

LOS MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA ASTRONOMÍA Y DE LA COSMOLOGÍA

DARÍO MARAVALL CASESNOVES *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

La Astronomía utiliza la Observación y el Cálculo para su progreso y desarrollo. Han sido etapas sobresalientes en el campo de la Observación: el empleo del telescopio en el siglo XVII, de la fotografía y el espectroscopio en el siglo XIX, de la radioastronomía y de la Astronáutica en el siglo XX. En esta última etapa el progreso ha sido enorme tanto en la adquisición de nuevos conocimientos como en la confirmación unas veces y otras en el abandono de antiguas teorías, que esta moderna tecnología ha hecho posible que así haya sucedido.

En cuanto al Cálculo es sumamente curioso que una teoría tan absurda y totalmente falsa como ha sido la geocéntrica de Ptolomeo (¿96-160 a. C.? haya durado tantos siglos, desde el siglo II hasta el XVI; y más extraño todavía que haya sido capaz de explicar en gran parte los movimientos de los planetas, de predecir eclipses etc. Todo ello ha sido debido a un gran despliegue de talento, ingenio e inventiva de las curvas llamadas epicicloides y excéntricas.

No son estos hechos exclusivos de la Astronomía, sino que también se han presentado en la historia de la electricidad y del calor. En la primera cuando aún se define la electricidad como un fluido de naturaleza desconocida, y en la segunda se creía que el calor era un fluido (el calórico) se hicieron descubrimientos e inventos, y se obtuvieron resultados científicos verdaderos y de gran importancia, que hoy en día se utilizan. Lo mismo sucedió durante mucho tiempo con la extraña y absurda creencia en la existencia del éter, antes de la aparición de la Teoría de la Relatividad.

Desde Copérnico (1473-1543) y su teoría heliocéntrica, gracias a la obra de Galileo (1564-1642) y

Newton (1643-1727) después, comienza a conocerse la realidad y la verdad física, mediante el empleo de la Mecánica para conocer los movimientos de los cuerpos celestes. Esta obra fue muy completada por Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) y Laplace (1749-1827) y otros muchos. Es Laplace el autor de la primera gran obra en cinco tomos de Mecánica Celeste.

A lo largo del siglo XIX el desarrollo de la Mecánica es extraordinario repercutiendo en el gran avance de la Astronomía matemática. Coriolis y Foucault desarrollan la teoría del movimiento relativo y con ello Foucault establece la teoría del péndulo que lleva su nombre, que muestra por primera vez la influencia de la esfericidad y del movimiento de rotación de la Tierra en el movimiento de un péndulo cuya longitud sea suficientemente grande. También se demuestra la desviación que afecta a la caída de los graves en la superficie de la Tierra debido a su rotación.

A finales del siglo XIX son extraordinarias las aportaciones de Poincaré con sus libros “Los nuevos métodos de la Mecánica Celeste” y “Lecciones de Mecánica Celeste” de tres tomos cada libro, que revolucionan la manera de enfocar la Astronomía Matemática. Con su memoria “Figuras de equilibrio de las masas fluidas” realiza una obra esencial en la moderna Cosmogonía.

A principios del siglo XX nace la Teoría de la Relatividad, dos partes de la misma la restringida y la general, sobre todo esta última, dan origen a una nueva Cosmología relativista que sustituye en gran parte a la clásica, con empleo de nuevos métodos matemáticos como son el Cálculo Tensorial, el Cálculo Diferencial

Absoluto y la Geometría Diferencial no euclídea. Predice y comprueba la existencia de nuevos fenómenos físicos, como son la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, la transformación de masa en energía y viceversa; en el campo del sistema solar permite el cálculo exacto del corrimiento del perihelio de Mercurio, la desviación de los rayos luminosos en campo gravitatorio del Sol, el corrimiento hacia el rojo de la luz procedente del Sol. En cuanto al Universo sustituye los modelos clásicos por otros relativistas, utiliza además de Universos estáticos, otros dinámicos, es decir, en expansión que explican la fuga de las galaxias, es decir un alejamiento de nosotros con velocidades proporcionales a sus distancias, comprobado todo ello por el corrimiento hacia el rojo de la luz procedente de las galaxias.

La Física de las partículas tiene gran aplicación en la Astronomía y en la Cosmología, entre otras cosas explica la enorme cantidad de energía emitida por el Sol y las estrellas, inexplicable por la Física clásica. También se ha demostrado la existencia de estrellas de neutrones, y la Física de partículas juega un importante papel en la moderna Cosmología basada en el Big Bang, al detectar una radiación uniforme e isotrópica, correspondiente al espectro del cuerpo negro a la temperatura de tres grados Kelvin, en los años sesenta del siglo XX, que es considerado como la huella que ha quedado de la gran explosión del Big Bang que tuvo lugar hará unos 15.000 millones de años.

Hoy se conoce la existencia en el universo de la materia oscura, que en mi opinión pudiera ser posible que se trate de fractales, uno de los últimos objetos matemáticos, de finales del siglo XX. Este polvo fractal está espaciado por un volumen finito, pero ocupando un espacio nulo, con una masa finita y por tanto una densidad infinita. Los fractales tendrían además de masa, centro de gravedad, momentos de inercia (elipsoides de inercia), y asimismo para mantenerse cohesionadas requerirían una quinta interacción (o fuerza) entre ellos, que habrá que agregar a las cuatro interacciones conocidas: gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte.

Las nuevas teorías fisicomatemáticas que van surgiendo con el tiempo, los fenómenos y los nuevos cuerpos celestes que se van descubriendo por los

potentes métodos de observación que muchas veces resultan inauditos, han hecho que nuestros conocimientos actuales en Astronomía sean muy grandes y seguros, pero también a lo largo del tiempo se han producido cambios cualitativos y cuantitativos muy importantes en nuestros conocimientos.

Las grandes dificultades de los problemas planteados, la imposibilidad de reproducir en los laboratorios terrestres lo que sucede en los astros, hacen que queden todavía muchas cosas por explicar y por conocer. Por ejemplo no existe hasta el momento una teoría totalmente satisfactoria sobre el origen y formación del sistema solar.

Las distancias en el universo son tan grandes que ha sido necesario introducir nuevas unidades de distancia como son la unidad astronómica, el año luz, y el parsec. También las edades de la Tierra, del Sol y de las Estrellas son tan grandes que ha sido necesario introducir una nueva unidad de tiempo.

Antes de Copérnico la Astronomía estaba muy avanzada, a pesar de que hasta él se creía en la teoría geocéntrica. Los griegos aplicaron la Trigonometría a la Astronomía, que nació como una ciencia auxiliar de la misma. Los árabes independizaron la Trigonometría de la Astronomía y la establecieron como una ciencia independiente, como una prolongación de la Geometría. Fue Euler en el siglo XVIII quien dio una base analítica a la Trigonometría a partir de una famosa fórmula que liga la exponencial imaginaria con el seno y el coseno; dio los desarrollos en serie de estas funciones y las relacionó con las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Aristarco de Samos (¿310-230? a. C.) es prácticamente el creador de la teoría heliocéntrica, pero no tuvo éxito, aunque tuvo algunos seguidores en la Edad Media que se pueden considerar precursores de Copérnico.

A pesar de que la teoría geocéntrica no es verdadera, curiosamente hubo un gran progreso en la Astronomía. Los astrónomos observaron que los planetas se acercaban y se alejaban de la Tierra, se movían en uno y otro sentido, con velocidades diferentes. Como esto es incompatible con el movimiento circular, que es el único que admitían, para explicar este hecho idearon un complicado sistema de epiciclos

y excéntricas, que explicaban el movimiento de los astros, tales como eran vistos desde la Tierra. Un epiciclo consiste en el movimiento de un punto P que recorre con velocidad constante una circunferencia, cuyo centro M recorre también con velocidad constante otra circunferencia de centro O . Los epiciclos se pueden multiplicar indefinidamente. Una excéntrica consiste en un punto P que recorre una circunferencia C , de modo que el radio vector que va desde un punto fijo M interior a C , al móvil P gira con velocidad angular constante. Combinando epiciclos y excéntricas se pueden explicar las trayectorias de los planetas tal como se ven desde la Tierra. Es muy grande el talento y el ingenio demostrado por los astrónomos antiguos para hacer progresar de este modo la Astronomía, máxime teniendo en cuenta que entonces la Geometría y la Cinemática de los epiciclos no habían alcanzado la profundidad en su conocimiento que alcanzó en el siglo XIX. Los árabes ya sabían en el siglo XII sobre esta materia cosas que los europeos no supieron hasta el siglo XVII con De La Hire y en el siglo XIX en que ya superaron en mucho a los árabes.

Copérnico tuvo precursores entre ellos Nicolás de Oresme (1320-1382) tuvo la idea de que la Tierra se mueve en un ciclo inmóvil, mostrando que la tesis de que la rotación del cielo alrededor de la Tierra, no puede demostrarse ni por la experiencia, ni por la razón. El cardenal Nicolás de Cusa (1401-1464) supuso que la Tierra giraba alrededor de su eje, y se movía alrededor del Sol.

Kepler (1571-1630), utilizando las numerosas observaciones astronómicas de Tycho Brake (1546-1641) abandona por primera vez las trayectorias circulares de los planetas, cosa que no había hecho Copérnico, y las sustituye por trayectorias elípticas de las que el Sol ocupa un foco (su segunda ley) que junto a las dos otras leyes, de las áreas y la que liga los semiejes mayores del las órbitas y los tiempos de revolución de los planetas alrededor del Sol, establece definitivamente la dinámica del sistema solar en primera aproximación, cuando se considera aisladamente el movimiento de cada planeta, despreciando las perturbaciones de sus satélites, es lo que hoy se llama en Mecánica el problema de los dos cuerpos.

Galileo (1561-1642) mediante el empleo del telescopio confirma de manera definitiva el sistema

heliocéntrico y realiza numerosos descubrimientos en Astronomía, al mismo tiempo mediante el uso del plano inclinado y de sus experiencias sobre la caída de los graves, se le puede considerar como el iniciador de lo que se ha llamado la Ciencia Nueva. Hasta Galileo hay un largo camino, que comienza en la Edad Media durante el cual se habla constantemente de matematizar la Física, pero en el que fallan estos buenos deseos, principalmente porque las Matemáticas no han alcanzado el desarrollo suficiente. Por ejemplo Grosseteste (1175-1253) escribió: "todas las causas de los efectos naturales deben ser expresadas por medio de líneas, ángulos y figuras". El cardenal Nicolás de Cusa escribe en su libro "Docta Ignorancia" que para partir de presupuestos ciertos es necesario apoyarse en las Matemáticas; hace la observación de que a medida que crece el radio de una circunferencia más se aproxima a una recta. Hoy diríamos que el límite de una circunferencia cuando su curvatura tiende a cero (su radio tiende a infinito) es una recta.

Hasta Galileo se puede decir que existen dos Físicas, una válida para lo que sucede en la superficie terrestre, es la Física sublunar aplicable a un mundo corruptible y cambiante, y la Física celeste aplicable a un mundo incorruptible e inmutable. Sus importantes descubrimientos astronómicos, su enunciado de la ley de inercia según la cual cualquier masa (punto material) sobre la que no actúa ninguna fuerza, está en reposo (permanece inmóvil) o se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo; ley generalizada después por Descartes que utiliza sus experiencias con el plano inclinado para modificar la aceleración con la que cae un grave, etc, etc, prepara el camino para la unificación de la Física en una sola ciencia, válida para el Sol, la Tierra y las estrellas. Esta tarea queda ultimada con el descubrimiento de la gravitación universal por Newton, en virtud de la cual, son las mismas fuerzas las que hacen caer un grave sobre la superficie de la Tierra (la famosa manzana de Newton), que las que hacen girar a los planetas alrededor del Sol, cumpliendo las tres leyes de Kepler, y también hacen girar alrededor de los planetas a los satélites. Pero Newton hace algo más, aplica el Cálculo Infinitesimal, descubierto por él y por Leibniz (1646-1716) a la Mecánica, establece las ecuaciones que dan las aceleraciones en función de las fuerzas, que permiten resolver el problema directo de hallar el movimiento de un punto material conocidas las fuerzas, y el problema inverso

de determinar cuál es la fuerza o cuáles pueden ser las fuerzas que actuando sobre un punto material le obligan a seguir un movimiento conocido de antemano.

Newton demostró por el cálculo las leyes de Kepler del movimiento de los planetas alrededor del Sol, por esta razón se le puede considerar el creador de la Mecánica celeste. Demostró como puede ser calculada la masa del Sol y de cualquier planeta que tenga al menos un satélite. Inició la teoría de las perturbaciones, en virtud de la cual la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es perturbada por la atracción que sobre ella ejerce el Sol; es el problema de los tres cuerpos. También explicó la precesión de los equinoccios que hace que la Tierra oscile como una peonza, a causa de la atracción de la Luna y el Sol. Aclaró el misterio de las mareas. Con todo ello se demostró que la ley de la gravitación universal de Newton es realmente universal. Se puede decir que en 1687 con los Principios de Newton nace la Mecánica Racional.

