$ que cumplen las siguientes características

$$\begin{gathered} q_{min} = q_{max} = \frac{\lambda}{2}, \\ |I|_{min} = |I_+| - |I_-| \quad \text{y} \quad |I|_{max} = |I_+| + |I_-|. \end{gathered} \tag{3.12}$$

La diferencia notable que hay con el potencial es que cuando hay un máximo en éste, hay un mínimo en la corriente y viceversa: cuando el potencial cae en un mínimo, la corriente alcanza el valor máximo.

Poner una referencia a un problema donde se pida encontrar la condición de mínima corriente ($\Psi = 2n\pi$), la de máxima corriente ($\Psi = (2n+1)\pi$) y la distancia entre mínimos próximos.

gráfico con las variaciones genéricas de la magnitud del fasor de potencial y del fasor de corriente, mostrando que oscilan entre un valor mínimo y uno máximo, que la distancia entre mínimos y máximos próximos es $\lambda/2$, que cuando hay un mínimo en la corriente hay un máximo en el voltaje y que la distancia entre mínimos y máximos próximos es $\lambda/4$

3.4.2. Corto circuito como carga

Inicialmente, considérese que la carga es un corto circuito. Verbigracia, $Z_l = 0$. Utilizando de nuevo el sistema de coordenadas q, centrado en la carga y creciente hacia el generador, la impedancia reflejada en cualquier punto de la línea se calcula reemplazando en la ecuación (2.14): $Z_c \to Z_0$ y $Z_l \to 0$

$$Z(q) = Z_0 \frac{Z_0 \tanh(j\beta q)}{Z_0} = jZ_0 \tan(\beta q). \tag{3.13}$$

Una característica sobresaliente de la ecuación anterior es que la impedancia reflejada siempre es compleja. En otras palabras, una línea de transmisión cargada con un corto se comporta como una inductancia o una capacitancia. Es más, en los puntos en donde la función $\tan(\omega q)$ no está definida, la carga se "ve" como un circuito abierto.

Una LTx con un corto circuito como carga. Debajo de este gráfico la reactancia vs la distancia graficando la tangente

3.4.3. Circuito abierto en la carga

3.4.4. Línea cargada con una resistencia

3.4.5. Impedancia genérica como carga

4 Cambios realizados y pendientes

Convenciónes:

- si la *todo* está en verde, debe aparecer la fecha de cuando fue realizada y una explicación más detallada de qué fue lo que se hizo.
- si la *todo* está en naranja, es que falta por hacer.
- si la *todo* está en rojo, es porque el asunto es crítico.

4.1. Cambios realizados

Acá tengo una lista de los cambios que había hecho en el texto desde que comencé a utilizar Todonotes. Cuando hacía un cambio pasaba la "todo" a este sitio y la reescribía con mayor información y referencia a dónde se hizo el cambio.

Cambios realizados en 2.3:p se reemplaza por P_i (potencia instantánea); P se reemplaza por P_c (potencia compleja); P a secas es la parte real de la potencia compleja que es el promedio en el tiempo de la potencia compleja instantánea. Cambio realizado en 08/12/2010.

No hablo de la resistencia diferencial cerca de (3.4). 09/12/2010.

Párrafo despues de (3.4) mejorado. Se agrega nota al pie con la propiedad cíclica de las derivadas parciales. 09/12/2010

Finalmente puse en 3.5 una constante de integración que se anula porque la línea no está excitada previamente al encendido de la fuente. 09/12/2010

Ahora (10/12/2010) esta sección no es necesaria ya que las "todo" se pueden dejar en el texto sin problema. Cuando se arregle algo se le cambia el color a verde y queda en el sitio donde se necesita la referencia de lo que se hizo. Cuando se vaya a imprimir se deshabilitan las "todo" en el preámbulo (en ST.tex) y listo.

Además "listoftodos" hace mejor el trabajo que pretendía hacer con esta sección.

4.2. Cambios pendientes

Esta sección hace referencia a cosas estructurales que hay que hacer y no se han hecho. No es una "todo" debido a que afectan la globalidad del documento.

Req 06/12/2010 Cómo se hace un glosario de términos y hacerlo

Req 06/12/2010 Hacer un archivo para Bibtex y comenzar a colocar referencias

Req 07/12/2010 Cómo se hace un Index y hacerlo

Req 09/12/2010 Cómo se automatizan los problemas propuestos

Req 09/12/2010 Diseñar un método para realizar respaldos efectivos automáticos

Req 14/12/2010 Instalar el corrector ortográfico de Latex en Kile

Cuando el requerimiento haya sido atendido, se cambia el color de la "todo" a verde y se escribe en detalle cómo fue la solución.

