数学分析笔记

柯力成 PB23010363

第一章：数列极限

1.1 **数列极限的定义**：设 $\{a_n\}$ 是一个数列，a 是一个实数。如果对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N \in N^+$，使得当 $n > N$ 时，有：

$$|a_n - a| < \epsilon$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

1.2 **收敛数列的性质**：

1. 收敛数列的极限唯一

$Proof$：$|a-b| \leqslant |a-a_n| + |b-a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

2. 收敛数列是有界的

$Proof$：取 $M = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_N| + |a| + 1$

1.3 **子列**：

1. 子列的定义：设 $\{a_n\}$ 是一个数列，$k_i \in N^+ (i = 1, 2, 3, \dots)$，且满足 $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$，那么数列 $\{a_{k_n}\}$ 叫作 $\{a_n\}$ 的一个子列。

2. 以下命题等价：（这里引申出判断数列发散的方法）

1）$\{a_n\}$ 收敛

2）$\{a_n\}$ 任意子列收敛

3）$\{a_n\}$ 任意子列收敛且极限相同

$Proof$：只证 1）⇒3）：收敛则 $|a_n - a| < \epsilon \; \forall n > N$，且 $n_k \geqslant n > N$，则 $|a_{n_k} - a| < \epsilon$

1.4 **极限与四则运算**：极限与四则运算可交换且保序。

1.4 **夹逼定理**：$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n (n \gg) 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$，则 $\lim\limits_{n to\infty} b_n = a$

这里甚至没有事先要求 $\{b_n\}$ 收敛。