

第 5 章 融合全时域质心状态的落脚位姿规划

5.1 概述

当前，人形机器人落脚位姿规划存在两种主流技术路线。第一种是以导航终点为目标的方案，它在规划时只考虑了机器人运动学，没有将机器人动力学纳入优化考虑，忽视了机器人的行走稳定性^[158,161]。第二种是仅基于当前机器人质心状态的反应式规划^[171]，它依据机器人质心的当前状态进行短时域的在线预测。尽管此方法在被应用于机器人遥控行走时表现出良好的适应性，但其固有的短预测时域和缺乏远期目标引导的特性，使其无法有效执行需精确抵达预定终点的局部导航任务。

为此，本文采用角动量倒立摆模型，通过将机器人行走时各时刻的质心状态（用于确保动态稳定性）和局部终点（作为导航目标）整合到优化目标与约束中，将规划问题构建为一个混合整数二次约束二次规划问题。该方法不仅能生成动态稳定性强的落脚序列，还确保了步态的连续性与航向角的平滑过渡，从而实现高效、稳定的局部导航。此外，该动力学模型将支撑脚踝关节在俯仰（pitch）和滚转（roll）两个方向上的力矩纳入了考量。这恰好对应了面状脚在维持前后与左右动态平衡时的关键控制量，从而为规划器生成动态稳定的落脚位姿序列提供了关键支撑。

5.2 融合双轴踝关节力矩的角动量线性倒立摆模型

为了将机器人质心状态融入落脚位姿规划，需要一个既能准确描述机器人质心（Center of Mass, CoM）运动，又足够简洁以支持高效优化的动力学模型。本节在已有的角动量倒立摆模型^[201]的基础上，推导一个融合双轴踝关节力矩的角动量线性倒立摆模型，该模型将支撑脚踝关节在俯仰（pitch）与滚转（roll）方向上的可主动调节力矩以控制向量的形式嵌入单脚支撑阶段的表达式。模型选取质心在水平面内的位置以及相对于支撑点的水平分量角动量构成状态向量，从而获得一个线性时不变（LTI）系统。

5.2.1 单脚支撑期的质心动力学

角动量线性倒立摆（Angular Momentum Linear Inverted Pendulum, ALIP）模型是对机器人单脚支撑期间质心（CoM）动力学特性的一种近似。该模型源于经典的线性倒立摆（LIP）模型^[202]，其核心区别是 ALIP 模型采用机器人围绕支撑点的角动量，而非传统的质心速度，来表征系统状态。

ALIP 模型的状态向量 \mathbf{x} 被定义为包含质心的水平位置以及机器人绕支撑点角动量的水平分量：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ L_x \\ L_y \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

其中， (x_c, y_c) 为质心在水平面内的投影坐标， L_x 和 L_y 分别是机器人绕支撑点 x 轴和 y 轴的角动量，如图5.1所示。

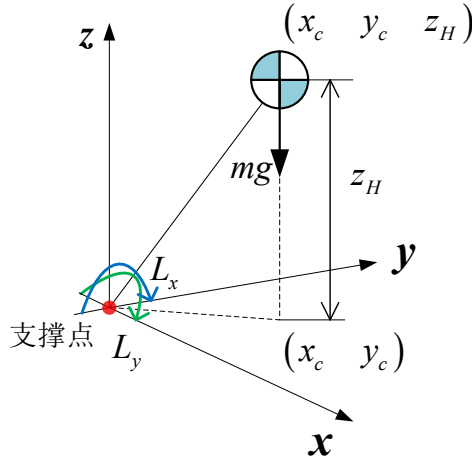


图 5.1 三维角动量线性倒立摆（3D-ALIP）模型示意图

假设在单脚支撑相期间，质心维持恒定的高度 z_H ，则状态向量 \mathbf{x} 关于时间的导数可以表示为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{L}_x \\ \dot{L}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{mz_H} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{mz_H} & 0 \\ 0 & -mg & 0 & 0 \\ mg & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ L_x \\ L_y \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

其中， m 是机器人总质量， g 是重力加速度。

上式构成了 ALIP 模型的核心，可简写为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 。该模型是一个四维线性时不

变（LTI）系统，它精确地刻画了在仅有重力作用下，质心位置与角动量之间的动态耦合关系。

在实际的行走场景中，支撑脚的踝关节可主动施加双轴力矩 (τ_x, τ_y) ，以控制机器人在摆动周期内的动态平衡。将该踝关节双轴力矩作为控制输入引入模型，可得到如下带有控制输入的系统状态空间表达式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.3)$$

