电磁学中的数学方法应用

数学科学学院 柯力成 PB23010363

2024.12.12

摘要：本文通过例题简单介绍了一些数学方法在电磁学中的应用，既介绍了数学与物理之间部分问题存在的差异，也说明了结合适当的数学方法后能更加简单地解决电磁学问题，并指出应当深入跨学科合作，电磁学中的数学应用也将继续推动科学技术的创新，解决更为复杂的电磁问题。

关键词：电磁学、数学、数学分析、矩阵、复数

1. 引言

电磁学是物理学的核心领域之一，研究电磁力的产生、传播与相互作用。它不仅在理论物理学中占据着重要地位，也在现代科技和工业中发挥着无可替代的作用。从电力工程、通信技术到医疗成像、无线传输，电磁学的应用几乎无所不在。

在这些应用中，数学工具和方法是理解和解决电磁问题的关键。数学不仅为电磁学的理论提供了严谨的框架，还为其工程实践提供了有效的计算手段和分析工具。因此，深入探讨电磁学中的数学应用，不仅有助于我们更好地理解这一学科的基础理论，还能为现代技术的创新和工程实践提供重要的理论支持和工具。

2. 有源无源之争

显然的，在物理学中，点电荷产生的电场是有源场。然而，我们将通过计算说明在数学中其为无源场。

考虑三维空间中，$\overrightarrow{p}=(x,y,z)$，$p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算如下：

$$\begin{aligned}div(p^\alpha\overrightarrow{p}) &= \nabla p^\alpha\cdot\overrightarrow{p}+p^\alpha\nabla\overrightarrow{p}\\ &= \alpha p^{\alpha-1}\nabla p\cdot\overrightarrow{p}+3p^\alpha\\ &= \alpha p^{\alpha-1}\frac{\overrightarrow{p}}{p}\cdot\overrightarrow{p}+3p^\alpha\\ &= (\alpha+3)p^\alpha\end{aligned}$$

特别的，取 $\alpha=-3$ 即有 $div(\frac{\overrightarrow{p}}{p^3})=0$

由于数学中定义 $\overrightarrow{v}$ 是 Ω 上的无源场，当且仅当 $\nabla\cdot\overrightarrow{v}\equiv 0$。那么 $div(\overrightarrow{E})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}div(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3})\equiv 0$，从而说明 $\overrightarrow{E}$ 是无源场。

这是怎么回事呢？从直观上看，物理中将点电荷产生的电场认为是有源场似乎更符合我们的直觉，即点电荷为“源”产生的场是有源场。实际上，二者的分歧正是在于这一点处，或者说是数学定义中的 Ω。在数学中，为了保证所出现式子均有意义，当写出 $\overrightarrow{E}$ 的表达式时，由于 p^3 位于分母，所讨论的定义域 Ω 天然的不包括点电荷该点处，可以看做是如下图所示的除去 $B_\epsilon(O)$ 小圆的空间。这样看来，点电荷这个“源”就位于定义空间之外，也就符合我们直观上理解的“无源”了。

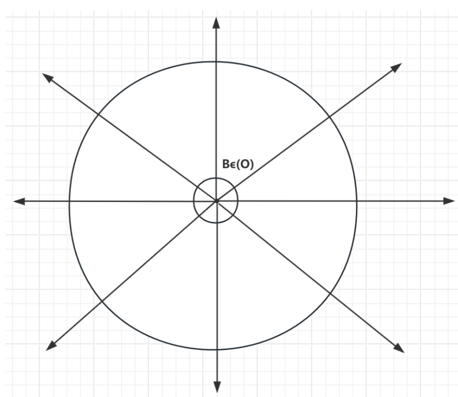

图 1: 电场示意图

3. 矩阵与基尔霍夫方程求解

基尔霍夫定律是电路分析中的基本工具,包括基尔霍夫电压定律 (KVL: 在一个闭合回路中,所有电压的代数和等于零) 和基尔霍夫电流定律 (KCL:

在电路的任何节点，进入电流的总和等于离开电流的总和)。在求解的过程中，如果电路比较复杂，节点与回路较多时，直接求解方程组会有一定的难度，此时就可以借助矩阵进行快速求解。

考虑如下例子：求解如图所示电路各支路的电流。

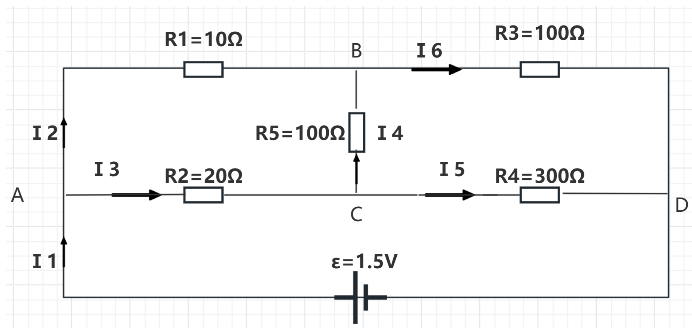

图 2: 求解各支路电流

根据基尔霍夫定律，由 A、B、C 三个节点及三条回路可以得出如下方程组：

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 + I_4 - I_6 = 0 \\ I_3 - I_4 - I_5 = 0 \\ I_3R_2 + I_5R_4 - \mathcal{E} = 0 \\ I_2R_1 - I_4R_5 - I_3R_2 = 0 \\ I_4R_5 + I_6R_3 - I_5R_4 = 0 \end{cases}$$

将上述方程组改写为矩阵乘法的形式，即得：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & R_1 & -R_2 & -R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_5 & -R_4 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

若将上述矩阵等式记为 $MI = N$，则求解支路电流构成的矩阵 I，只需求出 M 的逆 M^{-1}，则可以得到 $I = M^{-1}N$。可以进行行变换将 $(M \quad I)$ 变为 $(I \quad M^{-1})$ 从而快速求出矩阵 M 的逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{41}{45} & \frac{14}{15} & \frac{11}{900} & \frac{2}{225} & \frac{41}{4500} \\ 0 & \frac{38}{45} & \frac{2}{15} & \frac{2}{225} & \frac{7}{450} & \frac{19}{2250} \\ 0 & \frac{1}{15} & \frac{4}{5} & \frac{1}{300} & -\frac{1}{150} & \frac{1}{1500} \\ 0 & \frac{16}{225} & -\frac{11}{75} & \frac{1}{4500} & -\frac{8}{1125} & \frac{4}{5625} \\ 0 & -\frac{1}{225} & -\frac{4}{75} & \frac{7}{2250} & \frac{1}{2250} & -\frac{1}{22500} \\ 0 & -\frac{19}{225} & -\frac{1}{75} & \frac{41}{4500} & \frac{19}{2250} & \frac{103}{11250} \end{pmatrix}$$

从而计算可得：

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{41}{45} & \frac{14}{15} & \frac{11}{900} & \frac{2}{225} & \frac{41}{4500} \\ 0 & \frac{38}{45} & \frac{2}{15} & \frac{2}{225} & \frac{7}{450} & \frac{19}{2250} \\ 0 & \frac{1}{15} & \frac{4}{5} & \frac{1}{300} & -\frac{1}{150} & \frac{1}{1500} \\ 0 & \frac{16}{225} & -\frac{11}{75} & \frac{1}{4500} & -\frac{8}{1125} & \frac{4}{5625} \\ 0 & -\frac{1}{225} & -\frac{4}{75} & \frac{7}{2250} & \frac{1}{2250} & -\frac{1}{22500} \\ 0 & -\frac{19}{225} & -\frac{1}{75} & \frac{41}{4500} & \frac{19}{2250} & \frac{103}{11250} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{600} \\ \frac{3}{225} \\ \frac{1}{200} \\ \frac{1}{3000} \\ \frac{7}{1500} \\ \frac{41}{3000} \end{pmatrix}$$

