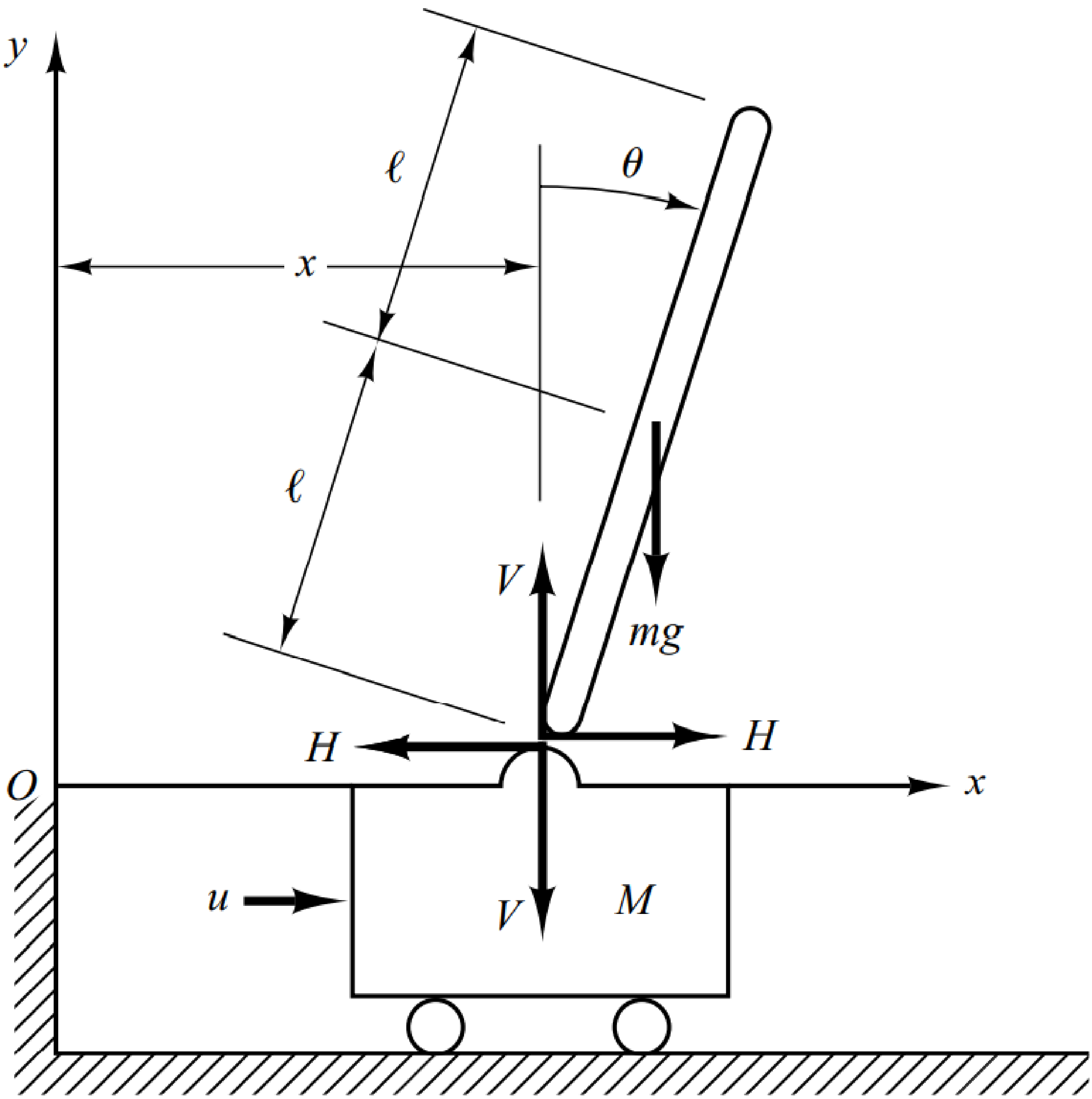
倒立摆建模与仿真

倒立摆建模



小车在水平方向的力平衡方程

- 主动力

推力 u

- 约束力

由小车和细杆的圆柱形铰链约束产生的水平约束力大小为 H，细杆在水平方向的力平衡方程为：

$H = m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}cos(\theta) - l\dot{\theta}^2 sin(\theta))$