其中， $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix}$ 为控制向量， \mathbf{B} 为输入矩阵，其定义如下：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

为更精确地描述机器人在时长为 T_{ss} 的摆动周期内的状态轨迹，该周期被离散化为 K 个节点。每个节点 k 处的状态和输入分别记为 \mathbf{x}_k 和 \mathbf{u}_k 。因此，每个节点处的动力学可表示为：

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (5.5)$$

节点间的时间间隔为 $\Delta t = T_{ss}/(K-1)$ 。在对输入施加零阶保持（ZOH）的普遍假设下，通过对连续时间模型进行离散化，可得到离散时间状态空间表达式：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_k \quad (5.6)$$

其中离散时间系统矩阵 \mathbf{A}_d 和输入矩阵 \mathbf{B}_d 的计算公式为：

$$\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}\Delta t) \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B} \quad (5.7b)$$

5.2.2 双脚支撑期的步态切换与重置映射

为了在落脚位姿规划时考虑机器人状态的稳定性，有必要对机器人从一侧支撑脚切换至另一侧时的状态转移过程进行建模。这一发生在双脚支撑期间的转移过程，由一个“重置映射”（Reset Map）来描述。重置映射定义了上一步结束时的状态 \mathbf{x}^- 到下一步开始时的状态 \mathbf{x}^+ 之间的映射关系^[17]：

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}_r\mathbf{x}^- + \mathbf{B}_r(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-) \quad (5.8)$$

式中, \mathbf{A}_r 和 \mathbf{B}_r 分别是重置映射的状态转移矩阵和输入矩阵, $\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-$ 是从旧支撑脚到新支撑脚的位移向量。该映射在形式上与 ALIP 模型相似, 但额外包含了该位移向量 $\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-$ 。相关矩阵定义为:

$$\mathbf{A}_r = \exp(\mathbf{A}T_{ds}) \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{A}^{-1} \left(\frac{1}{T_{ds}} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_r^{-1}) - \mathbf{A}_r^{-1} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 0 & mg & 0 \\ -mg & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

其中, T_{ds} 是双脚支撑期的持续时间。

通过整合单脚支撑期内融合双轴踝关节力矩的离散时间动力学 (式(5.6)) 与支撑切换期的重置映射 (式(5.8)), 构建了一个完备的动力学模型, 用以描述机器人在整个步态周期中的质心状态变换。

5.3 融合行走全时域质心状态的落脚位姿规划器

为生成能让机器人稳定行走的落脚位姿序列, 本文设计一个融合机器人当前状态及全时域质心状态的落脚位姿规划器, 旨在生成一个满足导航任务、环境约束及动态稳定性的初始落脚位姿序列, 从而为下层 MPC 调节器提供高质量的引导, 确保机器人行为的整体最优性与鲁棒性。

5.3.1 规划器目标函数设计

本文将双足机器人的落脚位姿规划问题构建为一个混合整数二次约束二次规划 (MIQCQP) 问题。该规划器旨在生成一个由落脚位姿位置 \mathbf{p}_i 和航向角 θ_i 构成的序列 $\{\mathbf{p}_i, \theta_i\}_{i=1}^N$, 用以引导机器人从其当前测量的初始状态 \mathbf{x}_0 稳定地行进至静止状态下预设的目标点 \mathbf{p}_{goal} 。

规划器的核心设计理念在于将动态稳定性量化融入优化目标中。具体而言, 目标函数将行走过程中为维持平衡所需的踝关节力矩作为关键的优化项进行最小化。这一设计的物理依据在于, 一个需要更小踝关节力矩的步态序列, 通常意味着该步态具有更高的内在稳定性, 更接近于一种无需额外控制输入即可维持平衡的行走模式。

规划器的目标函数可表示为：

$$\begin{aligned}
 \underset{\{p_i, \theta_i, u_{i,k}\}}{\text{minimize}} \quad & \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^{K-1} u_{i,k}^T Q_u u_{i,k} \right) + \lambda_x \|x_N - x_{\text{goal}}\|^2 \\
 & + \lambda_\theta \sum_{i=1}^{N-2} ((\theta_{i+2} - \theta_{i+1}) - (\theta_{i+1} - \theta_i))^2 \\
 & + \lambda_l \sum_{i=1}^{N-1} (p_{i+1} - p_i)^T Q_l (p_{i+1} - p_i)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