4.3. En el capítulo 1

Está muy pobre todo el capítulo. La propuesto es irlo enriqueciendo a medida que se construye todo el texto, de forma que este primer capítulo sea una real introducción a lo que se tratará con más detalle más adelante.

Aun no sé si utilizar como esqueletos el desarrollo histórico y las aplicaciones actuales, o una combinación bien ajustada de los dos.

Este capítulo debería ser confeccionado por LDE y ajustado en los detalles de forma por CEP.

4.4. En el capítulo 2

Aun no sé dónde incorporar el desarrollo general de la propagación de la potencia en una línea de transmisión genérica. La cuestión es que la propagación guiada se puede estudiar en tres escenarios: TEM, cuasi-TEM y no-TEM. Creo tener claro que los detalles deben ir en los apéndices. Sin embargo está por construir.

4.5. En el capítulo 3

4.6. Ensayos

π un teta gorro com bm-hat $\hat{\theta}$ vs otro teta gorro bm-hat-up $\hat{\mathrm{\theta}}$ vs hat-bm $\boldsymbol{\hat{\theta}}$ vs hat-bm-up $\hat{\mathrm{\theta}}$ vs otro mathbf-hat $\hat{\theta}$ vs mathbf-hat-up $\hat{\mathrm{\theta}}$

$$\mu_0 \frac{d}{dz}\oint_C \underline{\boldsymbol{H}}_\perp \cdot d\boldsymbol{r} = i\omega\mu_0\epsilon_0 \oint_C \underline{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot d\boldsymbol{r}\times\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \frac{dI}{dz} = i\omega\epsilon_0\oint_C \underline{\boldsymbol{E}}_\perp\cdot\hat{\mathbf{n}}_c\, dr$$

Todo list

Apéndices

A Ecuaciones del telegrafista a partir de las ecuaciones de Maxwell

Hacer una revisión generalizada de este apéndice: revisión de forma y de fondo.

Supóngase un arreglo de dos conductores paralelos, de corte transversal constante como se muestra en el gráfico (ref gráfico). Si el largo de los conductores es mucho más grande que cualquier dimensión transversal y los conductores son perfectos y rodeados de un medio que tiene una permitividad y permeabilidad similar al vacío, la solución de las ecuaciones de Maxwell para esta situación al considerar una fuente alterna en uno de los extremos del cable es:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0},\\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0,\\
\nabla\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{J}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}.
\end{aligned}\tag{A.1}$$

Se consideran campos armónicos de la forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r},t) &= \underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},\\
\boldsymbol{B}_c(\boldsymbol{r},t) &= \underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}.
\end{aligned}\tag{A.2}$$

donde $\underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ denota el fasor de campo eléctrico y $\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r},t)$ el campo eléctrico camplejo. El vínculo con las ecuaciones de Maxwell, se realiza a partir de $\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{t})=\Re(\boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{r},t))$, es decir, el campo eléctrico es la parte real del campo eléctrico complejo. Con estas consideraciones, las ecuaciones de Maxwell se transforman en:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0},\\
\nabla\times\underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) &= i\omega\underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}),\\
\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) &= 0,\\
\nabla\times\underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) &= \mu_0\boldsymbol{J}-i\omega\mu\underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}).
\end{aligned}\tag{A.3}$$

Con la fuerte suposición de que en el sistema de par de cables se excita sólo el modo TEM (Modo transversoelectromagnético), la potencia fluye en dirección al eje simétrico del sistema (elegido por simplicidad como el eje z) y las componentes del campo en la dirección del eje son nulas ($\underline{\boldsymbol{E}}_{||}=0=\underline{\boldsymbol{B}}_{||}$).

$$\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})=\nabla_\perp\cdot\underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})+\nabla_{||}\cdot\underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})=\nabla_\perp\cdot(\underline{\boldsymbol{E}}_\perp(\boldsymbol{r})+\underline{\boldsymbol{E}}_{||}(\boldsymbol{r}))+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\nabla_\perp\cdot\underline{\boldsymbol{E}}_\perp(\boldsymbol{r})$$

donde

$$\nabla_{\|} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

además

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = (\nabla_{\perp} + \nabla_{\|}) \times (\underline{\boldsymbol{E}}_z + \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}) = \nabla_{\perp} \times \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} + \nabla_{\|} \times \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} = \frac{\partial \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}}{\partial z}$$