En 1736, Euler publicó un libro de Mecánica que supuso un cambio de orientación y un gran avance respecto a los Principios de Newton. La concepción que tenía Newton de la Mecánica era geométrica, mientras que la de Euler era analítica. Es algo parecido a lo que sucede con la Geometría de Descartes de 1636 respecto a los “Elementos de Euclides”, que era también un cambio de visión y de orientación respecto a la Geometría, es sustituir el método sintético que inició Tales de Mileto en el siglo VII a. C., por el método analítico que amplía enormemente el horizonte de la Geometría, introduce en ella las figuras imaginarias, los puntos y rectas en el infinito (impropias), las rectas isotropas, etc.

Newton como ya hemos dicho se ocupó de la Teoría de las Perturbaciones planetarias en el caso de la Tierra, del Sol y de la Luna que perturba el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Por las mismas causas los satélites perturban el movimiento de su planeta respecto al Sol. Los demás planetas se perturban unos a otros. Esta teoría es la que permitió el descubrimiento de Neptuno en siglo XIX y de Plutón en el siglo XX. Euler continuó la labor de Newton y la mejoró notablemente, no pudo resolver exactamente el problema de los tres cuerpos, pero dio una teoría

aproximada en el caso del Sol, de la Tierra y de la Luna, lo que permitió que la Marina inglesa pudiera usar unas tablas que fueron de gran utilidad para fijar la posición de los barcos en el mar, lo que contribuyó a que Inglaterra alcanzase el dominio de los mares en el siglo XVIII. Euler fue recompensado económicamente por la Marina inglesa.

La Teoría de las Perturbaciones, tan importante en la Astronomía y en la Mecánica celeste es una escalera de dificultades crecientes hasta el infinito podemos decir, porque el problema de los n cuerpos del sistema solar es prácticamente irresoluble. En el problema de los tres cuerpos, el primero y el segundo peldaño fueron subidos por Newton y por Euler, y los tres siguientes por Lagrange, Laplace y Poincaré.

En 1746 Lagrange resolvió el problema de la libración de la Luna que consiste en que ésta presenta siempre la misma cara a la Tierra (la otra permanece siempre invisible). En 1766 dio una solución aproximada (la exacta aún no es conocida) de un problema de seis cuerpos que son el Sol, Júpiter y cuatro de sus satélites (los entonces conocidos) que da una explicación de las observaciones astronómicas realizadas. En 1772, 1774 y 1778 consiguió nuevos aciertos sobre el movimiento de la Luna y de los planetas.

Laplace escribió su Mecánica celeste en cinco tomos que se publicaron de 1779 a 1825. Con anterioridad había demostrado la estabilidad del sistema solar, al demostrar que las distancias medias de los planetas al Sol son prácticamente invariantes, lo que demuestra que ningún cuerpo celeste del sistema solar puede escapar de él. La Mecánica Celeste es elevada por Laplace a un nivel altísimo, se puede decir que la Mecánica celeste es pura Astronomía Matemática.

Newton resolvió correctamente el problema de los dos cuerpos, aunque no con carácter general, sino en el caso particular del Sol y de un planeta, en el que prácticamente el problema de los dos cuerpos es el problema del cuerpo único, porque en el primer caso (dos cuerpos) lo que permanece fijo es el centro de gravedad del sistema de los dos cuerpos, los cuales se mueven alrededor de su centro de gravedad, pero en el caso del Sol y de un planeta, la masa del Sol al ser muchísimo mayor que la del planeta hace que el centro de gravedad esté muy próximo del Sol, lo que hace que

se pueda considerar que el Sol esté fijo y que el planeta gira alrededor de acuerdo con la ley de la gravitación universal.

Aunque Euler, Lagrange y Laplace hicieron aportaciones muy importantes al problema de los tres cuerpos, este problema permanecería sin resolver, porque es un sistema de nueve ecuaciones diferenciales lineales muy difícil, a pesar de que se puede rebajar el orden del sistema debido a que existen integrales primeras del mismo.

Resolver el problema de los n cuerpos como el Sol y todos sus planetas, que se pueden considerar como puntos materiales, consiste en que conocidas las posiciones y velocidades en un instante dado, hallar sus posiciones y velocidades en un instante posterior cualquiera, lo que equivale a resolver un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, del que se conocen integrales primeras que pueden rebajar el orden del sistema. Este problema es prácticamente irresoluble en el caso general, aunque si se conoce en el caso de $n=3$ la solución de algunos casos particulares, como veremos más adelante.

La aportación de Poincaré a este problema ha sido importantísima y además ha abierto un nuevo campo en la Mecánica (invariantes integrales, órbitas periódicas, soluciones doblemente asintóticas, etc). Su obra está recogida en sus libros “Nuevos métodos de la Mecánica celeste” en tres tomos publicados en 1892, 1893, y 1899. Para los invariantes véase el tomo II de mi libro Problemas de Mecánica citado en la bibliografía.

Poincaré realizó un estudio muy profundo sobre las mareas al que dedicó íntegramente el tomo III de su libro “Lecciones de Mecánica celeste” cuyos tres tomos se publicaron desde 1905 a 1910.

La importancia del libro de Poincaré antes citado “Nuestros métodos...” es tal que en los Estados Unidos en 1957, cuando los rusos lanzaron su primer Sputnik, fue reimpreso en francés por la editorial Dover. Una nueva teoría creada por Poincaré es la de las órbitas periódicas, que son aquellas en que transcurrido un periodo de tiempo todos los n cuerpos vuelven a ocupar las mismas posiciones y tener las mismas velocidades que en el instante inicial del periodo.

En el problema de los tres cuerpos pueden existir configuraciones estables. En 1772 Lagrange demostró matemáticamente que tres cuerpos atrayéndose según la ley de la gravitación universal de Newton pueden formar una configuración estable, si ocupan los vértices de un triángulo equilátero, siendo dos cuerpos de masa muy pequeña y el tercero de masa muy grande, entonces los de masa pequeña giran alrededor del de masa muy grande que permanece inmóvil por casi coincidir con el centro de gravedad de los tres cuerpos. Los tres forman una configuración estable, y los de masa pequeña describen la misma órbita alrededor del de masa grande (son coorbitales), uno de los dos va delante del otro, parece como si el segundo persiguiera al primero. Los radio vectores que van del de masa grande a los dos de masa pequeña forman un ángulo de 60° .

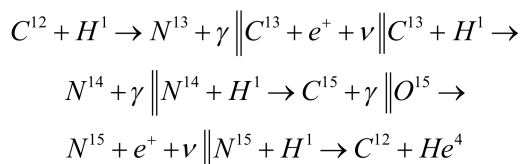
Un ejemplo de la anterior configuración estable de Lagrange es la que forman Júpiter y los asteroides Aquiles y Patroclo descubiertos en 1906. Por los nombres de estos asteroides se dice que están en situación troyana, a causa de la Iliada. Otro ejemplo se ha encontrado en Saturno, que tiene dos satélites Dione y Dione B coorbitales es situación troyana como los anteriores de Júpiter. Véase la nota 1ª en la que doy otra nueva configuración estable de n cuerpos, que aunque no se conozca, sí pudiera existir.

Herschel llamó el gran misterio a la gran pérdida de energía del Sol por radiación. En el marco de la Ciencia clásica no se puede hallar explicación a este hecho, ni por la energía liberada en las reacciones químicas (combustión), ni por la energía mecánica liberada por el Sol a causa de la gravitación (teoría de Helmholtz) ni por la energía liberada por la radioactividad. Hubo que esperar a que Einstein estableciera la posibilidad de transformar la masa (materia) en energía y a que se conociera la gran cantidad de energía liberada en las reacciones nucleares que dan origen a las transmutaciones atómicas (la “alquimia” moderna) para poder explicar el gran misterio de Herschel. Así lo apuntaron Harkin y Wilson en 1915, Perrin y Eddington en 1920, Atkinson y Hontesman en 1929, quienes sugirieron las reacciones nucleares.

Se sabía por el análisis espectral que la temperatura exterior del Sol era de 6000 K (Kelvin) y por los cálculos matemáticos de Eddington que la temperatura interior era de 15000 K, más tarde se elevó ésta a

21000 K. A esta temperatura pueden tener lugar las reacciones termonucleares y formarse helio a partir del hidrógeno, por fusión de cuatro átomos del segundo en un átomo del primero, con una liberación muy grande de energía equivalente a 0.0293 unidades de masa atómica, que podría explicar el origen de la energía perdida por el Sol y también por las estrellas.

En 1938 los físicos alemanes Bethe (judío) en Norteamérica y Von Weizsäcker (ario) en Alemania, independientemente y casi al mismo tiempo idearon el mecanismo de la reacción termonuclear que explica como tiene lugar en el Sol la transformación de cuatro núcleos atómicos de hidrógeno (protones) en uno de helio (partícula α) mediante el siguiente mecanismo:



que significa que un núcleo de carbono común C^{12} captura un protón H^1 y se transforma en un núcleo N^{13} (isótopo del nitrógeno) con liberación de energía en forma de rayos gamma (γ). El núcleo de N^{13} que es inestable da origen a C^{13} (isótopo del carbono), a un positrón e^+ , y a un neutrino (ν). El C^{13} captura un protón y da origen a un núcleo de Nitrógeno común N^{14} y radiación gamma. El núcleo N^{14} captura un protón y da origen a un núcleo de O^{15} (isótopo del oxígeno) el cual es inestable y se desintegra en un núcleo de N^{15} (que es estable), un positrón y un neutrino. El N^{15} captura un protón y da origen a un núcleo de C^{12} y a un núcleo de helio común He^4 ; el C^{12} comienza de nuevo el ciclo que es cerrado (auto generativo). Este mecanismo se compone de seis reacciones.

Observamos que el C^{12} y el nitrógeno N^{14} que existen en el Sol no se consumen, que se emite radiación gamma (γ). Los positrones (e^+) y los neutrinos (ν), al mismo tiempo que cuatro H^1 se transforman en un He^4 formado por dos protones y dos neutrones. Un protón por emisión de un positrón y de un neutrino se transforma en un neutrón. El carbono y el nitrógeno actúan como “catalizadores”, el hidrógeno como “combustible” y el helio es la “ceniza” de esta “combustión” en este “horno solar”. La transformación del hidrógeno en helio a la temperatura de 21000 K es la primera fuente de producción de energía que da cuenta de la energía radiada por el Sol.

El origen del sistema solar es el problema cosmogónico restringido; el problema general es el del origen del Universo.

Buffon (1707-1778) fue seguramente el primero que formuló una teoría para explicar la formación del sistema solar. A una teoría como la suya se la denomina catastrofista.

Kant en 1775 dio una teoría del origen del sistema solar, fue el primero que tuvo la idea de la existencia de universos-islas (las galaxias de ahora) y creyó que la galaxia Andrómeda era uno de estos universos islas. A una teoría cosmogónica como la suya se la denomina nebular.

Laplace en 1796 expuso una teoría nebular del origen del sistema solar, que durante mucho tiempo gozó de mucha adhesión y popularidad. En tiempos de Laplace se tenía un conocimiento incompleto e imperfecto del sistema solar, según el cual todos los planetas giraban alrededor del Sol en sentido directo, lo que no es cierto pues Urano gira en sentido retrógrado; también creían que las órbitas de los planetas estaban en planos muy poco inclinados unos respecto de otros, lo que tampoco es cierto porque la órbita de Urano está en un plano casi perpendicular a los planos de los otros planetas. Según Laplace lo mismo les sucedía a los satélites respecto a sus planetas, lo que tampoco es cierto, porque Urano tiene dos satélites que giran en sentido retrógrado.

Faye a mitad del siglo XIX modificó la teoría de Laplace para salvar estas deficiencias, pero su teoría, también nebular, tuvo otros fallos, según la misma, la Tierra y algunos otros planetas eran más viejos que el Sol.

Ha habido otras muchas teorías cosmogónicas, pero ninguna es aceptable, unas son catastrofistas entre las cuales fue muy popular la de Jeans (1877-1944) modificada después por Jeffreys para evitar el fallo que tenía de no poder explicar la rápida rotación de Júpiter. En 1935 Russell demostró que en las teorías catastrofistas no se cumplen las leyes de conservación del movimiento. Otra crítica importante a la teoría de Jeans, es que debido a la alta temperatura en el núcleo del Sol y a la presión de la radiación como opuesta a la contracción gravitatoria en el mantenimiento del equi-

libro estelar (teoría de Eddington) las masas arrancadas del Sol, una vez liberadas se difundirían en el espacio exterior en vez de condensarse en los planetas.