其中，目标函数(5.11)由四部分加权构成。第一项 $\sum u_{i,k}^T Q_u u_{i,k}$ 为核心的动力学代价，旨在最小化在第 i 步态周期内各离散节点 k 处的踝关节力矩 $u_{i,k}$ 。第二项 $\lambda_x \|x_N - x_{\text{goal}}\|^2$ 为终端状态惩罚，确保规划序列的最终状态 x_N 趋近于目标状态 x_{goal} 。第三项与第四项则分别对航向角变化率和步长变化率进行惩罚，以促进生成在运动学上更为平滑、均匀的步态序列。

5.3.2 优化器中的约束设计

优化器的各项约束为确保生成的落脚位姿序列在物理与环境上均可行。具体约束可表示为：

$$x_{i,k+1} = A_d x_{i,k} + B_d u_{i,k}, \quad \forall i, k \tag{5.12a}$$

$$x_{i+1,1} = A_r x_{i,K} + B_r (p_{i+1} - p_i), \quad \forall i \tag{5.12b}$$

$$x_{0,0} = x_{\text{init}} \tag{5.12c}$$

$$\|u_{i,k}\|_2^2 \leq U_{\text{max}}^2, \quad \forall i, k \tag{5.12d}$$

$$|\theta_{i+1} - \theta_i| \leq \theta_{\text{max}}, \quad \forall i \tag{5.12e}$$

$$p_{i+1} \in \text{Rot}(\theta_i) \mathcal{R}_{\text{reach}} + p_i, \quad \forall i \tag{5.12f}$$

$$S_{\ell,i} \implies \begin{cases} \phi_\ell \leq \theta_i \leq \phi_{\ell+1} \\ s_i = g_\ell \theta_i + h_\ell \end{cases}, \quad \forall i, \ell \tag{5.12g}$$

$$C_{\ell,i} \implies \begin{cases} \phi_\ell \leq \theta_i \leq \phi_{\ell+1} \\ c_i = g_\ell \theta_i + h_\ell \end{cases}, \quad \forall i, \ell \tag{5.12h}$$

$$H_{r,i} = 1 \implies A_r p_i \leq b_r, \quad \forall i, r \tag{5.12i}$$

$$\sum_{r=1}^R H_{r,i} = 1, \quad \sum_{\ell=1}^L S_{\ell,i} = 1, \quad \sum_{\ell=1}^L C_{\ell,i} = 1, \quad \forall i \tag{5.12j}$$

$$H_{r,i}, S_{\ell,i}, C_{\ell,i} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, r, \ell \tag{5.12k}$$

式中，约束(5.12a)至(5.12c)构成了系统的动力学模型，描述了单步支撑阶段的状态连续演化、步态切换时的离散重置以及初始状态确定。物理与运动学可行性由后续约束保证：约束(5.12d)对控制输入（直接关联于踝关节力矩）施加幅值上限，以反映执行器的物理极限；约束(5.12e)限制了连续步态间的航向变化率，以避免不稳定的急转弯现象；约束(5.12f)则确保了每个落脚点均位于摆动腿的运动学可达域之内。为将此非凸问题转化为可求解的混合整数规划（MIP）形式，约束(5.12g)与(5.12h)采用了分段线性逼近来处理航向角中的非凸三角函数。最后，约束(5.12i)至(5.12k)引入二进制变量构建逻辑规则，从而将每一个落脚点唯一地指派到一个预定义的可通行凸区域中。具体内容如下：

5.3.2.1 动力学约束

为确保规划出的落脚位姿序列可执行且动态稳定，本文在优化器中引入了一系列核心的动力学约束。首先，通过耦合单脚支撑期动力学与双脚支撑期重置映射，精确地描述了机器人在连续步态中的状态变化。约束(5.12a)基于离散化的角动量线性倒立摆（ALIP）模型，定义了在每个摆动周期内，状态向量 \mathbf{x} 如何受踝关节力矩 \mathbf{u} 的影响而连续变化。而约束(5.12b)则通过重置映射，描述了在步态切换（即双脚支撑期）时，系统状态因支撑点改变而发生的离散跳变。这两个约束共同构成了连接每一步的动力学模型。约束(5.12c)将质心初始状态锚定在机器人当前测得的状态 \mathbf{x}_{init} ，确保了规划与实际状态的无缝衔接。其次，为保证规划控制输入的可行性，约束(5.12d)对踝关节力矩的幅值施加了二次约束，要求其二范数不得超过机器人踝关节电机所能输出的最大值 U_{max} 。