这样我们解出了各支路电流：$I_1 = \frac{11}{600}A$、$I_2 = \frac{3}{225}A$、$I_3 = \frac{1}{200}A$、$I_4 = \frac{1}{3000}A$、$I_5 = \frac{7}{1500}A$、$I_6 = \frac{41}{3000}A$ 。对比直接解方程组的方法，使用矩阵能更明确更准确地进行计算，尤其在处理多个电源的电路时能简化计算。

4. 复数与电路分析 [1]

在日常生活中，我们所使用的电大多是交流电。交流电具有周期变化的电压与电流，在涉及相关计算时直接使用三角函数计算往往会带来一定的麻烦。此时，我们可以使用复数进行计算，这样能大大简化计算过程。我们仍然通过一道例题来说明。

在如图所示的电路中，已知 $u(t) = 60\sqrt{2}cos(10^3t)\ V$，$R = 15\Omega$，$L = 10mH$，$C = 50\mu F$，求电流 $i(t)$。

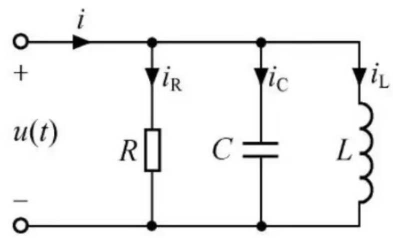

图 3: 复数与电路分析

作为对照，我们先使用一般方法来求解该题，首先有：

$$u(t) = 60\sqrt{2}cos(10^3 t)\ V$$

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$$

并且：

$$\begin{cases} i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = 4\sqrt{2}cos(10^3 t) \\ i_C(t) = C\frac{du(t)}{dt} = -3\sqrt{2}sin(10^3 t) \\ i_L(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt = 6\sqrt{2}sin(10^3 t) \end{cases}$$

从而有：$i(t) = 4\sqrt{2}cos(10^3 t) + 3\sqrt{2}sin(10^3 t)$，使用辅助角公式即有：$i(t) = 5\sqrt{2}sin(10^3 t + \phi)$，其中 $tan\phi = \frac{4}{3}$。

下面我们使用复数来进行求解，由题可知：

$$\begin{cases} \dot{U} = 60\angle 0^\circ \\ X_L = \omega L = 10\Omega \\ X_C = \frac{1}{\omega C} = 20\Omega \end{cases}$$

从而可求出：

$$\begin{cases} \dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = 4\angle 0^\circ A \\ \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = j3A \\ \dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jX_L} = -j6A \end{cases}$$

相加得：$\dot{I} = 5\angle -36.9^\circ A$，即 $i(t) = 5\sqrt{2}cos(10^3 t - 36.9^\circ)A$，结果相同。

在处理更多元件、更加复杂的电路以及求更多物理量时，使用复数进行求解能大大的简化计算。

5. 结语

电磁学作为物理学的一个重要分支，在现代科技中发挥着至关重要的作用。从日常生活中的电器设备，到高端技术如无线通信、粒子加速器等，电磁学的理论与应用无处不在。随着我们对电磁场及其相互作用的理解不断深入，数学方法为我们提供了分析和解决复杂问题的强大工具。除去本文中所提及的几种应用，还有利用麦克斯韦方程组描述电磁波的传播、通过傅里叶分析来处理信号的频率响应等等。打好数理基础，将数学和物理深度融合，会继续引领我们迈向更加精细和准确的电磁学理论与应用的新时代。

参考文献

[1] 光波. 电阻 R 电容 C 电感 L 的伏安关系的相量形式 [EB/OL].https://zhuanlan.zhihu.com/p/66630285?utm_campaign=&utm_medium=social&utm_psn=1850645473213419520&utm_source=qq, 2023-10-22/2024-12-12.