Las ecuaciones del Maxwell fasoriales (A.3), suponiendo que el medio que rodea los cables es similar al vacío, se transforman en:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\perp} \cdot \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}(\boldsymbol{r}) = 0,\\
&\frac{\partial \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}}{\partial z} = i\omega \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}(\boldsymbol{r}),\\
&\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}(\boldsymbol{r}) = 0,\\
&\frac{\partial \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}}{\partial z} = -i\omega\mu_0\epsilon_0 \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}(\boldsymbol{r}).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Si la segunda ecuación en (A.4) se le aplica el operador

$$\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial}{\partial z}$$

y con la ayuda de la cuarta ecuación en (A.4), se obtiene

$$-\frac{\partial^2 \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}}{\partial z^2} = i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}}{\partial z} = -\mu_0\epsilon_0\omega^2 \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}$$

Como el sistema es simétrico en z, la ecuación se puede escribir como

$$\frac{d^2 \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}}{dz^2} + \mu_0\epsilon_0\omega^2 \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} = 0 \tag{A.5}$$

la velocidad de la luz en el vacío es $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ y el número de onda de una onda plana monocromática de frecuencia ω es $k = \dfrac{\omega}{c}$. La ecuación para la componente transversal del campo eléctrico es:

$$(D^2 + k^2)\underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} = 0$$

con soluciones $\underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} = \underline{\boldsymbol{E}}_{+} e^{ikz} + \underline{\boldsymbol{E}}_{-} e^{-ikz}$; $\underline{\boldsymbol{E}}_c = \underline{\boldsymbol{E}}_{+} e^{i(kz-\omega t)} + \underline{\boldsymbol{E}}_{-} e^{-i(kz+\omega t)}$. La solución $\underline{\boldsymbol{E}}_{+}$ corresponde a una onda que se propaga en la dirección z a la velocidad de la luz en el vacío (onda incidente), así como $\underline{\boldsymbol{E}}_{-}$ se asociada con la onda reflejada.

Como divergencia y rotacional transversos son nulos ($\nabla_{\|}\times\underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}=\mathbf{0}$ y $=\nabla_{\perp}\cdot\underline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})=0$), se puede definir un potencial en el plano transverso, paralelo al eje z:

$$V(\boldsymbol{r},t)=\int_{+}^{-}\boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r}$$

donde los límites $+$ y $-$, denotan cualquier punto en el plano transverso del conductor derecho y del conductor izquierdo, respectivamente. Si se extiende la consideración fasorial de los campos al potencial, es decir: $V_c(\boldsymbol{r},t)=V(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ y $V(\boldsymbol{r},t)=$ Re($\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{r},\mathbf{t})$)[1].

El fasor de potencial se puede definir como:

$$V(\boldsymbol{r})=\int_{+}^{-}\underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

que aparece realizando la integral de línea del conductor derecho al conductor izquierdo, sobre la segunda ecuación en (A.4), previa postmultiplicación producto cruz con el vector $\hat{\mathbf{z}}$

$$\int_{+}^{-}\frac{\partial\hat{\mathbf{z}}\times\underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}}{\partial z}\times\hat{\mathbf{z}}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{d}{dz}\int_{+}^{-}(\underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}})-\hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{z}}\cdot\underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}))\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{dV}{dz}$$

El miembro izquierdo de la ecuación se transforma así:

$$\int_{+}^{-}i\omega\underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}(\boldsymbol{r})\times\hat{\mathbf{z}}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{+}^{-}i\omega\underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\mathbf{z}}\times d\boldsymbol{r}=\int_{+}^{-}i\omega\underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\mathbf{n}}dr$$

Se considera que $\hat{\mathbf{z}}\times d\boldsymbol{r}=\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{t}}dr=\hat{\mathbf{n}}dr$, donde $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector tangente a la curva en el plano transversal, que une el conductor derecho con el izquierdo.