(note：1. 计算惯性力先写位移表达式，再求二阶导。不要先考虑惯性力的来源再计算，对于细杆，即使细杆是匀速转动，也能产生水平方向的惯性力，容易被遗漏。2. 圆柱形铰链约束力的方向不一定是沿着杆的，约束力的方向为接触面的法向，但是接触面是不确定的)

- 惯性力

$M\ddot{x}$

- 根据达朗贝尔原理，力平衡方程为

$$u = (M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}cos(\theta) - \dot{\theta}^2 sin(\theta))$$

细杆的力矩平衡方程

以铰链连接点为基点。

- 主动力产生的力矩

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2l} mgsin(\theta)L\,dm \\ &= \int_0^{2l} mgsin(\theta)L\frac{m}{2l}\,dL \\ &= mgsin(\theta)l \end{aligned}$$

- 约束力产生的力矩

无

- 惯性力产生的力矩

质点的水平方向位移： $x + Lsin(\theta)$

质点的竖直方向位移： $Lcos(\theta)$

质点的水平方向加速度： $\ddot{x} + L(\ddot{\theta}cos(\theta) - sin(\theta)\dot{\theta}^2)$

质点的垂直方向加速度： $-L(cos(\theta)\dot{\theta}^2 + sin(\theta)\ddot{\theta})$

质点的法向加速度：

$$\begin{aligned} &= cos(\theta)(\ddot{x} + L(\ddot{\theta}cos(\theta) - sin(\theta)\dot{\theta}^2)) - sin(\theta)(-L(cos(\theta)\dot{\theta}^2 + sin(\theta)\ddot{\theta})) \\ &= cos(\theta)\ddot{x} + L\ddot{\theta} \end{aligned}$$

刚体的惯性力产生的力矩（主矩）：

$$\int_0^{2l} (cos(\theta)\ddot{x} + L\ddot{\theta})\frac{m}{2l}L\,dl = ml\ddot{x}cos(\theta) + \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

- 根据达朗贝尔原理，力矩平衡方程为

$$mgsin(\theta)l - ml\ddot{x}cos(\theta) - \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} = 0$$

倒立摆模型

- 微分方程形式

$$\begin{aligned} u - (M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta}cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 sin(\theta) = 0 \\ mgsin(\theta)l - ml\ddot{x}cos(\theta) - \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} = 0 \end{aligned}$$

- 矩阵形式

$$\begin{pmatrix} M+m & mlcos(\theta) \\ mlcos(\theta) & \frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ml\dot{\theta}sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ mglsin(\theta) \end{pmatrix}$$

- 状态空间方程

在平衡点附近线性化，假设 $\theta\,\dot{\theta}$ 比较小，可近似为 $\cos\theta \approx 1\,\dot{\theta} \approx 0\,sin(\theta) \approx \theta$

$$\begin{pmatrix} M+m & ml \\ ml & \frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ mgl\theta \end{pmatrix}$$

定义系统的状态变量为 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ ， 系统的输入量为小车外力 u ，系统输出为小车的位移 x 。则可得系统的状态空间方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3mg}{4M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3(M+m)g}{4Ml+ml} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{4M+m} \\ 0 \\ \frac{-3}{4Ml+ml} \end{pmatrix} u$$

$$y = x = (1\,0\,0\,0) \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

取 $M = 2,\ m = 0.1,\ 2l = 1$ 带入得

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.363 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 15.244 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.494 \\ 0 \\ -0.741 \end{pmatrix} u$$

参考资料

https://blog.csdn.net/qq_42731705/article/details/122464642