5.3.2.2 运动学与环境约束

在保证动力学层面的约束后，仍需进一步保证规划出的落脚序列在运动学和环境层面的约束。为此，本文将此划分为两类：1) 摆动腿运动学可达性约束，用以限制相邻落脚位姿之间的相对位移，避免出现超出关节运动范围的现象；2) 平面多边形环境约束，每个落脚点必须落在已知的可通行多边形区域内。

摆动脚可达性约束：在规划过程中，摆动脚的位姿受限于机器人自身连杆结构及关节限位所施加的运动学约束。如图5.2所示，摆动脚的可行落脚区域被限制在支撑

脚附近的一个有限空间内。该运动学可达域的精确边界形态复杂，可通过对腿部各关节进行采样，生成一个离散的足部姿态原语集合来表征，如图5.3(a)所示。然而，直接将这种离散或非凸的集合作为约束嵌入到混合整数规划框架中计算成较高。为保证优化问题的数学易解性，本文将该可达域用一个凸梯形区域 $\mathcal{R}_{\text{reach}}$ 来近似，如图5.3(b)所示。该梯形区域的边界可以通过线性不等式约束来表示，从而使得优化问题保持易解性。

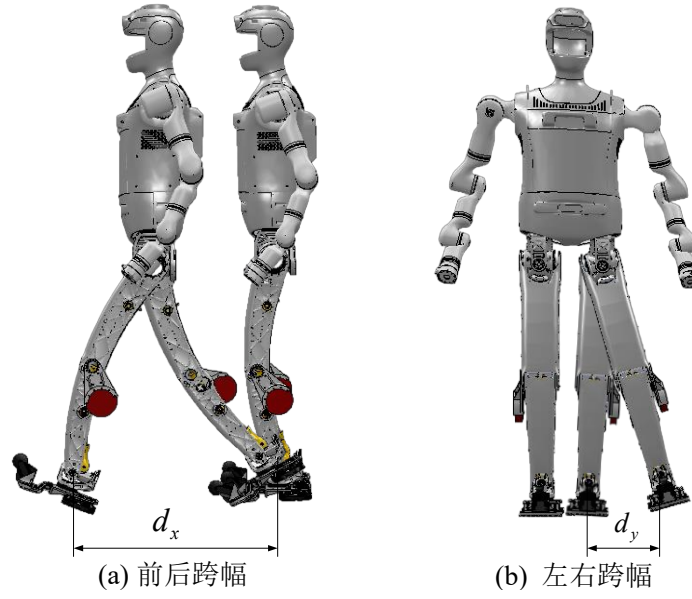


图 5.2 摆动脚运动学可达范围示意图

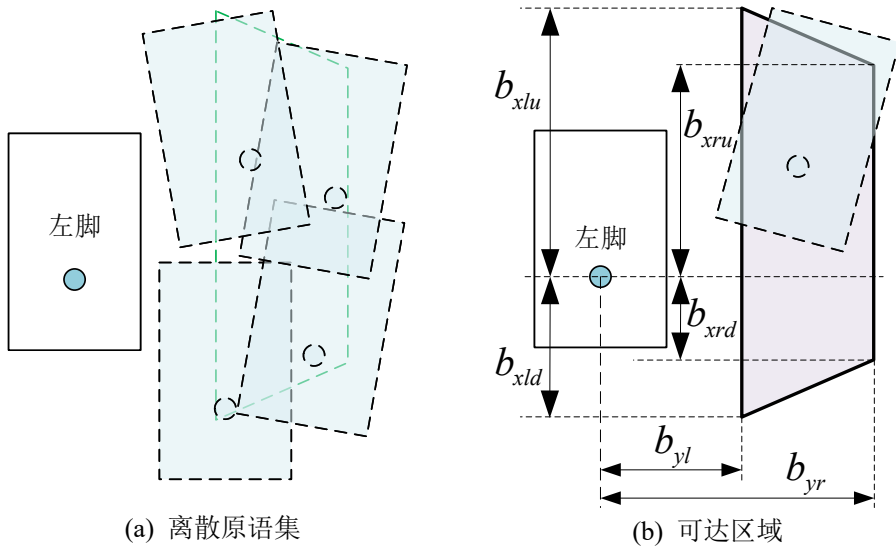


图 5.3 摆动脚落脚点可达区域示意图

为此，本文定义摆动脚可达性约束(5.12f)，以保证第 $i+1$ 个落脚位姿 \mathbf{p}_{i+1} 落在以当前支撑脚 \mathbf{p}_i 为原点，并根据其航向角 θ_i 旋转后的梯形区域 $\mathcal{R}_{\text{reach}}$ 内，其中， $\mathbf{Rot}(\theta_i)$