El flujo magnético enlazado (Φ_B) en la superficie formada por las aristas de los cilindros y las curvas +- y -+ es:

$$\Phi_B=\iint\underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}\cdot\hat{\mathbf{n}}dr\,dz\Rightarrow\Phi_B=\Delta z\int_{+}^{-}\underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\mathbf{n}}dr=LI$$

finalmente, si se considera que $L_l=L/\Delta z$ es la inductancia por unidad de longitud:

[1] Atención: En circuitos eléctricos, ya sean de baja o alta frecuecia, es común utilizar la convención $V_c(\boldsymbol{r},t)=V(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}$, donde $j^2=-1$. En cualquiera de los casos los resultados son equivalentes, solo hay que tener cuidado en la interpretación de las partes complejas: para $j^2=-1$ reactancias negativas implican comportamientos capacitivos y reactancias positivas, comportamientos inductivos; para $i^2=-1$, reactancias negativas implican comportamientos INDUCTIVOS y reactancias positivas, comportamientos CAPACITIVOS.

$$\frac{dV}{dz} = \int_{+}^{-} \frac{\partial \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp}}{\partial z} \times \hat{\mathbf{z}} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{+}^{-} i\omega \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dr = i\omega L_l I$$

De una forma completamente análoga se obtiene la relación:

$$\frac{dI}{dz} = i\omega C_l V$$

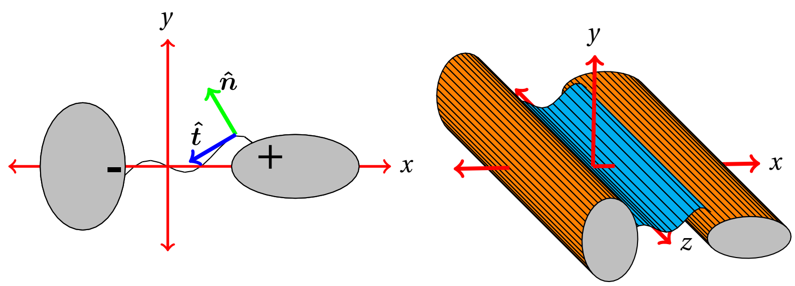

Figura A.1: Par de cables de corte transversal constante

¿Cómo se hace?

En la cuarta ecuación de (A.4) se premultiplica producto cruz con el vector $\hat{\mathbf{z}}$ y luego se realiza la circulación sobre la curva C que es el corte transversal del conductor derecho:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}}{\partial z} = -\frac{\partial \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp}}{\partial z} \Rightarrow -\frac{d}{dz} \oint_C \underline{\boldsymbol{B}}_{\perp} \cdot d\boldsymbol{r} = -i\omega\mu_0\epsilon_0 \oint_C \hat{\mathbf{z}} \times \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Si C se elige en la dirección antihoraria, el vector $d\boldsymbol{r} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{c}} dr$, donde $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{c}}$ es el vector unitario normal exterior al conductor derecho. Continuando el desarrollo y teniendo en cuenta la ecuación constitutiva $\boldsymbol{B} = \mu \mathbf{H}$ se sigue que:

$$\mu_0 \frac{d}{dz} \oint_C \underline{\mathbf{H}}_{\perp} \cdot d\boldsymbol{r} = i\omega\mu_0\epsilon_0 \oint_C \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} \cdot d\boldsymbol{r} \times \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \frac{dI}{dz} = i\omega\epsilon_0 \oint_C \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{c}} dr$$

Con la ley de Ampere para la intensidad del campo magnético se sabe que $\oint_C \underline{\mathbf{H}}_{\perp} \cdot d\boldsymbol{r} = I$, la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico $\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta z \epsilon_0 \oint_C \underline{\boldsymbol{E}}_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{c}} dr = Q$ y la definición de capacitancia $C = Q/V$ se obtiene:

$$\frac{dI}{dz} = i\omega \frac{Q}{\Delta z} = i\omega C_l V$$

El par de ecuaciones (A.6) engendran dos ecuaciones ondulatorias para el voltaje y la corriente, que se muestran en (A.7), se conocen como Ecuaciones del Telegrafista y su versión desde los campos es (A.5).

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= i\omega L_l I \\ \frac{dI}{dz} &= i\omega C_l V \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dz^2} &= -\omega^2 L_l C_l V \\ \frac{d^2I}{dz^2} &= -\omega^2 L_l C_l I \end{aligned} \tag{A.7}$$

Si las ondas de voltaje y corriente son análogas a la onda electromagnética que se propaga según (A.6), entonces $L_l C_l = \mu_0 \epsilon_0$

Las ecuaciones en (A.6) representan: la primera, una caída diferencial de tensión debida a la existencia de una inductancia; la segunda, una caída en la corriente debido al efecto capacitivo