Son muy importantes para la Cosmogonia las investigaciones de Poincaré recogidas en su memoria "Figura del equilibrio de una masa fluida". Considera el caso de una masa fluida en rotación, que se contrae lentamente permaneciendo homogénea; al principio es una esfera, que se va convirtiendo en un elipsoide de revolución que se aplasta cada vez más hasta convertirse en un elipsoide con los tres ejes desiguales. Más tarde el elipsoide toma la forma de una pera, hasta que se divide en dos partes desiguales. Aplicó esta teoría a los anillos de Saturno. Liapounoff en 1905 se planteó el problema del cuerpo en forma de pera y llegó a la conclusión de que el movimiento era inestable. Las investigaciones de Poincaré sobre la Astronomía matemática fueron más bien cualitativas que cuantitativas y le condujeron al estudio del Análisis Situs, que desarrolló en varias memorias que revolucionaron esta parte de la Ciencia.

A pesar de ser un gigante de las Matemáticas y de la Física, Poincaré cometió algún error, como el creer que había demostrado en la Cosmogonia la estabilidad de los cuerpos piriformes (en forma de pera). Este importante problema fue planteado por Liapounoff en 1905, y a él dedicaron sus esfuerzos Darwin (hijo del Creador de la Teoría de la evolución de los especies) y también Jeans y Lichtenstein; el resultado fue la inestabilidad de los cuerpos en forma de pera.

El camino iniciado por Poincaré de las órbitas periódicas, está ligado al problema llamado de los pequeños divisores, que es un problema de Teoría de Números; la perturbación en el movimiento de dos planetas se expresa mediante series de Fourier, que pueden ser divergentes, y entonces la órbita no es estable. En 1954 Kolmogoroff y en 1962 Arnold y Moser (los tres rusos) demostraron que para la mayoría de las pequeñas perturbaciones, la mayoría de las órbitas son estables, aunque no periódicas, pero difieren poco de las órbitas periódicas, por eso las llaman casi periódicas. Hoy esta teoría se la denomina de los sistemas dinámicos, y en ella es fundamental el teorema Kam, cuyo nombre son las tres letras iniciales de los tres matemáticos antes citados. Según éste se presenta el llamado problema de los pequeños divi-

sores, que son números racionales en los que el denominador es un número entero pequeño. Un ejemplo se presenta con Júpiter y Saturno, para los que el coeficiente de sus años planetarios vale $5/2$, por lo que cada diez años, ambos planetas se encuentran en las mismas posiciones.

En 1943 Von Weizsäcker volvió de nuevo a las teorías nebulares, cambió la nebulosa primitiva de Laplace con el mundo de los torbellinos de Descartes, apoyándose en la teoría moderna de la turbulencia. Supuso que en la nebulosa inicial se formaron torbellinos, cada uno de los cuales se condensaría en un sistema distinto, de modo que en la condensación de cada torbellino se formarían torbellinos menores, que al condensarse darían origen al sistema solar.

Han surgido otras teorías, como las de Schmidt, Gamow, Kniper, Alfven, etc, este último introdujo el campo magnético además del gravitatorio. Hoyle supone, como antes hizo Russell, que el Sol es una estrella doble, pero que su compañera en vez de chocar con otra estrella, explotó por causas interiores, como la explosión de una nova dando origen al sistema solar.

Actualmente hay otras dos tendencias en la Cosmogonia, una la más difundida, es una teoría nebular, entonces el proceso de formación del sistema solar es debido a la condensación de la materia enrarecida de la nebulosa primitiva, y otra debida a Ambartsumian según la cual el nacimiento del Sol y de las estrellas se debe a la explosión de cuerpos superdensos muy masivos (el cuarto estado de la materia) a los que denomina protoestrellas. La abundancia de teorías cosmogónicas es prueba fehaciente de la falta de consenso entre los científicos en este tema. En todos ellos el uso de las Matemáticas y de la Física es indispensable.

Si el problema de la formación del sistema solar es muy difícil y no hay acuerdo sobre el mismo, igual sucede con el problema de su muerte.

Basándose en las reacciones termonucleares del ciclo carbono-nitrógeno, de Bethe y Von Weizsäcker antes descrito, Gamow (1901-1968) formuló una teoría de la muerte del Sol, en ella a medida que el contenido de hidrógeno disminuye y aumenta el de helio, como en las condiciones que reinan en el interior del

Sol, el helio es más opaco que el hidrógeno para la radiación gamma, a ésta le resulta más difícil escapar del Sol y aumenta por tanto la temperatura interior, con ella aumenta también la velocidad de transformación del hidrógeno. El Sol se va haciendo cada vez más caliente y luminoso hasta convertirse en una estrella azul caliente con una luminosidad actual, proceso que es muy lento. En el momento en que se agota el hidrógeno, el Sol comienza a contraerse por la acción de la gravedad, que es ahora la única fuente de energía (retorno a la teoría de Helmholtz) y se transforma muy rápidamente en una enana blanca primero, roja e infrarroja después, hasta convertirse en una enana negra de escaso tamaño, muy fría y superdensa. El fin del sistema solar es un Sol rodeado por unos planetas fríos e inertes. A diferencia de la teoría clásica de la muerte de la Tierra por enfriamiento del Sol a partir del momento actual, la muerte del Sol es por enfriamiento, pero después de haber alcanzado un gran calentamiento en un estado de estrella azul, que acabaría con la vida en la Tierra, por la excesiva temperatura causada por la radiación solar.

El “horno solar” tiene la particularidad de quemarse “el combustible nuclear” (el hidrógeno) y quedar menos de éste, el que queda “arde” más rápidamente y se hace mayor la temperatura y el desprendimiento de calor del “horno solar”.

En el estado final el núcleo del Sol no es sólido, ni líquido, ni gaseoso, es el correspondiente a un cuarto estado de la materia, que se llama gas degenerado, o de Fermi, o también materia supercondensada. En los gases las distancias entre átomos son grandes, y sus moléculas se mueven en grandes velocidades, chocando entre sí en una agitación caótica. Por el contrario en los sólidos, los átomos están mucho más juntos, de ahí su rigidez, el límite máximo de acercamiento entre átomos, es su diámetro. Si un sólido es sometido a grandes presiones (caso de una estrella enana blanca) los átomos se rompen, liberándose los electrones de la corteza, y la distancia entre los átomos rotos podría reducirse al diámetro de sus núcleos, pero sin llegar a tanto, pueden estar los suficientemente alejados, para comportarse como un gas, pero con propiedades completamente distintas de los gases ordinarios (gas degenerado) alcanzando una densidad enorme (materia supercondensada) de modo que cuanto mayor sea su masa, menor es su volumen. El

Sol muerto se reducirá a un tamaño parecido al de la Tierra, y a una densidad igual a 3000000 veces la del agua.

En lo tocante a los gases degenerados la fantasía de los científicos ha ido muy lejos, suponiendo que la presión siga aumentando, se llegarían a romper los núcleos atómicos y los protones liberados se unirían a los electrones para formar neutrones, que al no tener carga eléctrica podrían aproximarse entre sí, se obtendría un gas de neutrones, que alcanzaría densidades todavía más elevadas, de centenares de millones de la del agua, serían las llamadas estrellas de neutrones. Estas estrellas de neutrones fueron modelizadas y estudiadas matemáticamente en los años treinta por el físico matemático ruso Landau condenado a muerte en 1937 e indultado, que después sería Premio Nobel y Premio Lenin. Lo sorprendente es que se descubrieran en el cielo en los años sesenta, con los pulsares.

Existen otros modelos de reacciones termonucleares distintas de las ciclo carbono-nitrógeno, que tienen lugar a distintas temperaturas T_1, T_2, \dots inferiores a la temperatura T_n del modelo de Bethe antes descrito, es decir a los 21000 K, que no son auto regenerativas o de ciclo cerrado, en las que existen como combustibles el hidrógeno y otros elementos ligeros, que pueden ser deuterio, isótopos del litio, el berilio, o isótopos del bario los cuales colisionando con protones, transforman el hidrógeno en helio. En estas últimas reacciones termonucleares como el combustible distinto del hidrógeno se consume, dura hasta que se agota este combustible.

Combinando estos modelos de reacciones termonucleares con alternancias de contracción gravitatoria, Gamow ha elaborado una teoría de la evolución del Sol, de estrella roja gigante y fría a un estado actual de enana amarilla. El proceso comienza con la reacción termonuclear a una temperatura T_1 , hasta consumir los muchos átomos que sirven de combustible en que se usa esta reacción termonuclear y comienza una fase de contracción gravitatoria en que el Sol se contrae y calienta hasta alcanzar la temperatura T_2 de la siguiente reacción termonuclear en que cesa la contracción gravitatoria y comienza la nueva reacción termonuclear hasta que se agotan los núcleos atómicos que sirven de combustible, momento en que comienza una nueva fase de contracción gravitatoria y así sucesiva-

mente hasta alcanzar la temperatura T_n del ciclo carbono-nitrógeno, que es el momento actual. De esta forma explica Gamow la juventud, vejez y muerte del Sol, la última fase como la describimos anteriormente.

En la Física clásica existían muchas enigmas y paradojas, es decir fenómenos físicos reales que no podían ser explicados dentro del marco conceptual clásico, pero que podíamos decir que no tenían suficiente importancia, o no se les concedía, para tratar de cambiar por esta falta de explicabilidad de la Física clásica por una nueva Física. Entre estas paradojas una muy importante es la de Olbers (1758-1840) planteada por él en 1820, según la cual la densidad de radiación recibida en un punto cualquiera es muy grande, lo que viene a significar no solo la imposibilidad de la oscuridad de la noche, sino también la existencia de una luz cegadora. Se debe ello a que en un espacio euclídeo infinito con distribución uniforme de las fuentes de intensidad luminosa, la cantidad de ésta sobre un estrato esférico de radio r y espesor dr es proporcional a $4\pi r^2$ y teniendo en cuenta la ley de decrecimiento proporcional al cuadrado de la distancia, el flujo luminoso que incidiría sobre el centro de la esfera, debido a todo el universo es proporcional a la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{4\pi r^2}{r^2} dr = 4\pi \int_0^{\infty} dr = \infty \quad (1)$$

En mi opinión, la interpretación fotónica de la luz (corpúscular) convierte en estocásticos los fenómenos de incidencia de la radiación y de la luminosidad lo que invalida la paradoja de Olbers, véase la nota 2ª mi teoría.

Una de las aplicaciones más importantes de la Teoría de la Relatividad de Einstein fue a la Astronomía, concretamente al sistema solar y explica tres fenómenos, no explicables por la Mecánica Newtoniana que son:

- El corrimiento del perihelio de Mercurio.
- El corrimiento hacia el rojo de la luz procedente del Sol
- La desviación de los rayos luminosos al pasar cerca del Sol

Fue Schwarzschild (1873-1916) quien resolvió el problema del cuerpo único en la Teoría de la Rela-

tividad general, aplicable al movimiento de un planeta alrededor del Sol, obteniendo el elemento lineal del espacio tiempo que es

$$\mu = \frac{GM}{c^2}; ds^2 = - \left[\frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] + \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) c^2 dt^2 \quad (2)$$

El cuerpo único significa que existe una partícula de masa M fija, que suponemos situada en el origen, rodeada de un espacio vacío, G es la constante de la gravitación universal de Newton, c la velocidad de la luz en el vacío. La coordenadas r , θ y φ de (1) son las coordenadas esféricas en el espacio euclídeo de tres dimensiones.

De acuerdo con la Relatividad general se admite ahora que los planetas siguen las líneas geodésicas del pseudo espacio riemanniano (2) y los rayos luminosos siguen las líneas geodésicas cuando su longitud es nula ($ds=0$). Por tanto hay que hacer mínima la integral

$$\int \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 d\tau \quad (3)$$

donde ds es el de (2). Para resolver este problema hay que aplicar las ecuaciones de Lagrange de la Mecánica analítica, que son las ecuaciones de Euler-Lagrange del Cálculo de Variaciones en este caso particular. La τ tiene las dimensiones de un tiempo.

Existe una integral primera que es

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \begin{cases} h \neq 0 \\ 0 \end{cases} \quad (4)$$

la primera en el caso del movimiento de los planetas y la segunda (cero) en el caso de los rayos luminosos.

Como los coeficientes de la (2) sólo dependen de r , la (2) tiene simetría esférica, por tanto las trayectorias de los planetas son curvas planas como en la teoría newtoniana, por lo que (2) se puede simplificar haciendo $\theta = \pi/2$, con lo que se transforma en la

$$ds^2 = - \left[\frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \right] + \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) c^2 dt^2 \quad (5)$$

en donde r y φ son las coordenadas polares planas. Si cambiamos los ejes OX , OY por otros dos ejes OX_1 y OY_1 perpendiculares a OZ y perpendiculares entre sí, no cambia la forma del ds (2), porque r sigue siendo el mismo, y θ y φ se cambian por θ_1 y φ_1 . Por tanto si escogemos el plano que contiene la posición y la velocidad iniciales del punto material en movimiento (el planeta) como plano OX_2Y_1 , entonces $\theta_1 = \pi/2$, $\theta'_1 = 0$, toda la velocidad inicial es $r\varphi'_1$ ($r=r_2$) y de aquí que se pueda transformar la (2) en la (5).