是一个依赖于航向角 θ_i 的二维旋转矩阵：

$$\mathbf{Rot}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

该旋转矩阵内三角函数的引入使得可达性约束成为一个非凸约束。为了方便求解，本文采用分段线性近似（Piecewise-Linear Approximation）方法来替代非凸的三角函数，如图5.4所示。

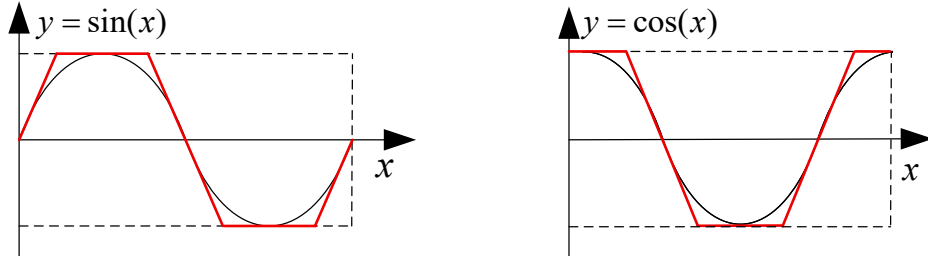


图 5.4 正弦函数与余弦函数的线性化近似示意图

该三角函数简化如约束(5.12g)、(5.12h)和(5.12j)所示。具体而言，将每个三角函数的定义域 $[0, 2\pi]$ 划分为 L 个相邻区间 $[\phi_\ell, \phi_{\ell+1}]$ ，满足 $0 = \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{L+1} = 2\pi$ 。分段唯一性由 $\sum_{\ell=1}^L S_{\ell,i} = 1$ 和 $\sum_{\ell=1}^L C_{\ell,i} = 1$ 保证。在每个区间上，结合图5.4采用端点线性插值来计算线性系数 g_ℓ 和 h_ℓ 。

当 $S_{\ell,i} = 1$ 时，约束 $\theta_i \in [\phi_\ell, \phi_{\ell+1}]$ 和 $s_i = g_\ell \theta_i + h_\ell$ 被激活，从而实现对 $\sin(\theta_i)$ 的线性近似；余弦部分同理。求解器层面可通过 Big-M 线性化来实现该逻辑，以 Big-M 线性化正弦近似为例，将上述约束可写为：

$$\phi_\ell - M(1 - S_{\ell,i}) \leq \theta_i \leq \phi_{\ell+1} + M(1 - S_{\ell,i}), \quad (5.14a)$$

$$s_i - (g_\ell \theta_i + h_\ell) \leq M(1 - S_{\ell,i}), \quad (5.14b)$$

$$(g_\ell \theta_i + h_\ell) - s_i \leq M(1 - S_{\ell,i}), \quad (5.14c)$$

其中 M 为足够大的常数。

此外，约束(5.12e)限制了步间航向角的变化量，以保证运动的平滑性。

平面多边形环境约束：为确保规划的落脚位姿序列安全可行，每个三维落脚位姿 \mathbf{p} 必须位于某个可通行的凸多边形区域内。从数学的角度来解释为一个落脚点必须同时满足两个条件：1) 位于该凸多边形区域的三维平面上，以及 2) 其投影位于该平面的二维多边形边界内。当第 i 个落脚位姿 $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i, z_i]^\top$ 被分配到区域 r 时，它必须满足由以下两部分构成的统一约束：

- 共面约束：每个可通行区域 r 附着在一个三维平面上，该平面由法向量 $(\mathbf{n}_r =$

$[a_r, b_r, c_r]^\top$) 和原点到平面的有向距离 d_r 定义。落脚点 \mathbf{p}_i 必须满足平面方程：

$$(\mathbf{n}_r)^\top \mathbf{p}_i + d_r = 0 \quad (5.15)$$

这个等式约束可以等价地表示为一对线性不等式：

$$\begin{cases} (\mathbf{n}_r)^\top \mathbf{p}_i + d_r \leq 0 \\ (\mathbf{n}_r)^\top \mathbf{p}_i + d_r \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -(\mathbf{n}_r)^\top \mathbf{p}_i - d_r \leq 0 \quad (5.16)$$

