Esercitazione di Calcolo Numerico

1. Calcolare il polinomio interpolatore di grado $n = 5$ della funzione $f(x) = e^x \sin(2x)$, usando una griglia uniforme sull'intervallo $[0, 2]$.
Visualizzare i risultati, riportando sullo stesso grafico:
- la funzione $f(x)$
- il polinomio di interpolazione $p(x)$
- i punti di interpolazione.

2. Ripetere l'esercizio precedente ma con

$$\text{funzione di Runge} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad -5 \le x \le 5$$

- con nodi equispaziati
- con i nodi di Chebyshev definiti sull'intervallo $[a, b]$

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \qquad i = 0, \dots, n$$

3. - Calcolare l'errore di interpolazione su una griglia di 100 nodi, relativo alla funzione $f(x) = e^x * \cos(4x)$, con $x \in [-3, 3]$, usando una griglia di interpolazione equispaziata con $n = 5, 10, 20, 40$ nodi e la matrice di Vandermonde.

- Calcolare l'errore inerente alla funzione $f(x) = \text{abs}(x - 1)$, con $x \in [-3, 3]$, usando una griglia equispaziata con $n = 5, 10, 20, 40$ nodi e la matrice di Vandermonde.

4. Interpoliamo la funzione $f(x) = \sin(x)$ con 22 nodi equispaziati sull'intervallo $[-1, 1]$. Generiamo un insieme perturbato di valori $\widetilde{f}(x_i)$ delle valutazioni funzionali $f(x_i) = \sin(x_i)$ con

$$\widetilde{f}(x_i) = f(x_i)(1 + (-1)^i 10^{-4}).$$

Osserviamo come varia l'errore di interpolazione su una griglia di 100 nodi equispaziati.

5. Determinare i coefficienti a_i dei polinomi di grado 10, 15, 20 interpolanti la funzione $f(x) = e^x + 1$ nei nodi equispaziati dell'intervallo $[-1, 1]$ (sugg. Usare la matrice di Vandermonde ... e poi risolvere il sistema lineare). Successivamente considerare i nuovi dati perturbati $\hat{f}(x_i) = f(x_i) + \varepsilon_i$ con $\varepsilon_i = (-1)^i 10^{-5}$ e calcolare i coefficienti $\hat{a}_i$ del polinomio perturbato $\hat{p}(x)$ interpolante i dati $(x_i,\ \hat{f}(x_i))$. Confrontare i grafici dei polinomi $p(x)$ e $\hat{p}(x)$.
Calcolare:

$$\max \mid a_i - \hat{a}_i \mid \qquad \text{e} \qquad \max \mid p(t) - \hat{p}(t) \mid$$

dove t è un vettore formato da 101 punti equispaziati in $[-1, 1]$.
Ripetere l'esercizio usando i nodi di Chebyshev

$$x_i = cos[(2i + 1)\pi/(2n + 2)],\ i = 0, \cdots, n$$

Commentare i risultati ottenuti.

6. Approssimare la radice quadrata di $x = 0.6$ considerando l'interpolazione nella forma di Lagrange con nodi i tre quadrati perfetti $x_0 = 0.49$, $x_1 = 0.64$, $x_2 = 0.81$. Stimare il resto di interpolazione e calcolare lo scarto rispetto al valore ottenuto con il comando `sqrt` di Matlab. Ripetere le operazioni aggiungendo il nodo di interpolazione $x = 0.36$.

7. Disegnare sull'intervallo $[-1, 1]$ il grafico della funzione $|\omega_n(x)| = |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$ per alcuni valori di n considerando nodi equispaziati. Ripetere l'esercizio considerando i nodi Chebyshev. Confrontare sullo stesso sistema di riferimento i due grafici.