Tanto φ como t son coordenadas cíclicas, por figurar en (5) solo por sus derivadas φ' , t' . Por tanto existen otras dos integrales primeras:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = A; \quad \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 \frac{dt}{d\tau} = B \quad (6)$$

que sustituidas en la (4) con la expresión ds de (5) en vez de la (2) da origen a

$$\frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{A^2}{r^2} + \frac{B^2}{c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)} = h \quad (7)$$

permite conocidos h , C y D , calcular r mediante una cuadratura (integración). Ahora bien con

$$A = r_0^2 \varphi'_0; \quad B = \left(1 - \frac{2\mu}{r_0}\right) c^2 t'_0 \quad (8)$$

y h es el resultado de particularizar (7) para los valores iniciales de r_0 , r'_0 en (7).

La primera constante A se determina mediante una medida de la posición r_0 y de la velocidad angular φ'_0 en un instante dado. También hay que determinar t'_0 en la segunda B , pero esta medida no se puede hacer directamente, sino que hay que hacerla midiendo las velocidades radiales r'_0 y r'_1 en dos instantes distintos. Llevando estos resultados a la (7) se obtienen dos igualdades que tienen iguales el segundo miembro h de (7) y que por tanto restándolas se obtiene una expresión igual a cero que nos da el valor de B y por tanto el de t'_0 a partir de (8).

Una vez conocido B , ya se puede calcular h , con lo que se puede resolver la ecuación diferencial (7) mediante una integración por ser una ecuación diferencial de variables separadas. Conocido r en función de τ , se pueden calcular φ y t en función de τ a partir de las (7).

Lo anterior es la solución exacta del problema del movimiento de un planeta alrededor del Sol, es decir problema del cuerpo único en el caso de la Relatividad General.

Obsérvese que en (5) el primer sumando (negativo) entre paréntesis desempeña el papel de una fuerza viva y el último sumando de (5) desempeña el papel de un potencial.

Naturalmente hay que multiplicar por la masa del planeta m las ecuaciones anteriores, pero debido a la forma de la fuerza gravitatoria esta masa desaparece en las ecuaciones.

Se puede obtener una solución aproximada de este problema, si en el último sumando de (7) se desarrolla el denominador en progresión geométrica

$$\frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} = 1 + \frac{2\mu}{r} + \frac{4\mu^2}{r^2} + \dots \quad (9)$$

Vamos a desarrollar los cálculos que permiten calcular t'_0 y t'_1 a partir de los valores de r_0 , r'_0 , r_1 , r'_1 y φ'_0 o φ'_1 , ya que estas dos últimas cumplen que

$$A = r_0^2 \varphi'_0 = r_1^2 \varphi'_1 \quad (10)$$

Se tiene el sistema de dos ecuaciones que permiten calcular t'_0 y t'_1

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{2\mu}{r_0}\right) t'_0 &= \left(1 - \frac{2\mu}{r_1}\right) t'_1 \\ \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r_0}} r_0'^2 + \frac{A^2}{r_0^2} + \left(1 - \frac{2\mu}{r_0}\right) c^2 t_0'^2 &= \\ \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r_1}} r_1'^2 + \frac{A^2}{r_1^2} + \left(1 - \frac{2\mu}{r_1}\right) c^2 t_1'^2 &= h \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

La última (11) es consecuencia de (4) y (5).

Para calcular las trayectorias de los rayos luminosos procedemos de la misma manera, haciendo $h=0$ en las anteriores (4) y (7), y los cálculos demuestran que los rayos luminosos de una estrella al pasar cerca del Sol experimentan una desviación (un rechazo) por ser ahora la trayectoria hiperbólica en vez de elíptica.

Esta desviación fue comprobada por primera vez en el eclipse de 29 del Mayo de 1919, lo que fue considerado un gran éxito de la Teoría de la Relatividad general.

En estos problemas existen dos tiempos, el tiempo t que es el medido por un observador ligado (inmóvil) respecto al centro gravitatorio (el Sol en este caso) y el tiempo propio τ que es el medido por un observador ligado al móvil (en este caso la Tierra). Se obtiene por la (2) que

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}} dt \Rightarrow dt \approx \left(1 + \frac{\mu}{r}\right) d\tau \quad (12)$$

en donde el valor primero de (12) es exacto y el segundo muy aproximado, La (12) expresa que los átomos en el Sol vibran más lentamente el Sol que en la Tierra, o lo que es lo mismo, hay un corrimiento hacia el rojo en la luz procedente del Sol.

Ahora vamos a averiguar si existe una superficie cuyo ds sea el primer sumando de (5). De la forma de (5) se sigue que si el problema tiene solución, tal superficie ha de ser de revolución. Tomamos como eje OZ el eje de revolución y las otras dos coordenadas son la polares planas r ; φ ; tales que

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi \quad (13)$$

La ecuación de la superficie de revolución es

$$z = z(r) \quad (14)$$

y su ds es

$$ds^2 = \left[1 + z'^2(r)\right] dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (15)$$

que identificado con el primer paréntesis de (5) da:

$$1 + z'^2(r) = \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} \quad (16)$$

que integrada de la ecuación de la superficie se tiene que

$$z' = \sqrt{\frac{\frac{2\mu}{r}}{1 - \frac{2\mu}{r}}} \Rightarrow z = \sqrt{8\mu(r - 2\mu)} \quad (17)$$

que en coordenadas cartesianas se escribe

$$x^2 + y^2 = \left(2\mu + \frac{z^2}{8\mu}\right)^2 \quad (18)$$

que es la ecuación de la superficie de revolución engendrada por la rotación de una parábola (19) que gire alrededor de un eje perpendicular a OX

$$x = 2\mu + \frac{z^2}{8\mu} \quad (19)$$

a la que proponemos llamar toro parabólico o para simplificar paratoroide.

Las coordenadas del vértice de la parábola (19) son $z=0$, $x=2\mu$; la (19) se escribe también

$$z^2 = 2\mu x - 16\mu^2 \quad (19 \text{ bis})$$

y de ésta se sigue que como la distancia entre el vértice de la parábola y la intersección del eje de la parábola con su directriz es igual a la cuarta parte del coeficiente 8μ de x , que es igual a 2μ , y que por tanto la directriz de la parábola es OZ . En consecuencia el paratoroide es generado por una parábola que gira alrededor de su directriz.

La circunferencia de garganta de la misma tiene por ecuación la que resulta de hacer $z=0$ en (18) es la de ecuación

$$z = 0; \quad x^2 + y^2 = 4\mu^2 \quad (20)$$

cuyo radio es 2μ . Entonces se tiene que el movimiento de un punto material de masa m sobre el paratoroide (18) bajo la acción de una fuerza que derive del potencial (21) proyectado sobre el plano horizontal ($z=0$) reproduce el movimiento de un planeta de masa m alrededor del Sol en la Teoría de la Relatividad General, lo que permite construir un mecanismo que reproduzca este movimiento

$$B^2(7); \frac{B^2}{c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)} \quad (21)$$

La esfera de radio 2μ y centro en O es el agujero negro del Sol, el planeta no puede penetrar en él, porque en el movimiento del punto material sobre el paratoroide anterior, su proyección sobre el plano XOY no puede penetrar en la circunferencia (20).

Más adelante fórmulas (27) y (28) vuelvo sobre este tema y defino un modelo cuatridimensional repre-

sentativo del sistema solar, apto para describir los movimientos de todos los planetas alrededor del Sol.

Si pasamos del sistema solar al Cosmos, la Relatividad general ha elaborado varios modelos de espacios para resolver los problemas cosmológicos, del que el más sencillo es el universo esférico de Einstein, cuyo elemento lineal es

$$ds^2 = - \left[\frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] + mc^2 t'^2 \quad (22)$$

en el que r , θ , φ son las coordenadas esféricas de un punto en el espacio euclídeo de tres dimensiones. Cuando R tiende a infinito, (22) tiende al elemento lineal de la Relatividad restringida.

Vamos a ver si en el espacio euclídeo de cuatro dimensiones existe una hipersuperficie cuyo ds sea igual al primer sumando de (22). Dada la forma de (22) se sigue que si existe solución, esta ha de ser una hipersuperficie de revolución. Si x_1, x_2, x_3, x_4 son las coordenadas cartesianas de un punto y r, θ, φ, x_4 las coordenadas hipercilíndricas, la ecuación de la hipersuperficie buscada es:

$$x_4 = x_4(r); \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (23)$$

cuyo ds es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + x_4'(r)^2 dr^2 \quad (24)$$

que ha de ser igual a la suma encerrada entre paréntesis en la (22) y por tanto

$$\left. \begin{aligned} (24) = [(22)] &\Rightarrow x_4'(r) = \frac{\frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \Rightarrow \\ x_4'(r) &= \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \Rightarrow x_4(r) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= R^2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

que es una hiperesfera de radio R en el espacio euclídeo de cuatro dimensiones.

Las geodésicas son por tanto circunferencias. Por aquella época apareció el Universo de De Sitter que

resulta del de Einstein efectuando en el cuarto sumando el cambio:

$$c^2 dt^2 \rightarrow \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 t'^2 \quad (26)$$

A estos últimos se les da el nombre de universos estáticos porque su elemento lineal no cambia con el tiempo.

Los cosmólogos comenzando con Lemaitre (un sacerdote católico belga) y Friedmann (un ingeniero comunista ruso) han elaborado modelos de espacios mucho más complicados (los universos dinámicos) en los que el elemento lineal varía en el tiempo, son universos en expansión. Debido a su expansión las galaxias se alejan de nosotros a velocidades proporcionales a sus distancias, y ésta es la explicación del corrimiento hacia el rojo de los rayos espectrales de la luz procedente de las mismas que nosotros percibimos. Este fenómeno se conoce con el nombre de la fuga de las galaxias. La ley de Hubble que expresa la velocidad de alejamiento de las galaxias en función de su distancia es hoy uno de los métodos más potentes para medir las grandes distancias astronómicas.

La Teoría de la Relatividad ha afectado profundamente a las hipótesis cosmogónicas. La teoría del big bang (gran explosión) es una de las posibilidades ofrecidas por los cosmólogos relativistas para explicar el origen del Universo, según la cual la explosión comenzó estando toda la materia concentrada en un volumen muy pequeño y a una temperatura muy alta. En los tres primeros minutos hay una enorme expansión y un gran enfriamiento, aun cuando la temperatura sigue siendo aún muy alta; en ella se aniquilan quarks y antiquarks; electrones y positrones, y se forman los protones y neutrones. De los tres primeros minutos a los 300000 años se forma el helio y después comienzan a formarse las Galaxias, las estrellas y el sistema solar. Ahora estaríamos a 15000 millones de años del big bang y la temperatura actual del Universo se admite que es de unos tres K.

La idea primera fue de Lemaitre (del átomo primitivo) desarrollada por Gamow en los años cuarenta, según sus cálculos existiría un ecofósil del big bang, una radiación uniforme e isotropa a la temperatura de tres K. Esta radiación fue detectada por Penzias y Wilson en los años sesenta y Dicke y sus colabo-

radores relanzaron entonces la teoría del big bang, como consecuencia de este descubrimiento. Ahora el satélite *Coba* de la Nasa ha logrado detectar las fluctuaciones de esta radiación de microondas de fondo, lo que también está a favor del big bang.

Una teoría alternativa del big bang muy de moda en los años cincuenta es el modelo estacionario de Bondi, Gold y Hoyle según la cual, los espacios vacíos creados por la fuga de las galaxias debido al efecto Hubble se llenan con nuevas galaxias, que se van formando por creación continua de materia.

Existen otros modelos cosmológicos que han suscitado controversia, sobre las posibles variaciones, a lo largo de la evolución del Universo, de las constantes físicas. Entre éstas, figuran las de Milne (Cosmología cinemática), Dirac, Jordan y algo más modernamente Dicke.

En una serie de trabajos publicados en la revista *Euclides* de 1950 a 1953, combinando los resultados de la Mecánica cuántica (relaciones de incertidumbre de Heisenberg) y de la teoría de la Relatividad (existencia de un límite superior para las velocidades, de un Universo finito, de un tiempo de expansión para el mismo finito) desarrollé una teoría de cuantificación para las variables físicas (existencia de cuantos de tiempo, en mecánica ondulatoria, la no observabilidad de la posición del fotón en Mecánica ondulatoria, etc) y una serie de cálculos como los del número cósmico N (número total de protones y electrones del Universo) que resultaba dinámico en vez de estático, de la masa total del Universo, del límite superior de la relación masa-radio de los cuerpos materiales, de la densidad del universo en función del radio.

A partir de estas teorías en que se funden en parte Relatividad y Mecánica cuántica, desarrollé una teoría de la estructura cosmológica del Universo en expansión, aplicaciones a la explicación de la fuga de las galaxias, y de la variación de la energía de ionización de los rayos cósmicos en función del tiempo. Completaba estas investigaciones en esta revista *Euclides*, con una solución dinámica del problema del cuerpo único, en la teoría de la Relatividad, cuando la masa es variable con el tiempo, la cual permite enunciar una hipótesis sobre el origen de los rayos cósmicos, y en otra dirección más clásica unas investigaciones sobre la forma y rotación de las galaxias.