整理后得到：

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{n}_r)^\top \\ -(\mathbf{n}_r)^\top \end{bmatrix} \mathbf{p}_i \leq \begin{bmatrix} -d_r \\ d_r \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

这两行将构成约束(5.12i)内矩阵 \mathbf{A}_r 和向量 \mathbf{b}_r 的起始部分。

- 区域内部约束：设区域 r 在参考水平面（如 xy 平面）上的凸多边形按逆时针顺序排列的顶点集合为 $\mathcal{V}_r = \mathbf{v}_{r,1}, \dots, \mathbf{v}_{r,n_r}$ ，其中 $\mathbf{v}_{r,j} = [x_{r,j}, y_{r,j}]^\top$ 。对第 j 条有向边 $\overrightarrow{\mathbf{v}_{r,j}\mathbf{v}_{r,j+1}}$ （约定 $\mathbf{v}_{r,n_r+1} \equiv \mathbf{v}_{r,1}$ ），可构造其外法向量 $\mathbf{n}_{r,j}^{2D}$ ，从而得到对应的约束

$$(\mathbf{n}_{r,j}^{2D})^\top \mathbf{p}_i^{xy} \leq (\mathbf{n}_{r,j}^{2D})^\top \mathbf{v}_{r,j} \quad (5.18)$$

其中 $\mathbf{p}_i^{xy} = [x_i, y_i]^\top$ 为落脚点 $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i, z_i]^\top$ 的水平投影。对 $j = 1, \dots, n_r$ 逐一施加上述约束，便得到刻画落脚点位于该凸区域内部的线性不等式集合，为约束（式(5.12i)）中矩阵 \mathbf{A}_r 与向量 \mathbf{b}_r 的组成部分。

通过引入二元变量 $H_{r,i}$ ，可以将某个落脚点限制在区域 r 内，并使用“大 M 法”或指示约束，可以将选择逻辑嵌入优化问题： $\mathbf{A}_r \mathbf{p}_i \leq \mathbf{b}_r + M(1 - H_{r,i})$, $\forall r = 1, \dots, R$ ，同时，约束 $(\sum_{r=1}^R H_{r,i} = 1)$ 确保每个落脚位姿有且仅有一个归属区域。

5.4 基于实时状态反馈的落脚位姿调节

在机器人实际执行行走任务时，由上层规划器生成的参考落脚位姿序列是基于理想化的机器人状态与模型，其在面对传感器测量噪声及外部扰动时具有一定的局限性。若严格遵循此开环序列，状态误差将不可避免地累积，最终可能损害动态平衡，导致行走失稳。

因此，本文引入了一种基于模型预测控制（MPC）的实时落脚位姿调节器，它以上层规划器生成的参考落脚位姿作为参考，利用机器人当前时刻的真实状态反馈，对即将迈出的落脚位姿及相应的踝关节力矩序列进行实时优化。其核心目标是在有效抑制扰动、维持动态平衡的同时，最大程度地遵循全局规划器给出的参考落脚位姿。

本文所设计的 MPC 调节器通过最小化参考质心状态与实际状态之间的偏差、落脚位姿与参考落脚位姿之间的偏差、踝关节力矩、下一个单脚支撑期开始时参考状态与实际状态之间的偏差，联合优化当前摆动周期内的踝关节力矩序列 $\{\mathbf{u}_{i,k}\}_{k=k_s}^{M-1}$ 与落脚位姿 \mathbf{p}_{i+1} 。其中， k_s 为单脚支撑期内当前的控制周期编号， M 为单脚支撑期内所有控制周期数。该问题被构建为一个二次规划（QP）问题，其数学形式如下：

