泛函分析

作者：M0ngo1
邮箱：kelicheng@mail.ustc.edu.cn

时间：2025 年 10 月 2 日

目录

前言

本文是笔者修读25秋廖班泛函分析课程时所做的课程笔记。虽然廖老师提供了课程讲义,但其中部分内容会作为作业并省略,且部分证明仅提供思路,故笔者在其基础上进行了补充,~~（而且讲义单调，只有黑色和白色）~~由于笔者才疏学浅，难免会有一些纰漏，欢迎大家通过邮箱与我联系交流：kelicheng@mail.ustc.edu.cn

第 1 章 预备知识

1.1 度量空间

定义 1.1 (度量空间)

称 (X,d) 为**一度量空间**，如果满足：

① 正定：$d(x,y)\geq 0$，且 $d(x,y)=0 \iff x=y$

② 对称：$d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y\in X$

③ 三角不等式：$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z\in X$

这里 X 是非空集合，d 是 $X\times X\to\mathbb{R}$ 的一个函数，并被称为 X 上的一个度量或距离。♣

注 在没有歧义的情况下，(X,d) 可简记为 X。

例子 1.1 对欧式空间 $\mathbb{R}^n$，有如下几种度量：

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

$$d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

例子 1.2 类似的，可在复空间进行定义：$d(z,w)=|z-w|$

例子 1.3 对空间 $C[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{C}连续\}$，可定义如下度量：

$$d_{sup}(f,g)=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$$

下面验证确为一个度量：

①$d_{sup}(f,g)\geq 0$ 显然，且 $d_{sup}(f,g)=sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|=0 \iff f(t)=g(t),\forall t\in[a,b] \iff f=g$;

②$d_{sup}(f,g)=sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|=sup_{t\in[a,b]}|g(t)-f(t)|=d_{sup}(g,f)$;

③$d_{sup}(f,g)+d_{sup}(g,h)=sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|+sup_{t\in[a,b]}|g(t)-h(t)|\geq sup_{t\in[a,b]}(|f(t)-g(t)|+|g(t)-h(t)|)\geq sup_{t\in[a,b]}|f(t)-h(t)|=d_{sup}(f,h)$

定义 1.2 (度量子空间)

给定度量空间 (X,d)，$\forall$非空集合$S\subset X$，$(S,d|_S)$ 构成一个度量空间，称其为 (X,d) 的**度量子空间**。♣

例子 1.4 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的度量子空间。

例子 1.5 $P[a,b]:=\{P:[a,b]\to\mathbb{C},\ p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\}$，则 $P[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的度量子空间。

定义 1.3 (乘积空间)

给定度量空间 (X_1,d_1) 与 (X_2,d_2)，有笛卡尔积 $X_1\times X_2:=\{(x_1,x_2):x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$，则可在 $X_1\times X_2$ 上定义度量：$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=d_1(x_1,x_1')+d_2(x_2,x_2')$，则称 $(X_1\times X_2,d)$ 为 $X_1\times X_2$ 的**乘积空间**。♣

注 在乘积空间上定义的度量并不唯一，还可定义如下度量：$d'=max(d_1,d_2)$ 和 $d''=\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ 等。

注 更一般的，可以定义由可数个度量空间生成的乘积空间 $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, d)$，并将度量定义为：

$$d((x_i)_{i\geq 1},(x_i')_{i\geq 1})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_i,x_i')}{1+d_i(x_i,x_i')}$$

下面验证 d 确为一个度量：将 $((x_i)_{i\geq 1},(x_i')_{i\geq 1})$ 简记为 $((x_i),(x_i'))$

①$d\geq 0$ 是显然的，且 $d=0 \iff \frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_i,x_i')}{1+d_i(x_i,x_i')}=0,\forall i \iff d_i(x_i,x_i')=0,\forall i \iff (x_i)=(x_i')$

②$d((x_i),(x_i'))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_i,x_i')}{1+d_i(x_i,x_i')}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_i',x_i)}{1+d_i(x_i',x_i)}=d((x_i'),(x_i))$