Se puede obtener así un modelo cuántico-relativista de Universo, que es realmente una teoría de un Universo autógeno en expansión, en el que hay permanente creación de materia.

Este modelo cosmológico que propongo, que aunque no es estacionario, es autógeno, porque hay creación continua de materia, la masa crece con el cuadrado del radio del Universo R , y la densidad ρ es inversamente proporcional a R , se sigue entonces que a partir de un cierto valor de R la presión p de la radiación de hace negativa, por tanto existe también un fin para el Universo, una muerte obscura.

De lo dicho desde el párrafo de la fórmula (13) hasta el que contiene a la (21) se sigue que la superficie S_3 de (18) es un modelo del movimiento de un planeta alrededor del Sol, según lo ya dicho en los párrafos que contienen a (20) y (21).

Hacemos coincidir el Sol con el origen O de un sistema cartesiano de coordenadas de un espacio euclídeo de tres dimensiones E_3 , y que A_1 es el plano que contiene al Sol y al movimiento de un planeta P_1 alrededor del Sol, que también contiene a éste, A_1 es el plano XOY y OZ es la perpendicular a este plano por O , entonces la superficie S_3 (18) asociada a O (el Sol) contiene al conjunto de parábolas (19) situadas en planos perpendiculares al plano XOY , que contienen al eje OZ , que es el eje alrededor del cual giran cada una de dichas parábolas para engendrar S_3 . Estos planos cortan a la circunferencia (20) de centro O y radio 2μ en puntos diametralmente opuestos.

Estamos ahora en condiciones de obtener en un espacio euclídeo E_4 de cuatro dimensiones, que contiene a E_3 que es un hiperplano del mismo E_4 , un modelo del sistema solar que explique los movimientos de todos los planetas alrededor del Sol, como antes hicimos con P_1 .

Llamemos x_1, x_2, x_3, x_4 a las coordenadas de un punto de E_4 , de las cuales x_1, x_2, x_3 son iguales a las anteriores x, y, z de E_3 . Llamamos S_4 a la hipersuperficie de revolución de E_4 de ecuación:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(2\mu + \frac{x_4^2}{8\mu} \right) \quad (27)$$

Los ejes de coordenadas en S_4 los llamamos OX_1 , OX_2 , OX_3 , OX_4 , siendo los tres primeros situados en E_3 , los que antes llamamos OX , OY , OZ ; el OX_4 es perpendicular a E_3 hiperplano de E_4 , es perpendicular a $OX=OX_1$, $OY=OX_2$, $OZ=OX_3$

S_4 es una hipersuperficie de revolución de E_4 que resulta de hacer girar alrededor de OX_4 la superficie S_3 situada en E_3 que es el hiperplano de ecuación $X_4=0$, perpendicular al eje OX_4 .

La circunferencia de garganta de S_3 , de ecuación (20) está contenida en la esfera de garganta de S_4 (27) cuya ecuación es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\mu^2 \quad (28)$$

son sus circunferencias máximas.

Así como la ecuación (18) tiene la misma forma, es invariante cualesquiera que sean los ejes OX y OY con tal de que sean perpendiculares entre sí y también lo sean a OZ ; también la ecuación (27) es invariante si OX_1 , OX_2 , OX_3 se cambian por cualquier otra terna de ejes perpendiculares entre sí dos a dos y perpendiculares también a OX_4 .

Obsérvese que el conocimiento de μ determina la superficie S_3 , la hipersuperficie S_4 y la circunferencia (20) y la esfera (28).

Los planos de las trayectorias de los distintos planetas P_1 , P_2 ,... del sistema solar están cada uno de ellos asociados a una superficie S_{13} ... (18), cada una de las cuales tiene una circunferencia de garganta (18), las cuales están contenidas en la esfera (28), y todas las S_{13} , S_{23} ,... están contenidas en la hipersuperficie S_4 , al igual que E_3 está contenido en E_4 .

Por tanto O (el Sol) está contenido en E_3 y E_4 ; OX_1 , OX_2 , OX_3 (que son OX , OY , OZ) están contenidas en E_3 y son perpendiculares dos a dos, siendo OX_3 perpendicular al plano de la trayectoria de cada uno de los planetas P_1 , P_2 ,... alrededor del Sol, mientras que los OX_1 , OX_2 ,... de cada planeta son dos rectas cualesquiera del plano de su trayectoria perpendiculares entre sí. La recta OX_4 pertenece a E_4 , y es la recta perpendicular en O a E_3 , que es un hiperplano de E_4 .

Cada plano diametral de la esfera (27) de E_3 corta a esta esfera según una circunferencia máxima de centro

O y radio 2μ que es la (20), entre estos planos están los de las trayectorias de los planetas P_1 , P_2 ,...; y estas circunferencias son las de garganta de las superficies S_{13} , S_{23} ,... asociadas a los planetas. Todas estas superficies pertenecen a la hipersuperficie de revolución S_4 (27). Todas las S_3 se expresan por una ecuación (18) igual, si se escogen convenientemente los ejes OX , OY , OZ (OX_1 , OX_2 , OX_3), porque esta ecuación es invariante; siempre que sean ternas de rectas perpendiculares entre sí dos a dos; siendo siempre OZ perpendicular al plano de la trayectoria del planeta. El eje OX_4 está siempre contenido en E_4 y es perpendicular a E_3 , por tanto no pertenece a E_3 .

Si en la (27) hacemos una de las X_1 , X_2 , X_3 igual a cero obtenemos la (18) y si hacemos dos de ellas iguales a cero obtenemos la (19).

Así como a partir de la (18) obtuvimos una representación en el espacio euclídeo de tres dimensiones del movimiento plano de un planeta alrededor del Sol, a partir de la (27) obtenemos una representación de los movimientos de todos los planetas alrededor del Sol, los cuales por ser distintos los planos de sus movimientos tienen lugar en un espacio euclídeo de tres dimensiones.

Lo que hacemos es lo siguiente; tomamos el Sol como el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares OX , OY , OZ ; y una esfera Ω de centro O y radio 2μ la (28), sea Δ el plano diametral paralelo al plano de la trayectoria de un planeta P alrededor del Sol, el cual corta a Ω según una circunferencia Γ a la que está asociada un paratoroide S_3 de ecuación (18), pues bien el movimiento de P alrededor del Sol es la proyección sobre Δ del movimiento de un punto material de masa la de P que se mueve sobre S bajo la acción de una fuerza que deriva de un potencial paramétrico (21). Todos los S_3 (18) de todos los planetas están sobre el S_4 (27).

A este mismo resultado se puede llegar de la siguiente manera: vamos a averiguar si existe posibilidad de encontrar en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones E_4 una hipersuperficie del mismo, tal que su ds sea el sumando entre paréntesis de (2). De la forma de dicho ds (2) se sigue que si el problema tiene solución, la tal hipersuperficie ha de ser de revolución. Tomemos como eje OX_4 el eje de revolución, y un sistema de coordenadas hipercilíndricas en E_4 que sea

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi; x_2 = r \sin \theta \sin \varphi; \\x_3 &= r \cos \theta; x_4 = x_4\end{aligned}\quad (29)$$

donde r , θ , φ son las coordenadas esféricas de un espacio euclídeo de tres dimensiones E_3 perpendicular a OX_4 (E_3 contenido en E_4). Por ser la hipersuperficie de revolución alrededor de OX_4 , su ecuación ha de ser de la forma

$$x_4 = x_4(r) \quad (30)$$

y su ds es por tanto

$$ds^2 = [1 + x_4'^2(r)] dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (31)$$

que identificado con el paréntesis de (2) da:

$$1 + x_4'^2 = \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} \quad (32)$$

que integrada da

$$x_4 = \sqrt{8\mu(r - 2\mu)} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(2\mu + \frac{x_4^2}{8\mu}\right)^2 \quad (33)$$

que coincide con la (27), porque

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \quad (34)$$

Aunque ya no tiene interés para las aplicaciones astronómicas, sí la tiene para la geometría. Cualquiera que sea el número de dimensiones del espacio euclídeo existe una hipersuperficie como la anterior (33), la cual contiene a todas las hipersuperficies de la misma forma correspondiente a un espacio euclídeo de menor número de dimensiones. Esta propiedad la tiene también la hiperesfera. Incluido el plano en el que son dos parábolas simétricas respecto a una recta que no las corta. Haciendo girar una de estas parábolas respecto al eje de simetría se obtiene la ecuación de la parábola (19), la superficie S_3 y las hipersuperficies S_4, \dots, S_n, S_{n+1} , se pueden escribir sus ecuaciones en la forma

$$r = 2\mu + \frac{z^2}{8\mu} \quad (35)$$

Haciendo en (35)

$$\left. \begin{aligned}r &= x_1; z = x_2; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; z = x_3 \\r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; z = x_4; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}; z = x_{n+1}\end{aligned} \right\} \quad (36)$$

y haciendo en (35)

$$r = 2\mu; z = 0; \quad (37)$$

se obtiene para S_3 su circunferencia de garganta (20), para S_4 una esfera de garganta (28) y así sucesivamente para S_{n+1} la ecuación de su hipersuperficie de garganta

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 4\mu^2; x_{n+1} = 0 \quad (38)$$

El radio vector r que va de O a los puntos de las anteriores (20), (28), (38) es el r anterior.

Haciendo girar alrededor de OX_{n+1} (recta del espacio euclídeo E_{n+1} , perpendicular al E_n) la hipersuperficie S_n , se obtiene la S_{n+1} .

Si en la ecuación de S_{n+1} hacemos igual a cero una, dos tres, o $n-1$ coordenadas de las n coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n se obtienen $S_n, \dots, S_4, S_3, S_2$ antes definidas. La S_2 es la formada por dos parábolas (20) simétricas, que son las intersecciones de S_3 con cualquier plano que contenga a OX_3 .

Los diámetros, planos o hiperplanos diametrales de las (38), cortan a estas en el caso de $n > 1$ en circunferencias, esferas o hiperesferas que son las que determinan S_3, S_4, \dots, S_n ; todas están contenidas en S_{n+1} .

Cuando hablamos de esferas o hiperesfera, nos referimos a sus superficies o hipersuperficies, es decir a sus fronteras o envolturas, no a sus volúmenes interiores; ya que solamente para dos dimensiones existen dos palabras para distinguir interior y frontera que son círculo y circunferencia.

La última coordenada x_{n+1} es muy distinta de las n primeras en cuanto al papel que juegan en la ecuación (36) de S_n , por lo que la hemos designado también por otra letra z para evitar confusiones. Los ejes OX_1, \dots, OX_n se pueden sustituir por otros n ejes OX'_1, \dots, OX'_n con tal de que estos sean perpendiculares entre sí dos a dos y perpendiculares a $OX_{n+1} = OZ$. Los n primeros están en un espacio euclídeo E_n de n dimensiones y el otro es la perpendicular en E_{n+1} (espacio euclídeo de $n+1$ dimensiones que contiene a E_n) a todas las rectas de E_n .

Incluso en el espacio de Hilbert existe una hipersuperficie S_∞ de esta forma.

La S_2 parece apartarse de la forma general de las restantes S de subíndice superior a 2, pero no es así como vamos a ver. S_2 está formado por un par de parábolas simétricas respecto a una directriz común, de ecuaciones que resultan de considerar en (19) que la x tenga signo más o menos:

$$\tau^2 = \pm 8\mu x - 16\mu^2 \quad (39)$$

Para incluir S_2 en la teoría general de las S_n ($n > 2$) hay que recurrir a una teoría que he desarrollado para construir una teoría unificada de los sistemas de circunferencias, esferas e hiperesferas ortogonales dos a dos sobre un espacio euclídeo de n dimensiones o sobre una hiperesfera de n dimensiones. He demostrado que un par de puntos pueden ser considerados como una “circunferencia” o una “esfera” de una dimensión, lo que permite construir la teoría unificada ante citada.

Volviendo a S_2 , si se conoce su centro O y la distancia 2μ de O a A y B , tales que O , A y B están sobre una misma recta OX . El radio de esta “circunferencia” de una dimensión, es 2μ y el centro O . Entonces S_3 se obtiene haciendo girar una cualquiera de las dos parábolas (39) alrededor de OZ perpendicular a OX . Todo plano que contiene a OZ corta a S_3 según una S_2 (todas iguales), que al girar alrededor de OZ , reproduce S_3 .

Siguiendo por este camino, a partir de S_3 se obtiene S_4 , que es la hipersuperficie que en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones E_4 , se obtiene haciendo girar S_3 alrededor de OZ , recta de E_4 perpendicular a E_3 hiperplano de E_4 . E_3 es un espacio euclídeo de tres dimensiones que contiene a S_3 . En esta revolución la circunferencia de garganta (28) de E_3 se transforma en la esfera de garganta (34) de S_4 . Todo plano diametral de (34), el cual pasa por O que es su centro, corta a este según una circunferencia de la misma forma que (28), lo que demuestra que las infinitas S_3 determinadas por estas infinitas circunferencias de garganta, son todas iguales y están contenidas en S_4 , la cual está determinada por la rotación de cualquiera de estas S_3 alrededor de OZ .