$$\begin{aligned}
 & \underset{\{\mathbf{u}_{i,k}\}_{k=k_s}^{M-1}, \mathbf{p}_{i+1}}{\text{minimize}} && \sum_{k=k_s}^{M-1} ((\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{ref}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{ref}}) + \mathbf{u}_{i,k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{i,k}) \\
 & && + (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1}^{\text{ref}})^T \mathbf{W} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1}^{\text{ref}}) + (\mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1}^{\text{ref}})^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1}^{\text{ref}}) \\
 & && \tag{5.19a} \\
 & \text{subject to} && \mathbf{x}_{i,k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{i,k}, \quad k = k_s, \dots, M-1 \\
 & && \tag{5.19b} \\
 & && \mathbf{x}_{i+1,1} = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_{i,K} + \mathbf{B}_r (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) \\
 & && \tag{5.19c} \\
 & && \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{current}} \\
 & && \tag{5.19d} \\
 & && \|\mathbf{u}_{i,k}\|_2^2 \leq U_{\max}^2, \quad \forall k \\
 & && \tag{5.19e}
 \end{aligned}$$

目标函数 (5.19a) 是一个多目标加权和，旨在平衡动态稳定性与对全局规划的遵循度。其中，状态追踪项 $(\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{ref}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{ref}})$ 惩罚状态轨迹对参考轨迹的偏离。此处的参考轨迹 $\mathbf{x}_{i,k}^{\text{ref}}$ 是从当前测量状态出发，在零控制输入（即零踝关节力矩）下的质心演化轨迹，代表了系统的“自然动态”轨迹。通过最小化此项，以寻找仅需微小控制干预即可维持稳定的解。与之相辅相成的是控制代价项 $\mathbf{u}_{i,k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{i,k}$ ，它直接惩罚控制力矩的范数，从而促进平滑的控制效果。

然而，仅维持稳定不足以完成任务，机器人还必须遵循全局路径。为此，目标函数中引入了落脚位姿追踪项 $(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1}^{\text{ref}})^T \mathbf{W} (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1}^{\text{ref}})$ 。此项将 MPC 的局部调整锚定在由上层规划器提供的参考落脚位姿 $\mathbf{p}_{i+1}^{\text{ref}}$ 上，确保局部扰动抑制不会导致对全局任务目标的无限制偏离。最后，为保证 MPC 在有限时域优化下的长期稳定性，本文引入了一个终端代价项 $(\mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1}^{\text{ref}})^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1}^{\text{ref}})$ 。该项强制要求在预测时域的末端，系统状态必须回归到稳定的参考轨迹附近，这在理论上是保证递推可行性。

优化问题的约束条件定义了系统的物理与环境边界。核心的动力学约束 (5.19b) 与重置映射 (5.19c) 基于离散化的 ALIP 模型，构成了状态预测的基础。初始状态约束 (5.19d) 将优化轨迹的起点锚定在机器人当前测量的真实状态 $\mathbf{x}_{\text{current}}$ 。此外，为遵循硬件的物理极限，控制输入约束 (5.19e) 将踝关节力矩的幅值限制在执行器所能输出的最大范围 U_{\max} 内。值得注意的是，此调节层不再重复考虑落脚位姿安全区域与运动学可达性约束，因为这些约束已由上层规划器处理，从而简化了计算，保证了实时性。

综上所述，通过求解此 QP 问题，MPC 调节器能够在严格遵守硬件极限的前提下，权衡短期稳定性和长期任务目标，计算出既能有效抑制扰动、又能高效执行全局规划的最优落脚位姿调整量与踝关节控制力矩。

5.5 仿真验证

为验证所提出的融合全时域质心状态的落脚位姿规划算法所规划步态的动态稳定性，本文设计并开展了仿真实验。首先，详细介绍仿真场景的设计及终点配置；随后，通过与主流规划算法的对比分析，结合定量指标和仿真结果，论证所提方法在增强机器人行走稳定性方面的显著优势。

5.5.1 对比实验设置

为系统性评估各类落脚位姿规划算法在不同地形中的性能，本文开展了定量对比实验。通过对比各算法在单脚支撑期内 ZMP 偏移量的统计结果，系统评估其在提升机器人行走稳定性方面的有效性。

5.5.1.1 场景设计

本文构建了两类具有代表性且互补性的仿真测试场景。第一类为离散台阶地形（见图5.5），该场景由多个尺寸及高程各异的台阶组成，具有显著的空间不连续性，主要用于评估算法在非连续台阶地形场景下所生成步态的行走稳定性。第二类为复合台阶斜坡地形（见图5.6），融合了斜坡、台阶及沟壑等多种地形要素，旨在检验所提算法在地形特征离散变化的场景下所生成的步态的行走稳定性。

为充分验证所提方法在不同地形条件下的适应性，本文在上述两类仿真场景中系