③ 欲验证该度量的三角不等式，只需验证 $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}\geq\frac{z}{1+z}$，其中 $z\leq x+y \quad x,y,z\geq 0$

$$z\leq x+y\Rightarrow\frac{z}{1+z}\leq\frac{x+y}{1+x+y}=\frac{x}{1+x+y}+\frac{y}{1+x+y}\leq\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}$$

例子 1.6 在整数格点乘积空间 $\mathbb{Z}^d$ 上，可以定义度量 $d_{\mathbb{Z}^d}(x,y)=\sum_{i=1}^{d}|x_i-y_i|$

定义 1.4 (开集、闭集)

在度量空间 (X,d) 中，定义 $B(x,r)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$（开球），$\bar{B}(x,r)=\{y\in X:d(x,y)\leq r\}$（闭球）。

称 $U\subset X$ 是**开集**，若 $\forall x\in U,\exists r>0\ s.t.B(x,r)\subset U$。称 F 是**闭集**，若 F^c 是开集。

♣

例子 1.7 显然有 $B(x,r)$ 是开集，$\bar{B}(x,r)$ 是闭集。

命题 1.1 (开集族的性质)

记 $\tau=\{U\subset X:U\text{开}\}$，则 τ 满足如下三条性质：

①$\phi,X\in\tau$

②$\cup_{i\in I}U_i\in\tau$

③$\cap_{i=1}^{n}U_i\in\tau$

♠

定义 1.5 (内部、闭包)

给定度量空间 (X,d) 以及 $S\subset X$

称含于 S 的最大开集为 S 的内部，记作 $S^\circ=\cup_{\text{开集}U\subset S}\ U$

称包含 S 的最小闭集为 S 的闭包，记作 $\bar{S}=\cap_{\text{闭集}F\supset S}\ F$

♣

注 对一般的度量空间，$\bar{B}(x,r)$ 不一定等于 $\overline{B(x,r)}$

反例: 考虑离散度量空间 (X,d)，$X=\{a,b\}$，并将其上度量定义为：

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

则有 $B(a,1)=\{a\}$，$\overline{B(a,1)}=\{a\}$，$\bar{B}(a,1)=\{a,b\}$

但是一定有 $\overline{B(a,1)}\subset\bar{B}(a,1)$，这是因为闭球一定是包含开球的一个闭集，尽管它不一定是最小。

定义 1.6 (序列收敛)

给定度量空间 (X,d) 和序列 $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset X$，称序列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ **收敛**，若 $\exists x\in X$，$s.t.\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$

也即：$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\ s.t.\ d(x_n,x)<\epsilon,\ \forall n>N$

并记作：$\lim_{n\to\infty}x_n=x$

♣

注 序列的极限唯一：若不然，设有两个不等的极限 x 和 y，则有 $0\leq d(x,y)\leq d(x,x_n)+d(x_n,y)\to 0,\ as\ n\to\infty$，从而由正定性知：$x=y$，即极限唯一

命题 1.2 (闭集的刻画)

给定度量空间 $(X,d), F \subset X$，则 $TFAE$：

1.F 是闭集

2. 若 $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset F$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$，则 $x \in F$

证明 1. → 2. : $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset F$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

若 $x \notin F$, 即 $x \in F^c \Rightarrow \exists r > 0,\ s.t.\ B(x,r) \subset F^c \Rightarrow B(x,r) \cap F = \phi$

但 $x_n \in B(x,r), \forall n$ 充分大，且 $x_n \in F$，即 $x_n \in B(x,r) \cap F$，矛盾！

2. → 1. : 只需证明 $U := F^c$ 是开集

$\forall x \in U$，欲证 $\exists \delta > 0\ \ s.t. B(x,\delta) \subset U$

若不然，$\forall n \in \mathbb{N}, B(x,\frac{1}{n}) \cap F \neq \phi$

取 $x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap F \Rightarrow \{x_n\}_{n\geq 1} \subset F$，且 $d(x_n,x) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \to x \in F$，矛盾！

推论 1.1

给定度量空间 (X,d), $S \subset X$, $TFAE$：

1.$x \in \bar{S}$

2.$\forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap S \neq \phi$

3.$\exists \{x_n\} \subset S,\ s.t. \lim_{n\to\infty} x_n = x$

证明 留作习题。