Lo anterior implica un principio de inducción completo en Geometría, que permite ir generando cualquier S_n a partir de S_{n-1}

Cualquier diámetro de la esfera (34) corta a esta en dos puntos A y B , como los que hemos visto anteriormente, que al girar alrededor de OZ generan una circunferencia máxima de (34) y un S_3 , debido al giro de S_2 que determinan las parábolas (39) como hemos visto anteriormente.

Solamente tienen interés astronómico S_3 y S_4 , que por lo visto anteriormente ofrecen un movimiento de un planeta alrededor del Sol mediante el S_3 al que pertenece y determina, también de los movimientos de todos los planetas del sistema solar en S_4 al que pertenecen y determinan, de modo que a cada planeta corresponde un S_3 distinto y todos ellos están sobre un S_4 que corresponde al sistema solar.

En resumen el movimiento de un planeta alrededor del Sol se puede representar por la proyección sobre el plano en el que se mueve el planeta, del movimiento de un punto sobre el S_3 , asociado al planeta, originado por el potencial paramétrico descrito anteriormente. Lo mismo sucede con cada estrella que tenga planetas.

Así como la Tierra no es un geoide de superficie lisa, sino lleno de “arrugas” en forma de altibajos, asimismo el Universo esférico en expansión descrito por la Relatividad no es liso sino que cada estrella constituye una “arruga” sobre una hipersuperficie originada por el S_4 asociada a la misma.

La aplicación de la Relatividad general a la Astronomía, ecuación (2) a (5) fueron obtenidas en los años veinte del siglo XX, pero aquí he seguido otro camino, que es original mío, basado en las superficies e hipersuperficies que he denominado S , ecuaciones (14) a (21) y (27) hasta el final, y en el empleo de una teoría de los potenciales paramétricos, como los he llamado, que surgen cuando existen coordenadas cíclicas, como en este caso son el ángulo φ y el tiempo t . El tiempo propio τ es la variable independiente.

Tsiolkovsky, un ruso, en el año 1912 escribió “observar a Marte desde una distancia de varias decenas de verstas, aterrizar satélites, e incluso en la superficie de Marte ¡qué podría ser más fantástico! Sin embargo sólo con el advenimiento de vehículos a reacción sería posible iniciar una nueva era en la Astronomía”. Lo que realmente era una profecía, en 1917 Oberth, un alemán construyó el primer cohete a

reacción. Hoy a estos dos sabios se les considera los precursores de la astronáutica, que han conseguido explorar el espacio y en consecuencia conseguir un caudal de conocimiento fabuloso sobre el universo.

En los años treinta, antes de Hitler y con él, bajo la supervisión del ejército alemán, Von Braun, dirigiendo un grupo de investigación y en los años cincuenta, en Peenemunde consiguieron la producción de las armas V-1 y sobre todo V-2 que se utilizaron en los bombardeos de Londres casi al final de la guerra, eran los primeros misiles a reacción. De manera independiente y por el mismo tiempo Heinkel y Messerschmidt fabricaron los primeros aviones a reacción (reactores) algunos ya supersónicos.

Después de la guerra Von Braun fue a los Estados Unidos donde trabajó primeramente en nuevos misiles que mejoraron las armas V-2. Pero el sueño de Von Braun era lograr la exploración espacial enviando los cohetes a reacción a otros planetas.

Simultáneamente en Rusia, Korolev, ejerció el mismo papel que Von Braun en los Estados Unidos y consiguió adelantarse a los americanos, lanzando el Spútnik el primer satélite artificial de la Tierra en 1957., y poco después el primer misil intercontinental. Pero después los americanos lanzaron su primer satélite artificial de la Tierra, el Explorer 1 que descubrió el cinturón de radiación que rodea la Tierra, que se llama de Van Allen.

Posteriormente y hasta nuestros días, tanto los Estados Unidos como Rusia han continuado intensamente en enviar muchas sondas espaciales y satélites a la Luna y a varios planetas Marte, Venus, Júpiter, Saturno, etc. El caudal de conocimientos astronómicos nuevos es enorme. Se ha cumplido la profecía que en su día hizo Tsiolkovsky.

En nuestros días, España en colaboración con Finlandia y Rusia está realizando un importante proyecto de investigación de Marte, en el que se han alcanzado nuevos e importantes descubrimientos y se continúa muy activamente en esta dirección. El director científico del equipo español de este proyecto sobre Marte es el Profesor Luis Vázquez, que pertenece a nuestra Real Academia de Ciencias.

Obsérvese que si bien las Matemáticas son de gran ayuda para el desarrollo de la Astronomía, esta última proporciona a la primera nuevos temas y nuevos objetos matemáticos para ser investigados por la primera como por ejemplo lo son desde tres a n dimensiones la superficie e hipersuperficies que he denominado S , es decir los paratoroides.

Por otra parte, hay que tener siempre presente que una cosa son las ecuaciones matemáticas y su correcto y exacto manejo, y otra la interpretación física y fenomenológica. A una teoría física le pueden corresponder varias teorías matemáticas equivalentes, y a una teoría matemática se le pueden buscar distintas interpretaciones físicas, que es lo que hemos pretendido poner de manifiesto en esta conferencia, aparte del otro tema central de la misma, que ha sido dar una exposición actual del sistema solar y de la Cosmología, y de nuestras propias investigaciones físico-matemáticas e ideas filosóficas sobre Cosmología, y la Física y Matemáticas de la misma.

Mi consejo al lector es que evite que los árboles no le dejen ver el bosque, pero que evite también que por mirar solo el bosque no se vean los árboles. A continuación incluyo unos notas entresacadas de mis propias investigaciones.

Nota 1ª. El proceso estocástico de la distribución de electrones en el seno de la materia.

Esta teoría la he desarrollado en mi memoria "Algunos nuevos procesos estocásticos y sus aplicaciones" en la Revista de la Real Academia de Ciencias en 1959.

Se trata de un proceso estocástico bidimensional, la creación de un electrón positivo (positrón) es consecuencia de la materialización de un fotón en un electrón positivo y un electrón negativo, y la aniquilación de un electrón positivo es consecuencia de la unión de un electrón positivo y otro negativo para formar un fotón. Entonces como existe un número muy grande de negativos y un número muy pequeño de positivos, en un intervalo infinitesimal de tiempo dt , la probabilidad de que se cree un electrón positivo es λdt (el número de fotones es también muy grande) y la probabilidad de aniquilación de uno positivo en el

intervalo dt $\mu(n-m)dt$ es siendo n y m los números positivos creados y aniquilados en el tiempo t .

He obtenido para la función generatriz $g(z,w,t)$ en la que z corresponde a n y w a m , si inicialmente existen a positivos, a lo que corresponde

$$g(z,w,0)=z^a \quad (1)$$

el valor

$$g(z,w,t)=\left[w+(1-w)e^{-\mu t}\right]^a z^a e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})(1-w)z+\lambda t(zw-1)} \quad (2)$$

la cual para $w=1/z$ da la función generatriz de electrones positivos $n-m$ existentes en el tiempo t que es

$$g\left(z, \frac{1}{z}, t\right)=\left[1+e^{-\mu t}(z-1)\right]^a e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})(z-1)} \quad (3)$$

El número de electrones positivos $n-m$ es igual a la suma de una nueva variable aleatoria binomial, cuya función generatriz es el factor encerrado entre paréntesis en (3) y de una variable de Poisson cuya función generatriz es la exponencial de (3).

Al tender el tiempo a infinito, $n-m$ tiende a una variable de Poisson, cuya función generatriz es:

$$t=\infty; g\left(z, \frac{1}{z}, \infty\right)=e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)} \quad (4)$$

independiente del valor original inicial a , es una variable aleatoria de Poisson. La (4) es estable y es la que rige por tanto...

La Teoría determinista de este problema da el valor medio de la Teoría estocástica, porque si llamamos x el número de electrones positivos (positrones) en el tiempo t , se cumple que

$$\frac{dx}{dt}=\lambda-\mu x \quad (5)$$

cuya solución para $t=0$, $x=a$, es

$$x=\frac{\lambda}{\mu}+\left(a-\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-\mu t} \quad (6)$$

y se cumple que

$$t=\infty \Rightarrow x=\frac{\lambda}{\mu} \quad (7)$$

La representación gráfica de (6) es la Figura 1 según que a sea igual a OB , λ/μ , o OA .

La solución $x=\lambda/\mu$ es de equilibrio estable, porque si $a>\lambda/\mu$, la curva tiende, al tender t a infinito, a la paralela por λ/μ a OT ; y si $a<\lambda/\mu$, la curva tiende a la anterior recta, para t tendiendo a infinito; debido al signo de dx/dt por (5).

Los resultados anteriores coinciden con los que corresponden al movimiento de caída de un punto material (m grande) en un medio que ofrece una resistencia a la caída proporcional a la velocidad. Es un ejemplo de cómo dos fenómenos físicos tan distintos, obedecen a la misma ecuación matemática.

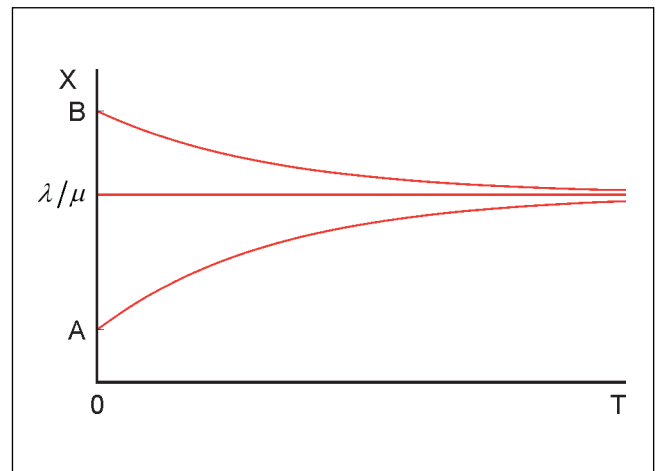


Figura 1

Nota 2º. El proceso estocástico de la propagación de la radiación en el espacio. La explicación de la paradoja de Olbers.

Esta teoría la hemos desarrollado en mi conferencia de 1993 sobre Galileo publicada por “Amigos de la Cultura Científica” y digitalizada en el Museo histórico-científico de Florencia.

La interpretación fotónica (corpúscular) de la luz convierte en estocásticos los fenómenos de incidencia de la radiación y de iluminación. Si la probabilidad de absorción de un fotón en su recorrido por el universo en un intervalo infinitesimal dr de su recorrido, es proporcional a éste, vale: kdr , entonces, por las reglas de las probabilidades totales y compuestas, la proba-

bilidad $F(r)$ de que haya sido absorbido el fotón a una distancia menor o igual que r de su fuente de emisión vale:

$$F(r+dr) = F(r) + (1-F(r))kdr \Rightarrow \frac{dF(r)}{1-F(r)} = kdr \Rightarrow \quad (1)$$

$$F(r) = 1 - e^{-kr}; k > 0$$

y por tanto la probabilidad de que no haya sido absorbida es

$$1 - F(r) = e^{-kr} \quad (2)$$

Si n es el número de fotones emitidos en la unidad de tiempo por una fuente puntual, al número de fotones a la distancia r de la fuente es una variable aleatoria (v. a.) de Bernoulli de función característica (f. c.):

$$\left(1 + e^{-kr}(e^{iz} - 1)\right)^n \quad (3)$$

de valor medio m y varianza σ^2 :

$$m = ne^{-kr}; \sigma^2 = ne^{-kr}(1 - e^{-kr}) \quad (4)$$

La ley de decrecimiento del flujo luminoso (valor medio de F) por unidad de ángulo sólido (w) perpendicular a la dirección del mismo vale por la primera (4):

$$I = \frac{nhv}{4\pi}; \frac{dF}{dw} = \frac{I}{r^2} e^{-kr} \quad (5)$$

donde h es la constante de Planck y v es la frecuencia del fotón, (5) se distingue de la ley clásica (sin absorción de fotones) por la exponencial, I es la intensidad luminosa de la fuente puntual. Como el flujo es estocástico, la varianza del flujo incidente σ^2 es por la segunda (4):

$$\sigma^2 = \frac{I}{r^2} e^{-kr}(1 - e^{-kr})hv \quad (6)$$

porque la energía aportada por cada fotón vale hv , k es una constante muy pequeña, solamente con influencia para distancias muy grandes. La varianza (6) es muy pequeña por serlo hv .

Con esta ley no se cumple la paradoja de Olbers, porque la radiación incidente sobre un punto del universo, si $e(W)$ es la densidad constante de radiación del universo, es una v. a. de valor medio que por (5) vale

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 \frac{e(W)}{4\pi r^2} e^{-kr} dr = \frac{e(W)}{k} \quad (7)$$

porque

$$\rho(W) 4\pi r^2 dr \quad (8)$$

es la radiación presente en el estrato esférico de espesor dr , de dentro en el punto sobre el que incide la radiación.

