

Esercitazione di Calcolo Numerico

1. Assegnare una matrice A tridiagonale e simmetrica memorizzata attraverso 2 vettori (diagonale principale e sopra-diagonale):

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & 0 \\ c_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Dopo avere introdotto un'opportuna tolleranza di calcolo per la valutazione dei determinanti dei minori principali, verificare, utilizzando Matlab, se la matrice A è direttamente fattorizzabile: $A = LU$. In caso positivo costruire la fattorizzazione.

2. Scrivere in Matlab gli algoritmi per la risoluzione di sistemi triangolari inferiore e superiore.

4. Utilizzando comandi Matlab rispondere alle seguenti domande. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

- (a) Calcolare AB e BA e mostrare che $AB \neq BA$.
- (b) Confrontare $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$.
- (c) Confrontare $A(BC)$ e $(AB)C$.
- (d) Confrontare $(AB)^T$ e $B^T A^T$.

5. Scrivere una *function* che generi la matrice $n \times n$

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e ne calcoli il determinante e il numero di condizionamento al variare di $n = 1, \dots, 50$. Fare due grafici, sulla stessa pagina, al variare di n del determinante e del condizionamento della matrice.

6. Siano $A = \text{hilb}(1000)$ e $B = \text{rand}(1000)$.

- a) Costruire il vettore b in modo che il sistema $Ax = b$ sia risolto da $x = \text{ones}(1000, 1)$, e il vettore c in modo che il sistema $By = c$ sia risolto da $y = \text{ones}(1000, 1)$;
- b) Calcolare i vettori x e y come soluzione dei sistemi lineari $Ax = b$, $By = c$ utilizzando il comando `\(mldivide)` di Matlab;
- c) Calcolare gli errori relativi rapportandoli al numero di condizionamento delle corrispondenti matrici. Cosa si osserva?
- d) Rappresentare in un grafico in scala semilogaritmica il condizionamento della matrice di Hilbert di dimensioni variabili da 2×2 a 50×50 .