La varianza vale σ^2 :

$$\sigma^2 = hv\rho(W) \int_0^\infty e^{-kr}(1 - e^{-kr})dr = \frac{\rho(W)hv}{2k} \quad (9)$$

en virtud de (6) y por ser v. a. independientes los fotones recibidos procedentes de todas las fuentes de radiación del universo, y por tanto la varianza total es la suma (integral) de todas las varianzas (6).

Por tratarse de la integral de una v. a. infinitesimal, se sigue que la radiación recibida en un punto del universo, procedente del resto del mismo, es una v. a. normal (gaussiana) de valor medio (7) y varianza (9).

La teoría estocástica que hemos desarrollado es más rica en resultados que la determinista que es la que ya era conocida; en esta última la ley de decrecimiento de la radiación era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, de aquí la existencia de la paradoja de Olbers. En la teoría estocástica la ley de decrecimiento es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y también exponencialmente, que es lo que hace que no sea posible la paradoja de Olbers. Además el exponente del decrecimiento de la propagación de la radiación que hemos llamado $-k$, hace que para distancias muy pequeñas el decrecimiento en las dos teorías determinista y estocástica sea prácticamente el mismo; es solamente para distancias muy grandes cuando divergen las dos teorías.

Nota 3ª. La Mecánica Estadística Relativista y las temperaturas del big bang, de las explosiones estelares y de la bomba de hidrógeno.

La Mecánica estadística que resulta de aplicar la Mecánica clásica es única, es la de Maxwell-Boltzmann. Cuando se aplica la Mecánica cuántica

hay dos Mecánicas estadísticas que son la de Bose-Einstein que se aplica a los bosones y la de Fermi-Dirac que se aplica al los fermiones.

Cuando se emplea la Teoría de la Relatividad, en mi opinión hay que hacer en las anteriores una corrección para temperaturas muy altas que he hecho en anteriores trabajos; resulta así una nueva Mecánica estadística que he propuesto llamar Mecánica estadística relativista.

Mientras que en las Mecánicas no relativistas, la masa de las partículas es constante y el momento (cantidad de movimiento) es proporcional a la velocidad, se usan dos distribuciones de probabilidad, una para la energía y otra para la velocidad, por el contrario en la Mecánica estadística relativista hay que usar cuatro distribuciones para la velocidad, el momento, la energía cinética y para la masa. He obtenido estas funciones siguiendo dos métodos, uno basado en que los espacios relativistas de las variables y de los momentos no son euclídeos (he determinado su métrica) mientras que sí lo son los no relativistas. El otro método está basado en las ecuaciones de la dinámica relativista, que da la derivada con relación al momento del valor medio de la masas de un número constante de partículas.

Si no se hiciera la corrección relativista, la estadística clásica para temperaturas de 10^{13} K, que es a la que tiene lugar la formación de los nucleones en el big bang, daría para los electrones una velocidad superior a la de la luz (c). Incluso a la temperatura del Sol la corrección relativista es significativa.

Para pasar al enfoque relativista, en la función de distribución de la variable:

$$x = \frac{E}{kT} \quad (1)$$

en la que E es la energía cinética, T la temperatura absoluta, y k la constante de Boltzmann, tanto en la estadística clásica como en la cuántica hay que hacer el cambio

$$\sqrt{x}dx \rightarrow \sqrt{x(x\alpha T + 1)}dx \quad (2)$$

siendo

$$\alpha(m_0) = \frac{k}{2m_0c^2} \quad (3)$$

en que m_0 es la masa en reposo de la partícula, y c es la velocidad de la luz en el vacío. Para el electrón, y para el protón o el neutrón, α vale respectivamente:

$$\alpha = 10^{-10} \text{ erg/K} ; \alpha = 10^{-13} \text{ erg/K} \quad (4)$$

La función de la distribución de Maxwell hay que corregirla y sustituirla por

$$f(x) = A \left(\frac{T}{m_0} \right) e^{-x} \sqrt{x(x\alpha T + 1)} \quad (5)$$

en la que A es el coeficiente de normalización de la integral de (5) que depende del cociente T/m_0 .

La energía media de la partícula es

$$E(T, m_0) = \frac{\int_0^\infty x f(x) dx}{\int_0^\infty f(x) dx} = \beta \left(\frac{T}{m_0} \right) kT \quad (6)$$

en la que β es una función de $T(m_0)$. Por tanto la energía media de una partícula que en la estadística clásica es independiente de la masa, en la relativista depende de ella. Para valores pequeños de T , la (5) es muy aproximadamente igual a la de Maxwell, que se obtiene haciendo $\alpha=0$.

Las dos integrales de (6) se pueden calcular mediante desarrollo en serie, descomponiéndolas en suma de dos integrales

$$\int_0^\infty = \int_0^{1/\alpha T} + \int_{1/\alpha T}^\infty \quad (7)$$

y sustituyendo la raíz cuadrada de (5) para la primera integral por el desarrollo en serie

$$x < \frac{1}{\alpha T} ; \sqrt{x(x\alpha T + 1)} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{x\alpha T}{2} + \dots \right) \quad (8)$$

y para la segunda integral

$$x > \frac{1}{\alpha T} ; \sqrt{x(x\alpha T + 1)} = x\sqrt{\alpha T} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha T}} + \dots \quad (9)$$

que sustituidas en (6) permiten obtener un valor como cociente de dos series de funciones gamma (Γ) enteras y semienteras, con tanta mayor aproximación cuanto

mayor sea el número igual de término, que se tomen en el numerador y el denominador de la fracción (6).

Si T es muy pequeña, la segunda integral del segundo miembro de (7) se puede despreciar y el límite superior de la primera integral tomando igual ∞ son

$$\beta(0) = \frac{3}{2}; E = \frac{3}{2} kT \quad (10)$$

que es el valor que da la estadística clásica. Si T es muy grande, la primera integral de (7) se puede despreciar y hacer igual a cero el límite inferior de la segunda integral, con lo que (6) toma el valor

$$\beta(\infty) = 2; E = 2kT \quad (11)$$

en ambos casos el valor medio de E es independiente de m_0 , no así en los casos intermedios.

Para valores de 10^7 K la corrección relativista es significativa para el electrón y para 10^{10} K lo es para núcleos atómicos ligeros.

La primera temperatura es del orden del interior del Sol y de muchas estrellas, e inferior a la que hay en el interior de una estrella de neutrones o en el centro del interior de una bomba de hidrógeno. La segunda temperatura es del orden de las que hay en las explosiones estelares (supernovas) o en el primer segundo después del big bang. Si αT es del orden de 10^{10} K, o de 10^{13} K, la raíz cuadrada de (5) es del orden de

$$\sqrt{x(x+1)} \quad (12)$$

Para temperaturas del orden de 10^{20} K o más, se puede sustituir la raíz cuadrada de (5) por x y tomar para el valor de E el (11).

A igualdad del número de partículas en dos volúmenes de gas relativista, aumenta la masa con la temperatura, como consecuencia del aumento de la velocidad, lo que modifica la ecuación de los gases perfectos. Tanto en la física clásica como en la relativista la presión P de un gas sobre las paredes del recipiente que lo contiene es

$$PV = \frac{N}{3} \overline{pv} \quad (13)$$

donde N es el número de Avogadro, V el volumen molar, p el momento y v la velocidad de una molécula. La diferencia entre una y otra es que en la relativista p vale

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (14)$$

y hay que aplicar la (5) para calcular el valor medio \overline{pv} , en vez de la ley de Maxwell que es (5) con $\alpha=0$. Como la energía cinética relativista E vale:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15)$$

de (14) y (15) se sigue que

$$\overline{pv} = E \frac{E + 2m_0 c^2}{E + m_0 c^2} \quad (16)$$

y teniendo en cuenta (5) se obtiene una expresión de la forma

$$\overline{pv} = \gamma \left(\frac{T}{m_0} \right) kT \quad (17)$$

de modo que la ecuación relativista de los gases perfectos es

$$PV = \gamma \left(\frac{T}{m_0} \right) kT \frac{N}{3} \quad (18)$$

que para valores pequeños de T y para valores grandes de la primera y segunda (19)

$$T \rightarrow 0, PV = RT; T \rightarrow \infty, PV = \frac{2}{3} RT \quad (19)$$

la primera coincide con la de la Física clásica.

Lo últimamente escrito a partir del párrafo que contiene la (13) es la modificación relativista de la Teoría cinética de los gases, la cual la he desarrollado en varios trabajos mío (ver Bibliografía).

Nota 4ª. Dos modelos de configuración estable en el problema de n cuerpos.

En anteriores trabajos he obtenido este posible resultado de la Mecánica celeste.

Si n cuerpos de masas muy pequeñas están dispuestos en los n vértices de un polígono inscrito en una circunferencia de radio R y centro C , en el que hay situada una masa muy grande M (frente a la que son despreciables las antes citadas masas del polígono), si se impone a las n masas de los vértices del polígono un movimiento circular alrededor de C con velocidad angular w , si la fuerza centrífuga de las n masas compensa a la fuerza de atracción que la masas M del centro, la configuración es estable. Se ha de cumplir que

$$mw^2R = \frac{fM}{R^2} \Rightarrow w^2 = \frac{fM}{R^3} \quad (1)$$

donde f es la constante de la gravitación universal. Ello es debido a la Mecánica clásica de las fuerzas centrales y es un modelo posible, aunque no exista en la naturaleza del movimiento de un satélite alrededor de un planeta.

Existe otro modelo de configuración estable en el que no existe una masa central y los n cuerpos tienen la misma masa y están repartidos sobre los vértices de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R que describimos a continuación. Una cualquiera de las n masas (la A por ejemplo) es atraída por las $n-1$ masas restantes, de acuerdo con una fuerza gravitatoria igual de modo que la proyección de la resultante de las mismas sobre una perpendicular al diámetro AC (C centro de la circunferencia) es nula por razón de simetría, y la perpendicular sobre AC es equivalente a la fuerza gravitatoria que ejercería sobre

la masas en A una masas ficticia M situada en C , que es la misma para todas las masas, con lo que estaríamos en el caso anterior descrito en este párrafo, de modo que si todas estas fuerzas iguales ejercidas por esta masa ficticia M son iguales a la fuerza centrífuga (ecuación (1)), entonces el conjunto de masas giraría alrededor de la circunferencia de centro C y radio R con la velocidad angular (ecuación (1)) w constante eternamente.

El resultado anterior es el mismo, tanto si el número de masas es par ($2p$) o impar ($2p+1$). En el caso de ser par, cada dos masas están situadas en los extremos de un mismo diámetro y son los vértices de un polígono regular. En el caso de ser impar, el diámetro que pasa por una cualquiera de estas masas deja en las dos semicircunferencias que determina deja el número p de masas, simétricas dos a dos respecto el mismo, siendo también los vértices de un polígono regular.

Con objeto de aclarar la demostración, incluimos las dos Figuras 2 y 3. En la 2 si A_1 es una cualquiera de las $2p$ masas iguales, la diametralmente opuesta es la A_{p+1} , en la semicircunferencia superior al diámetro A_1A_{p+1} hay $p-1$ más desde A_2 hasta A_p , equidistantes todas ellas sobre la circunferencia. En la semicircunferencia inferior hay otras $p-1$ masas que van desde A_{p+2} hasta A_{2p} .

Por razón de simetría la resultante de las fuerzas de atracción que sobre A_1 ejercen las $2p-1$ restantes masas

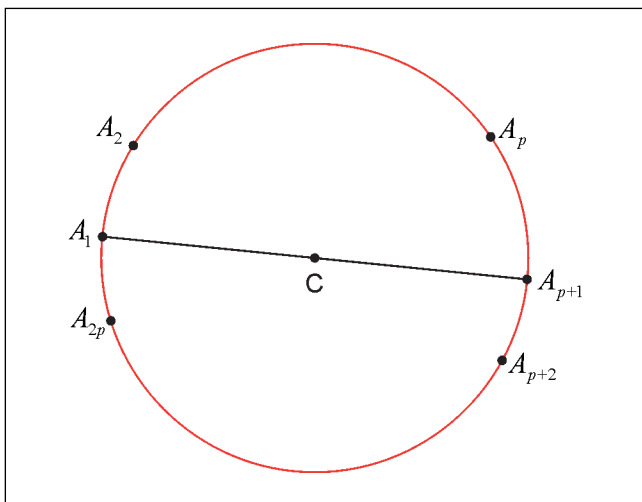


Figura 2

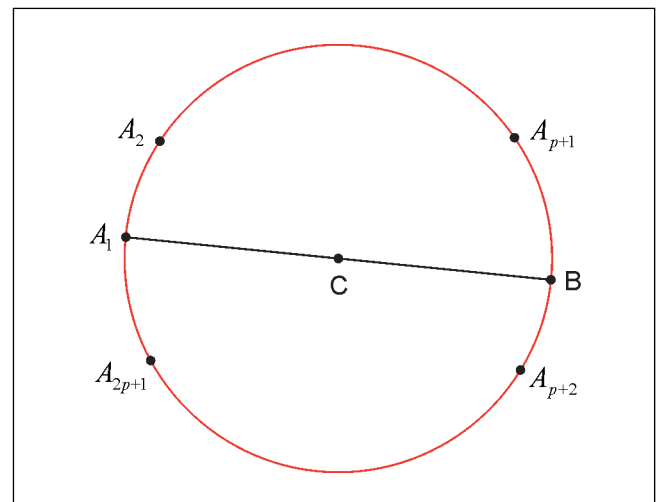


Figura 3

está dirigida de A_1 hacia C (centro de la circunferencia).

En la Figura 3 hay $2p+1$ masas equidistantes sobre la circunferencia de las que hay p (desde A_2 hasta A_{p+1}) en la semicircunferencia superior y otras p (desde A_{p+2} hasta A_{2p+1}) en la inferior. Como en el caso anterior por razón de simetría la fuerza de atracción sobre la masa en A_1 por las $2p$ masas restantes está dirigida de A_1 hacia C (centro de la circunferencia)

Nota 5ª. Sobre el cambio de las unidades fundamentales.

La Conferencia General de Pesos y Medidas adoptó últimamente una nueva definición de la unidad de longitud. En 1979 en una conferencia en la real Academia de Ciencias titulada “El Espacio y el tiempo en la teoría de la relatividad y los principios de mínimo”, publicada por dicha Corporación en el curso conmemorativo del centenario de Einstein (páginas 111 a 1333) expuse, entre otras cosas, una revisión de los fundamentos de la relatividad restringida relacionada con la sustitución de las antiguas unidades de longitud y tiempo vigentes en 1905 con las nuevas y proponía introducir como unidad fundamental la velocidad, basada en la velocidad de la luz en el vacío, y conservar como fundamental la unidad de tiempo, basada en la definición actual o en la constante de semidesintegración de alguna sustancia radiactiva, y que la unidad de longitud pasase a ser derivada en vez de fundamental (véase concretamente las páginas 121 y 122 de mi anterior publicación). En mi libro Introducción a la Investigación en Física y Matemáticas, editada por Empeño 14 en 1981, insistía sobre lo mismo (páginas 31 y 32 en especial).

La adopción de la última unidad de longitud está en la línea de lo que había propuesto con anterioridad, porque al basar la unidad de longitud por el recorrido de un rayo de luz en el vacío, lo que realmente se ha hecho es tomar como unidades fundamentales la velocidad y el tiempo, y la unidad de longitud como derivada, aunque no se haya hecho de una manera explícita.

En 1944 en una conferencia sobre el Sistema Solar, incluida en un ciclo de conferencias publicadas por

Amigos de la Cultura Científica, propuse tomar como unidad fundamental de tiempo la constante de semidesintegración de una sustancia radiactiva, porque el intervalo de tiempo entre dos desintegraciones consecutivas de dos átomos, es un fenómeno absoluto independiente del movimiento o no del cuerpo radiactivo y también del campo gravitatorio, mientras que la frecuencia de la luz (en la que se basa la actual definición de tiempo) es un fenómeno físico relativo. Es decir, que el tiempo de semidesintegración de una misma fracción de masas del mismo cuerpo radiactivo es el mismo, cualquiera que sea esta masa, y es independiente de si estado de movimiento o de reposo respecto al observador que lo mide, y de si esta masa está localizada en uno u otro sitio. Lo que sucede es que estos tiempos iguales se expresan por distintitos números (con la actual definición de segundo) porque es el actual segundo el que es relativo en los dos casos (movimiento o reposo, estar en el Sol o en la Tierra), de modo que si un segundo A es mayor que otro segundo B, el número de segundos A transcurridos en la semidesintegración radiactiva de cualquier masa es menor que el número de segundos B.

Si bien el tiempo que transcurre entre dos desintegraciones consecutivas de dos átomos radiactivos es una variable aleatoria, su valor medio cuando el número de átomos tiende a infinito, converge en probabilidad a un valor cierto, y por tanto el tiempo invertido en la semidesintegración radiactiva es una variable casi cierta.

Nota 6ª. Los fractales en Astronomía. La fractalización del círculo, la esfera el cilindro, el cono y el toro. ¿Existen estrellas fractales y materia fractal en el Universo?

Creo que pueden existir los fractales en el Universo. Un fractal mecánico lo he definido como un fractal geométrico dotado de masa, es un conjunto infinito con la potencia del continuo de partículas de masa mula que ocupan volumen (volumen cero) cuya masa total es finita, contenido dentro de un volumen finito del que no pueden escapar. Actúa como una masa gravitatoria que es atraída y puede atraer a otras masas gravitatorias ordinarias.

Es posible que existan también estrellas fractales como existen estrellas de neutrones.

En un proceso de fractalización puede haber o no un desplazamiento del centro de gravedad, si lo hay entonces, en virtud de la ley de conservación de la cantidad de movimiento, el fractal como un todo se desplaza en sentido contrario al desplazamiento del centro de gravedad. Esto no sucede en el caso de fractales simétricos.

Si un sólido de momento de inercia I gira alrededor de un eje con velocidad angular ϕ' , tiene un momento cinético S y una energía W que valen:

$$S = I\phi'; W = \frac{1}{2}I\phi'^2 \Rightarrow W = \frac{S^2}{2I} \quad (1)$$

lo que implica que si en el proceso de fractalización de un sólido aumenta el momento de inercia I_1 del fractal éste se frena (disminuye la velocidad ϕ'_1), en virtud de la ley de conservación del momento cinético, porque ϕ'_1 y W_1 valen:

$$S = S_1 \Rightarrow I\phi' = I_1\phi'_1; I_1 > I \Rightarrow \phi'_1 < \phi' \Rightarrow W_1 < W \quad (2)$$

como consecuencia de (1). Si en el proceso de fractalización I_1 disminuye, sucede lo contrario.

Recientemente hoy se admite que en el universo existen dos magnitudes físicas muy extrañas, que son la energía oscura y la materia oscura, sobre cuya naturaleza no hay consenso. La energía oscura se supone que es una fuerza antigravitatoria que acelera la expansión del Universo. La materia oscura es una fuerza que no emite luz o que apenas la emite. Dadas las propiedades de los fractales de tener masa y no ocupar volumen, de atraer y de ser atraídos por otras masas ordinarias, asimismo como la de poder emitir energía por (2), quizás pudiera ser que la materia oscura fuera polvo fractal espaciado por el Universo, que podía ser atravesado por la materia ordinaria. En todo caso existan o no fractales en la naturaleza, si existen en la mente humana, y es posible desarrollar teóricamente una nueva Mecánica fractal, al igual que sucede con la Aritmética fractal y con la Geometría fractal.

He dado en otras conferencias y publicaciones ejemplos de fractales en un segmento, un cuadrado, un cubo, un hipercubo e igualmente he dado también ejemplos de resolución del problema de la fractalidad para el cálculo de la esfera, y la hiperesfera. En todos estos casos el problema no es único sino múltiple. Una

vez fractalizado el círculo es posible fractalizar el cilindro y el cono de revolución y también el toro. Algunas transformaciones y operaciones geométricas pueden transmitir la fractalidad de unas figuras geométricas. Entre ellas están la inversión, la proyección y la sección.

En la mayoría de los casos el proceso de fractalización origina un aumento del momento de inercia y en el caso de fractales en rotación, se frena la velocidad y se emite energía.

El hecho de que los fractales tengan estas dos extrañas propiedades: 1ª infinitas partículas de masa cero tienen masa finita; 2ª en un volumen nulo hay una masa finita no nula; tiene su explicación en que en la Física como en las Matemáticas hay expresiones indeterminadas ($\infty \cdot 0$) que pueden tener un valor finito no nulo. En el primer caso es el número de partículas infinito y la masa de una partícula cero. En el segundo caso volumen ocupado por la materia cero y densidad infinito. En ambos casos infinito por cero tiene un valor finito no nulo.

Nota 7ª. Las ecuaciones de la Mecánica de las partículas de masa variable. El incumplimiento de la ley de inercia.

En mi libro “Mecánica y Cálculo Tensorial” (2ª edición 1965. Edit. Dossat) he desarrollado estas ecuaciones.

Las ecuaciones de Newton, que expresan que el producto de la masa por la aceleración es igual a la fuerza, en el caso de ser la masa variable con el tiempo no son aplicables y han de ser sustituidas por otras que expresan que la derivada respecto al tiempo de la masa por la velocidad (momento o cantidad de movimiento) es igual a la fuerza.

Para un punto material de masa $m(t)$ variable con el tiempo, las ecuaciones de Newton no sirven y han de ser sustituidas por las

$$\frac{d}{dt} \left(m(t) \frac{dx}{dt} \right) = X = m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dm}{dt} \frac{dx}{dt} \dots \quad (1)$$

y las análogas en y , z , que son las coordenadas cartesianas del punto; X , Y , Z son las componentes cartesianas de la fuerza.

En el caso en que no existe ninguna fuerza, es decir $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ la integración es inmediata, es:

$$m(t) \frac{dx}{dt} = A = m(0) \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 \dots \quad (2)$$

y las análogas par y y z.

Si las velocidades iniciales son nulas, la partícula permanece en reposo, pero si no lo son, es decir, A, B, C no son nulas, no se cumple la ley de inercia según la cual el movimiento es rectilíneo y de velocidad constante, porque la integración de (2) da:

$$x - x_0 = A \int_0^t \frac{dt}{m(t)} \dots \quad (3)$$

luego la velocidad varía con el tiempo. Sin embargo el movimiento si es rectilíneo, porque de (3) se sigue que

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad (4)$$

En la Mecánica de las partículas de masa variable hay que cambiar todo el aparato matemático de la Mecánica clásica newtoniana

Nota 8ª. La expansión del Universo, el teorema del punto fijo y la imposibilidad de un Universo plano en expansión.

En mi libro “Introducción a la Investigación en Física y Matemáticas” (Edit. Empeño 14 1981) he tratado este tema.

En los años veinte del siglo pasado se observó experimentalmente que la luz emitida por las galaxias era más roja que lo que debía de ser, lo cual es debido al efecto Doppler, que es consecuencia de que las galaxias se alejan de nosotros con velocidades proporcionales a su distancia (ley de Hubble). Al mismo tiempo Lemaitre y Friedmann dieron modelos dinámicos del Universo según los cuales éste está en expansión.

Cuando se habla de expansión del Universo hay que precisar como es la expansión. En el caso del párrafo anterior el Universo es una hiperesuperficie esférica de tres dimensiones que se expande en un Universo euclídeo de cuatro dimensiones, de modo

que el radio del Universo crece con el tiempo.

Pero puede haber otra clase de expansión en la que el Universo es plano (euclídeo), es un Universo euclídeo de tres dimensiones. Mientras que en el caso anterior es un Universo curvo no euclídeo.

Existe en Análisis Matemático un teorema llamado del punto fijo según el cual en toda contracción del espacio, existe un punto fijo, todos los demás cambian de posición, y también lo habría en el caso de una expansión que es una aplicación inversa de la contracción.

Es imposible que el Universo sea plano y esté en expansión porque entonces en cada instante habría un punto fijo, privilegiado lo que está en contradicción con lo admitido en la Cosmología, que es que no existen en el Universo puntos privilegiados, lo que se suele llamar el principio “democrático” de los puntos del Universo.

Por el contrario un espacio curvo (no euclídeo) de tres dimensiones inmerso en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones sí puede estar en expansión en el interior de este último, porque en este caso el punto fijo estaría fuera del universo curvo, aunque hubiera expansión.

BIBLIOGRAFÍA

1. Poincaré: “Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste” Tres tomos 1892, 93, 98. Reimpresión en 1957 por Edit. Dover.
2. Poincaré: “Leçons de Mécanique Céleste”. Edit. Gauthier-Villars.
3. Appell: “Traité de Mécanique Rationnelle”. En especial el tomo IV (dos fascículos) Edit. Gauthier Villars. 1932 y 37.
4. Chazy: “Théorie de la Relativité et Mécanique Céleste” dos tomos 1928 y 30. Edit. Gauthier-Villars.
5. Tolman: “Relativity, Thermodependencies and

Cosmologie” 1934, University Oxford Press.

6. Milne: “Kinemat Relativity” y “Relativity, Gravitation and Worls Structure” 1948 y 35 University Oxford Press.
7. Gribbin: “Biografía del Universo” 2007 Edit Crítica.
8. Simon Singh: “Big Bang” Biblioteca Buridán, 2004.
9. Darío Maravall Casesnoves

Una serie de artículos en los años cincuenta en las revistas Euclides y Matemática Hispano.Americana del CSIC.

Una serie de artículos y conferencias publicadas por la Real Academia de Ciencias y por Amigos de la Cultura Científica en los años setenta a noventa.